Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-e série, Tome V, № 1 et 2.

СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ

Томъ V. 1896-1897

~~№№ 1 и 2.~~

ХАРЬКОВЪ.
Типографія и Литографія Зильберберга, Рыбная—№ 30-й.
1896.

Communications de la Société mathématique de Kharkow.

2-e série. Tome V.

СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ

Томъ V.

ХАРЬКОВЪ.
Типографія и Литографія Зильберберга.
(Рыбная улица, домъ № 30-й).
1897.

На основанiи § 9 Устава Харьковскаго Математическаго Общества печатать и выпустить въ свѣтъ разрѣшаю. Харьковъ 3-го февраля 1897 года.

Предсѣдатель Математическаго Общества Профессоръ *К. Андреевъ.*

СОДЕРЖАНІЕ

V-го тома.

Составъ Харьковскаго Математическаго Общества

къ 1-му Января 1897 года.

А. Распорядительный комитетъ.

1. Предсѣдатель, К. А. Андреевъ.
2. Товарищи предсѣдателя: А. М. Ляпуновъ и М. А. Тихомандрицкій.
3. Секретарь, В. А. Стекловъ.

В. Почетные члены.

1. Бредихинъ Ѳедоръ Александровичъ, академикъ.
2. Бугаевъ Николай Васильевичъ, проф. Моск. унив.

С. Дѣйствительные члены.

1. Алексѣевскій Владиміръ Петровичъ, приватъ-доцентъ Харьк. унив.
2. Альбицкій Василій Ивановичъ, проф. Харьк. технол. инст.
3. Андреевъ Константинъ Алексѣевичъ, проф. Харьк. унив.
4. Бейеръ Евгеній Ильичъ, почетн. членъ Харьк. унив.
5. Веребрюсовъ Александръ Степановичъ, бывш. препод. Староб. гимн.
6. Виноградовъ Иванъ Алексѣевичъ, директ. Харьк. коммерч. учил.
7. Влезковъ Сергѣй Ѳедоровичъ, бывш. стипенд. Харьк. унив.
8. Головинъ Харлампій Сергѣевичъ, директоръ СПБ. техн. инст.
9. Гречаниновъ Алексѣй Васильевичъ, проф. Харьк. техн. инст.
10. Грицай Алексѣй Сергѣевичъ, директ. Сумск. реальн. учил.
11. Грузинцевъ Алексѣй Петровичъ, приватъ-доцентъ Харьк. унив.
12. Деларю Даніилъ Михайловичъ, бывш. проф. Харьк. унив.
13. Евдокимовъ Николай Николаевичъ, сверхшт. астрон. Харьк. астр. обс.

14. Зворыкинъ Константинъ Алексѣевичъ, проф. Харьк. техн. инст.
15. Кирпичевъ Викторъ Львовичъ, директ. Харьк. техн. инст.
16. Киселевъ Андрей Петровичъ, препод. Воронежск. кадетск. корп.
17. Клюшниковъ Александръ Андреевичъ, препод. 1-й Харьк. гимн.
18. Кнабе Владиміръ Сергѣевичъ, бывш. проф. Харьк. техн. инст.
19. Ковальскій Матвѣй Ѳедоровичъ, проф. Харьк. унив.
20. Косенко Михаилъ Семеновичъ, бывш. препод. Харьк. прогимн.
21. Котляровъ Михаилъ Григорьевичъ, инспект. народн. уч. Курск. губ.
22. Латышевъ Григорій Алексѣевичъ, проф. Харьк. техн. инст.
23. Левицкій Григорій Васильевичъ, проф. Юрьевск. унив.
24. Линицкій Иванъ Дмитріевичъ, препод. инст. благ. дѣв. въ Харьк.
25. Ляпуновъ Александръ Михайловичъ, проф. Харьк. унив.
26. Маевскій Андрей Васильевичъ, препод. 3-й Харьк. гимн.
27. Михайловскій Болеславъ Григорьевичъ, бывш. преп. Харьк. реал. уч.
28. Морозовъ Юрій Ивановичъ, проф. Харьк. унив.
29. Мухачевъ Петръ Матвѣевичъ, проф. Харьк. техн. инст.
30. Пильчиковъ Николай Дмитріевичъ, проф. Новорос. унив.
31. Погорѣлко Александръ Константиновичъ, проф. Харьк. техн. инст.
32. Предтеченскій Алексѣй Ивановичъ, проф. Харьк. техн. инст.
33. Проскурниковъ Николай Васильевичъ, препод. Харьк. реальн. уч.
34. Радцигъ Александръ Александровичъ, инженеръ-технологъ.
35. Раевскій Сергѣй Александровичъ, инспект. Харьк. учебн. окр.
36. Рейнботъ Александръ Евгеньевичъ, бывш. стипенд. Харьк. унив.
37. Рудневъ Петръ Матвѣевичъ, препод. Урюпинск. реальн. учил.
38. Самецкій Рафаилъ Николаевичъ, препод. Изюмск. реальн. учил.
39. Сикора Іосифъ Іосифовичъ, стипенд. Харьк. унив.
40. Синяковъ Германъ Аѳанасьевичъ, препод. 2-й Харьк. гимн.
41. Стекловъ Владиміръ Андреевичъ, проф. Харьк. унив.
42. Струве Людвигъ Оттовичъ, проф. Харьк. унив.
43. Тихомандрицкій Матвѣй Александровичъ, проф. Харьк. унив.
44. Флавицкій Николай Михайловичъ, бывш. лаборантъ Харьк. унив.
45. Флоровъ Петръ Степановичъ, препод. Харьк. реальн. учил.
46. Шейдтъ Ипполитъ Константиновичъ, препод. 1-й Харьк. гимн.
47. Шимковъ Андрей Петровичъ, проф. Харьк. унив.
48. Шиховъ Василій Васильевичъ, директоръ Харьк. реальн. учил.
49. Штукаревъ Иванъ Дмитріевичъ, препод. 2-й Харьк. гимн.
50. Чернай Николай Александровичъ, препод. Харьк. техн. инст.

D. Члены-корреспонденты.

1. Бобылевъ Дмитрій Константиновичъ, проф. СПБ. унив.
2. Васильевъ Александръ Васильевичъ, проф. Казанскаго унив.
3. Ермаковъ Василій Петровичъ, проф. унив. Св. Владим.

4. Жуковскій Николай Егоровичъ, проф. Моск. унив.
5. Коркинъ Александръ Николаевичъ, проф. СПБ. унив.
6. Марковъ Андрей Андреевичъ, проф. СПБ. унив., академикъ.
7. Некрасовъ Павелъ Алексѣевичъ, проф. Моск. унив.
8. Поссе Константинъ Александровичъ, проф. СПБ. унив.
9. Пташицкій Иванъ Львовичъ, проф. СПБ. унив.
10. Сомовъ Павелъ Осиповичъ, проф. Варш. унив.
11. Тороповъ Константинъ Александровичъ, препод. Пермск. гимн.

Приложенiе теоремы Зилова къ симметрической группѣ.

А. А. Радцигъ.

Одна изъ основныхъ теоремъ теорiи подстановокъ есть теорема *Лагранжа*, по которой порядокъ каждой подгруппы какой либо группы подстановокъ есть дѣлитель порядка послѣдней *).

Коши показалъ **), обратно, что группа, порядокъ которой дѣлится на простое число p, заключаетъ подстановку этого порядка (т. е. содержитъ подгруппу этого порядка).

Эта теорема была обобщена и значительно дополнена *Зиловымъ* ***). Онъ нашелъ, что группа $\mathfrak{S}$, порядокъ которой s дѣлится на какое-либо простое число p въ степени α, содержитъ подгруппы порядка p^α. Подгруппы порядка p^f, гдѣ f — наивысшая степень p, на которую дѣлится s, *подобны* (semblables, ähnlich) другъ другу, т. е. получаются изъ одной чрезъ *преобразованiе* (Transformation) элементами $\mathfrak{S}$. Число N *различныхъ* группъ порядка p^f удовлетворяетъ сравненiю

$$N \equiv 1 \pmod{p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Порядокъ группы $\mathfrak{H}$, состоящей изъ элементовъ $\mathfrak{S}$, перемѣщаемыхъ съ одной изъ группъ $\mathfrak{G}$ порядка p^f, есть

$$h = p^f v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

(гдѣ v не зависитъ отъ выбора группы $\mathfrak{G}$).

Между s, N и h существуетъ зависимость

$$s = Nh \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

*) См. напр. *Serret*, Cours d'Algèbre supérieure, § 425, *Netto*, Substitutionentheorie § 43.

**) Exercices d'Analyse et de Physique mathématique, T. III.

***) *Sylow*, Théorémes sur les groupes de substitutions, Mathematische Annalen, B. V. Теорема эта изложена у *Netto*: „Substitutionentheorie", §§ 48, 121.

Теорема Зилова даетъ возможность во многихъ случаяхъ изучить строеніе группы, зная только *порядокъ* послѣдней, и потому представляетъ большую важность для теоріи группъ *), въ особенности при современной, совершенно абстрактной, постановкѣ въ ней вопросовъ **). Не смотря на большое значеніе теоремы Зилова, существуетъ мало изслѣдованій *извѣстныхъ* группъ, исходящихъ изъ ея точки зрѣнія.

Въ моей диссертаціи: „Die Anwendung des Sylow'schen Satzes auf die symmetrische und die alternirende Gruppe", Berlin 1895, я сдѣлалъ такое изслѣдованіе для симметрической и знакоперемѣнной группъ. Въ настоящемъ сообщеніи я хочу изложить часть результатовъ, полученныхъ мною, именно приложеніе теоремы Зилова къ симметрической группѣ, которой *степень* (т. е. число буквъ, надъ которыми производятся ея подстановки—„*Grad der Gruppe* по Нетто), есть степень простого числа — p^n. Изучивъ этотъ случай, не трудно, какъ показано въ § 3-мъ вышеупомянутой диссертаціи, изслѣдовать и общій случай группы произвольной степени. Я ограничусь, притомъ, сообщеніемъ только одной изъ методъ, послужившихъ мнѣ для рѣшенія поставленныхъ вопросовъ, именно той, при которой основаніемъ изслѣдованія служитъ *аналитическое изображеніе подстановокъ* (§ 2-ой диссертаціи; другая метода, пользующаяся *описаніемъ* составленія группы $\mathfrak{G}$, изложена въ § 1-мъ).

Извѣстно, что наивысшая степень простого числа p, дѣлящая $m!$, выражается такъ:

$$f=\left[\frac{m}{p}\right]+\left[\frac{m}{p^2}\right]+\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \tag{4}$$

гдѣ вообще $[a]$ означаетъ наибольшее цѣлое число, заключающееся въ a (обозначеніе Кронекера). По теоремѣ Зилова, симметрическая группа порядка $p^n!$ содержитъ подгруппу $\mathfrak{G}$ порядка p^f. Наша задача будетъ состоять прежде всего въ аналитическомъ изображеніи этой группы.

Когда число буквъ, входящихъ въ подстановки группы, есть p^n, буквы эти можно получить, какъ извѣстно ***), снабдивъ какую-ни-

*) Кромѣ доказательства Зилова, этой теоремѣ были посвящены многіе другіе труды:
E. Netto. Neuer Beweis eines Fundamentaltheorems aus der Theorie der Substitutionenlehre. Mathematische Annalen, B. 13.
G. Frobenius. Neuer Beweis des Sylow'schen Satzes. Crelle's Journal, B. 100.
G. Frobenius. Ueber die Congruenz nach einem aus 2 endlichen Gruppen gebildeten Doppelmodul. Crelle's Journal, B. 101.

**) Прекрасное (но нѣсколько сжатое) изложеніе основаній такой абстрактной теоріи представляетъ статья Фробеніуса:
G. Frobenius. Ueber endliche Gruppen. Sitzungsberichte der Königl. Pr. Academie der Wissenschaften zu Berlin 21 Februer 1895.

***) См. напр. *Netto*, Substitutionentheorie, § 136. Другой пріемъ обозначенія и аналитическаго изображенія подстановокъ изложенъ у *Serret* въ Cours d'Algébre supérieure, § 478.

будь одну букву u и n индексами: x_1, $x_2 \dots x_n$ и придавая этимъ индексамъ, независимо другъ отъ друга, всѣ цѣлыя значенія отъ 0 до $p-1$ [или вообще значенія полной системы остатковъ (mod. p)]. Тогда всякая подстановка группы можетъ быть изображена выраженіемъ вида:

$$|x_1, x_2, \dots x_n \ \psi_1(x_1, \dots x_n), \ \psi_2(x_1, \dots x_n), \dots \ \psi_n(x_1, \ \dots x_n)|,$$

что означаетъ замѣну x_i черезъ $\psi_i(x_1, \dots x_n)$, гдѣ $\psi_i(x_1, \dots x_n)$—надлежащимъ образомъ выбранная функція входящихъ въ нее перемѣнныхъ.

Не трудно видѣть, что и обратно, для того, чтобы выраженіе вышеприведеннаго рода изображало подстановку, необходимо и достаточно, чтобы p^n различнымъ системамъ величинъ $x_1, \dots x_n$ соотвѣтствовало такое же число различныхъ относительно модуля p значеній функцій $\psi_1, \dots \psi_n$.

Предположивъ функціи $\psi_1, \dots \psi_n$ раціональными, цѣлыли и съ цѣлыми коэффиціентами [степень ихъ относительно каждой изъ перемѣнныхъ можно предположить, на основаніи теоремы Fermat'a, не выше $(p-1)$-ой], можно было бы искать болѣе точныхъ условій, которымъ должны удовлетворять эти функціи для того, чтобы изображать подстановку. Однако, задача эта представляетъ громадныя затрудненія и до сихъ поръ болѣе подробно изслѣдованъ только случай $n=1$ *) и случай *линейныхъ подстановокъ* **) вида:

$$s = |x_1, \dots x_n \ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \dots, a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n|.$$

Было показано, что выраженіе это изображаетъ подстановку всегда, когда опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1n} \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ a_{n1} a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

не дѣлится на p, и найдено число различныхъ подстановокъ этого рода (т. е. порядокъ группы, ими образуемой):

$$r = (p^n - 1)(p^n - p) \dots (p^n - p^{n-1}).$$

Аналитическое изображеніе нашей группы порядка p^f, гдѣ

---

*) См. напр. *Serret*. Cours d'Algébre supérieure, §§ 474—478 и 485—488.

**) См. *Netto*. Substitutionentheorie, §§ 137—143. Подробную теорію этихъ подстановокъ можно найти въ книгѣ *C. Jordan*: Traité des substitutions et des équations algébriques.

$$f = p^{p^{n-1}+p^{n-2}+\dots+p+1} \quad \dots\dots\dots\dots (5)$$

получается на основаніи слѣдующихъ теоремъ:

I. Выраженіе

$$|x_1, \dots x_n\, x_1 + \varphi_1(x_2, \dots x_n), x_2 + \varphi_2(x_3, \dots x_n), \dots x_{n-1} + \varphi_{n-1}(x_n), x_n + \alpha|, (6)$$

гдѣ $\varphi_1, \dots \varphi_{n-1}$ — цѣлыя раціональныя функціи соотвѣтственныхъ перемѣнныхъ съ цѣлыми коэффиціентами (степени не выше $p-1$-ой относительно каждой изъ перемѣнныхъ), а α — цѣлое число, изображаетъ подстановку при произвольныхъ коэффиціентахъ функцій φ и произвольномъ α.

Чтобы доказать это, надо только показать, что двумъ различнымъ системамъ величинъ $x_1, \dots x_n$ и $x_1', \dots x_n'$ соотвѣтствуютъ двѣ различныя системы значеній функцій:

$$x_1 + \varphi_1(x_2, \dots x_n), \dots x_{n-1} + \varphi_{n-1}(x_n), x_n + \alpha.$$

Положимъ, что

$$x_n' \equiv x_n,\ x_{n-1}' \equiv x_{n-1}, \dots x_{i+1}' \equiv x_{i+1} \ (\mathrm{mod.}\, p),$$

но что x_i' не сравнимо съ x_i по модулю p. Тогда получимъ:

$$x_n' + \alpha \equiv x_n + \alpha$$

$$x_{n-1}' + \varphi_{n-1}(x_n') \equiv x_{n-1} + \varphi_{n-1}(x_n)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_{i+1}' + \varphi_{i+1}(x_{i+2}' \dots x_n') \equiv x_{i+1} + \varphi_{i+1}(x_{i+2} \dots x_n).$$

Но

$$x_i' + \varphi_i(x_{i+1}', \dots x_n')$$

не будетъ сравнимо съ

$$x_i + \varphi_i(x_{i+1}, \dots x_n)$$

по модулю p, такъ какъ

$$\varphi_i(x_{i+1}', \dots x_n') \equiv \varphi_i(x_{i+1}, \dots x_n) \ (\mathrm{mod.}\, p),$$

а

$$x_i' \ \text{не} \ \equiv x_i \ (\mathrm{mod.}\, p).$$

II. Произведенiе двухъ подстановокъ вида (6):

$$s_1 = | x_1 \cdots x_n \; x_1 + \varphi_1(x_2 \cdots x_n), \ldots x_n + \alpha |$$

и

$$s_2 = | x_1 \cdots x_n \; x_1 + \varphi_1^{(1)}(x_2 \cdots x_n) \cdot \; \cdot x_n + \alpha^{(1)} |$$

есть подстановка того же типа.

Въ самомъ дѣлѣ:

$$s_1 s_2 = \left| \begin{array}{l} x_1 \;\; x_1 + \varphi_1(x_2, \cdot \; \cdot x_n) + \varphi_1^{(1)}[x_2 + \varphi_2(x_3 \cdots x_n), \cdots x_n + \alpha] \\ x_2 \;\; x_2 + \varphi_2(x_3, \cdots x_n) + \varphi_2^{(1)}[x_3 + \varphi_3(x_4 \cdots x_n), \cdots x_n + \alpha] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} \;\; x_{n-1} + \varphi_{n-1}(x_n) + \varphi_{n-1}^{(1)}[x_n + \alpha] \\ x_n \;\; x_n + \alpha + \alpha^{(1)} \end{array} \right|$$

т. е.

$$s_1 s_2 = | x_1 \cdots x_n \; x_1 + \psi_1(x_2 \cdots x_n), x_2 + \psi_2(x_3, \cdots x_n), \cdots x_{n-1} + \psi_{n-1}(x_n), x_n + \beta |$$

что и тр. док.

III. Двѣ подстановки вида (6) будутъ тождественны только тогда когда всѣ коэффицiенты всѣхъ функцiй φ въ одной сравнимы по модулю p съ соотвѣтственными коэффицiентами въ другой.

Теорема эта можетъ быть легче всего доказана при помощи такой леммы:

Если имѣемъ цѣлую рацiональную функцiю перемѣнныхъ $x_1, x_2, \cdot \cdot x_m$ съ цѣлыми коэффицiентами, которые не всѣ дѣлятся на p, степени n_i относительно $x_i (i = 1, \ldots m)$, при чемъ $n_i \leqq p - 1$, то, придавая всѣмъ перемѣннымъ, независимо другъ отъ друга, значенiя $0 . 1, \ldots p - 1$, получимъ по крайней мѣрѣ

$$(p - n_1)(p - n_2) \cdots (p - n_m)$$

системъ значенiй перемѣнныхъ, для которыхъ функцiя не дѣлится на p *).

Наша функцiя имѣетъ видъ:

$$\varphi(x_1, \cdots x_m) = \sum_{\alpha_m = 0}^{\alpha_m = n_m} \cdots \sum_{\alpha_1 = 0}^{\alpha_1 = n_1} C_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m} .$$

---

*) Теорема эта представляетъ простое обобщенiе теоремы Lagrange'a относительно сравненiй по простому модулю.

Пусть $C_{\alpha_1'\ldots\alpha'_m}$ будетъ коэффиціентъ, не дѣлящійся на p. Расположимъ въ φ члены слѣдующимъ образомъ:

$$\varphi(x_1,\cdots x_m)=\left(\sum_{\alpha_1=0}^{\alpha_1=n_1} C_{\alpha_1\alpha'_2\ldots\alpha'_m}x_1^{\alpha_1}\right)x_1^{\alpha_2'}\cdots x_m^{\alpha'm}+R(x_1\cdots x_m)$$

гдѣ $R(x_1\cdots x_m)$ заключаетъ всѣ члены φ за исключеньемъ отдѣленной суммы. Изъ извѣстной теоремы Лагранжа для сравненій по простому модулю слѣдуетъ, что можно найти по крайней мѣрѣ $p-n_1$ значеній x_1 не сравнимыхъ между собою по модулю p, для которыхъ

$$\sum_{\alpha_1=0}^{\alpha_1=n_1} C_{\alpha_1\alpha'_2\ldots\alpha'_n}x_1^{\alpha_1}$$

не будетъ дѣлиться на p.

Взявъ одно изъ этихъ значеній для x_1 и подставивъ его въ φ, получимъ функцію отъ $(m-1)$ перемѣнныхъ, въ которой по крайней мѣрѣ одинъ коэффиціентъ (при $x_2^{\alpha'_2}\cdots x_m^{\alpha'_m}$) не дѣлится на p. Очевидно, можно примѣнить къ полученной функціи то же разсужденіе, какъ и къ φ и продолжать этотъ процессъ до тѣхъ поръ, пока не придемъ къ функціи отъ одной перемѣнной x_m, къ которой непосредственно приложима теорема Лагранжа.

Изъ этихъ соображеній очевидна справедливость доказываемой леммы.

Если въ подстановкахъ:

$$s_1=|\,x_1\cdots x_n\,x_1+\varphi_1(x_2\cdots x_n),\cdots x_i+\varphi_i(x_{i+1},\cdots x_n),\cdots x_n+\alpha\,|$$

и

$$s_2=|\,x_1\cdots x_n\,x_1+\varphi_1^{(1)}(x_2\cdots x_n),\cdots x_i+\varphi_i^{(1)}(x_{i+1},\cdots x_n),\cdots x_n+\alpha\,|$$

какіе-либо соотвѣтственные коэффиценты въ функціяхъ φ_i и $\varphi_i^{(1)}$ не сравнимы между собою (mod. p), то разность

$$\varphi_i(x_{i+1}\cdots x_n)-\varphi_i^{(1)}(x_{i+1},\cdots x_n)$$

заключаетъ по крайней мѣрѣ одинъ коэффиціентъ, не дѣлящійся на p; значитъ эта разность, по только что доказанной леммѣ, не можетъ равняться нулю для всѣхъ системъ величинъ $x_1,\cdots x_n$, т. е. подстановки s_1 и s_2 различны, что и тр. док.

Функція $\varphi_{n-i}(x_{n-i+1},\cdots x_n)$, входящая въ подстановку вида (6), имѣетъ видъ:

$$\varphi_{n-i}=\sum_{\alpha_n=0}^{\alpha_n=p-1}\cdots\sum_{\alpha_{n-i+1}=0}^{\alpha_{n-i+1}=p-1} C_{\alpha_{n-i+1},\ldots\alpha_n}x_{n-i+1}^{\alpha_{n-i+1}}\cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Число коэффиціентовъ въ ней есть p^i. Если придавать каждому изъ коэффиціентовъ, независимо отъ остальныхъ, значенія $0, 1, \ldots p-1$, то получимъ:

$$p^{p^i}$$

различныхъ функцій. Дѣлая это для $i = 1, 2, \ldots n-1$, получимъ, по теоремѣ III,

$$p^{p^{n-1}+p^{n-2}+\ldots+p+1}$$

различныхъ подстановокъ, образовывающихъ, по теоремѣ II, группу.

Такъ какъ, по теоремѣ Зилова, группы подстановокъ изъ p^n буквъ порядка

$$p^{p^{n-1}+p^{n-2}+\ldots+p+1}$$

подобны между собою, то найденное нами выраженіе

$$s = | x_1 \ldots x_n \; x_1 + \varphi_1(x_2, \ldots x_n), x_2 + \varphi_2(x_3 \ldots x_n), \ldots x_n + \alpha |$$

и есть искомое аналитическое изображеніе подстановокъ группы $\mathfrak{G}$ *).

Всѣ подстановки этой группы могутъ быть составлены, комбинируя слѣдующія:

$$\left.\begin{array}{r}
s_{1,\alpha_2,\ldots\alpha_n} = | x_1 \ldots x_n \; x_1 + x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}, x_2, \ldots x_n | \\
s_{2,\alpha_3,\ldots\alpha_n} = | x_1 \ldots x_n \; x_1, x_2 + x_3^{\alpha_3} \ldots x_n^{\alpha_n}, x_3, \ldots x_n | \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
s_{n-1,\alpha_n} = | x_1 \ldots x_n \; x_1, \ldots x_{m-1} + x_n^{\alpha_n}, x_n | \\
s_n = | x_1, \ldots x_n \; x_1, \ldots x_{n-1}, x_n + 1 | \\
(\alpha_2, \ldots \alpha_n = 0, 1, \ldots p-1).
\end{array}\right\} \ldots \quad (7)$$

Всякая подстановка s группы $\mathfrak{G}$ можетъ быть только единственнымъ образомъ представлена выраженіемъ вида:

$$s = s_n^{i_n} \prod_{\alpha_2,\ldots\alpha_n} s_{1,\alpha_2,\ldots\alpha_n}^{i_{1\alpha_2\ldots\alpha_n}} \, s_{2,\alpha_3,\ldots\alpha_n}^{i_{2\alpha_3\ldots\alpha_n}} \ldots s_{n-1,\alpha_n}^{i_{n-1\alpha_n}} \ldots\ldots \quad (8)$$

---

*) Для случая $n=2$ это изображеніе дано Зиловымъ въ статьѣ: „Sur les groupes transitifs dont le degré est le carré d'un nombre premier"; Acta mathematica, T. 11.

Группа $\mathfrak{G}$ заключаетъ, какъ извѣстно *), среди своихъ подгруппъ всѣ типы группъ порядковъ $p^\alpha\,(\alpha \leqq p^{n-1}+p^{n-2}+\ldots+p+1)$.

Поэтому выраженія вида:

$$|\,x_1,\ldots x_n\, x_1+\varphi_1(x_2,\ldots x_n),\ldots x_n+\alpha\,|$$

изображаютъ всякую группу порядка p^α и степени p^n $(\alpha \leqq p^{n-1}+p^{n-2}+ +\ldots+p+1)$. Въ этихъ группахъ должна быть взята извѣстная часть функцій φ.

Такъ, напримѣръ, одною изъ подгруппъ группы $\mathfrak{G}$ является *группа ариѳметическихъ подстановокъ*, изображаемыхъ выраженіями вида:

$$|\,x_1,\ldots x_n\, x_1+\alpha_1\,,\; x_2+\alpha_2,\ldots x_n+\alpha_n\,|\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(9)$$

гдѣ $\alpha_1\ldots\alpha_n$ — какія либо изъ чиселъ $0, 1,\ldots p-1$ (порядокъ этой группы равенъ ея степени $=p^n$).

Подстановки вида:

$$|\,x_2,\ldots x_n\, x_1+f_1(x_2\ldots x_n)\,, x_2+f_2(x_3\ldots x_n),\ldots x_{n-1}+f_{n-1}(x_n), x_n\,|\;(10)$$

гдѣ функціи f такія же, какъ φ, *только не заключаютъ постояннаго члена* тоже образовываютъ группу $\mathfrak{G}'$.

Всѣ подстановки ея не мѣняютъ буквы $u_{0,0,\ldots 0}$. (Не трудно показать, что, назвавъ группу ариѳметическихъ подстановокъ чрезъ $\mathfrak{A}$, получимъ:

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{G}'\mathfrak{A}=\mathfrak{A}\mathfrak{G}'$$

— $\mathfrak{G}$ есть „*произведеніе*“ $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{G}'$, или „*наименьшее кратное*“ ихъ **).

Въ вышеназванной диссертаціи моей показано, что изображеніе группы $\mathfrak{G}$ можетъ быть получено, взявъ вмѣсто *степеней факторіели*. Тамъ найдены (стр. 19 и слѣд.), съ помощью послѣднихъ, выраженія для подстановокъ, служившихъ прежде для описанія группы $\mathfrak{G}$ (у *Netto* въ „Substitutionentheorie“, § 39, у *Jordan*'а въ „Traité des Substitutions“—§ 41).

Опредѣленіе группы $\mathfrak{H}$ подстановокъ, перемѣщаемыхъ съ $\mathfrak{G}$.

Самымъ простымъ путемъ для построенія этой группы былъ бы слѣдующій:

Положивъ

$$t=|\,x_1,\ldots x_n\, \psi_1(x_1\ldots x_n),\ldots \psi_n(x_1\ldots x_n)\,|$$

и взявъ

$$s=|\,x_1,\ldots x_n\, x_1+\varphi_1(x_2\ldots x_n),\ldots x_n+\alpha\,|,$$

---

*) См. *Netto*, Substitutionentheorie, § 49.

**) Термины проф. Фробеніуса. См. *G. Frobenius*. Ueber endliche Gruppen. Sitzungsberichte der Königl. Pr. Academie der Wissenschaften, 21 Februar 1895.

надо было бы составить

$$t^{-1}st$$

и положить это выраженіе равнымъ нѣкоторой подстановкѣ изъ группы $\mathfrak{G}$

$$s_1 = | x_1, \ldots x_n \, x_1 + \theta_1(x_2 \ldots x_n), \ldots x_n + \alpha |.$$

Отсюда можно было бы найти извѣстныя условія для функцій ψ, входящихъ въ t.

Путь этотъ ведетъ, однако, къ слишкомъ длиннымъ вычисленіямъ (даже если брать за s простѣйшія подстановки группы $\mathfrak{G}$). Эти вычисленія могутъ быть значительно сокращены съ помощью слѣдующихъ теоремъ изъ общей теоріи подстановокъ:

I. Положимъ, что группа $\mathfrak{C}$ состоитъ изъ подстановокъ, перемѣщаемыхъ съ группой $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ есть подгруппа $\mathfrak{A}$, образованная всѣми подстановками $\mathfrak{A}$, перемѣщаемыми со всѣми подстановками $\mathfrak{A}$. Тогда группа $\mathfrak{B}$ перемѣщаема со всѣми подстановками группы $\mathfrak{C}$ *).

Назовемъ чрезъ A какую-либо подстановку изъ группы $\mathfrak{A}$, чрезъ B какую-либо подстановку группы $\mathfrak{B}$ и чрезъ C группы $\mathfrak{C}$. По предположенію

$$AB = BA$$

для всякихъ подстановокъ A и B. Отсюда получаемъ чрезъ *преобразованіе* (Transformation) обѣихъ частей подстановкой C:

$$C^{-1}ABC = C^{-1}BAC$$

или

$$C^{-1}ACC^{-1}BC = C^{-1}BCC^{-1}AC.$$

Подстановка $C^{-1}BC$ принадлежитъ группѣ $\mathfrak{A}$ (такъ какъ B принадлежитъ группѣ $\mathfrak{A}$, а $\mathfrak{C}$ состоитъ изъ подстановокъ, перемѣщаемыхъ съ $\mathfrak{A}$).

Если брать за A всѣ подстановки группы $\mathfrak{A}$, то выраженіе $C^{-1}AC$ проходитъ значенія всѣхъ подстановокъ группы $\mathfrak{A}$. Поэтому найденное равенство показываетъ, что подстановка $C^{-1}BC$ тоже принадлежатъ къ числу подстановокъ $\mathfrak{A}$, перемѣщаемыхъ со всѣми подстановками $\mathfrak{A}$, т. е. къ группѣ $\mathfrak{B}$; а значитъ группа $\mathfrak{B}$ перемѣщаема со всѣми подстановками $\mathfrak{C}$, что и тр. док.

Обобщеніемъ этой теоремы является слѣдующая:

II. Положимъ, что имѣемъ 4 группы: $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A}$, изъ которыхъ каждая послѣдующая есть подгруппа предъидущихъ. Предположимъ, что группы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ перемѣщаемы со всѣми подстановками $\mathfrak{D}$. Пусть $\mathfrak{C}$ есть

*) Теорема эта употребляется (безъ доказательства) въ статьѣ Зилова: „Sur les groupes transitifs dont le dégré est le carré d'un nombre premier"; Acta mathematica, T. 11.

группа, образованная всѣми подстановками $\mathfrak{D}$, перемѣщаемыми съ подстановками $\mathfrak{B}$ „до подстановокъ“ $\mathfrak{A}$ *). Тогда группа $\mathfrak{C}$ будетъ перемѣщаема съ подстановками $\mathfrak{D}$.

По опредѣленію перемѣщаемости „до подстановокъ“ извѣстной группы, имѣемъ:

$$CB = BCA$$

гдѣ C, B и A какія-либо изъ подстановокъ соотвѣтственныхъ группъ $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A}$.

Преобразовывая это равенство какой-либо подстановкой D изъ $\mathfrak{D}$, получимъ:

$$D^{-1}CBD = D^{-1}BCAD$$

или

$$(D^{-1}CD)(D^{-1}BD) = (D^{-1}BD)(D^{-1}CD)(D^{-1}AD) =$$
$$= (D^{-1}BD)(D^{-1}CD)A'$$

такъ какъ, по предположенію, группа $\mathfrak{A}$ перемѣщаема съ подстановками группы $\mathfrak{C}$. Выраженіе $D^{-1}BD$ проходитъ, съ измѣненіемъ B, значенія всѣхъ подстановокъ группы $\mathfrak{B}$. Найденное равенство показываетъ, что подстановка $D^{-1}CD$ (принадлежащая къ $\mathfrak{D}$), перемѣщаема съ подстановками группы $\mathfrak{B}$ до подстановокъ изъ $\mathfrak{A}$. Отсюда слѣдуетъ, что $D^{-1}CD$ принадлежитъ $\mathfrak{C}$, т. е. что группа $\mathfrak{C}$ перемѣщаема съ подстановками D, что и тр. док.

Въ нашей группѣ $\mathfrak{G}$ подстановки, перемѣщаемыя со всѣми подстановками ея, будутъ слѣдующія:

$$|x_1, \ldots x_n \; x_1 + \alpha, x_2, \ldots x_n|,$$
$$(\alpha = 0.1, \ldots p-1).$$

---

*) Если $\mathfrak{A}$ есть подгруппа $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}$ подгруппа $\mathfrak{C}$, то говорятъ, что подстановки группы $\mathfrak{C}$ перемѣщаемы со всѣми подстановками $\mathfrak{B}$ до подстановокъ $\mathfrak{A}$, когда для всякой подстановки B изъ $\mathfrak{B}$ и для всякой подстановки C изъ $\mathfrak{C}$ исполнено условіе:

$$BC = CBA,$$

гдѣ A есть нѣкоторая подстановка группы $\mathfrak{A}$. Не трудно видѣть, что подстановки C удовлетворяющія этому условію, образовываютъ группу; изъ равенствъ:

$$BC = CBA \text{ и } BC' = C'BA'$$

слѣдуетъ:

$$B(CC') = CBAC' = CBC'A'' = CC'BA'A'' = (CC')BA''',$$

т. е. и CC' перемѣщаема съ B до подстановки изъ $\mathfrak{A}$.

Въ самомъ дѣлѣ, группа $\mathfrak{G}$ содержитъ въ себѣ группу ариѳметическихъ подстановокъ. Значитъ подстановки, перемѣщаемыя со всѣми подстановками $\mathfrak{G}$, заключаются среди такихъ:

$$s = |x_1, \dots x_n\, x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + \alpha_1, x_2 + a_{23}x_3 +$$
$$+ \dots + a_{2n}x_n + \alpha_2, \dots\, x_n + \alpha_n|.$$

Сравнивая выраженія:

$$s.|x_1, \dots x_n\, x_1, \dots x_i + \beta_i, \dots x_n| =$$
$$= |x_1, \dots x_i, \dots x_n\, x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + \alpha_1, \dots x_i + a_{ii+1}x_{i+1} +$$
$$+ \dots + \alpha_i + \beta_i, \dots x_n + \alpha_n|$$

и

$$|x_1 \dots x_n\, x_1, \dots x_i + \beta_i, \dots x_n|.s =$$
$$= |x_1, \dots x_i, \dots x_n\, x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + \alpha_1 + a_{1i}\beta_i, \dots$$
$$\dots x_i + a_{ii+1}x_{i+1} + \dots + \alpha_i + \beta_i, \dots x_n + \alpha_n|,$$
$$(i = 2, 3, \dots n),$$

легко убѣдиться, что всѣ коэффиціенты

$$a_{ik}\begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots n \\ k = 2, 3, \dots n \end{pmatrix}$$

должны быть равны нулю. Для перемѣщаемости съ подстановками

$$|x_1, \dots x_n\, x_1 + x_2, x_2, \dots x_n|$$
$$|x_1, \dots x_n\, x_1 + x_3, x_2, \dots x_n|$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

числа

$$\alpha_i\,(i = 2, 3, \dots n)$$

должны равняться нулю. Подстановки

$$|x_1, \dots x_n\, x_1 + \alpha_1, x_2, \dots x_n| \quad \dots\dots\dots \quad (11)$$

дѣйствительно перемѣщаемы со всѣми подстановками группы $\mathfrak{G}$. Назовемъ группу, ими образовываемую, черезъ $\mathfrak{G}_1$. Пусть

$$H = |x_1, \dots x_n\, f_1(x_1, \dots x_n), \dots f_n(x_1 \dots x_n)|$$

будетъ какая-либо подстановка группы $\mathfrak{H}$. Составимъ

$$H^{-1}.|x_1,\ldots x_n x_1+1,x_2,\ldots x_n|.H.$$

По первой изъ только что доказанныхъ леммъ будетъ

$$H^{-1}|x_1\ldots x_n x_1+1,x_2,\ldots x_n|H=|x_1,x_2,\ldots x_n x_1+\alpha,x_2,\ldots x_n|.$$

Отсюда получаются сравненія:

$$f_1(x_1+1,x_2,\ldots x_n)-f_1(x_1,\ldots x_n)\equiv\alpha(\text{mod. }p),$$
$$f_i(x_1+1,x_2,\ldots x_n)-f_i(x_1,\ldots x_n)\equiv 0(\text{mod. }p),$$
$$(i=2,3,\ldots n).$$

Изъ этихъ сравненій можно заключить, что x_1 входитъ въ f_1 линейно и съ постояннымъ коэффиціентомъ и вовсе не входитъ въ остальныя функціи $f_i,(i=2,\ldots n)$.

Значитъ, подстановки группы $\mathfrak{H}$ имѣютъ видъ:

$$H=|x_1,\ldots x_n a_1 x_1+f_1^{(1)}(x_2,\ldots x_n),f_2(x_2\ldots x_n),\ldots f_n(x_2\ldots x_n)|.$$

Подстановки такого вида перемѣщаемы съ подгруппой $\mathfrak{G}_2$ группы $\mathfrak{G}$, образованной подстановками вида:

$$G_2=|x_1\ldots x_n x_1+\varphi_1(x_2\ldots x_n),x_2,\ldots x_n|\quad.\;.\;.\;.\;.\;(12)$$

гдѣ за φ_1 берутся всѣ функціи, различныя относительно модуля p. Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ:

$$|x_1,\ldots x_n x_1+\varphi_1(x_2\ldots x_n),x_2,\ldots x_n|H=|x_1,\ldots x_n x_1+f_1(x_2\ldots x_n)+$$
$$+\varphi_1(x_2\ldots x_n),x_2+f_2(x_3\ldots x_n),\ldots x_n+f_n(x_2,\ldots x_n)|$$

и

$$H.|x_1,\ldots x_n x_1+\varphi_1(x_2\ldots x_n),x_2,\ldots x_n|=|x_1,\ldots x_n x_1+f_1(x_2\ldots x_n)+$$
$$+\varphi_1[x_2+f_2(x_2\ldots x_n),\ldots x_n+f_n(x_2\ldots x_n)],x_2+f_2(x_2\ldots x_n),\ldots$$
$$\ldots x_n+f_n(x_2,\ldots x_n)|=$$
$$=|x_1,\ldots x_n x_1+f_1(x_2\ldots x_n)+\varphi_1(x_2,\ldots x_n),x_2+f_2(x_3\ldots x_n),\ldots$$
$$\ldots x_n+f_n(x_2\ldots x_n)|\cdot|x_1\ldots x_n x_1+\psi_1(x_2\ldots x_n),x_2\ldots x_n|,$$

гдѣ

$$\psi_1(x_2\ldots x_n)=\varphi_1[x_2+f_2(x_2\ldots x_n),\ldots x_n+f_n(x_2\ldots x_n)]-\varphi_1(x_2\ldots x_n).$$

Изъ этихъ равенствъ слѣдуетъ:

$$HG_2 = G_2 HG_2',$$

т. е.

$$H^{-1} G_2 H = G_2'',$$

что и доказываетъ перемѣщаемость подстановокъ H съ группой $\mathfrak{G}_2$.

Съ другой стороны, не трудно убѣдиться, что группа $\mathfrak{G}_3$ подстановокъ вида

$$G_3 = \left| x_1, \ldots x_n \, x_1 + \varphi_1(x_2 \ldots x_n), x_2 + \alpha, x_3 \ldots x_n \right| \quad . \quad . \quad (13)$$

гдѣ за φ_1 берутся всѣ функціи, различныя относительно модуля p, а за α числа $0, 1, \ldots p-1$, есть группа, образованная подстановками $\mathfrak{G}$, перемѣщаемыми со всѣми подстановками $\mathfrak{G}$ до подстановокъ группы $\mathfrak{G}_2$.

Поэтому группы $\mathfrak{H}, \mathfrak{G}, \mathfrak{G}_3, \mathfrak{G}_2$ удовлетворяютъ условіямъ леммы II, т. е. группа $\mathfrak{G}_3$ должна быть перемѣщаема съ подстановками $\mathfrak{H}$.

Взявъ подстановку

$$G_3' = \left| x_1, \ldots x_n \, x_1, x_2 + 1, x_3, \ldots x_n \right|$$

и составивъ

$$H^{-1} G_3' H,$$

получимъ, на основаніи только что найденнаго, сравненія:

$$f_2(x_2 + 1, x_3, \ldots x_n) - f_2(x_2, \ldots x_n) \equiv \alpha \pmod{p},$$

$$f_i(x_2 + 1, x_3, \ldots x_n) - f_i(x_2, \ldots x_n) \equiv 0 \pmod{p},$$

$$(i = 3, 4, \ldots n),$$

изъ которыхъ, какъ и раньше, найдемъ что x_2 можетъ входить въ f_2 только линейно и съ постояннымъ коеффиціентомъ, и что оно не входитъ въ остальныя f_i, $(i = 3, \ldots n)$, т. е. что подстановки группы $\mathfrak{H}$ имѣютъ видъ

$$H_1 = \left| x_1, \ldots x_n \, a_1 x_1 + f_1^{(1)}(x_2, \ldots x_n), a_2 x_2 + \right.$$
$$\left. + f_2^{(1)}(x_3, \ldots x_n), f_3(x_3 \ldots x_n), \ldots f_n(x_3 \ldots x_n) \right|.$$

Подстановки этого вида перемѣщаемы съ подгрупной $\mathfrak{G}_4$ группы $\mathfrak{G}$ состоящей изъ подстановокъ вида:

$$G_4 = \left| x_1, \ldots x_n \, x_1 + \varphi_1(x_2 \ldots x_n), x_2 + \varphi_2(x_3 \ldots x_n), x_3, \ldots x_n \right| \quad . \quad (14)$$

гдѣ за φ_1 и φ_2 берутся всѣ различныя относительно модуля p функціи соотвѣтственныхъ перемѣнныхъ (перемѣщаемость эта доказывается совершенно такъ же, какъ для $\mathfrak{G}_2$).

Не трудно найти, что группа $\mathfrak{G}_5$, составленная изъ подстановокъ

$$G_5 = | x_1, \dots x_n\, x_1 + \varphi_1(x_2 \dots x_n), x_2 + \varphi_2(x_3, \dots x_n), x_3 + \alpha, x_4, \dots x_n | \quad (15)$$

есть группа подстановокъ $\mathfrak{G}$, перемѣщаемыхъ со всѣми подстановками $\mathfrak{G}$ до подстановокъ группы $\mathfrak{G}_4$. Примѣняя къ $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_5$, $\mathfrak{G}_4$ нашу лемму II, найдемъ, подобно предъидущему, что f_3 содержитъ x_3 линейно съ постояннымъ коэффиціентомъ и что функціи $f_i\,(i = 4, \dots n)$ не содержатъ x_3.

Заключеніемъ отъ $k-1$ къ k докажемъ, что подстановки $\mathfrak{H}$ имѣютъ видъ *):

$$H = | x_1, \dots x_n a_1 x_1 + \Phi_1(x_2, \dots x_n), a_2 x_2 + \Phi_2(x_3 \dots x_n), \dots a_n x_n + \alpha |. \quad (16)$$

Такая подстановка есть произведеніе подстановки изъ группы $\mathfrak{G}$ и подстановки вида

$$H' = | x_1, \dots x_n\, a_1\, x_1, \dots a_n\, x_n | \quad \dots\dots\dots (17)$$

По теоремѣ относительно линейныхъ подстановокъ, приведенной въ началѣ сообщенія, выраженіе это изображаетъ подстановку при

$$a_i = 1, 2, \dots p-1, \ (i = 1, 2, \dots n). \quad \dots\dots\dots (18)$$

Такимъ образомъ получимъ $(p-1)^n$ подстановокъ H', образовывающихъ группу $\mathfrak{H}'$. Комбинируя каждую изъ этихъ подстановокъ съ каждой изъ подстановокъ группы $\mathfrak{G}$, получимъ

$$h = p^{p^{n-1} + p^{n-2} + \dots + p + 1}(p-1)^n \quad \dots\dots\dots (19)$$

различныхъ подстановокъ, образовывающихъ группу $\mathfrak{H}$ (группа $\mathfrak{H}$ есть *произведеніе* или „наименьшее краткое" группъ $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{H}'$).

Число различныхъ группъ $\mathfrak{G}$, заключенныхъ въ симметрической группѣ степени p^n, найдется изъ формулы (3):

$$N = \frac{p^n!}{p^{p^{n-1} + p^{n-2} + \dots + p + 1}(p-1)^n} \quad \dots\dots\dots (20)$$

*) Въ диссертаціи моей сдѣлано подробное изслѣдованіе группы $\mathfrak{G}$ относительно перемѣщаемости подстановокъ ея подгруппъ, уясняющее нахожденіе группы $\mathfrak{H}$. Руководящей мыслью этого изслѣдованія служилъ принципъ классификаціи группъ, высказанный Joung'омъ въ статьѣ: „On the Determination of the Groups whose Order is a Power of a Prime". American Journal of the Mathematics 1893.

Не трудно показать, что число это дѣйствительно сравнимо съ единицей по модулю p. Членъ не дѣлящійся на p въ выраженіи для N (по раздѣленіи на знаменателя) есть

$$(p-1)^{p^{n-1}+p^{n-2}+\ldots+p+1-n}\left[(p-2)!\right]^{p^{n-1}+p^{n-2}+\ldots+p+1}.$$

Но изъ теоремы Вильсона слѣдуетъ, что

$$(p-2)! \equiv +1 \,(\mathrm{mod.}\, p)\,,$$

а число

$$p^{n-1}+p^{n-2}+\ldots+p+1-n$$

есть четное для всякаго нечетнаго p. Поэтому для нечетнаго p

$$N \equiv +1 \,(\mathrm{mod.}\, p)$$

(для $p=2$ это очевидно).

Германъ фонъ-Гельмгольцъ въ его послѣднихъ произведеніяхъ *).

А. П. Грузинцева.

Въ 1847 году Гельмгольцъ опубликовалъ свой знаменитый мемуаръ „Ueber die Erhaltung der Kraft", въ которомъ изложилъ общій принципъ, управляющій физическими явленіями и извѣстный нынѣ подъ именемъ *закона сохраненія энергіи.* Руководствуясь этимъ принципомъ, мы можемъ отдать себѣ отчетъ во всякомъ физическомъ явленіи; дѣйствительно, законъ сохраненія энергіи состоитъ въ томъ, что, если мы наблюдаемъ какія-нибудь физическія явленія въ данной системѣ тѣлъ, то эти явленія происходятъ *непремѣнно* или за счетъ энергіи взятой системы, или за счетъ энергіи окружающихъ тѣлъ, или за счетъ обѣихъ; причемъ общій итогъ энергіи остается постояннымъ.

Но, съ другой стороны, энергія системы тѣлъ обусловливается тѣмъ или другимъ кинетическимъ состояніемъ ея частей, такъ-что, выразивъ при помощи общихъ теоремъ механики это кинетическое состояніе системы и принявъ въ разсчетъ законъ сохраненія энергіи, мы получимъ средство построить математическую теорію наблюдаемыхъ явленій. Другими словами, физическія явленія должны быть приписаны дѣйствію силъ, подчиненныхъ закону сохраненія энергіи.

Выразимъ въ математической формѣ высказанныя сейчасъ идеи.

Пусть имѣемъ систему точекъ, находящихся подъ дѣйствіемъ системы силъ, какъ внутреннихъ, такъ и внѣшнихъ; пусть какая-нибудь точка этой системы съ массой m опредѣляется во время t координатами x, y, z и пусть X, Y, Z будутъ составляющія силъ дѣйствую-

*) Эта статья содержитъ изложеніе послѣднихъ работъ Гельмгольца съ нѣкоторыми измѣненіями, оговоренными въ соотвѣтственныхъ мѣстахъ. Въ устномъ изложеніи ей было предпослано нѣсколько словъ, посвященныхъ памяти знаменитаго ученаго († 8-го сентября н. с. 1894 года).

щихъ въ разсматриваемой точкѣ; затѣмъ предположимъ, что между точками системы существуютъ нѣкоторыя связи, которыя могутъ-быть намъ не извѣстны.

Примѣняя къ разсматриваемой системѣ принципъ Далямбера, получимъ

$$\sum\left\{\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right\} = 0. \quad . \quad (a)$$

Въ этомъ равенствѣ связи системы уже отсутствуютъ.

Выразимъ состояніе нашей системы въ *общихъ* координатахъ; пусть эти координаты будутъ: $p_1, p_2, \cdots p_k$ и пусть скорости измѣненія ихъ будутъ: $q_1, q_2, \cdots q_k$, — т. е. пусть вообще:

$$q_i = \frac{dp_i}{dt} \qquad (i = 1, 2, \ldots k).$$

Преобразуемъ равенство (a).

Выраженіе:

$$\sum(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$$

представляетъ элементарную работу *всѣхъ* силъ, приложенныхъ къ точкѣ (x, y, z); эти же силы будутъ двухъ родовъ: силы внутреннія и силы внѣшнія. Относительно внутреннихъ силъ примемъ допущеніе, что онѣ суть *силы консервативныя*, т. е. силы, имѣющія потенціалъ или сами по себѣ, или вслѣдствіе связей между частями системы.

Относительно-же внѣшнихъ силъ никакихъ предположеній не будемъ дѣлать.

Выражая теперь x, y, z въ функціи перемѣнныхъ $p_1, p_2, \cdots p_k$ и принимая въ соображеніе сказанное сейчасъ относительно характера внутреннихъ силъ, будемъ имѣть:

$$\sum\Big(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z\Big) = -\delta\Phi - \sum_{i=1}^{i=k} P_i\delta p_i\,^{*}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

гдѣ Φ есть *потенціалъ внутреннихъ силъ* и

$$\delta\Phi = \sum_{i=1}^{i=k}\frac{\partial\Phi}{\partial p_i}\delta p_i.$$

---

*) Тоже мы получаемъ, если вообще одна часть всѣхъ дѣйствующихъ силъ имѣетъ потенціалъ, а другая нѣтъ.

Количества вида P_i суть внѣшнія силы, стремящіяся *увеличить* параметръ p_i, такъ-что выраженіе

$$-P_i \delta p_i$$

представитъ *работу* силы P_i.

Для преобразованія оставшейся части въ выраженіи (a) принципа Далямбера разсмотримъ функцію, представляющую кинетическую энергію системы, а именно:

$$T = \sum \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=k} a_{ij} q_i q_j \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

при условіи:

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

Возьмемъ:

$$\int \delta T dt$$

между нѣкоторыми предѣлами $t = t_0$ и $t = t_1$; найдемъ:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T dt = \int_{t_0}^{t_1} dt \sum m \left[\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right],$$

если будетъ удовлетворено условіе:

$$\Big|_{t_0}^{t_1} \sum m \left[\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right] = 0;$$

это-же условіе, вслѣдствіе произвольности δx, δy, δz, всегда можетъ быть удовлетворено; напримѣръ, мы всегда можемъ взять моменты времени t_0 и t_1 такими, чтобы перемѣщенія точекъ для нихъ были равны нулю.

Такимъ образомъ, если умножимъ равенство (a) на dt и возмемъ интегралъ отъ $t = t_0$ до $t = t_1$, т. е. за весь промежутокъ времени существованія изучаемаго кинетическаго состоянія системы, то получимъ:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \left[\delta T - \delta \Phi - \sum_{i=1}^{i=k} P_i \delta p_i\right] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Положимъ:

$$\Phi - T = H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

тогда равенство (1) можно написать въ видѣ:

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta H+\sum_{i=1}^{i=k}P_i\delta p_i\right]dt=0\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\qquad(3)$$

Гельмгольцъ представилъ это равенство въ слѣдующемъ видѣ:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(H+\sum P_ip_i\right)dt=0\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\qquad(A)$$

при непремѣнномъ условіи, что силы P_i *варіированію не подлежатъ*, т. е. суть функціи только времени.

Выраженіе (A) представляетъ обобщеніе принципа Гамильтона (1834), выражаемаго равенствомъ:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}Hdt=0$$

и дано въ первый разъ Кирхгоффомъ въ 1876 г. *) въ формѣ немного отличающейся отъ приведенной нами тѣмъ обстоятельствомъ, что онъ не разбиваетъ силы, приложенныя къ точкамъ системы, на внутреннія и внѣшнія.

Функція H названа Гельмгольцемъ *кинетическимъ потенціаломъ* системы. Эта функція встрѣчается въ теоретической физикѣ очень часто и извѣстна въ различныхъ ея частяхъ подъ разными именами; въ электричествѣ это можетъ быть потенціаломъ одного тока на другой (Ф. Неймана); въ термодинамикѣ это свободная энергія Гельмгольца или термодинамическій потенціалъ Дюгема.

Докажемъ теперь, что равенство (3) заключаетъ въ себѣ принципъ сохраненія энергіи. Дѣйствительно, сначала мы, помня, что:

$$\delta T=\sum_{i=1}^{i=k}\left[\frac{\partial T}{\partial p_i}\delta p_i+\frac{\partial T}{\partial q_i}\delta q_i\right],$$

$$\delta\Phi=\sum_{i=1}^{i=k}\frac{\partial\Phi}{\partial p_i}\delta p_i\,,$$

имѣемъ:

$$\int_{t_0}^{t_1}dt\sum_{i=1}^{i=k}\left[-\frac{\partial T}{\partial p_i}+\frac{\partial\Phi}{\partial p_i}+P_i\right]\delta p_i-\sum_{i=1}^{i=k}\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial T}{\partial q_i}\delta q_i dt=0\,,\;.\;.\;.\qquad(4)$$

*) См. его Vorlesungen über mathematische Physik, 3 Aufl. S. 27.

но

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial T}{\partial q_i}\delta q_i dt = -\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right)\delta p_i dt,$$

ибо варіаціи δp_i для $t=t_0$ и $t=t_1$ обращаются въ нуль, а слѣдовательно, предыдущее равенство (4) можно написать въ видѣ:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{i=1}^{i=k}\left[-\frac{\partial T}{\partial p_i}+\frac{\partial \Phi}{\partial p_i}+P_i+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right)\right]\delta p_i = 0\,,$$

или, вслѣдствіе произвольности δp_i:

$$P_i = -\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right)$$

или наконецъ, помня, что Φ отъ q_i независитъ:

$$P_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) - \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots k)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

Это Лягранжева форма уравненій динамики.

Изъ этихъ уравненій (B) мы и можемъ вывести принципъ сохраненія энергіи. Съ этой цѣлью умножимъ уравненія (B) на q_i и результаты сложимъ, получимъ:

$$\sum_{i=1}^{i=k} P_i q_i = -\sum_{i=k}^{i=k}\frac{\partial H}{\partial p_i}q_i + \sum_{i=1}^{i=k} q_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\right),$$

но

$$q_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(q_i\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt},$$

а потому:

$$\sum_{i=1}^{i=k} P_i q_i = -\sum_{i=1}^{i=k}\left[\frac{\partial H}{\partial p_i}q_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt}\right] + \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{i=k} q_i\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

но:

$$\sum_{i=1}^{i=k}\left[\frac{\partial H}{\partial p_i}q_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt}\right] = \frac{dH}{dt},$$

а слѣдовательно,

$$\sum_{i=1}^{i=k} P_i q_i = -\frac{d}{dt}\Big(H - \sum_{i=1}^{i=k} q_i \frac{\partial H}{\partial q_i}\Big).$$

Но мы знаемъ, что

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial T}{\partial q_i}$$

и такъ какъ T есть однородная квадратичная функція всѣхъ q_i, то

$$2T = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{\partial T}{\partial q_i} q_i = -\sum_{i=1}^{i=k} \frac{\partial H}{\partial q_i} q_i ;$$

а потому:

$$\sum_{i=1}^{i=k} P_i q_i = -\frac{d}{dt}(H + 2T) = -\frac{d(T + \Phi)}{dt}.$$

Если-же назовемъ *полную* энергію системы буквой E, то получимъ:

$$E = T + \Phi \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (C)$$

и, слѣдовательно,

$$\sum_{i=1}^{i=k} P_i q_i = -\frac{dE}{dt}$$

или, окончательно:

$$\sum_{i=1}^{i=k} P_i \frac{dp_i}{dt} dt = -\frac{dE}{dt} dt \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (D)$$

Но это равенство выражаетъ принципъ сохраненія энергіи *), ибо лѣвая его часть представляетъ работу внѣшнихъ силъ, отдаваемую наружу системы, за промежутокъ времени dt и эта передача совершается по равенству (D), т. е. за счетъ полной энергіи системы, которая при этомъ убываетъ.

*) Въ такомъ-же видѣ и Пуэнкаре представляетъ принципъ сохраненія энергіи; см. его *Electricité et Optique*, II, p. 74 (1891 г.) или *Les oscillations électriques*, p. 21 (1894 г.).

И такъ, *принципъ Гамильтона или принципъ наименьшаго дѣйствія*, какъ его называетъ Гельмгольцъ, *заключаетъ въ себѣ принципъ сохраненія энергіи.*

Такимъ образомъ, мы можемъ при построеніи теорій тѣхъ или другихъ физическихъ явленій пользоваться принципомъ Гамильтона, зная уже, что въ немъ содержится законъ сохраненія энергіи.

Но, какъ кажется на первый взглядъ, для тѣхъ-же цѣлей могли-бы служить и уравненія Лягранжа, и уравненіе (D), выражающее самый принципъ сохраненія энергіи, а между тѣмъ Гельмгольцъ предлагаетъ класть въ основаніе теоретическихъ изслѣдованій въ физикѣ лишь принципъ наименьшаго дѣйствія. Причина этого та, что уравненія Лягранжа даютъ лишь уравненія для точекъ *внутри* системы тѣлъ, участвующихъ въ изучаемомъ физическомъ явленіи, а для полнаго рѣшенія вопроса требуются еще условія *на границахъ*, т. е. на поверхности, ограничивающей разсматриваемую систему; интегралы же, входящіе въ составъ равенства (A), могутъ дать по преобразованіи и условія на границахъ. Тѣ-же самыя замѣчанія можно сдѣлать и относительно равенства (D). Если-же мы не имѣемъ въ виду условій на границахъ, а желаемъ лишь имѣть уравненія, представляющія кинетическое состояніе точекъ внутри системы, то можемъ прибѣгать съ этой цѣлью или къ уравненіямъ Лягранжа, какъ это дѣлалъ еще Максвеллъ въ своей теоріи электромагнитнаго поля или къ уравненію (D), какъ поступалъ, напримѣръ Пуэнкаре *) при выводѣ уравненій Герца.

Впрочемъ относительно уравненія (D) надо сдѣлать оговорку. Если кинетическая и потенціальная энергіи выражены въ видѣ объемныхъ интеграловъ, распространенныхъ на всѣ точки системы, то ихъ можно преобразовать частью въ поверхностные, а тогда мы можемъ получить и условія на границахъ. Однако, все-таки, употребленіе принципа Гамильтона во многихъ случаяхъ надо предпочитать уравненію (D). Причины этого обстоятельства сейчасъ выяснятся. Мы опредѣляемъ систему при помощи k независимыхъ, вообще говоря, параметровъ: p_1, $p_2, \dots p_k$. Эти параметры съ физической стороны обладаютъ извѣстными свойствами, отличающими одни изъ нихъ отъ другихъ и Гельмгольцъ поэтому разбиваетъ ихъ по категоріямъ; у него разсматриваются параметры категоріи a, категоріи b и т. п.; если первыхъ будетъ α числомъ, вторыхъ β и т. д., то, ясно, что:

$$\alpha + \beta + \dots = k.$$

Критеріемъ для сужденія о принадлежности параметра къ той или другой категоріи служитъ, разумѣется, какая-либо опредѣленная осо-

*) Les oscil. électriques, § 22.

бенность, опредѣленное свойство параметра, отвѣчающее нѣкоторому физическому обстоятельству,—свойство, которымъ параметры, принадлежащіе къ одной категоріи, отличаются отъ параметровъ другихъ категорій.

Съ этимъ обстоятельствомъ встрѣтился еще Максвеллъ въ своей теоріи электромагнитнаго поля *). Такъ, у него параметры, обозначенные буквой y, входили въ составъ кинетической энергіи лишь подъ видомъ производныхъ по времени (то были напряженности электрическихъ токовъ, протекающихъ въ системѣ). Подобные параметры разсматриваетъ и Гельмгольцъ. Эти параметры, слѣдовательно, характеризуются тѣмъ условіемъ, что они входятъ въ составъ кинетическаго потенціала H лишь подъ видомъ своихъ производныхъ по времени. Если эту категорію параметровъ обозначимъ символомъ p_b, то аналитически это выразится уравненіемъ:

$$\frac{\partial H}{\partial p_b} = 0,$$

которому должны удовлетворять параметры p_b.

Можетъ случится, что сверхъ того эти параметры такого рода, что соотвѣтствующія имъ силы P_b суть нули, т. е., что

$$P_b = 0.$$

Какъ примѣръ подобныхъ параметровъ, можетъ служить температура системы (въ изотермическихъ процессахъ).

Параметры другихъ категорій обладаютъ другими свойствами, выражающимися другими аналитическими условіями: Гельмгольцъ и воспользовался этими обстоятельствами для изученія свойствъ кинетическаго потенціала **).

Эта функція H, выражаемая равенствомъ:

$$H = \Phi - T,$$

въ общемъ случаѣ состоитъ изъ цѣлой однородной квадратичной функціи скоростей q_i и нѣкоторой функціи координатъ p_i; но если нѣкоторые изъ параметровъ, напримѣръ параметры категоріи b, обладаютъ приведенными выше свойствами, то мы можемъ исключить всѣ q_b, и тогда кинетическій потенціалъ H можетъ заключать и *линейную функ-*

---

*) См. §§ 572—573 и 576 его трактата, т. II. (1873).

**) См. его статьи по статикѣ моно-и полициклическихъ системъ въ журналѣ *Crelle*, т. 97, стр. 111—140; 317—336 (1884 г.).

цію скоростей; дѣйствительно, если параметры категоріи b удовлетворяютъ уравненіямъ:

$$\frac{\partial H}{\partial p_b} = 0\,, \quad P_b = 0\,,$$

то уравненіе (B) въ примѣненіи къ этому случаю даетъ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial q_b}\right) = 0.$$

Такихъ уравненій будетъ столько числомъ, сколько параметровъ категоріи b; интегрируя ихъ найдемъ:

$$\frac{\partial H}{\partial q_b} = C_b\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

гдѣ C_b будетъ постоянное интегрированія, т. е. нѣкоторая функція параметровъ p_i другихъ категорій. Такъ какъ предыдущее уравненіе *линейно* относительно q_b, то мы можемъ опредѣлить всѣ q_b и подставить ихъ значенія въ функцію H; тогда мы получимъ новое ея значеніе, въ которое параметры другихъ категорій будутъ входить и въ *первыхъ степеняхъ*, т. е. кинетическій потенціалъ H будетъ заключать въ своемъ составѣ *линейную функцію* параметровъ p_i (за исключеніемъ параметровъ p_b). Если обозначимъ это значеніе H буквой H_1, то получимъ, обозначая указателемъ a оставшіеся параметры:

$$\frac{\partial H_1}{\partial p_a} = \frac{\partial H}{\partial p_a} + \sum_b \frac{\partial H}{\partial q_b}\frac{\partial q_b}{\partial p_a}\,, \quad \frac{\partial H_1}{\partial q_a} = \frac{\partial H}{\partial q_a} + \sum_b \frac{\partial H}{\partial q_b}\frac{\partial q_b}{\partial q_a}$$

или, вслѣдствіе равенствъ (5):

$$\frac{\partial H_1}{\partial p_a} = \frac{\partial H}{\partial p_a} + \sum_b C_b\frac{\partial q_b}{\partial p_a}\,, \quad \frac{\partial H_1}{\partial q_a} = \frac{\partial H}{\partial q_a} + \sum_b C_b\frac{\partial q_b}{\partial q_a}\,,$$

но, если положимъ, что:

$$H' = H_1 - \sum_b C_b q_b\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

то получимъ:

$$\frac{\partial H}{\partial p_a} = \frac{\partial H'}{\partial p_a}\,, \quad \frac{\partial H}{\partial q_a} = \frac{\partial H'}{\partial q_a}$$

и уравненія (B) примутъ видъ:

$$P_a = -\frac{\partial H'}{\partial p_a} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H'}{\partial q_a}\right) \dots\dots\dots (E)$$

Это уравненіе того-же вида, какъ и (B), но съ той существенной разницей, что функція H' заключаетъ въ себѣ члены *линейные* относительно скоростей q_a.

Такимъ образомъ, мы можемъ утверждать, что существуютъ такія физическія явленія, для которыхъ кинетическій потенціалъ H' можетъ заключать члены линейные относительно скоростей. Такія движенія Гельмгольцъ назвалъ *скрытыми*; мы будемъ называть *скрытымъ кинетическимъ состояніемъ* системы, когда ея кинетическій потенціалъ заключаетъ линейные члены скоростей. Примѣромъ такихъ физическихъ явленій могутъ служить: взаимодѣйствіе между магнитами и токами; отклоненіе плоскости поляризаціи свѣтоваго луча магнитомъ и т. п.

Между тѣми физическими процессами или кинетическими состояніями, которые характеризуются потенціаломъ H и тѣми, которые характеризуются потенціаломъ H', существуетъ та физически-существенная разница, что первые процессы *обратимы*, а. вторые—нѣтъ. Дѣйствительно, обратимость физическаго процесса аналитически выражается условіемъ:

$$H(q_a) = H(-q_a),$$

а этому условію функція H', вообще, неудовлетворяетъ. Если, напримѣръ, магнитное поле извѣстной напряженности отклоняетъ плоскость поляризаціи луча, но отклоненіемъ плоскости поляризаціи приличной силы и направленія мы не можемъ произвести магнитнаго поля. Гельмгольцъ даетъ еще одинъ видъ параметровъ особаго свойства. Пусть существуютъ такіе параметры категоріи c, что для нихъ:

$$P_c = 0, \quad q_c = \text{Const.};$$

но не трудно убѣдиться въ равнозначности послѣдняго условія съ слѣдующимъ:

$$q_c = 0,$$

слѣдовательно, могутъ существовать параметры, удовлетворяющіе условіямъ:

$$P_c = 0, \quad q_c = 0.$$

Но въ такомъ случаѣ

$$\frac{\partial H}{\partial q_c} = 0,$$

а уравненіе (B), примѣненное къ этому случаю даетъ:

$$\frac{\partial H}{\partial p_c} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

Послѣднихъ уравненій столько числомъ, сколько параметровъ категоріи c и изъ нихъ можемъ опредѣлить всѣ p_c и подставить въ выраженіе H; тогда опять для H получимъ выраженіе *съ линейными членами скоростей*, но болѣе сложнаго вида.

Соединяя все сказанное, можемъ утверждать, что принципъ Гамильтона, написанный въ формѣ:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} [H + \sum P_a p_a] \, dt = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (A \text{ bis})$$

можетъ-быть примѣненъ къ построенію теорій какихъ угодно физическихъ явленій, какія-бы силы ни участвовали въ тѣхъ физическихъ процессахъ или кинетическихъ состояніяхъ *), которые лежатъ въ основѣ ихъ; при этомъ дѣйствующія силы могутъ и не принадлежать къ категоріи силъ чисто-консервативныхъ, какъ напримѣръ силы тренія, силы сопротивленія электрическому току и т. п. Кинетическій потенціалъ H системы вопреки „старымъ узкимъ" взглядамъ, можетъ содержать члены съ первыми степенями скоростей точекъ.

Гельмгольцъ приложилъ принципъ Гамильто́на въ обобщенной формѣ или *принципъ наименьшаго дѣйствія*, какъ онъ называетъ его, къ явленіямъ термодинамики и явленіямъ электромагнитнымъ (въ широкомъ смыслѣ слова); этимъ-же принципомъ онъ руководствовался при построеніи электромагнитной теоріи свѣторазсѣянія **).

Такимъ образомъ, принципъ Гамильтона въ его обобщенной формѣ по всей справедливости можетъ считаться „рабочимъ" принципомъ;

---

*) Въ этихъ физическихъ процессахъ могутъ принимать участіе не только частицы „вѣсомой" матеріи, но и частицы эфира.

**) Въ 1882 году я пользовался принципомъ Гамильтона въ формѣ, данной Кирхгофомъ, для построенія теоріи двойнаго преломленія въ связи съ свѣторазсѣяніемъ. Этотъ принципъ я выражалъ въ слѣдующей формѣ:

$$\int dt(\delta T + \delta U) = 0 \, ,$$

гдѣ буквой T обозначена кинетическая энергія, а символомъ δU сумма элементарныхъ работъ всѣхъ силъ; въ обозначеніи Гельмгольца это

$$\delta U = -\delta \Phi - \sum P_i \delta p_i \, ,$$

причемъ можно не раздѣлять внутреннія силы отъ внѣшнихъ, а разбить всѣ силы на двѣ группы: силы чисто-консервативныя и силы не имѣющія потенціала. См. „Сообщенія Харьк. Матем. Общ." I серія, 1882, вып. 1, стр. 3—82.

Гельмгольцъ считаетъ его даже „эвристическимъ“, т. е. могущимъ служить для открытія *новыхъ* физическихъ явленій.

Въ настоящемъ докладѣ, посвященномъ памяти Гельмгольца, мы изложимъ его теорію электрическихъ и магнитныхъ явленій и электромагнитную теорію свѣторазсѣянія. Первая теорія дана имъ въ 1892 г. въ статьѣ: „Принципъ наименьшаго дѣйствія и его значеніе въ электродинамикѣ“, а вторая въ 1893 году въ статьѣ: „электромагнитная теорія свѣторазсѣянія“ *).

Выводъ основныхъ уравненій электродинамики.

Пусть имѣемъ изотропную систему, состоящую изъ діэлектриковъ и проводниковъ; пусть эта система будетъ ограничена съ одной стороны поверхностями проводниковъ, а съ другой поверхностью сферы безконечно-большаго радіуса, такъ что діэлектрики наполняютъ все пространство, хотя могутъ быть какими угодно. Пусть далѣе, система такова, что скорости ея частицъ или нули, или постоянныя величины, такъ что ея кинетическій потенціалъ равенъ просто функціи Φ и принципъ Гамильтона напишется въ формѣ:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} [\Phi + \sum P_a p_a] dt = 0 \,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

причемъ, какъ помнимъ, силы P_a варіированію не подлежатъ.

Кинетическій потенціалъ будетъ, слѣдовательно, вызываться тѣми физическими процессами, которые происходятъ въ діэлектрикѣ и проводникахъ.

Въ каждой точкѣ діэлектрика дѣйствуютъ электрическія и магнитныя силы и механическія, а въ точкахъ проводниковъ силы сопротивленія электрическимъ токамъ и электродвижущія силы и сверхъ того на поверхностяхъ проводниковъ дѣйствуютъ механическія силы. Электрическія и магнитныя силы Гельмгольцъ считаетъ консервативными силами, а прочія нѣтъ.

Выразимъ теперь функцію Φ. Условимся сначала относительно обозначеній и терминовъ. Въ послѣдующемъ мы будемъ употреблять термины и обозначенія теоріи Максвелла, *во первыхъ* потому, что старые термины (діэлектрическій моментъ, діэлектрическая поляризація и т. п.) могутъ повести къ недоразумѣніямъ, *во вторыхъ* — идеи Гельмгольца въ излагаемомъ нами мемуарѣ въ сущности суть идеи Максвелла (Гер-

---

*) Обѣ статьи помѣщены въ Wied. Ann. Bd. 47 und 48, а также въ запискахъ Берлинской академіи наукъ за тѣже года. См. также журналъ Crelle, т. 100, стр. 137—166 (1886 г.).

ца), а не старой его теоріи электродинамики *) и наконецъ *въ третьихъ* обозначенія Максвелла болѣе распространены и общеизвѣстны **).

Пусть V будетъ магнитная энергія системы, W — электрическая и U электромагнитная энергія токовъ перемѣщенія (пертурбаціонныхъ токовъ), въ такомъ случаѣ получимъ:

$$\Phi = V + W + U \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Выразимъ теперь всѣ эти величины въ функціи электрической пертурбаціи, магнитной силы и такъ-называемаго векторъ-потенціала.

Пусть f, g, h будутъ проекціи электрической пертурбаціи въ точкѣ (x, y, z), K діэлектрическая постоянная въ той же точкѣ средины; α, β, γ проекціи магнитной силы и μ магнитная постоянная (коэффиціентъ магнитной проницаемости среды) l, m, n составляющія силы постояннаго магнетизма ***) и наконецъ F, G, H составляющія векторъ-потенціала. Въ такомъ случаѣ, если положимъ для простоты письма:

$$f_m = \frac{\mu}{4\pi}\alpha, \quad g_m = \frac{\mu}{4\pi}\beta, \quad h_m = \frac{\mu}{4\pi}\gamma \text{ ****)},$$

то для V, W и U будемъ имѣть:

$$V = \int \frac{2\pi}{\mu}(f_m^2 + g_m^2 + h_m^2)\, d\tau \text{ *****)}, \quad W = \int \frac{2\pi}{K}(f^2 + g^2 + h^2)\, d\tau$$

и

$$U = A \int \left(F\frac{df}{dt} + G\frac{dg}{dt} + H\frac{dh}{dt} \right) d\tau,$$

причемъ $d\tau$—элементъ объема средины въ точкѣ (x, y, z) и t время.

Между магнитной силой (α, β, γ) и составляющими векторъ-потенціала существуютъ зависимости, даваемыя, *какъ опредѣленія* магнитной силы, а именно:

---

*) Ср. *Poincaré*: Électricité et Optique, II, pp. 110—113; 114; 126 и *Conclusions*. Также *Drude*: Physik des Aethers, SS. 337—342.

**) Полезно ср. *Boltzmann*: Vorlesungen über Maxwell's Theorie der Elektricität und des Lichtes, II Th. p. IV.

***) Въ этомъ пунктѣ теорія Гельмгольца полнѣе теоріи Герца.

****) Это будутъ составляющія такъ называемой *магнитной пертурбаціи*.

*****) Такъ какъ составляющія постояннаго магнетизма l, m, n варіаціоннымъ измѣненіямъ не подлежатъ, то мы ихъ и не вводимъ въ выраженіе для V.

$$\left.\begin{aligned}\mu\alpha+l&=\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\partial G}{\partial z}\\ \mu\beta+m&=\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial H}{\partial x}\\ \mu\gamma+n&=\frac{\partial G}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial y}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Коэффиціентъ A есть абсолютное постоянное, т. е. одно и тоже для всѣхъ срединъ и $\frac{1}{A}$ есть скорость распространенія электромагнитной пертурбаціи въ чистомъ эфирѣ.

Составимъ теперь выраженіе $\sum P_a p_a$.

Пусть P_0, Q_0, R_0 составляющія электродвижущей силы соприкосновенія или термоэлектрической разности проводниковъ и т. п.; p, q, r — составляющія тока проводимости; X, Y, Z составляющія механической силы, приложенной къ точкѣ (x, y, z) внутри средины; X_n, Y_n, Z_n — подобной-же силы, но приложенной къ точкамъ поверхности, ограничивающей средину и наконецъ ξ, η, ζ — проекціи перемѣщенія точки (x, y, z).

Поэтому будемъ имѣть:

$$\sum P_a p_a=\int[(P_0f+Q_0g+R_0h)+A(Fp+Gq+Hr)+(X\xi+Y\eta+Z\zeta)]d\tau+$$

$$+\int[A(Fp+Gq+Hr)+(X_n\xi+Z_n\eta+Z_n\zeta)]dS.$$

Здѣсь варіированію будутъ подлежать лишь количества: f, g, h; F, G, H и ξ, η, ζ. Надо замѣтить, что Гельмгольцъ не вводитъ силъ, работающихъ на поверхности проводниковъ или діэлектриковъ; но намъ кажется, что это имъ сдѣлано единственно въ видахъ простоты анализа; сущность-же дѣла, разумѣется, требуетъ введенія силъ на поверхности.

Теперь остается только все найденное подставить въ равенство (1) и вычислить варіаціи, входящія въ составъ этого равенства. Для упрощенія вычисленій мы замѣтимъ слѣдующее. Такъ какъ α, β, γ или, все равно, f_m, g_m, h_m связаны съ F, G, H соотношеніями (3), то независимыхъ перемѣнныхъ подлежащихъ варіированію будетъ три группы: f, g, h; F, G, H и ξ η, ζ; что же касается коэффиціентовъ K и μ, то, хотя они и могутъ измѣняться вслѣдствіе деформацій средины, но ихъ можно разсматривать, какъ функціи x, y, z. Затѣмъ, замѣтимъ еще то обстоятельство, что f, g, h и F, G, H могутъ измѣняться какъ съ теченіемъ времени, т. е. какъ функціи t, такъ и вслѣдствіе деформацій средины, такъ что можемъ положить, что

$$\delta f = \delta_1 f + \delta_2 f\,,$$

$$\delta F = \delta_1 F + \delta_2 F$$

и подобныя равенства для δg, δh; δG и δH; при этомъ ясно, что символомъ δ_1 мы обозначаемъ варіаціи отъ первой причины измѣняемости, а δ_2 — отъ второй.

Такимъ образомъ можемъ изучать отдѣльно измѣняемость разсматриваемыхъ количествъ отъ той и другой причины и тогда анализъ значительно упрощается.

Прежде чѣмъ приступить къ опредѣленію варіаціи интеграла:

$$\int\left(\Phi + \sum P_a p_a\right) dt\,,$$

замѣтимъ нѣкоторыя свойства перемѣнныхъ F, G, H и f, g, h, а также составляющихъ силы постояннаго магнетизма.

Такъ какъ ξ, η, ζ суть проекціи перемѣщенія точки (x, y, z), то тогда скорости будутъ:

$$\frac{d\xi}{dt} = u\,,\ \frac{d\eta}{dt} = v\,,\ \frac{d\zeta}{dt} = w\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Далѣе, если возьмемъ внутри средины безконечно-малый элементъ поверхности, опирающійся на нѣкоторый безконечно-малый замкнутый контуръ, то

$$[l\cos(nx) + m\cos(ny) + n\cos(nz)]\,dS\,^{*})$$

будетъ притокомъ магнитной силы черезъ элементъ dS во время t; для момента $t + dt$ этотъ притокъ будетъ:

$$[l\cos(nx) + m\cos(ny) + n\cos(nz)]\,dS + \delta\,[l\cos(nx) + m\cos(ny) +$$
$$+ n\cos(nz)]\,dS\,.$$

Если мы допустимъ, что въ силу сплошности средины однѣ и тѣ же точки ея приходятся на элементъ dS и ограничивающій его контуръ ds, какъ для момента времени t, такъ и для момента $t + dt$, то получимъ:

$$\delta\,[l\cos(nx) + m\cos(ny) + n\cos(nz)]\,dS = 0$$

*) Не надо смѣшивать нормала n подъ знакомъ cos съ магнитной силой n.

или:

$$\delta[l\,dy\,dz + m\,dx\,dz + n\,dx\,dy] = 0 \, . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (b)$$

Но ниже (фор. 21), приведены формулы для δf, δg, δh при условіи, что электрическія пертурбаціи f, g, h удовлетворяютъ соотношенію вида (b), а потому, полагая въ нихъ:

$$udt\,, \quad vdt\,, \quad wdt$$

вмѣсго $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ и l, m, n вмѣсто f, g, h, найдемъ:

$$\delta l = \tau u dt + \frac{\partial}{\partial z}(nu - lw)\,dt - \frac{\partial}{\partial y}(lv - mu)\,dt \, .$$

Но

$$\delta l = \frac{\partial l}{\partial t} dt\,,$$

а потому находимъ первую изъ нижеписанныхъ формулъ, остальныя двѣ получатся подобнымъ-же образомъ:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial l}{\partial t} - \tau u + \frac{\partial}{\partial y}(vl - um) - \frac{\partial}{\partial z}(un - wl) = 0 \\ &\frac{\partial m}{\partial t} - \tau v - \frac{\partial}{\partial x}(vl - um) + \frac{\partial}{\partial z}(wm - vn) = 0 \\ &\frac{\partial n}{\partial t} - \tau w - \frac{\partial}{\partial y}(wm - vn) + \frac{\partial}{\partial x}(un - wl) = 0 \, . \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; (c)$$

Здѣсь положено:

$$-\tau = \frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial n}{\partial z} \, . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (d)$$

Механическое значеніе τ откроется, если сложимъ равенства (c), предварительно продифференцированныя по x, y, z; находимъ тогда;

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial (u\tau)}{\partial x} + \frac{\partial (v\tau)}{\partial y} + \frac{\partial (w\tau)}{\partial z} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (e)$$

или

$$\delta\,(\tau\,dx\,dy\,dz) = 0\,,$$

т. е. τ есть плотность нѣкоторой *фиктивной жидкости*; это τ, слѣдовательно, есть объемная плотность постояннаго магнетизма, существующаго въ точкѣ (x, y, z).

Равенства (3) даютъ:

$$\frac{\partial(\mu\alpha)}{dx}+\frac{\partial(\mu\beta)}{dy}+\frac{\partial(\mu\gamma)}{dz}=\tau. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (f)$$

Теперь надо замѣтить относительно F, G, H, что если α, β, γ; l, m, n будутъ даны, то уравненій (3) будетъ недостаточно для опредѣленія F, G, H: надо еще добавочное условіе; за это условіе Гельмгольцъ беретъ слѣдующее:

$$\frac{\partial F}{dx}+\frac{\partial G}{dy}+\frac{\partial H}{dz}=\varDelta\Psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (g)$$

причемъ функція Ψ должна считаться данной.

Въ этихъ двухъ пунктахъ (τ и Ψ) Гельмгольцева теорія полнѣе Максвелловой; въ этой послѣдней:

$$\tau=0, \quad \Psi=\text{Const.}$$

Точно также электрическое перемѣщеніе f, g, h должно удовлетворять соотношенію (b), а слѣдовательно, положивъ въ формулахъ (21)

$$-udt, \quad -vdt, \quad -wdt$$

вмѣсто $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ и взявъ вмѣсто δf, δg, δh выраженія:

$$\left(\frac{df}{dt}-\frac{\partial f}{\partial t}\right)dt, \quad \left(\frac{dg}{dt}-\frac{\partial g}{\partial t}\right)dt, \quad \left(\frac{dh}{dt}-\frac{\partial h}{\partial t}\right)dt,$$

найдемъ:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{df}{dt}&=\frac{\partial f}{\partial t}+\varrho u+\frac{\partial}{dy}(vf-ug)-\frac{\partial}{dz}(uh-wf)\\
\frac{dg}{dt}&=\frac{\partial g}{\partial t}+\varrho v-\frac{\partial}{dx}(vf-ug)+\frac{\partial}{dz}(wg-vh)\\
\frac{dh}{dt}&=\frac{\partial h}{\partial t}+\varrho w-\frac{\partial}{dy}(wg-vh)+\frac{\partial}{dx}(uh-wf).
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (h)$$

Такимъ образомъ,

$$\frac{df}{dt}dt, \quad \frac{dg}{dt}dt, \quad \frac{dh}{dt}dt$$

будутъ *полными варіаціями* f, g, h *по времени* t.

Опредѣлимъ теперь варіаціи F, G, H.

Вообразимъ себѣ безконечно-малый замкнутый контуръ; работа электродвижущей напряженности на элементѣ его будетъ для момента времени t:

$$Fdx + Gdy + Hdz\,,$$

а потому въ силу принципа сплошности имѣемъ:

$$\delta(Fdx + Gdy + Hdz) = 0\,.$$

Отсюда при помощи формулъ (19) находимъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial P'}{\partial x} - v\left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right) + w\left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}\right) \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial P'}{\partial y} - w\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right) + u\left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right) \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial P'}{\partial z} - u\left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}\right) + v\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (i)$$

Здѣсь положено:

$$P' = Fu + Gv + Hw\,. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (j)$$

Такимъ образомъ

$$\frac{dF}{dt}\,dt\,,\quad \frac{dG}{dt}\,dt\,,\quad \frac{dH}{dt}\,dt$$

будутъ *полныя варіаціи* F, G, H *по времени* t.

И такъ, пусть сначала средина не подлежитъ геометрическимъ деформаціямъ, а всѣ количества измѣняются, какъ чистыя функціи времени t.

Поэтому получимъ, опуская на время указатель (1) при знакѣ δ:

$$\delta V = \frac{4\pi}{\mu}\int (f_m \delta f_m + g_m \delta g_m + h_m \delta h_m)\,d\tau\,,$$

но вслѣдствіе (3):

$$\delta f_m = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \delta H}{\partial y} - \frac{\partial \delta G}{\partial z}\right)$$

и подобныя формулы для δg_m и δh_m, ибо l, m, n должно считать постоянными по отношенію къ времени t.

Подставляя въ выраженіе для δV и интегрируя по частямъ, найдемъ:

$$\left.\begin{aligned}\delta V=\frac{1}{4\pi}\int\left[\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)\delta F+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)\delta G+\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)\delta H\right]d\tau+\\+\frac{1}{4\pi}\int\{[\gamma\cos(ny)-\beta\cos(nz)]\,\delta F+[\alpha\cos(nz)-\gamma\cos(nx)]\,\delta G+\\+[\beta\cos(nx)-\alpha\cos(ny)]\,\delta H\}\,dS.\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Опредѣлимъ теперь δU.

Сначала находимъ:

$$\delta U=A\int\left(\frac{df}{dt}\delta F+\frac{dg}{dt}\delta G+\frac{dh}{dt}\delta H\right)d\tau-A\int\left(\frac{dF}{dt}\delta f+\frac{dG}{dt}\delta g+\frac{dH}{dt}\delta h\right)d\tau,$$

гдѣ вмѣсто членовъ вида:

$$F\frac{d\delta f}{dt}d\tau\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(a)$$

подставлены члены вида:

$$-\frac{dF}{dt}\delta f d\tau\,,\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(b)$$

ибо δU входитъ въ принципъ Гамильтона подъ знакомъ интеграла:

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta U dt\,,$$

а потому, проинтегрировавъ по t члены вида (a) и замѣтивъ, что для $t=t_0$ и $t=t_1$:

$$\delta f=\delta g=\delta h=0\,,$$

убѣждаемся въ законности подстановки (b).

Соединяя теперь δV, δU и δW, причемъ послѣднее выраженіе напишется безъ всякихъ преобразованій, получимъ:

$$\begin{aligned}\int d\tau\int_{t_0}^{t_1}dt\Big\{\left(\frac{4\pi}{K}f-A\frac{dF}{dt}\right)\delta f+\left(\frac{4\pi}{K}g-A\frac{dG}{dt}\right)\delta g+\left(\frac{4\pi}{K}h-A\frac{dH}{dt}\right)\delta h+\\+\left[\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)+A\frac{df}{dt}\right]\delta F+\left[\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)+A\frac{dg}{dt}\right]\delta G+\\+\left[\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)+A\frac{dh}{dt}\right]\delta H\Big\}+\\+\int_{t_0}^{t_1}dt\int\frac{dS}{4\pi}\{[\gamma\cos(ny)-\beta\cos(nz)]\,\delta F+\\+[\alpha\cos(nz)-\gamma\cos(nx)]\,\delta G+[\beta\cos(nx)-\alpha\cos(ny)]\,\delta H\}=\\=\delta\int_{t_0}^{t_1}(V+W+U)\,d\tau.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(c)\end{aligned}$$

Затѣмъ имѣемъ:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \sum P_a p_a \, dt =$$

$$= \int d\tau \int_{t_0}^{t_1} dt \Big\{ (P_0 \delta f + Q_0 \delta g + R_0 \delta h) + A(p\delta F + q\delta G + r\delta H) \Big\} +$$

$$+ A \int_{t_0}^{t_1} dt \int (p\delta F + q\delta G + r\delta H)\, dS \;.\;.\;.\;.\;.\;. \;(d)$$

Подставляя все это въ выраженіе (1) принципа Гамильтона и приравнивая нулю коэффиціенты при $\delta f, \ldots \delta H$ въ объемныхъ интегралахъ, получимъ слѣдующія двѣ системы уравненій для точекъ *внутри* средины:

первая система:

$$\frac{4\pi f}{K} - A\frac{dF}{dt} + P_0 = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. (e)$$

и подобныя уравненія для g и h;

вторая система:

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}\right) + A\frac{df}{dt} + Ap = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. (f)$$

и подобныя-же уравненія для α и γ; β и α.

Введемъ составляющія полной электрической силы, которыя обозначимъ P, Q, R, т. е. положимъ:

$$P = \frac{4\pi}{K} f\,, \quad Q = \frac{4\pi}{K} g\,, \quad R = \frac{4\pi}{K} h\,, \;.\;.\;.\;.\;.\;. (5)$$

тогда первая система дастъ слѣдующую:

$$P = A\frac{dF}{dt} - P_0\,, \quad Q = A\frac{dG}{dt} - Q_0\,, \quad R = A\frac{dH}{dt} - R_0 \;.\;. (6)$$

Это извѣстныя соотношенія Максвелла для средины, находящейся въ движеніи.

Вторая система при помощи уравненій (6) обратится въ слѣдующую:

$$\left.\begin{aligned}AK\frac{dP}{dt}+4\pi Ap&=\frac{\partial\beta}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial y}\\ AK\frac{dQ}{dt}+4\pi Aq&=\frac{\partial\gamma}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial z}\\ AK\frac{dR}{dt}+4\pi Ar&=\frac{\partial\alpha}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial x}.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ (7)$$

Это вторая система уравненій Максвелла *).

Если-бы воспользовались уравненіями (3) и (6), то получили-бы первую систему уравненій Герца:

$$\left.\begin{aligned}A\mu\frac{d\alpha}{dt}&=\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\\ A\mu\frac{d\beta}{dt}&=\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\\ A\mu\frac{d\gamma}{dt}&=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ (8)$$

Уравненія (7) представляютъ 2-ую систему Герца.

Если разсматриваемая средина неподвижна $(u=v=w=0)$, то въ предыдущихъ формулахъ вмѣсто $\frac{df}{dt},\ldots\frac{dH}{dt}$ надо взять частныя производныя $\frac{\partial f}{\partial t},\ldots\frac{\partial H}{\partial t}$; если-же средина находится въ движеніи, то вмѣсто тѣхъ-же количествъ придется брать ихъ значеніе изъ формулъ (h) и (i); такъ что получимъ вмѣсто системы (e) слѣдующую:

$$\frac{4\pi}{K}f+P_0-A\left\{\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial P'}{\partial x}-v\left(\frac{\partial G}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial y}\right)+w\left(\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial H}{\partial x}\right)\right\}=0\quad (e\text{ bis})$$

и подобныя для g и h.

Исключая изъ нихъ функцію P' по извѣстному пріему и замѣняя значенія $\frac{\partial l}{\partial t}$, $\frac{\partial m}{\partial t}$, $\frac{\partial n}{\partial t}$ изъ равенствъ (c), получимъ:

$$\left.\begin{aligned}A\left[\frac{\partial(\mu\alpha)}{\partial t}+u\tau+\frac{\partial}{\partial y}\mu(v\alpha-u\beta)-\frac{\partial}{\partial z}\mu(u\gamma-w\alpha)\right]&=\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\\ A\left[\frac{\partial(\mu\beta)}{\partial t}+v\tau-\frac{\partial}{\partial x}\mu(v\alpha-u\beta)+\frac{\partial}{\partial z}\mu(w\beta-v\gamma)\right]&=\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\\ A\left[\frac{\partial(\mu\gamma)}{\partial t}+w\tau-\frac{\partial}{\partial y}\mu(w\beta-v\gamma)+\frac{\partial}{\partial x}\mu(u\gamma-w\alpha)\right]&=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}.\end{aligned}\right\}.\ (8\text{ bis})$$

*) Только оси координатъ прямо-противоположны Максвелловымъ.

Вмѣсто уравненій (f) будемъ имѣть слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned}
&A\left[\frac{\partial f}{\partial t}+u\varrho+\frac{\partial}{\partial y}(vf-ug)-\frac{\partial}{\partial z}(uh-wf)\right]+4\pi Ap=\frac{\partial\beta}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial y}\cdot\\
&A\left[\frac{\partial g}{\partial t}+v\varrho-\frac{\partial}{\partial x}(vf-ug)+\frac{\partial}{\partial z}(wg-vh)\right]+4\pi Aq=\frac{\partial\gamma}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial z}\\
&A\left[\frac{\partial h}{\partial t}+w\varrho-\frac{\partial}{\partial y}(wg-vh)+\frac{\partial}{\partial x}(uh-wf)\right]+4\pi Ar=\frac{\partial\alpha}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial x}
\end{aligned}\right\}.\ (7\text{ bis})$$

Эти двѣ системы получены Г. Герцемъ.

Векторъ: $u\varrho$, $v\varrho$, $w\varrho$ будетъ представлять конвекціонный токъ, открытый Роуландомъ.

Теперь остается изслѣдовать условія на поверхности.

Эти условія получаются изъ выраженій (c) и (d), если приравнять нулю коэффиціенты при δF, δG, δH въ поверхностныхъ интегралахъ; при этомъ поверхность S можетъ быть поверхностью разрыва, отдѣляющею одинъ діэлектрикъ отъ другого; въ такомъ случаѣ надо вообразить двѣ поверхности безконечно-близкія одна отъ другой и взять интегралы по объимъ; въ такомъ случаѣ получимъ:

$$[\gamma\cos(ny)-\beta\cos(nz)]_1=[\gamma\cos(ny)-\beta\cos(nz)]_2$$

$$[\alpha\cos(nz)-\gamma\cos(nx)]_1=[\alpha\cos(nz)-\gamma\cos(nx)]_2$$

$$[\beta\cos(nx)-\alpha\cos(ny)]_1=[\beta\cos(nx)-\alpha\cos(ny)]_2,$$

такъ какъ p, q, r для діэлектриковъ равны нулю.

Изъ этихъ уравненій находимъ, взявъ для простоты нормалъ къ поверхности за ось z-овъ, а двѣ ортогональныя касательныя за оси x и y, слѣдующія условія:

$$\alpha_1=\alpha_2,\quad \beta_1=\beta_2.\ \ldots\ldots\ldots\ (9)$$

Если-же поверхность S будетъ отдѣлять проводникъ отъ діэлектрика или проводникъ отъ проводника, то подобнымъ-же образомъ найдемъ для послѣдняго случая:

$$\left.\begin{aligned}
&[\gamma\cos(ny)-\beta\cos(nz)+4\pi Ap]_1=[\gamma\cos(ny)-\beta\cos(nz)+4\pi Ap]_2\\
&[\alpha\cos(nz)-\gamma\cos(nx)+4\pi Aq]_1=[\alpha\cos(nz)-\gamma\cos(nx)+4\pi Aq]_2\\
&[\beta\cos(nx)-\alpha\cos(ny)+4\pi Ar]_1=[\beta\cos(nx)-\alpha\cos(ny)+4\pi Ar]_2.
\end{aligned}\right\}(10)$$

Если положимъ

$$p_1=q_1=r_1=0,$$

то будемъ имѣть случай проводника и діэлектрика.

Замѣтимъ здѣсь нѣкоторыя формулы, которыя намъ ниже будутъ нужны.

Положимъ:

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \\ -\sigma &= \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

такъ что ϱ будетъ объемной плотностью электричества, а σ поверхностной плотностью тока; въ такомъ случаѣ равенства (f) по дифференцированіи по x, y, z и по сложеніи результатовъ дадутъ:

$$\sigma = \frac{d\varrho}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Для p, q, r можемъ написать соотношенія:

$$p = C(P - P_0), \quad q = C(Q - Q_0), \quad r = C(R - R_0) \quad \ldots (13)$$

выражающія законъ Ома, причемъ C есть коэффиціентъ электропроводности.

Выведемъ теперь еще два соотношенія, необходимыя намъ для послѣдующаго.

Уравненія (7) по умноженіи на $\cos(nx)$, $\cos(ny)$, $\cos(nz)$ и на dS дадутъ, если результаты сложить и взять интегралъ по нѣкоторой не замкнутой поверхности, опирающейся на нѣкоторый замкнутый контуръ. Получимъ:

$$\iint\left[\left(\frac{\partial\beta}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)\cos(nx) + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)\cos(ny) + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x}\right)\cos(nz)\right] dS =$$

$$= AK\frac{d}{dt}\iint[P\cos(nx) + Q\cos(ny) + R\cos(nz)]\,dS,$$

ибо

$$p\cos(nx) + q\cos(ny) + r\cos(nz) = 0.$$

Преобразуя лѣвую часть предыдущаго равенства по теоремѣ Стокса, а въ правую подставляя значенія P, Q, R изъ уравненій (5), найдемъ:

$$\int\left(\alpha\frac{dx}{ds} + \beta\frac{dy}{ds} + \gamma\frac{dz}{ds}\right) ds = 4\pi A\frac{d}{dt}\iint[f\cos(nx) + g\cos(ny) + h\cos(nz)]\,dS,$$

гдѣ ds будетъ элементъ контура, на который опирается поверхность S.

Умножая на dt и интегрируя отъ $t=t_0$ до какого-нибудь значенія t, найдемъ:

$$\int [f\cos(nx)+g\cos(ny)+h\cos(nz)]\,dS=F(t),$$

если выберемъ нижній предѣлъ t_0 такимъ, чтобы для него f, g, h обращались въ нуль. Такъ какъ контуръ можетъ быть взятъ безконечно-малымъ, то заключаемъ, что если контуръ деформируется, то

$$\delta_2[f\cos(nx)+g\cos(ny)+h\cos(nz)]\,dS=0$$

или:

$$\delta_2\{fdydz+gdxdz+hdxdy\}=0\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(14)$$

Физическій смыслъ этого равенства понятенъ: трехчленъ въ скобкахъ выражаетъ число линій электрической силы, проходящихъ черезъ безконечно-малый элементъ поверхности.

Это, въ сущности, есть выраженіе принципа сплошности.

Аналогичное соотношеніе получимъ для магнитныхъ силовыхъ линій. Дѣйствительно, равенства (6) даютъ:

$$A\frac{d}{dt}\int(Fdx+Gdy+Hdz)=\int(Pdx+Qdy+Rdz),$$

причемъ интегралъ взятъ по замкнутому контуру и кромѣ того замѣчено, что:

$$P_0=-\frac{\partial\Psi}{\partial x},\quad Q_0=-\frac{\partial\Psi}{\partial y},\quad R_0=-\frac{\partial\Psi}{\partial z}.$$

Отсюда найдемъ, какъ и выше, что:

$$\int(Fdx+Gdy+Hdz)=f(t),$$

а отсюда:

$$\delta_2[Fdx+Gdy+Hdz]=0\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(15)$$

Гельмгольцъ даетъ равенства (14) и (15) безъ доказательства и пользуется ими при опредѣленіи варіацій $\delta_2 f, \ldots \delta_2 H$, обусловленныхъ деформаціями среды.

Теперь мы и перейдемъ къ опредѣленію этихъ варіацій, происходящихъ отъ деформацій среды и дающихъ мѣсто явленіямъ электро-и магнито-стрикціи.

Разовьемъ сначала равенство (15). Взявъ варіацію и опустивъ для простоты указатель (2), получимъ:

$$\delta F dx + \delta G dy + \delta H dz + F\delta . dx + G\delta . dy + H\delta . dz = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Если обозначимъ координаты точки (x, y, z) послѣ деформаціи черезъ $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$, то получимъ:

$$\delta x = \delta\xi\,, \quad \delta y = \delta\eta\,, \quad \delta z = \delta\zeta\,,$$

затѣмъ находимъ:

$$\left.\begin{aligned} \delta . dx = d . \delta x &= \frac{\partial \delta\xi}{\partial x} dx + \frac{\partial \delta\xi}{\partial y} dy + \frac{\partial \delta\xi}{\partial z} dz \\ \delta . dy = d . \delta y &= \frac{\partial \delta\eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \delta\eta}{\partial y} dy + \frac{\partial \delta\eta}{\partial z} dz \\ \delta . dz = d . \delta z &= \frac{\partial \delta\zeta}{\partial x} dx + \frac{\partial \delta\zeta}{\partial y} dy + \frac{\partial \delta\zeta}{\partial z} dz . \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Далѣе, если обозначимъ $[\delta F]$, $[\delta G]$, $[\delta H]$ варіаціи F, G, H, входящія въ равенство (16) и происходящія вслѣдствіе измѣненій ξ, η, ζ, удовлетворяющихъ равенству (15), то получимъ по подстановкѣ значеній $\delta . dx$, $\delta . dy$ и $\delta . dz$ изъ равенствъ (17):

$$\begin{aligned} &\left\{[\delta F] + F\frac{\partial \delta\xi}{\partial x} + G\frac{\partial \delta\eta}{\partial x} + H\frac{\partial \delta\zeta}{\partial x}\right\} dx + \\ &+ \left\{[\delta G] + F\frac{\partial \delta\xi}{\partial y} + G\frac{\partial \delta\eta}{\partial y} + H\frac{\partial \delta\zeta}{\partial y}\right\} dy + \\ &+ \left\{[\delta H] + F\frac{\partial \delta\xi}{\partial z} + G\frac{\partial \delta\eta}{\partial z} + H\frac{\partial \delta\zeta}{\partial z}\right\} dz = 0 . \end{aligned}$$

Это выраженіе должно удовлетворяться при всѣхъ значеніяхъ dx, dy, dz, а потому находимъ:

$$-[\delta F] = F\frac{\partial \delta\xi}{\partial x} + G\frac{\partial \delta\eta}{\partial x} + H\frac{\partial \delta\zeta}{\partial x}$$

и подобныя выраженія для $[\delta G]$ и $[\delta H]$.

Полная варіація F, обусловленная деформаціями среды, будетъ:

$$\delta F = [\delta F] - \frac{\partial F}{\partial x}\delta\xi - \frac{\partial F}{\partial y}\delta\eta - \frac{\partial F}{\partial z}\delta\zeta \; ^{*)}$$

*) О знакахъ — при $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ см. далѣе.

или, подставивъ значеніе $[\delta F]$ и преобразовавъ:

$$\delta F = -\frac{\partial}{\partial x}(F\delta\xi + G\delta\eta + H\delta\zeta) + \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right)\delta\eta - \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}\right)\delta\zeta.$$

Если-же положимъ для краткости письма:

$$P = F\delta\xi + G\delta\eta + H\delta\zeta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

и введемъ значенія α, β, γ изъ уравненій (3) (положивъ въ нихъ: $l = m = n = 0$), то получимъ слѣдующую систему:

$$\left.\begin{aligned} \delta F &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu(\gamma\delta\eta - \beta\delta\zeta) \\ \delta G &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu(\alpha\delta\zeta - \gamma\delta\xi) \\ \delta H &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu(\beta\delta\xi - \alpha\delta\eta). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Теперь изъ равенства (14) надо опредѣлить $\delta_2 f$, $\delta_2 g$, $\delta_2 h$. Для этого опредѣленія установимъ сначала одну теорему изъ кинематики измѣняемой системы.

Пусть имѣемъ въ плоскости xy безконечно-малый прямоугольникъ $MACB$ со сторонами параллельными осямъ x-овъ и y-овъ и равными соотвѣтственно dx и dy; его площадь будетъ $dxdy$. Пусть онъ подвергнутъ безконечно-малой деформаціи и обращается вслѣдствіе этого въ безконечно-малый параллелограммъ $M_1A_1C_1B_1$, не лежащій уже въ плоскости xy. Координаты его вершинъ будутъ:

до деформаціи: *послѣ деформаціи:*

$M \quad x \quad y \quad 0 \ldots M_1 \quad x+u, \quad y+v, \quad w$

$A \quad x+dx, \quad y \quad 0 \ldots A_1 \quad x+u+dx+\frac{\partial u}{\partial x}dx, \; y+v+\frac{\partial v}{\partial x}dx, \; w+\frac{\partial w}{\partial x}dx;$

$B \quad x, \quad y+dy, \quad 0 \ldots B_1 \quad x+u+\frac{\partial u}{\partial y}dy, \; y+v+dy+\frac{\partial v}{\partial y}dy, \; w+\frac{\partial w}{\partial y}dy;$

$C \quad x+dx, \; y+dy, \; 0 \ldots C_1 \quad x+u+dx+\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy, \; y+v+dy+$

$$+\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy, \; w+\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial}dy.$$

Предполагая, что перемѣщенія u, v, w безконечно-малыя 1-го порядка, находимъ для сторонъ параллелограмма и его площади выраженія:

$$\overline{M_1A_1} = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx\,, \quad \overline{M_1B_1} = \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy$$

и

$$\text{пл. } M_1A_1C_1B_1 = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy\,.$$

Такъ какъ эта площадь уже не лежитъ въ плоскости xy, то найдемъ ея проекціи на координатныя плоскости; съ этой цѣлью опредѣлимъ косинусы направленія нормала къ ней.

Сначала имѣемъ съ тѣмъ-же приближеніемъ:

$$\cos(\overline{M_1A_1}\,,\ x) = 1\,;\ \cos(\overline{M_1A_1}\,,\ y) = \frac{\partial v}{\partial x}\,;\ \cos(\overline{M_1A_1}\,,\ z) = \frac{\partial w}{\partial x}\,;$$

$$\cos(\overline{M_1B_1}\,,\ x) = \frac{\partial u}{\partial y},\ \cos(\overline{M_1B_1}\,,\ y) = 1\,;\ \cos(\overline{M_1B_1}\,,\ z) = \frac{\partial w}{\partial y}\,.$$

Отсюда по извѣстному правилу аналитической геометріи находимъ косинусы направленія перпендикуляра къ плоскости прямыхъ $\overline{M_1A_1}$ и $\overline{M_1B_1}$; обозначая направленіе этого перпендикуляра черезъ n_3, получимъ:

$$\cos(n_3\,,\ x) = -\frac{\partial w}{\partial x}\,,\ \cos(n_3\,,\ y) = -\frac{\partial w}{\partial y}\,,\ \cos(n_3\,,\ z) = 1\,;$$

причемъ за положительное направленіе n_3 взято то, которое расположено относительно прямыхъ $\overline{M_1A_1}$ и $\overline{M_1B_1}$ такъ-же, какъ ось z-овъ относительно осей x-овъ и y-овъ.

Поэтому проекціи площади $M_1A_1C_1B_1$ на координатныя плоскости xy, xz и yz соотвѣтственно будутъ:

$$\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy\,;\ -\frac{\partial w}{\partial y}\,dx\,dy\,;\ -\frac{\partial w}{\partial x}\,dxdy.$$

Подобнымъ образомъ найдемъ проекціи площади $dxdz$ послѣ деформаціи на тѣ же координатныя плоскости; онѣ будутъ соотвѣтственно:

$$-\frac{\partial v}{\partial z}\,dx\,dz\,;\ \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dx\,dz;\quad -\frac{\partial v}{\partial x}\,dxdz$$

и для площади $dydz$:

$$-\frac{\partial u}{\partial z}\,dydz\,,\ -\frac{\partial u}{\partial y}\,dy\,dz\,,\ \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dydz\,.$$

Поэтому, если знакомъ δ обозначимъ безконечно-малыя измѣненія площади вслѣдствіе деформаціи, то получимъ слѣдующія формулы:

$$dxdy+\delta.dxdy=\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy-\frac{\partial v}{\partial z}dxdz-\frac{\partial u}{\partial z}dydz,$$

$$dxdz+\delta.dxdz=-\frac{\partial w}{\partial y}dxdy+\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dxdz-\frac{\partial u}{\partial y}dydz,$$

$$dydz+\delta.dydz=-\frac{\partial w}{\partial x}dxdy-\frac{\partial v}{\partial x}dxdz+\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dydz.$$

Отсюда по сокращеніи найдемъ варіаціи элементарныхъ площадей:

$$\left.\begin{aligned}\delta.dxdy&=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy-\frac{\partial v}{\partial z}dxdz-\frac{\partial u}{\partial z}dydz\\ \delta.dxdz&=-\frac{\partial w}{\partial y}dxdy+\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dxdz-\frac{\partial u}{\partial y}dydz\\ \delta.dydz&=-\frac{\partial w}{\partial x}dxdy-\frac{\partial v}{\partial x}dxdz+\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dydz.\end{aligned}\right\}\quad . \quad . \quad (20)$$

Эти равенства и представляютъ ту теорему *), которую мы хотѣли установить.

Обратимся теперь къ равенству (14). Обозначимъ варіаціи f, g, h, входящія въ составъ этого выраженія знаками: $[\delta f]$, $[\delta g]$ и $[\delta h]$; тогда получимъ:

$$[\delta f]\,dydz+[\delta g]\,dxdz+[\delta h]\,dxdz+f\delta.dydz+g\delta.dydz+h\delta.dxdy=0.$$

Полагая теперь въ формулахъ (20):

$$u=\delta\xi,\quad v=\delta\eta,\quad w=\delta\zeta,$$

подставляя значенія $\delta.dxdy,\ldots$ и приравнивая нулю коэффиціенты при $dxdy$, $dxdz$ и $dydz$, найдемъ:

$$[\delta f]=-f\left(\frac{\partial\delta\eta}{\partial y}+\frac{\partial\delta\zeta}{\partial z}\right)+g\frac{\partial\delta\xi}{\partial y}+h\frac{\partial\delta\xi}{\partial z}$$

и подобныя формулы для $[\delta g]$ и $[\delta h]$.

---

*) Cp. *Poincaré:* Leçons sur la théorie de l'élasticité, p. 78.

Полная варіація f, обусловленная деформаціей среды, будетъ:

$$\delta f = [\delta f] - \frac{\partial f}{\partial x}\,\delta\xi - \frac{\partial f}{\partial y}\,\delta\eta - \frac{\partial f}{\partial z}\,\delta\zeta\,,$$

а, слѣдовательно:

$$\delta f = -\frac{\partial f}{\partial x}\,\delta\xi - \frac{\partial}{\partial y}(f\delta\eta) - \frac{\partial}{\partial z}(f\delta\zeta) + g\,\frac{\partial\delta\zeta}{\partial y} + h\,\frac{\partial\delta\zeta}{\partial z}\,;$$

но приложивъ и вычтя двучленъ:

$$\frac{\partial g}{\partial y}\,\delta\xi + \frac{\partial h}{\partial z}\,\delta\xi$$

и положивъ

$$\varrho = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\,,$$

найдемъ первую изъ ниже написанныхъ формулъ; остальныя двѣ найдутся подобнымъ-же образомъ:

$$\left.\begin{aligned} \delta f &= -\varrho\delta\xi - \frac{\partial}{\partial y}(f\delta\eta - g\delta\xi) + \frac{\partial}{\partial z}(h\delta\xi - f\delta\zeta) \\ \delta g &= -\varrho\delta\eta + \frac{\partial}{\partial x}(f\delta\eta - g\delta\xi) - \frac{\partial}{\partial z}(g\delta\zeta - h\delta\eta) \\ \delta h &= -\varrho\delta\zeta - \frac{\partial}{\partial x}(h\delta\xi - f\delta\zeta) + \frac{\partial}{\partial y}(g\delta\zeta - h\delta\eta). \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;(21)$$

Къ этимъ формуламъ присоединимъ еще слѣдующую, извѣстную:

$$\delta\,.\,d\tau = \left(\frac{\partial\delta\xi}{\partial x} + \frac{\partial\delta\eta}{\partial y} + \frac{\partial\delta\zeta}{\partial z}\right) d\tau\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(22)$$

Теперь можемъ уже заняться и второй половиной нашей задачи, а именно выводомъ общихъ уравненій электро-и магнито-стрикціи. Возьмемъ варіаціи отъ W, U и V въ предположеніи, что f, g, h; F, G, H; K, μ и $d\tau$ претерпѣваютъ измѣненія, вызываемыя деформаціей средины; варіаціи первыхъ шести перемѣнныхъ уже даны формулами (19) и (21), а варіація элемента объема формулой (22); остается найти δK и $\delta\mu$. Оба коэффиціента K и μ суть функціи $(x\,,\,y\,,\,z)$, а потому:

$$\left.\begin{aligned}\delta K &= -\frac{\partial K}{\partial x}\delta\xi - \frac{\partial K}{\partial y}\delta\eta - \frac{\partial K}{\partial z}\delta\zeta \\ \delta\mu &= -\frac{\partial\mu}{\partial x}\delta\xi - \frac{\partial\mu}{\partial y}\delta\eta - \frac{\partial\mu}{\partial z}\delta\zeta ,\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (23)$$

такъ-какъ послѣ перемѣщенія въ точкѣ (x, y, z) будутъ тѣ значенія K и μ, которыя были до перемѣщенія въ точкѣ $(x-\delta\xi, y-\delta\eta, z-\delta\zeta)$.

Опредѣлимъ сначала δW. Находимъ при помощи (21):

$$\delta W = -\int\frac{4\pi}{K}d\tau\Big\{\varrho(f\delta\xi+g\delta\eta+h\delta\zeta)+f\frac{\partial}{\partial y}(f\delta\eta-g\delta\xi)-g\frac{\partial}{\partial x}(f\delta\eta-g\delta\xi)+$$

$$+h\frac{\partial}{\partial x}(h\delta\xi-f\delta\zeta)-f\frac{\partial}{\partial z}(h\delta\xi-f\delta\zeta)+$$

$$+g\frac{\partial}{\partial z}(g\delta\zeta-h\delta\eta)-h\frac{\partial}{\partial y}(g\delta\zeta-h\delta\eta)\Big\}-\int\frac{\mathbf{R}^2}{8\pi}\delta K d\tau+\int\frac{K\mathbf{R}^2}{8\pi}\delta.d\tau ,$$

гдѣ положено для кратности письма:

$$\mathbf{R}^2 = \frac{16\pi^2}{K^2}(f^2+g^2+h^2).$$

Это $\mathbf{R}$ будетъ электрической силой въ точкѣ (x, y, z).

Преобразуемъ члены съ производными отъ $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ и положимъ:

$$\Xi = -4\pi\Big\{g\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{f}{K}\Big)-g\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{g}{K}\Big)-h\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{g}{K}\Big)+$$

$$+h\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{f}{K}\Big)-\frac{\mathbf{R}^2}{32\pi^2}\frac{\partial K}{\partial x}\Big\}$$

или, подставляя значеніе ϱ, найдемъ первое выраженіе; остальные два найдутся подобнымъ-же образомъ:

$$\left.\begin{aligned}-\Xi &= 4\pi\Big\{\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{f^2-g^2-h^2}{2K}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{fg}{K}\Big)+\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{fh}{K}\Big)\Big\} \\ -H &= 4\pi\Big\{\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{fg}{K}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{g^2-f^2-h^2}{2K}\Big)+\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{gh}{K}\Big)\Big\} \\ -Z &= 4\pi\Big\{\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{fh}{K}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{gh}{K}\Big)+\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{h^2-f^2-g^2}{2K}\Big)\Big\}.\end{aligned}\right\} \quad \ldots (a)$$

Затѣмъ положимъ:

$$\left.\begin{aligned} -\Xi_n &= 4\pi\left\{\frac{f^2-g^2-h^2}{2K}\cos(nx)+\frac{fg}{K}\cos(ny)+\frac{fh}{K}\cos(nz)\right\}\\ -H_n &= 4\pi\left\{\frac{fg}{K}\cos(nx)+\frac{g^2-f^2-h^2}{2K}\cos(ny)+\frac{gh}{K}\cos(nz)\right\}\\ -Z_n &= 4\pi\left\{\frac{fh}{K}\cos(nx)+\frac{gh}{K}\cos(ny)+\frac{h^2-f^2-g^2}{2K}\cos(nz)\right\}.\end{aligned}\right\}\,.\,.\,(b)$$

При такихъ положеніяхъ для δW получимъ выраженіе:

$$\delta W=\int(\Xi\delta\xi+H\delta\eta+Z\delta\zeta)\,d\tau+\int(\Xi_n\delta\xi+H_n\delta\eta+Z_n\delta\zeta)\,dS.$$

Отсюда ясно, что

$$\delta W=0.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(\tau)$$

Найдемъ теперь δV.

Сначала имѣемъ:

$$\delta V=-\frac{1}{4\pi}\int\left\{\left[\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)\frac{\partial P}{\partial x}+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)\frac{\partial P}{\partial y}+\right.\right.$$

$$+\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)\frac{\partial P}{\partial z}\Bigg]-\mu\left[(\gamma\delta\eta-\beta\delta\zeta)\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+(\alpha\delta\zeta-\gamma\delta\xi)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)\right]\right\}d\tau-\frac{1}{4\pi}\int\Bigg\{[\gamma\cos(ny)-\beta\cos(nz)]\frac{\partial P}{\partial x}+$$

$$+[\alpha\cos(nz)-\gamma\cos(nx)]\frac{\partial P}{\partial y}+[\beta\cos(nx)-\alpha\cos(ny)]\frac{\partial P}{\partial z}-$$

$$-\mu(\gamma\delta\eta-\beta\delta\zeta)[\gamma\cos(ny)-\beta\cos(nz)]-\mu(\alpha\delta\zeta-\gamma\delta\xi)[\alpha\cos(nz)-\gamma\cos(nx)]-$$

$$-\mu(\beta\delta\xi-\alpha\delta\eta)[\beta\cos(nx)-\alpha\cos(ny)]\Bigg\}dS-\int\frac{d\tau}{8\pi}\mathbf{H}^2\delta\mu+\int\frac{\mu\mathbf{H}^2}{8\pi}\delta d\tau,$$

гдѣ положено:

$$\mathbf{H}^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(d)$$

Это $\mathbf{H}$ будетъ магнитной силой.

Преобразовывая объемные интегралы съ функціей P въ поверхностные, увидимъ, что они сократятся съ другими поверхностными интегралами; затѣмъ преобразовывая члены съ $\delta d\tau$ и подставляя значеніе $\delta\mu$, найдемъ, подобно предыдущему:

$$\delta V = \int (\Xi_1 \delta\xi + H_1 \delta\eta + Z_1 \delta\zeta) d\tau + \int (\Xi_{n1} \delta\xi + H_{n1} \delta\eta + Z_{n1} \delta\zeta)\, dS \ . \ . \ (e)$$

гдѣ положено:

$$\left.\begin{aligned} -\Xi_1 &= \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}(\mu\alpha\beta)+\frac{\partial}{\partial z}(\mu\alpha\gamma)\right\} \\ -H_1 &= \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(\mu\alpha\beta)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu(\beta^2-\alpha^2-\gamma^2)}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}(\mu\beta\gamma)\right\} \\ -Z_1 &= \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(\mu\alpha\gamma)+\frac{\partial}{\partial y}(\mu\beta\gamma)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mu(\gamma^2-\alpha^2-\beta^2)}{2}\right)\right\} \end{aligned}\right\} \ . \ . \ (f)$$

и

$$\left.\begin{aligned} -\Xi_{n1} &= \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\mu(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)}{2}\cos(nx)+\mu\alpha\beta\cos(ny)+\mu\alpha\gamma\cos(nz)\right\} \\ -H_{n1} &= \frac{1}{4\pi}\left\{\mu\alpha\beta\cos(nx)+\frac{\mu(\beta^2-\alpha^2-\gamma^2)}{2}\cos(ny)+\mu\beta\gamma\cos(nz)\right\} \\ -Z_{n1} &= \frac{1}{4\pi}\left\{\mu\alpha\gamma\cos(nx)+\mu\beta\gamma\cos(ny)+\frac{\mu(\gamma^2-\alpha^2-\beta^2)}{2}\cos(nz)\right\}. \end{aligned}\right\} \ . \ (g)$$

При этомъ пользовались равенствомъ:

$$\frac{\partial(\mu\alpha)}{\partial x}+\frac{\partial(\mu\beta)}{\partial y}+\frac{\partial(\mu\gamma)}{\partial z}=0.$$

И здѣсь видъ выраженій таковъ, что:

$$\delta V = 0 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (e)$$

Остается опредѣлить δU и $\sum P_a \delta p_a$.

Для перваго имѣемъ выраженіе:

$$\delta U = \int (\Xi_2 \delta\xi + H_2 \delta\eta + Z_2 \delta\zeta) d\tau + \int (\Xi_{n2} \delta\xi + H_{n2} \delta\eta + Z_{n2} \delta\zeta) dS, \ . \ (h)$$

гдѣ положено:

$$\left.\begin{aligned}
&\Xi_2 = A\frac{d}{dt}[F\varrho + \mu(\beta h - \gamma g)], \quad \Xi_{n2} = A\frac{d(Fv)}{dt}\\
&H_2 = A\frac{d}{dt}[G\varrho + \mu(\gamma f - \alpha h)], \quad H_{n2} = A\frac{d(Gv)}{dt}\\
&Z_2 = A\frac{d}{dt}[H\varrho + \mu(\alpha g - \beta f)], \quad Z_{n2} = A\frac{d(Hv)}{dt}
\end{aligned}\right\} \ldots \ldots (i)$$

Здѣсь положено для краткости письма:

$$v = f\cos(nx) + g\cos(ny) + h\cos(nz) \; \ldots \ldots \ldots (j)$$

Подобнымъ образомъ найдемъ:

$$\begin{aligned}
\sum P_a \delta p_a = \iint\Big\{&[X - P_0\varrho + A\mu(\beta r - \gamma q) - AF\sigma]\delta\xi +\\
&+ [Y - Q_0\varrho + A\mu(\gamma p - \alpha r) - AG\sigma]\,\delta\eta +\\
&+ [Z - R_0\varrho + A\mu(\alpha q - \beta p) - AH\sigma]\,\delta\zeta\Big\}\,d\tau +\\
+ \iint\Big\{&[\Lambda\cos(nx) - P_0 v + AFs + X_n]\,\delta\xi +\\
&+ [\Lambda\cos(ny) - Q_0 v + AGs + Y_n]\,\delta\eta +\\
&+ [\Lambda\cos(nz) - R_0 v + AHs + Z_n]\,\delta\zeta\Big\}\,dS \; \ldots \ldots (k)
\end{aligned}$$

Здѣсь положено:

$$\Lambda = P_0 f + Q_0 g + R_0 h\,, \quad s = p\cos(nx) + q\cos(ny) + r\cos(nz) \; \ldots (l)$$

приэтомъ для P_0, Q_0, R_0 пользовались условіями:

$$P_0 = -\frac{\partial\Psi}{\partial x}, \quad Q_0 = -\frac{\partial\Psi}{\partial y}, \quad R_0 = -\frac{\partial\Psi}{\partial z} \ldots \ldots (m)$$

причемъ Ψ будетъ потенціаломъ электрическихъ массъ, развивающихся въ мѣстахъ соприкосновенія проводниковъ.

Такъ какъ на поверхности проводниковъ должно быть:

$$P_0 = Q_0 = R_0 = 0\,,$$

$$v = 0\,, \quad s = 0\,,$$

то, слѣдовательно и

$$\Lambda = 0,$$

а потому, если положимъ:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= A\mu(\beta r - \gamma q) - P_0\varrho - AF\sigma \\ Y_1 &= A\mu(\gamma p - \alpha r) - Q_0\varrho - AG\sigma \\ Z_1 &= A\mu(\alpha q - \beta p) - R_0\varrho - AH\sigma, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (n)$$

то уравненіе для $\sum P_a \delta p_a$ будетъ:

$$\sum P_a \delta p_a = \int [(X + X_1)\delta\xi + (Y + Y_1)\delta\eta + (Z + Z_1)\delta\zeta] d\tau +$$

$$+ \int [X_n \delta\xi + Y_n \delta\eta + Z_n \delta\zeta]\, dS \ldots\ldots\ldots (p)$$

Соединяя выраженія δU и $\sum P_a \delta p_a$ вмѣстѣ, найдемъ:

$$\delta U + \sum P_a \delta p_a = \int \left\{ (X_1 + \Xi_2)\,\delta\xi + (Y_1 + H_2)\,\delta\eta + (Z_1 + Z_2)\,\delta\zeta \right\} d\tau +$$

$$+ \int (X\delta\xi + Y\delta\eta + Z\delta\zeta) d\tau + \int (X_n\delta\xi + Y_n\delta\eta + Z_n\delta\zeta) dS, \;\; \ldots (q)$$

такъ какъ вслѣдствіе того, что на поверхности проводниковъ

$$v = 0,$$

силы Ξ_{n2}, H_{n2}, Z_{n2} обращаются въ нуль.

Преобразуемъ силы $X_1 + \Xi_2$, $Y_1 + H_2$, $Z_1 + Z_2$.

Положимъ для простоты письма:

$$E_x = \mu(q\gamma - r\beta), \quad E_y = \mu(r\alpha - p\gamma), \quad E_z = \mu(p\beta - q\alpha),$$

это будутъ, очевидно, составляющія электромагнитной силы въ точкѣ (x, y, z) [*Maxwell*, II, § 603, eq. (C)]; затѣмъ:

$$E_{1x} = \mu(g\gamma - h\beta), \quad E_{1y} = \mu(h\alpha - f\gamma), \quad E_{1z} = \mu(f\beta - g\alpha) -$$

это составляющіе момента діэлектрика въ той-же точкѣ (*J. J. Thomson*, Notes on recent researches in electricity and magnetism, p. 9).

Поэтому будемъ имѣть:

$$X_1 + \Xi_2 = -A\left(E_x + \frac{dE_{1x}}{dt}\right) + A\frac{d(F\varrho)}{dt} - AF\sigma - P_0\varrho\,,$$

но

$$\sigma = \frac{d\varrho}{dt}\,,\quad A\frac{dF}{dt} - P_0 = P = \frac{4\pi}{K}f\,,$$

слѣдовательно:

$$X_1 + \Xi_2 = -A\left(E_x + \frac{dE_{1x}}{dt}\right) + \frac{4\pi\varrho}{K}f\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(r)$$

Но формулы (f) даютъ по преобразованіи результата:

$$A\frac{dE_{1x}}{dt} = A\mu\left(g\frac{d\gamma}{dt} - h\frac{d\beta}{dt}\right) - AE_x + \Xi_1 - \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi}\frac{\partial\mu}{dx}\,,$$

а потому:

$$X_1 + \Xi_2 = -A\mu\left(g\frac{d\gamma}{dt} - h\frac{d\beta}{dt}\right) - \Xi_1 + \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi}\frac{\partial\mu}{\partial x} + \frac{4\pi\varrho}{K}f.$$

Затѣмъ при помощи формулъ (8) находимъ:

$$A\mu\left(g\frac{d\gamma}{dt} - h\frac{d\beta}{dt}\right) = -\frac{K}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{P^2+Q^2-R^2}{2}\right) + \frac{\partial(PQ)}{\partial y} + \frac{\partial(PR)}{\partial z}\right\} +$$

$$+ \frac{KP}{4\pi}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right),$$

а подставляя значеніе P, Q, R изъ формулъ (5), найдемъ:

$$A\mu\left(g\frac{d\gamma}{dt} - h\frac{d\beta}{dt}\right) = \frac{4\pi\varrho}{K}f + \Xi - \frac{\mathbf{R}^2}{8\pi}\frac{\partial K}{dx}.$$

И такъ, окончательно находимъ:

$$X_1 + \Xi_2 = -\Xi - \Xi_1 + \frac{\mathbf{R}^2}{8\pi}\frac{\partial K}{dx} + \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi}\frac{\partial\mu}{dx}.$$

Подобные-же формулы найдемъ для $Y_1 + H_2$ и $Z_1 + Z_2$.

Подставляя эти значенія въ (q) получимъ:

$$\delta U+\sum P_a\delta p_a=\iint\left\{\left(X+\frac{\mathbf{R}^2}{8\pi}\frac{\partial K}{\partial x}+\frac{\mathbf{H}^2}{8\pi}\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)\delta\xi+\right.$$

$$\left.+\left(Y+\frac{\mathbf{R}^2}{8\pi}\frac{\partial K}{\partial y}+\frac{\mathbf{H}^2}{8\pi}\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)\delta\eta+\left(Z+\frac{\mathbf{R}^2}{8\pi}\frac{\partial K}{\partial z}+\frac{\mathbf{H}^2}{8\pi}\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)\delta\zeta\right\}d\tau-$$

$$-\iint\left\{(\Xi+\Xi_1)\,\delta\xi+(H+H_1)\,\delta\eta+(Z+Z_1)\,\delta\zeta\right\}d\tau+$$

$$+\int(X_n\delta\xi+Y_n\delta\eta+Z_n\delta\zeta)\,dS.$$

Соединяя теперь значенія δW, δV и $\delta U+\sum P_a\delta p_a$ въ выраженіи (1), сокращая и приравнивая нулю коэффиціенты при варіаціяхъ ξ, η, ζ въ объемныхъ и поверхностныхъ интегралахъ, найдемъ *во первыхъ* для точекъ *внутри* діэлектриковъ систему:

$$X=-\frac{\mathbf{R}^2}{8\pi}\frac{\partial K}{\partial x}-\frac{\mathbf{H}^2}{8\pi}\frac{\partial\mu}{\partial x}$$

$$Y=-\frac{\mathbf{R}^2}{8\pi}\frac{\partial K}{\partial y}-\frac{\mathbf{H}^2}{8\pi}\frac{\partial\mu}{\partial y}$$

$$Z=-\frac{\mathbf{R}^2}{8\pi}\frac{\partial K}{\partial z}-\frac{\mathbf{H}^2}{8\pi}\frac{\partial\mu}{\partial z}$$

и *во вторыхъ* для точекъ *на поверхности* діэлектрика:

$$-X_n=\Xi_n+\Xi_{n1},\quad -Y_n=H_n+H_{n1},\quad -Z_n=Z_n+Z_{n1}.$$

Получаемъ извѣстныя выраженія для механическихъ силъ электро-и магнитострикціи.

Равенства (c) и (e) показываютъ, что внутри діэлектрика эти силы находятся въ равновѣсіи.

Электромагнитная теорія дисперсіи.

Гельмгольцъ относитъ явленіе свѣторазсѣянія къ категоріи тѣхъ физическихъ явленій, которыя объясняются не однимъ кинетическимъ состояніемъ эфира, но и воздѣйствіемъ самихъ матеріальныхъ частицъ тѣла, внутри котораго происходитъ явленіе. Такъ напримѣръ, явленіе электрическаго сопротивленія току должно-быть приписано участію матеріальныхъ частицъ тѣла; это участіе выражается въ томъ, что часть

*

электрической энергіи тока идетъ на увеличеніе кинетической энергіи матеріальныхъ частицъ, т. е. на развитіе теплоты: имѣемъ явленіе теплоты Джоула. Подобнымъ образомъ Гельмгольцъ объясняетъ явленіе свѣторазсѣянія тѣмъ, что при поляризаціи діэлектрика — поляризуются и матеріяльныя частицы свѣторазсѣивающаго тѣла. Другими словами, когда подъ вліяніемъ электрическихъ силъ эфиръ діэлектрика (или проводника) выполняетъ электрическія пертурбаціи, то и матеріальныя частицы тоже *электрически* перемѣщаются, т. е. каждая матеріальная частица будетъ представлять, подобно частицамъ электролитовъ, совокупность двухъ іонъ, заряженныхъ противоположными электричествами. Значитъ, вступившая въ эфирную средину, электромагнитная волна разобьется на рядъ простыхъ волнъ, когда внутри средины будутъ существовать матеріальныя частицы; характеръ и родъ этихъ волнъ будетъ обусловливаться свойствами матеріальныхъ частицъ.

Пусть f_0, g_0, h_0 будутъ составляющіе электрической пертурбаціи (діэлектрическаго момента) матеріальной частицы; въ такомъ случаѣ, если-бы эфиръ и матеріальныя частицы не вліяли другъ на друга, ихъ энергіи выражались-бы въ видѣ:

$$\int \frac{2\pi}{K}(f^2+g^2+h^2)\,d\tau \quad \text{и} \quad \int \frac{2\pi}{K_0}(f_0^2+g_0^2+h_0^2)\,d\tau\,,$$

причемъ K_0 будетъ коэффиціентъ аналогичный K; полная энергія системы эфира и матеріи была-бы равна выраженію:

$$\int \left[\frac{2\pi}{K}(f^2+g^2+h^2)+\frac{2\pi}{K_0}(f_0^2+g_0^2+h_0^2)\right]d\tau.$$

Но, вслѣдствіе взаимодѣйствій между эфиромъ и матеріей, электрическая энергія системы будетъ меньше на величину энергіи взаимодѣйствія, которую Гельмгольцъ представляетъ въ видѣ:

$$\int \frac{4\pi}{K}(ff_0+gg_0+hh_0)d\tau$$

такъ что электрическая энергія системы представится въ слѣдующей формѣ:

$$W=\int \left[\frac{2\pi}{K}(f^2+g^2+h^2)-\frac{4\pi}{K}(ff_0+gg_0+hh_0)+\right.$$
$$\left.+\frac{2\pi}{K_0}(f_0^2+g_0^2+h_0^2)\right]d\tau.$$

Законность такого выраженія можно оправдать тѣмъ, что если-бы вся энергія, поступившая въ систему, потратилась-бы на приведеніе въ кинетическое состояніе *только* матеріальныхъ частицъ, то электрическая энергія системы, которая есть энергія кинетическаго состоянія эфира, равнялась-бы нулю; дѣйствительно, когда

$$f=f_0,\quad g=g_0,\quad h=h_0,\quad K_0=K,$$

то предыдущее выраженіе обращается въ нуль.

При $f_0=g_0=h_0=0$ оно обращается въ энергію эфира.

Выраженіе магнитной энергіи остается въ прежнемъ видѣ, стр. 28, энергія-же токовъ перемѣщенія, понятно, будетъ теперь имѣть видъ:

$$U=A\int\left[F\frac{d(f+f_0)}{dt}+G\frac{d(g+g_0)}{dt}+H\frac{d(h+h_0)}{dt}\right]d\tau.$$

Выразимъ теперь работу силъ P_a. Гельмгольцъ полагаетъ, что

$$\sum P_a p_a=-\frac{1}{2}\int m_1\left[\left(\frac{df_0}{dt}\right)^2+\left(\frac{dg_0}{dt}\right)^2+\left(\frac{dh_0}{dt}\right)^2\right]d\tau+$$
$$+\int(r_1f_0+r_2g_0+r_3h_0)\,d\tau+R,$$

гдѣ

$$R=\int(P_0f+Q_0g+R_0h)d\tau+A\int(Fp+Gq+Hr)\,d\tau$$

и количества r_1, r_2, r_3 суть составляющія силы тренія, а именно:

$$r_1=k_1\frac{df_0}{dt},\quad r_2=k_2\frac{dg_0}{dt},\quad r_3=k_3\frac{dh_0}{dt}\ \ldots\ldots\ (1)$$

и приэтомъ эти силы тренія варіированію не подлежатъ.

Подставимъ значенія U, V, W и $\sum P_a p_a$ въ равенство, представляющее принципъ Гамильтона въ формѣ Гельмгольца, а именно:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left\{W+V+U+\sum P_a p_a\right\}dt=0\ \ldots\ldots\ (2)$$

и приравняемъ нулю коэффиціенты при $\delta F,\ldots\delta f,\ldots\delta h$; но предварительно преобразуемъ члены отъ δU и $\sum P_a\delta p_a$. Найдемъ:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta U dt = A \int \left[\frac{d(f+f_0)}{dt} \delta F + \frac{d(g+g_0)}{dt} \delta G + \frac{d(h+h_0)}{dt} \delta H \right] d\tau -$$

$$- A \int \left[\frac{dF}{dt} (\delta f + \delta f_0) + \frac{dG}{dt} (\delta g + \delta g_0) + \frac{dH}{dt} (\delta h + \delta h_0) \right] d\tau ,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \sum P_a \delta p_a = \int m_1 \left[\frac{d^2 f_0}{dt^2} \delta f_0 + \frac{d^2 g_0}{dt^2} \delta g_0 + \frac{d^2 h_0}{dt^2} \delta h_0 \right] d\tau +$$

$$+ \int (r_1 \delta f_0 + r_2 \delta g_0 + r_3 \delta h_0)\, d\tau + \delta R .$$

Такимъ образомъ для точекъ *внутри* средины получимъ *три* системы уравненій; первая отъ коэффиціентовъ при δf, δg, δh:

$$\frac{4\pi}{K}(f - f_0) - A \frac{dF}{dt} + P_0 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (a)$$

и подобныя уравненія для g и h.

Затѣмъ коэффиціенты при δF, δG и δH дадутъ три уравненія вида:

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}\right) + A \frac{d(f+f_0)}{dt} + Ap = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; (b)$$

и наконецъ коэффиціенты при δf_0, δg_0, δh_0 дадутъ уравненія вида:

$$4\pi\left(\frac{f_0}{K_0} - \frac{f}{K}\right) - A \frac{dF}{dt} + m_1 \frac{d^2 f_0}{dt^2} + r_1 = 0 . \; . \; . \; . \; . \; (c)$$

При этомъ f_0, g_0, h_0 считались перемѣнными, независящими отъ f, g, h.

Если $f_0 = g_0 = h_0 = 0$ и кромѣ того $K_0 = 0$, то уравненія (c) пропадаютъ, ибо обращаются въ тождества и тогда останутся лишь уравненія (a) и (b).

Исключая члены съ $\frac{dF}{dt}$ изъ уравненій (a) и (c), получимъ:

$$\frac{8\pi}{K} f = m_1 \frac{d^2 f_0}{dt^2} + k_1 \frac{df_0}{dt} + 4\pi\left(\frac{1}{K} + \frac{1}{K_0}\right) f_0 + P_0$$

или:

$$m \frac{d^2 f_0}{dt^2} + k \frac{df_0}{dt} + \varkappa f_0 + \frac{K}{8\pi} P_0 = f \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (d)$$

гдѣ положено:

$$\frac{m_1 K}{8\pi} = m\,, \quad \frac{Kk_1}{8\pi} = k\,, \quad \frac{K}{2}\left(\frac{1}{K} + \frac{1}{K_0}\right) = \varkappa\,. \; . \; . \; . \; . \; . \; (e)$$

Подобныя-же уравненія найдемъ для g_0 и h_0.

Уравненія (a) и (b) дадутъ по исключеніи F, G, H еще соотношенія между пертурбаціями f и f_0. Дѣйствительно, мы знаемъ, что

$$\mu \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dH}{dt}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{dG}{dt}\right)$$

и подобныя формулы для β и γ.

Если теперь подставимъ сюда значенія $\dfrac{dH}{dt}$ и $\dfrac{dG}{dt}$ изъ уравненій (a) и вспомнимъ, что:

$$P_0 = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad Q_0 = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad R_0 = -\frac{\partial \Psi}{\partial z},$$

то получимъ:

$$A\mu \frac{d\alpha}{dt} = \frac{4\pi}{K}\left[\frac{\partial (h - h_0)}{\partial y} - \frac{\partial (g - g_0)}{\partial z}\right] . \; . \; . \; . \; . \; (f)$$

и подобныя уравненія для β и γ. Изъ уравненій (b) получаемъ по дифференцированіи по t и умноженіи на $A\mu$:

$$\frac{A\mu}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{d\beta}{dt}\right)\right] = -A^2\mu \frac{d^2(f + f_0)}{dt^2} - A^2\mu \frac{dp}{dt} \; . \; . \; (g)$$

и подобныя-же уравненія для α, γ; α, β; затѣмъ равенства:

$$p = C(P - P_0)\,, \quad P = \frac{4\pi}{K}(f - f_0) \text{ и т. п.}$$

даютъ:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{4\pi C}{K}\left(\frac{df}{dt} - \frac{df_0}{dt}\right) \text{ и т. п.} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (j)$$

Подставляя теперь въ уравненія (g) значенія производныхъ α, β, γ и p, q, r по времени t изъ уравненій (f) и (j), получимъ:

$$A^2\mu K \frac{d^2(f + f_0)}{dt^2} + 4\pi A^2\mu C \frac{df}{dt} + 4\pi A^2\mu C \frac{df_0}{dt} = \Delta(f - f_0) - \frac{\partial \Omega}{\partial x} \; . \; (k)$$

гдѣ положено:

$$\Omega = \frac{\partial(f - f_0)}{\partial x} + \frac{\partial(g - g_0)}{\partial y} + \frac{\partial(h - h_0)}{\partial z} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (l)$$

Подобныя-же уравненія найдемъ для g, h, g_0 и h_0.

Исключимъ теперь изъ уравненій (d) и (k) значенія f, g, h, такъ какъ надо имѣть уравненія для опредѣленія f_0, g_0, h_0, существованію которыхъ Гельмгольцъ приписываетъ дисперсію.

Подставимъ значенія f, g, h въ первую часть равенства (k) и помня, что *во первыхъ*:

$$P_0 = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad Q_0 = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad R_0 = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

такъ что

$$\frac{\partial P_0}{\partial x} + \frac{\partial Q_0}{\partial y} + \frac{\partial R_0}{\partial z} = -\Delta \Psi$$

и *во вторыхъ*, что функція Ψ отъ t независитъ, усмотримъ, что члены съ P_0, Q_0, R_0 изчезнутъ, такъ что можно вмѣсто f, g, h брать значенія изъ формулъ (d) безъ послѣдняго члена въ лѣвыхъ частяхъ.

Дѣлая эту подстановку и полагая для краткости письма:

$$\left.\begin{aligned} \theta_0 &= \frac{\partial f_0}{dx} + \frac{\partial g_0}{dy} + \frac{\partial h_0}{dz}, \\ u_1 &= A^2 \mu K \frac{d^2 f_0}{dt^2} + 4\pi A^2 \mu C \frac{df_0}{dt} - \Delta f_0 + \frac{\partial \theta_0}{\partial x} \\ v_1 &= A^2 \mu K \frac{d^2 f_0}{dt^2} - 4\pi A^2 \mu C \frac{df_0}{dt} + \Delta f_0 - \frac{\partial \theta_0}{\partial x} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (m)$$

и подобныя формулы для u_2, v_2; u_3, v_3, найдемъ окончательно:

$$m \frac{d^2 u_1}{dt^2} + k \frac{du_1}{dt} + \varkappa u_1 + v_1 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (n)$$

и подобныя уравненія для u_2, u_3.

Уравненія (n) и дадутъ намъ законы дисперсіи.

Если разсматриваемая средина—діэлектрикъ, что въ предыдущихъ формулахъ надо положить: $C = 0$; Гельмгольцъ собственно разсматриваетъ лишь этотъ случай, но идеи, положенныя имъ въ основаніе теоріи дисперсіи, позволяютъ распространить ее и на случай проводниковъ (каковы напримѣръ вода, а также металлы).

Сдѣлаемъ теперь окончательные выводы изъ уравненій (n).

Пусть имѣемъ дѣло съ волной, параллельной плоскости yz, распространяющейся, слѣдовательно, вдоль оси x-овъ. Назовемъ τ время колебанія, ω скорость свѣта въ срединѣ, λ—длину волны,—ω_0 и λ_0 тѣже количества для эфира, тогда положимъ:

$$n = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{2\pi\omega}{\lambda} = \frac{2\pi\omega_0}{\lambda_0}$$

и если q будетъ коэффиціентъ поглощенія и $\sqrt{-1} = i$, то частными рѣшеніями уравненій (n) можно взять:

$$f_0 = 0\,, \quad g_0 = be^{in(t+px)}\,, \quad h_0 = 0\,,$$

гдѣ

$$p = \frac{1}{\omega} - \frac{q}{ni}\,.$$

При помощи этихъ выраженій находимъ:

$$v_2 = -bn^2\left(\frac{1}{\omega_0^2} + p^2 - \frac{\gamma_2}{n}i\right)e^{in(t+px)}\,,$$

$$u_2 = -bn^2\left(\frac{1}{\omega_0^2} - p^2 + \frac{\gamma_1}{n}i\right)e^{in(t+px)}\,,$$

гдѣ положено:

$$\gamma_1 = -4\pi A^2\mu C\,, \; \gamma_2 = -\frac{4\pi\omega_0^2}{K_0}\,.$$

Уравненіе (n) для u_2 даетъ по сокращеніи:

$$(mn^2 - kni - \varkappa)\left(\frac{1}{\omega_0^2} - p^2 + \frac{\gamma_1}{n}i\right) - \left(\frac{1}{\omega_0^2} + p^2 - \frac{\gamma_2}{n}i\right) = 0\,. \; . \; . \; (p)$$

Положимъ теперь:

$$\alpha = 4\pi^2\omega_0^2 m\,, \quad \beta = 2\pi k\omega_0\,, \quad \gamma = -2A^2\mu\omega_0 C\,,$$

причемъ коэффиціенты α и β будутъ зависѣть отъ оптическихъ свойствъ тѣла, а γ отъ электрическихъ.

и замѣтимъ, что, если показатель преломленія будетъ μ, т. е.

$$\mu = \frac{\omega_0}{\omega},$$

а показатель поглощенія ν, т. е.

$$\nu = \frac{\lambda_0}{2\pi} q,$$

то получимъ

$$p^2 = \frac{\mu^2}{\omega_0^2} - \frac{\nu^2}{\omega_0^2} + \frac{2\mu\nu}{\omega_0^2} i = \frac{(\mu + \nu i)^2}{\omega_0^2},$$

или

$$p^2 = \frac{x + y\sqrt{-1}}{\omega_0^2},$$

если

$$x = \mu^2 - \nu^2, \quad y = 2\mu\nu.$$

Подставляя все это въ уравненіе (p), найдемъ:

$$(x + iy)\left(1 + \frac{\alpha}{\lambda_0^2} - \frac{\beta i}{\lambda_0} - \varkappa\right) +$$

$$+\left(1 - \frac{\alpha}{\lambda_0^2} + \frac{\beta i}{\lambda_0} + \varkappa\right) - \lambda_0 \gamma i \left(\frac{\alpha}{\lambda_0^2} - \frac{\beta i}{\lambda_0} - \varkappa + 1\right) = 0$$

или

$$(x + iy)\left[\frac{\alpha}{\lambda_0^2} - \varkappa + 1 - \frac{\beta i}{\lambda_0}\right] +$$

$$+\left[1 - \frac{\alpha}{\lambda_0^2} + \varkappa - \beta\gamma + \left(\frac{\beta}{\lambda_0} - \frac{\alpha\gamma}{\lambda_0} + \gamma\lambda_0(\varkappa - 1)\right) i\right] = 0 \; . \; . \; . \; (q)$$

Положимъ:

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\alpha}{\lambda_0^2} - \varkappa + 1 = P_1 \cos\Theta_1, & \dfrac{\beta}{\lambda_0} = P_1 \sin\Theta_1 \\[2ex] \dfrac{\alpha}{\lambda_0^2} - \varkappa - 1 + \beta\gamma = P_0 \cos\Theta_0, & \dfrac{\beta - \alpha\gamma}{\lambda_0} + \gamma\lambda_0(\varkappa - 1) = P_0 \sin\Theta_0, \end{array}\right\} . \; (r)$$

гдѣ, слѣдовательно, P_0, P_1, Θ_0 и Θ_1 будутъ вспомогательныя величины; въ такомъ случаѣ равенство (q) обратится въ слѣдующее:

$$(x+iy)P_1 e^{-\Theta_1 i} - P_0 e^{-\Theta_0 i} = 0\,;$$

отсюда находимъ:

$$x+iy = \frac{P_0}{P_1} e^{(\Theta_1-\Theta_0)\sqrt{-1}}.$$

Значитъ:

$$\sqrt{x+iy} = \sqrt{\frac{P_0}{P_1}}\left[\cos\frac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_0) + \sqrt{-1}\sin\frac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_0)\right]$$

и наконецъ:

$$\left.\begin{aligned} \mu &= \sqrt{\frac{P_0}{P_1}}\cos\frac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_0) \\ \nu &= \sqrt{\frac{P_0}{P_1}}\sin\frac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_0). \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(s)$$

Если имѣемъ дѣло съ діэлектрикомъ, то $\gamma=0$ и тогда эти формулы (s) обращаются въ данныя Гельмгольцемъ (Wied. Ann. Bd. XLVIII, S. 397).

По просьбѣ Гельмгольца его формулы повѣрялъ для терпентина и сѣроуглерода г. Мальке; согласіе получилось очень удовлетворительное (для терпентина).

Изъ формулъ (s) можно получить для нормальной дисперсіи формулу вида:

$$\mu = A + \frac{B}{\lambda_0^2},$$

представляющую частный видъ формулы Коши; но, вообще, для μ получается формула, отличающаяся по виду отъ общепринятыхъ, и даже отъ той, которую далъ самъ Гельмгольцъ раньше въ своей механической теоріи дисперсіи, основное уравненіе которой по внѣшнему виду отличается отъ уравненія (d) только присутствіемъ члена P_0.

Скажемъ въ заключеніе два слова о поляризаціи. При преобразованіи основнаго уравненія (2) (стр. 53) мы оставили безъ вниманія поверхностные интегралы, происходящіе отъ преобразованія δV: они даютъ условія (10) стр. 37, но Гельмгольцъ даетъ вмѣсто нихъ другія, которыя онъ выводитъ изъ уравненій (a) (стр. 54) и изъ тѣхъ уравненій, которыя получаются черезъ исключеніе функцій F, G, H изъ нихъ-же и опредѣленій магнитной силы. Въ результатѣ получаются формулы Фрэнэля.

2-го марта 1895 г.

О разложенiи данной функцiи въ рядъ по гармоническимъ функцiямъ.

В. А. Стеклова.

1. Въ „Rendiconti del circolo Matematico di Palermo“ за 1894 годъ помѣщенъ весьма интересный мемуаръ H. Poincaré: „Sur les équations de la Physique Mathématique“, посвященный главнымъ образомъ доказательству существованiя интеграловъ наиболѣе важныхъ дифференцiальныхъ уравненiй Математической Физики при нѣкоторыхъ поверхностныхъ условiяхъ, о которыхъ скажемъ ниже.

Для дальнѣйшихъ соображенiй намъ нѣтъ надобности подробно излагать всѣ результаты, добытые H. Poincaré въ разсматриваемомъ мемуарѣ; мы обратимъ вниманiе только на тѣ пункты, которые имѣютъ прямое отношенiе къ нашему изслѣдованiю.

Въ первой части своего мемуара H. Poincaré доказываетъ, между прочимъ, слѣдующую теорему:

Для каждой данной области (D), ограниченной поверхностью (S), существуетъ безчисленное множество вполнѣ опредѣленныхъ положительныхъ чиселъ

$$k_1, \quad k_2, \ldots, \quad k_n, \ldots,$$

каждому изъ которыхъ, положимъ k_n, соотвѣтствуетъ опредѣленная непрерывная и конечная по x, y, z [координаты точекъ области (D)] функцiя u_n, удовлетворяющая уравненiю

$$\Delta u_n + k_n u_n = 0 \quad \text{внутри } (D) \tag{1}$$

и условiю

$$u_n = 0 \qquad \text{на поверхности } (S). \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

Въ уравненіи (1) Δ обозначаетъ знакъ операціи

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Функціи u_n $(n=1, 2\ldots)$ H. Poincaré называетъ *гармоническими*, а соотвѣтствующія имъ числа k_n $(n=1, 2\ldots)$ *характеристическими числами* этихъ функцій.

Мы въ дальнѣйшемъ удержимъ тѣ же названія.

Въ послѣдней (третьей) части вышеупомянутаго мемуара H. Poincaré трактуетъ о разложеніи данной функціи координатъ f въ рядъ по гармоническимъ.

Результатомъ его изслѣдованій является слѣдующее весьма важное для Математической Физики предложеніе:

Назовемъ черезъ $d\tau$ элементъ объема области (D) и положимъ

$$A_n=\int f u_n d\tau.$$

Рядъ

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} A_n u_n$$

представляетъ разложеніе данной функціи f въ рядъ по гармоническимъ функціямъ всякій разъ, когда онъ сходится.

Но доказательство H. Poincaré крайне сложно и не отличается надлежащей обстоятельностью.

Въ видахъ этого я считаю не безполезнымъ предложить въ настоящей работѣ болѣе простое и строгое доказательство только что упомянутой теоремы.

2. Предварительно необходимо поставить на видъ нѣкоторыя теоремы, которыми придется пользоваться въ нашемъ изслѣдованіи. Нѣкоторыя изъ нихъ мы приведемъ безъ доказательства, заимствуя ихъ прямо изъ мемуара: „Sur les équations etc...", къ которому и отсылаемъ читателя.

Теорема I. *Существуетъ функція G шести аргументовъ*

$$x, y, z \text{ и } \xi, \eta, \zeta,$$

удовлетворяющая слѣдующимъ условіямъ:

1) *Функція G однозначна, конечна и непрерывна во всѣхъ точкахъ области (D) за исключеніемъ точки*

$$x=\xi, \quad y=\eta, \quad z=\zeta,$$

гдѣ она обращается въ безконечность.

2) *Разность*

$$G - \frac{1}{4\pi r},$$

гдѣ

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2,$$

остается конечной при

$$r = 0.$$

3) *Внутри области* (D) G *удовлетворяетъ уравненію*

$$\Delta G = 0.$$

4) *На поверхности* (S) G *удовлетворяетъ условію*

$$G = 0.$$

Это есть извѣстная функція Грина, вполнѣ опредѣляемая по принципу Дирихле.

Лемма. Если l есть наибольшее изъ разстояній между двумя точками поверхности (S), то

$$\int G^2 d\tau < \frac{l}{4\pi} = Q.$$

Пусть f есть функція координатъ x, y, z, конечная и непрерывная вмѣстѣ съ своими первыми производными по координатамъ внутри (D).

Теорема II. *Уравненіе*

$$\Delta v + kv + f = 0, \tag{2}$$

гдѣ k есть положительная постоянная, допускаетъ непрерывный и конечный по x, y, z интегралъ внутри области (D), *обращающійся на поверхности* (S) *въ нуль.*

Пока k не превосходитъ нѣкотораго предѣла μ, этотъ интегралъ представляется подъ видомъ абсолютно и равномѣрно сходящагося ряда

$$v = v_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} k^n v_n,$$

гдѣ

$$v_0 = \int G f' d\tau', \quad v_n = \int G v'_{n-1} d\tau'. \qquad (n=1, 2, \ldots) \tag{3}$$

Значки при f и v_{n-1} обозначаютъ, что въ этихъ функціяхъ перемѣнныя x, y, z замѣнены черезъ ξ, η и ζ, а $d\tau'$ означаетъ элементъ объема области (D) при интегрированіи по перемѣннымъ ξ, η и ζ.

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ держаться этихъ же обозначеній.

Составимъ интегралы

$$W_{2n}=\int v_n^2 d\tau\,,\quad W_{2n-1}=\int\left[\left(\frac{\partial v_n}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v_n}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v_n}{\partial z}\right)^2\right]d\tau.$$

Не трудно убѣдиться, что эти интегралы удовлетворяютъ неравенствамъ

$$\frac{W_1}{W_0}<\frac{W_2}{W_1}<\frac{W_3}{W_2}<\ldots<\frac{W_{n+1}}{W_n}<\ldots$$

и

$$\lim\frac{W_{n+1}}{W_n}\bigg|_{n=\infty}$$

есть величина, вообще говоря, конечная.

Этотъ предѣлъ равенъ $\dfrac{1}{\mu}$.

Теорема III. *Для каждой данной области (D) существуетъ безчисленное множество опредѣленныхъ положительныхъ чиселъ*

$$k_1\,,\quad k_2\,,\ldots,\quad k_n\,,\ldots,$$

каждому изъ которыхъ, положимъ k_n, соотвѣтствуетъ опредѣленная до нѣкотораго постояннаго множителя функція u_n, непрерывная и конечная внутри (D), удовлетворяющая уравненію

$$\Delta u_n+k_n u_n=0 \quad \textit{внутри } (D) \tag{4}$$

и условію

$$u_n=0 \quad \textit{на поверхности } (S). \tag{5}$$

Постояннымъ множителемъ мы распорядимся такъ, чтобы имѣло мѣсто равенство

$$\int u_n^2 d\tau=1. \qquad (n=1\,,\,2,\ldots) \tag{6}$$

Функціи $u_n\,(n=1\,,\,2\ldots)$, удовлетворяющія условіямъ (4), (5) и (6), мы и будемъ называть гармоническими.

Характеристическія числа $k_n(n=1\,,\,2\ldots)$, какъ показано H. Poincaré, удовлетворяютъ неравенствамъ

$$k_n>mn^{\frac{2}{3}}\,,$$

гдѣ m есть конечная, отличная отъ нуля, положительная постоянная.

Очевидно, что

$$\lim k_n|_{n=\infty} = \infty.$$

Теорема IV. *Вообще говоря, функція v, удовлетворяющая уравненію (2) и условію*

$$v = 0 \quad \text{на поверхности } (S),$$

есть мероморфная функція параметра k съ простыми полюсами

$$k_\mu, \quad k_\nu, \ldots, \; k_\tau, \ldots,$$

гдѣ $k_\mu, k_\nu, \ldots, k_\tau \ldots$ суть всѣ или нѣкоторыя изъ характеристическихъ чиселъ данной области (D).

Число полюсовъ функціи v и характеръ ихъ распредѣленія зависитъ отъ свойствъ функціи f.

Функція v можетъ быть представлена подъ видомъ

$$v = \frac{P}{\Delta}.$$

Здѣсь P есть голоморфная функція параметра k, пока

$$k < k_p,$$

гдѣ p какое угодно цѣлое число (можетъ быть сдѣлано сколь угодно большимъ); Δ есть полиномъ степени $(p-1)$ относительно k съ постоянными коэффиціентами.

При

$$k = k_n < k_p$$

Δ обращается въ нуль, а P въ гармоническую функцію u_n.

3. Теорема V. *Если функція f удовлетворяетъ условію*

$$\int f u_n d\tau = 0, \tag{7}$$

то $k = k_n$ есть простая точка функціи v.

Помноживъ уравненіе (2) на u_n и интегрируя по всему объему, получаемъ послѣ небольшого преобразованія

$$(k - k_n)\int v u_n d\tau + \int f u_n d\tau = 0,$$

или, въ силу (7),

$$(k-k_n)\int vu_n d\tau = 0. \tag{8}$$

Если $k=k_n$ есть полюсъ v, то лѣвая часть этого равенства обратится въ

$$M\int u_n^2 d\tau,$$

гдѣ M есть конечная, отличная отъ нуля, положительная постоянная, и равенство (8) окажется невозможнымъ.

Слѣдовательно, $k=k_n$ есть простая точка функціи v, если f удовлетворяетъ условію (7).

Слѣдствіе. *Если функція f въ уравненіи (2) удовлетворяетъ условіямъ*

$$\int fu_1 d\tau = 0, \int fu_2 d\tau = 0, \ldots \int fu_p d\tau = 0,$$

то наименьшій изъ полюсовъ функціи v не менѣе

$$k_{p+1}.$$

Эта теорема, замѣтимъ, имѣетъ существенное значеніе для доказательства теоремы о возможности разложенія данной функціи въ рядъ по гармоническимъ функціямъ.

4. Теорема VI. *Уравненіе*

$$\Delta u + ku = 0, \tag{9}$$

гдѣ k есть положительная постоянная, допускаетъ непрерывный и конечный по x, y, z внутри (D) интегралъ, принимающій на поверхности (S) заданныя значенія.

Этотъ интегралъ можетъ быть представленъ подъ видомъ ряда, расположеннаго по цѣлымъ положительнымъ степенямъ k и сходящагося абсолютно и равномѣрно для всѣхъ значеній k, меньшихъ k_1 *).

Доказательство этой теоремы настолько просто, что на немъ нѣтъ надобности останавливаться.

Замѣтимъ, что если на поверхности (S) дано условіе

$$u = 1 \quad \text{на поверхности } (S),$$

то функція u будетъ положительна для всѣхъ точекъ внутри области (D) и отлична отъ нуля.

---

*) Напомнимъ, k_1 есть наименьшее изъ характеристическихъ чиселъ данной области (D).

5. Теорема VII. *Пусть f есть функція координатъ, непрерывная и конечная вмѣстѣ со своими первыми производными по координатамъ внутри области (D), обращающаяся въ нуль на поверхности (S).*

Отношеніе

$$\frac{V}{W}$$

интеграловъ

$$V = \int \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \right] d\tau\,, \quad W = \int f^2 d\tau$$

не менѣе k_1 — наименьшаго изъ характеристическихъ чиселъ области (D).

Обозначимъ черезъ u положительную и отличную отъ нуля для всѣхъ точекъ области (D) функцію координатъ, удовлетворяющую условіямъ

$$\Delta u + ku = 0 \quad \text{внутри } (D),$$

$$u = 1 \quad \text{на поверхности } (S).$$

По предыдущему, такая функція существуетъ для всѣхъ значеній k, меньшихъ k_1.

Положимъ

$$m_1 = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{f}{u}\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \varphi_1 = \frac{f^2}{u}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Имѣемъ тождества

$$m_1^2 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{f^2}{u}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{k}{3}u\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - \frac{k}{3}f^2$$

и два другихъ, получающихся изъ написаннаго круговой перестановкой значковъ 1, 2, 3 и буквъ x, y, z.

Интегрируя каждое изъ этихъ тождествъ по всему объему области (D) и складывая результаты, получаемъ

$$\int (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)\, d\tau + \int \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z}\right) d\tau - \int \frac{f^2}{u}(\Delta u + ku)\, d\tau =$$

$$= V - kW.$$

Такъ какъ

$$J = \int \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z}\right) d\tau = - \int f^2 \frac{\partial u}{\partial n}\, ds\,,$$

гдѣ ds есть элементъ поверхности (S), а n — направленіе нормали, идущей внутрь области (D), то при условіи

$$f=0 \quad \text{на поверхности } (S)$$

имѣемъ

$$J=0.$$

Слѣдовательно,

$$V-kW=\int (m_1^2+m_2^2+m_3^2)\,d\tau > 0.$$

Разность

$$V-kW$$

положительна для всѣхъ значеній k, меньшихъ k_1, т. е. наименьшее значеніе отношенія $\frac{V}{W}$ есть k_1.

Итакъ

$$\frac{V}{W} \geqq k_1.$$

Знакъ равенства соотвѣтствуетъ случаю

$$f=u_1.$$

6. Пусть f есть однозначная, конечная и непрерывная внутри (D) функція координатъ, обращающаяся въ нуль на поверхности (S).

Положимъ

$$A_n=\int f u_n d\tau. \qquad (n=1,2,\ldots)$$

Теорема. *Рядъ*

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} A_n u_n$$

представляетъ разложеніе данной функціи f въ рядъ по гармоническимъ функціямъ всякій разъ, когда онъ сходится *).

Будемъ вычислять функцію f по функціямъ $u_n (n=1, 2\ldots)$, полагая

$$f=A_1u_2+A_2u_2+\cdots+A_pu_p+R_p,$$

гдѣ $A_n (n=1, 2, \ldots p)$ суть нѣкоторыя постоянныя, а R_p есть нѣкоторая функція координатъ.

---

*) Хотя бы не абсолютно и не равномѣрно.

Видъ R_p зависитъ отъ выбора коэффиціентовъ A_n и числа ихъ p.

Примемъ за мѣру погрѣшности при указанномъ вычисленіи f интегралъ

$$S_p = \int R_p^2 d\tau$$

и выберемъ постоянныя A_n $(n = 1, 2, \dots p)$ такъ, чтобы эта погрѣшность была наименьшей.

Опредѣляя подъ этимъ условіемъ коэффиціенты A_n, получаемъ

$$A_n = \int f u_n d\tau. \qquad (n=1, 2, \dots, p)$$

При этомъ функція R_p, обращающаяся, очевидно, въ нуль на поверхности (S), будетъ еще удовлетворять условіямъ

$$\int R_p u_1 d\tau = 0, \quad \int R_p u_2 d\tau = 0, \dots \quad \int R_p u_p d\tau = 0. \qquad \textbf{(10)}$$

Интегралъ S_p есть убывающая функція значка p.

Въ самомъ дѣлѣ,

$$S_p = \int f^2 d\tau - A_1^2 - A_2^2 - \cdots - A_p^2,$$

$$S_{p+1} = \int f^2 d\tau - A_1^2 - A_2^2 \cdots A_p^2 - A_{p+1}^2$$

т. е.

$$S_{p+1} = S_p - A_{p+1}^2,$$

откуда и слѣдуетъ вышесказанное.

Назовемъ черезъ v_p функцію координатъ, удовлетворяющую уравненію

$$\Delta v_p + k v_p + R_p = 0 \quad \text{внутри } (D)$$

и условію

$$v_p = 0 \quad \text{на поверхности } (S).$$

Мы знаемъ, что функцію v_p можно представить подъ видомъ ряда

$$v_p = v_{p0} + k v_{p1} + k^2 v_{p2} + \cdots + k^n v_{pn} + \cdots, \qquad \textbf{(11)}$$

гдѣ

$$v_{p0} = \int G R_p' d\tau', \quad v_{pn} = \int G v_{p,n-1}' d\tau'. \qquad (n=1, 2, \dots)$$

Составимъ для функцій v_{ps} $(s=0\,,\,1\,,\,2\ldots)$ интегралы Schwarz'a и обозначимъ ихъ черезъ $W_s^{(p)}$ $(s=0\,,\,1\,,\,2\ldots)$.

Рядъ (11) сходится, пока

$$k < \lim \frac{W_s^{(p)}}{W_{s+1}^{(p)}}\bigg|_{s=\infty}.$$

Такъ какъ R_p удовлетворяетъ условіямъ (10), то по теоремѣ (V)

$$\lim \frac{W_s^{(p)}}{W_{s+1}^{(p)}} > k_p\,,$$

а такъ какъ интегралы $W_s^{(p)}$ удовлетворяютъ неравенствамъ

$$\frac{W_1^{(p)}}{W_0^{(p)}} < \frac{W_2^{(p)}}{W_1^{(p)}} < \ldots < \frac{W_{s+1}^{(p)}}{W_s^{(p)}} < \ldots,$$

то и подавно

$$\frac{W_0^{(p)}}{W_1^{(p)}} > k_p\,,$$

или

$$\int v_{p0}^2\,d\tau > k_p \int \left[\left(\frac{\partial v_{p1}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_{p1}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_{p1}}{\partial z}\right)^2\right] d\tau\,.$$

Такъ какъ v_{p1} равно нулю на поверхности (S), то по теоремѣ (VII)

$$\int v_{p0}^2\,d\tau > k_1 k_p \int v_{p1}^2\,d\tau\,.$$

Но

$$\int v_{p0}^2\,d\tau = \int d\tau \left(\int G R_p' d\tau'\right)^2 < W \int R_p^2 d\tau \int G^2 d\tau < WQS_p\,,$$

гдѣ W есть объемъ области (D).

Слѣдовательно,

$$S_p = \int R_p^2 d\tau > k_p M \int v_{p1}^2\,d\tau\,,$$

гдѣ

$$M = \frac{k_1}{QW}$$

есть конечная, отличная отъ нуля, положительная постоянная.

Изъ равенства

$$v_{p2} = \int G v'_{p1}\, d\tau'$$

заключаемъ, что

$$v_{p2}^2 < \int v_{p1}^2\, d\tau \int G^2 d\tau < Q \int v_{p1}^2\, d\tau .$$

Слѣдовательно,

$$S_p > k_p N v_{p2}^2 , \tag{12}$$

гдѣ

$$N = \frac{k_1}{WQ^2}$$

есть конечная, не равная нулю, положительная постоянная.

Неравенство (12) справедливо при всякомъ p.

Будемъ увеличивать p до безконечности.

Такъ какъ по условію рядъ

$$T = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n u_n$$

есть рядъ сходящiйся, то R_p имѣетъ предѣломъ нѣкоторую функцію R.

Положимъ затѣмъ

$$\lim v_p\big|_{p=\infty} = w , \quad \lim v_{p,n}\big|_{p=\infty} = w_n . \qquad {\scriptstyle (n=0,\,1,\,2\ldots)}$$

Такъ какъ S_p стремится къ нѣкоторому предѣлу (конечному) при возрастаніи p до ∞, а число k_p возрастаетъ сверхъ всякаго предѣла, то необходимо

$$\lim v_{p2} = w_2 = 0 .$$

Такъ какъ

$$w_s = \int G w'_{s-1}\, d\tau' , \qquad {\scriptstyle (s=3,\,4\ldots)}$$

то функція w, удовлетворяющая уравненію

$$\varDelta w + kw + R = 0 , \tag{13}$$

приводится къ суммѣ двухъ членовъ

$$w = w_0 + kw_1 .$$

гдѣ, напомнимъ,

$$w_0 = \int G R' d\tau' , \quad w_2 = \int G w_1' d\tau' .$$

Подставивъ это выраженіе w въ уравненіе (13), заключаемъ, что

$$w_1 = 0$$

и затѣмъ, что

$$w_0 = 0 .$$

Слѣдовательно,

$$w = 0 , \qquad R = 0 ,$$

т. е. R_p стремится къ нулю при безпредѣльномъ возрастаніи p и въ предѣлѣ, который несомнѣнно существуетъ, ибо рядъ

$$T = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n u_n \tag{14}$$

по условію сходящійся, обращается въ нуль.

Слѣдовательно,

$$f = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n u_n ,$$

что и требовалось доказать.

7. Въ заключеніе этого изслѣдованія укажемъ условія сходимости ряда (14).

Наиболѣе интересенъ, конечно, случай абсолютной сходимости.

Условія такой сходимости ряда (14) можно формулировать въ слѣдующей теоремѣ.

Теорема. *Если функція f конечна и непрерывна внутри (D) вмѣстѣ съ ея частными производными до шестого порядка включительно и, обращаясь въ нуль на поверхности (S), удовлетворяетъ еще условіямъ*

$$\Delta f = 0 , \quad \Delta_2 f = 0 \quad \text{на поверхности } (S) , \tag{15}$$

то рядъ (14) сходится абсолютно и равномѣрно.

Эта теорема принадлежитъ H. Poincaré.

Я считаю не лишнимъ привести слѣдующее простое доказательство этого предложенія.

Пользуясь условіями (15) и тѣми, которыми опредѣляются функціи $u_n (n=1, 2 \dots)$, получаемъ при помощи теоремы Грина рядъ слѣдующихъ почти очевидныхъ равенствъ

$$A_n = \int f u_n d\tau = -\frac{1}{k_n}\int f \Delta u_n d\tau = -\frac{1}{k_n}\int u_n \Delta f d\tau =$$

$$= \frac{1}{k_n^2}\int \Delta u_n \Delta f d\tau = \frac{1}{k_n^2}\int u_n \Delta_2 f d\tau =$$

$$= -\frac{1}{k_n^3}\int \Delta u_n \Delta_2 f d\tau = -\frac{1}{k_n^3}\int u_n \Delta_3 f d\tau ,$$

гдѣ Δ_3 есть знакъ трижды повторенной операціи Δ.

Слѣдовательно,

$$|A_n| < \frac{1}{k_n^3}\left(\int (\Delta_3 f)^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{M}{k_n^3} ,$$

гдѣ M есть конечная, отличная отъ нуля, положительная постоянная.

Съ другой стороны очевидно

$$u_n = k_n \int G u_n d\tau ,$$

т. е.

$$|u_n| < k_n \sqrt{Q}.$$

Слѣдовательно,

$$|A_n u_n| < \frac{M\sqrt{Q}}{k_n^2} < \frac{M\sqrt{Q}}{m n^{\frac{4}{3}}} = \frac{K}{n^{\frac{4}{3}}} , \text{*)}$$

гдѣ K конечная, неравная нулю, положительная постоянная.

Рядъ

$$K\left(1 + \frac{1}{2^{\frac{4}{3}}} + \frac{1}{3^{\frac{4}{3}}} + \dots + \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}} + \dots\right)$$

сходится.

---

*) Напомнимъ,

$$\frac{l}{4\pi} = Q > \int G^2 d\tau , \quad k_n > m n^{\frac{2}{3}} \quad \text{(См. § 2-й).}$$

Наибольшее значеніе модуля каждаго члена ряда (14) меньше соотвѣтствующаго члена послѣдняго ряда. Слѣдовательно, рядъ (13) сходится при указанныхъ условіяхъ абсолютно и равномѣрно.

Замѣтимъ, что съ указаннымъ разложеніемъ функціи f (данной) по гармоническимъ приходится встрѣчаться при рѣшеніи задачи объ охлажденіи твердаго тѣла, лучеиспускательная способность котораго безконечно велика. Это соотвѣтствуетъ допущенію, что температура всѣхъ точекъ пространства, внѣшняго относительно тѣла, есть нуль.

Функція f представляетъ температуру тѣла въ начальный моментъ времени и должна равняться нулю тождественно во всѣхъ точкахъ пространства, внѣшняго относительно тѣла.

При этомъ естественно получаются условія

$$f=0\,,\quad \Delta f=0\,,\quad \Delta_2 f=0\ldots \text{ на поверхности } (S)\,,$$

вытекающія, какъ мнѣ кажется, изъ самой сущности задачи.

Поэтому теорема, поставленная въ началѣ этого параграфа, по крайней мѣрѣ въ примѣненіи къ только что указанному вопросу Математической Физики, имѣетъ, повидимому, совершенно общее значеніе.