ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХАРЬКОВСКОГО ГОСУНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXVII. Серия 4 1961

О РАСТЯЖЕНИИ ПОСТОЯННОЙ СИЛОЙ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ С НАСЛЕДСТВЕННОСТЬЮ

И. Г. Альперин

Рассматривается прямолинейный стержень длины l с постоянным поперечным сечением площади 1, один конец которого ($x=0$) неподвижен, а на другом ($x=l$), свободном, сосредоточена масса m. Стержень — упругий с наследственностью N-го порядка. Это означает, что продольное смещение $u(x, t)$ его сечения x и напряжение $\sigma(x, t)$ в этом сечении связаны соотношением *

$$E\frac{\partial u}{\partial x}=\sigma(x, t)+\int_0^t K(t-\tau)\,\sigma(x, \tau)\,d\tau, \tag{1}$$

$$K(t)=\sum_{j=1}^{N} A_j e^{-n_j t}, \tag{2}$$

где $A_j>0$ и $n_N>n_{N-1}>\ldots>n_1>0$.

Пусть естественное состояние этого стержня в момент $t=0$ нарушено путем внезапного приложения к массе на конце стержня $x=l$ постоянной растягивающей силы σ_0.

Тогда подлежащие определению функции $u(x, t)$ и $\sigma(x, t)$ должны, как известно, удовлетворять уравнению движения

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{3}$$

(ρ — линейная плотность стержня) и соотношению (1) при следующих очевидных начальных и граничных условиях

$$u(x, 0)=0,\ \dot u(x, 0)=0$$
$$u(0, t)=0,\ m\ddot u(l, t)+\sigma(l, t)=\sigma_0. \tag{4}$$

Применяя формально ко всем соотношениям преобразование Лапласа, найдем, что функция

$$\bar u(x, s)=\int_0^\infty e^{-st}u(x, t)\,dt \tag{A}$$

должна удовлетворять уравнению

$$\bar u''(x, s)-\frac{\omega^2(s)}{c^2}\bar u(x, s)=0\quad\left(c^2=\frac{E}{\rho}\right), \tag{3'}$$

$$\omega^2(s)=s^2\left[1+\sum_{j=1}^{N}\frac{A_j}{s+n_j}\right]=s^2\prod_{j=1}^{N}\frac{s+r_j}{s+n_j}, \tag{5}$$

* Это соотношение лишь по виду отличается от принятого в ст. E. Volterra. J. Appl. Mech., 18, № 3 (1951).

и граничным условиям, соответствующим (4)

$$\overline{u}(0,\ s)=0,\ ms^2\overline{u}(l,\ s)+\frac{s^2E\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}}{\omega^2(s)}=\frac{\sigma_0}{s}. \tag{4'}$$

При этом, как легко видеть, $n_j<r_j<n_{j+1}$ ($j=1,\ 2\ \ldots\ N-1;\ n_{N+1}=\infty$). Решая (3′), (4′) относительно $\overline{u}(x,\ s)$ и затем обращая (A), найдем

$$\overline{u}(x,\ t)=\frac{\sigma_0\lambda^2}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{z(q)\operatorname{sh}z(q)\frac{x}{l}}{[mz(q)\operatorname{sh}z(q)+M\operatorname{ch}z(q)]\,q^3}\cdot e^{q\frac{t}{\lambda}}dq, \tag{6}$$

где $\gamma>0,\ M=\rho l,\ \lambda=\frac{l}{c},\ \lambda r_j=\rho_j,\ \lambda n_j=\nu_j$ и

$$z^2(q)\equiv\lambda^2\omega^2\left(\frac{q}{\lambda}\right)=q^2\prod_{j=1}^{N}\frac{q+\rho_j}{q+\nu_j}.$$

Подынтегральное выражение в (6) является мероморфной функцией переменного q, полюсы которой $q_k\neq 0$ удовлетворяют уравнениям

$$q_k^2\prod_{j=1}^{N}\frac{q_k+\rho_j}{q_k+\nu_j}=-\mu_k^2\quad(k=0,\ 1,\ 2\ \ldots), \tag{7}$$

где числа μ_k, в свою очередь, удовлетворяют уравнению

$$\mu_k\operatorname{tg}\mu_k=\frac{M}{m}\quad\left(k\pi\leqslant\mu_k\leqslant\frac{2k+1}{2}\pi\right). \tag{8}$$

Уравнение (7) (алгебраическое степени $N+2$) имеет, как легко проверить, N вещественных корней $-\alpha_{kj}$, $\nu_j\leqslant\alpha_{kj}\leqslant\rho_j$. Остальные два корня s_{k1} и s_{k2} удовлетворяют уравнению

$$s_k^2+s_k\sum_{j=1}^{N}(\rho_j-\alpha_{kj})+\mu_k^2\prod_{j=1}^{N}\frac{\nu_j}{\alpha_{kj}}=0. \tag{7'}$$

Пусть (см. (5))

$$\varkappa\equiv\sqrt{\rho_N\prod_{j=1}^{N}\frac{\rho_j}{\nu_j}}=\sqrt{\rho_N\left(1+\sum_{j=1}^{N}\frac{A_j}{n_j}\right)}. \tag{9}$$

Тогда, при любом $k\geqslant 0$

$$\varkappa^2>\prod_{j=1}^{N}\frac{\rho_j}{\nu_j}\sum_{j'=1}^{N}(\rho_{j'}-\nu_{j'})>\prod_{j=1}^{N}\frac{\alpha_{kj}}{\nu_j}\sum_{j'=1}^{N}(\rho_{j'}-\alpha_{kj'}). \tag{10}$$

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только таких случаев, когда выполняются одновременно следующие условия*:

$$\rho_N\ll 1,\quad \varkappa<1,\quad \frac{M}{m}>\frac{\varkappa^2}{1-\frac{\varkappa^2}{2}}. \tag{11}$$

* По-видимому, эти ограничения практически не являются чрезмерными.

Тогда наименьший корень $\mu_0 \leqslant \frac{\pi}{2}$ уравнения (8) будет удовлетворять неравенству

$$\mu_0 > \varkappa > \rho_N, \tag{12}$$

которое очевидно, если $\mu_0 \geqslant 1$. Если же $\mu_0 < 1$, то

$$\frac{\varkappa^2}{1-\frac{\varkappa^2}{2}} < \frac{M}{m} = \mu_0 \operatorname{tg} \mu_0 < \frac{\mu_0^2}{1-\frac{\mu_0^2}{2}},$$

откуда (12) следует непосредственно.

Теперь очевидно, что при выполнении условий (11), уравнения (7′) имеют (см. (10)) при всех $k \geqslant 0$ по два комплексно сопряженных корня $s_{k1} = s_k = -\beta_k + i\gamma_k$ и $s_{k2} = \bar{s}_k$.

Нетрудно проверить, что

$$0 < 2\beta_k = \sum_{j=1}^{N} (\rho_j - \alpha_{kj}) = \mu_k^2 \prod_{j=1}^{N} \frac{\nu_j}{\alpha_{kj}} \sum_{j'=1}^{N} \frac{\alpha_{kj'} - \nu_{j'}}{\alpha_{kj'}\nu_{j'}},$$

откуда, в силу (10) и (12), следует, что

$$\frac{1}{\rho_N} \cdot \frac{\alpha_{kj'} - \nu_{j'}}{\alpha_{kj'}} < \sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_{kj} - \nu_j}{\alpha_{kj}\nu_j} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N} (\rho_j - \alpha_{kj})}{\mu_k^2 \prod\limits_{j=1}^{N} \frac{\nu_j}{\alpha_{kj}}} < 1,$$

а значит в силу (11) при всех $k \geqslant 0$ и $j = 1, 2, \ldots N$.

$$\alpha_{kj} \approx \nu_j, \quad \beta_k \approx \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} (\rho_j - \nu_j) < \frac{\rho_N}{2} \ll 1. \tag{13}$$

Далее, из очевидного равенства

$$|s_k|^2 = \beta_k^2 + \gamma_k^2 = \mu_k^2 \prod_{j=1}^{N} \frac{\nu_j}{\alpha_{kj}}$$

вытекает, что $\gamma_k \approx \mu_k$. Таким образом, мы имеем приближенно

$$\alpha_{kj} \approx \nu_j, \quad s_k \approx -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} (\rho_j - \nu_j) + i\mu_k \quad (k = 0, 1, 2 \ldots). \tag{14}$$

Возвращаясь к интегралу (6), нетрудно заметить, что его можно представить в следующем виде:

$$u(x, t) = \sigma_0 \lambda^2 \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} + 2Re \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{(c_1)} \right] \right\}, \tag{15}$$

где (c) — окружность $|q| = (1+\varepsilon)\rho_N < \mu_0 \; (0 < \varepsilon < 1)$, а (c_1) — бесконечная полуполоса

$$\left(+i\infty; \; +i\frac{\mu_0}{2}; \; -\sum_{j=1}^{N} (\rho_j - \nu_j) + i\frac{\mu_0}{2}; \; -\sum_{j=1}^{N} (\rho_j - \nu_j) + i\infty \right),$$

содержащая все полюсы s_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Чтобы вычислить эти интегралы, заметим, прежде всего, что если выбрать ту ветвь функции $z(q)$, которая асимптотически равна q, то вне окружности $|q| = \frac{\mu_0}{2}$ (не содержащей внутри себя точек контура (c_1)), будет справедливо равенство

$$z(q) \equiv q \prod_{j=1}^{N} \sqrt{\frac{q+\rho_j}{q+\nu_j}} = q + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}(\rho_j - \nu_j) + 0\left(\frac{\rho_N^2}{|q|}\right),$$

откуда при всех $k \geqslant 0$ (см. (14))

$$z(s_k) = s_k + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}(\rho_j - \nu_j) + 0\left(\frac{\rho_N^2}{|s_k|}\right) \approx i\mu_k,$$

$z'(s_k) \approx 1$.

Теперь мы имеем

$$\sigma_0\lambda^2 2Re\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(c_1)} \frac{z(q)\operatorname{sh} z(q)\frac{x}{l}}{[mz(q)\operatorname{sh} z(q) + M\operatorname{ch} z(q)]\,q^3}\cdot e^{q\frac{t}{\lambda}}dq\right] = \sigma_0\lambda^2 2Re\left\{\sum_{k=0}^{\infty} Res_{q=s_k}\right\} \approx$$

$$\approx \frac{\sigma_0 Ml}{E}\left\{-2e^{-\frac{t}{2\lambda}\sum\limits_{j=1}^{N}(\rho_j-\nu_j)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\mu_k\frac{x}{l}\cdot\cos\mu_k\frac{t}{\lambda}}{\mu_k^2[m\mu_k\cos\mu_k + (M+m)\sin\mu_k]}\right\} \equiv$$

$$\equiv e^{-\frac{t}{2\lambda}\sum\limits_{j=1}^{N}(\rho_j-\nu_j)}\cdot v(x, t). \tag{16}$$

Далее, на (c)

$$|z(q)| = |q|\prod_{j=1}^{N}\sqrt{\frac{|q+\rho_j|}{|q+\nu_j|}} < 2\rho_N\sqrt{\frac{2\rho_N+\rho_N}{\rho_N+\nu_1}} < 2\sqrt{3}\,\rho_N \ll 1.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(c)}\frac{z(q)\operatorname{sh} z(q)\frac{x}{l}}{[mz(q)\operatorname{sh} z(q) + M\operatorname{ch} z(q)]\,q^3}\cdot e^{q\frac{t}{\lambda}}dq \approx \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(c)}\frac{z^2(q)\frac{x}{l}\cdot e^{q\frac{t}{\lambda}}}{Mq^3}dq =$$

$$= \frac{x}{Ml}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(c)}\prod_{j=1}^{N}\frac{q+\rho_j}{q+\nu_j}\cdot\frac{e^{q\frac{t}{\lambda}}}{q}dq = \frac{x}{Ml}\left\{\prod_{j=1}^{N}\frac{\rho_j}{\nu_j} - \sum_{j'=1}^{N}\frac{\rho_{j'}-\nu_{j'}}{\nu_{j'}}e^{-\nu_{j'}\frac{t}{\lambda}}\prod_{j\neq j'}\frac{\rho_j-\nu_{j'}}{\nu_j-\nu_{j'}}\right\}. \tag{17}$$

Подставляя выражения (16) и (17) в правую часть (15) и возвращаясь к первоначальным обозначениям $\lambda^2 = \frac{l^2\rho}{E} = \frac{Ml}{E}$, $\rho_j = \lambda r_j$, $\nu_j = \lambda n_j$, получаем окончательно

$$u(x, t) \approx \frac{\sigma_0 x}{E}\left\{\prod_{j=1}^{N}\frac{r_j}{n_j} - \sum_{j'=1}^{N}\frac{r_{j'}-n_{j'}}{n_{j'}}\prod_{j\neq j'}\frac{r_j-n_{j'}}{n_j-n_{j'}}e^{-n_{j'}t}\right\} +$$

$$+ e^{-\frac{t}{2}\sum\limits_{j=1}^{N}(r_j-n_j)}v(x, t). \tag{18}$$

Аналогично находим для напряжения

$$\sigma(x, t) \approx \sigma_0 + E\frac{\partial v}{\partial x} e^{-\frac{t}{2}\sum_{j=1}^{N}(r_j - n_j)}. \tag{19}$$

Очевидно, что при $t \to \infty$ $u \sim \frac{\sigma_0 x}{E}\prod_{j=1}^{N}\frac{r_j}{n_j}$ и $\sigma \sim \sigma_0$. Можно было бы написать точные выражения для интеграла (6) и интеграла, соответствующего (19), затем непосредственно убедиться в том, что они дают точное решение задачи и после этого сравнить с ними приближенные выражения (18) и (19). Мы этого, однако, ввиду громоздкости, делать не будем, а заметим лишь, что для случая $N = 1$, $m = 0$, $\rho_1 = \lambda r_1 < \frac{1}{2}$ нами получена* следующая оценка погрешности $\Delta u(x, t)$ выражения (18)

$$\left|\frac{\Delta u(l, t)}{u(l, \infty)}\right| < \frac{16}{15}\left\{\nu_1 + \rho_1\left(1 + \frac{5}{2}\rho_1\right)\right\}.$$

Эта оценка позволяет предполагать, что выражения (18) и (19) дают хорошие приближения искомого решения в случаях, когда выполнены условия (11).

Нетрудно заметить, что функция $v(x, t)$, определенная в (16) и входящая во вторые слагаемые правых частей (18) и (19), представляет у п р у г и е к о л е б а н и я стержня около его положения упругого равновесия. Наличие в этих слагаемых множителя $e^{-\frac{t}{2}\sum(r_j - n_j)}$ влечет затухание этих колебаний с декрементом

$$\eta = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}(r_j - n_j),$$

который дает оценку в н у т р е н н е г о «т р е н и я» в материале стержня.

Как легко проверить, первые слагаемые

$$\sigma_0(x, t) = \sigma_0, \ u_0(x, t) = \frac{\sigma_0 x}{E}\left\{\prod_{j=1}^{N}\frac{r_j}{n_j} - \sum_{j'=1}^{N}\frac{(r_{j'} - n_{j'})e^{-n_{j'}t}}{n_{j'}}\prod_{j \neq j'}\frac{r_j - n_{j'}}{n_j - n_{j'}}\right\} \tag{20}$$

удовлетворяют уравнениям задачи, если в них отбросить силы инерции. Это — так называемое квазистатическое решение задачи.

Заметим, что $u_0(x, t)$ — монотонно возрастающая функция времени, стремящаяся к $\frac{\sigma_0 x}{E}\prod_{j=1}^{N}\frac{r_j}{n_j}$ при $t \to \infty$, по крайней мере, качественно описывает свойство п о л з у ч е с т и твердых тел, обладающих N скоростями ползучести n_j и релаксации r_j.

---

* См. ст. автора в журнале «Зап. мат. отд. физ-мат. ф-та и Харьк. мат. об.» т. XXV.