УДК 517.4

Л. А. ПАСТУР, А. Л. ФИГОТИН

ОДИН ПРИМЕР МНОГОМЕРНЫХ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ, ТОЧЕЧНЫЙ И НЕПРЕРЫВНЫЙ СПЕКТР КОТОРЫХ ПЕРЕСЕКАЮТСЯ

§ 1. Введение. В настоящей работе рассматриваются операторы H в $L_2(\boldsymbol{R}^d)$ вида

$$H = -(2\pi)^{-2}\Delta + \sum_{n\in \boldsymbol{Z}^d} t_n |v(x+n)><v(x+n)|, \tag{1.1}$$

$$(|v(\cdot)><v(\cdot)|\psi)(x) = (v, \psi)\, v(x),\ t_n = \operatorname{tg}[\pi(\alpha, n) + \omega],\ \omega\in[0, \pi),$$

$$\omega \neq \frac{\pi}{2} - \pi(\alpha, n)\,(\operatorname{mod}\pi),\ n\in \boldsymbol{Z}^d, \tag{1.2}$$

где вектор $\alpha\in \boldsymbol{R}^d$ удовлетворяет диафантовому условию

$$|(\alpha, n) - m| \geqslant C|n|^{-\beta},\ \ m\in \boldsymbol{Z},\ n\in \boldsymbol{Z}^d\diagdown 0 \tag{1.3}$$

с положительными константами C и β.

Условия $V \cdot v(x)$, $x\in \boldsymbol{R}^d$ — вещественнозначная функция с преобразованием Фурье

$$\hat{v}(p) = \int_{\boldsymbol{R}^d} e^{-i2\pi(p,\, x)}\, v(x)\, dx,\ \ p\in \boldsymbol{R}^d,$$

причем $\hat{v}(p) = a(|p|^2)$, где вещественнозначная функция $a(\mu)$, $\mu\geqslant 0$, бесконечно дифференцируема на $[0, \infty)$ и для некоторого $\rho>0$: $a(\mu)>0$, $0\leqslant\mu<\rho$; $a(\mu)=0$, $\mu\geqslant\rho$ **(1.4)**. Если $\rho=\infty$, будем предполагать, что функция a вместе со своими производными убывает быстрее любой степени μ при $\mu\to\infty$.

Дискретный аналог оператора H изучался в работе*, которой мы здесь будем следовать. Введем обозначения: $E(d\lambda)$ и $E_0(d\lambda)$ — разложения единицы соответственно операторов H и $-(2\pi)^{-2}\Delta$; $\mathcal{H}_{<\rho} = E_0((-\infty, \rho))\, L_2(\boldsymbol{R}^d)$, $\mathcal{H}_{>\rho} = E_0((\rho, \infty))\, L_2(\boldsymbol{R}^d)$; $S = S(\boldsymbol{R}^d)$ — пространство Шварца.

Теорема 1.1. *Оператор H существенно самосопряжен на S. Подпространства $\mathcal{H}_{<\rho}$ и $\mathcal{H}_{>\rho}$ приводят оператор H, причем сужение оператора H на $\mathcal{H}_{>\rho}$ совпадает с сужением оператора $-(2\pi^{-2})\Delta$ на это подпространство и для $d\lambda\in(\rho, \infty)$: $E(d\lambda)\mathcal{H}_{>\rho} = E_0(d\lambda)\times\mathcal{H}_{>\rho}$* **(1.5)**. *Соответственно на отрезке (ρ, ∞) оператор H имеет абсолютно непрерывную компоненту.*

Теорема 1.2. *Пусть $\rho > 1/4$. Тогда имеют место все утверждения теоремы 1.1 и, кроме того, можно указать достаточно малое положительное ρ_1, что спектр оператора H на отрезке $(-\infty, \rho_1)$ чисто точечный, однократный и плотный и собственные функции принадлежат S.*

---

* *Figotin A. L., Pastur L. A.* An Exactly Solvable Model of Multidimensional incommensurate Structure // Commun. Math. Phys.— 1984.— 95.— P. 401—425.

Теорема 1.3. *Пусть* $\rho < 1/4$. *Тогда имеют место все утверждения теоремы* 1.1 *и, кроме того, спектр* H *исчерпывается чисто точечной и абсолютно непрерывной компонентой. При этом чисто точечный спектр однократный и плотный в* $\boldsymbol{R}$, *а собственные функции принадлежат* S. *Ортогональные проекторы на чисто точечную и абсолютно непрерывную компоненту совпадают соответственно с проекторами на подпространства* $\mathcal{H} > \rho$ и $\mathcal{H} < \rho$.

В этом параграфе мы изложим основные моменты доказательства сформулированных утверждений, по существу его алгебраическую часть. Полное обоснование приведено в § 2, 3.

Исследование свойств оператора H будет проводиться посредством рассмотрения его резольвенты $R_z = (H - zI)^{-1}$, при этом удобно перейти от функций $\psi \in L_2(\boldsymbol{R}^d)$ к их преобразованиям Фурье

$$\hat{\psi}(p) = \int_{R^d} e^{-i2\pi(p,\, x)}\psi(x)\, dx$$

и к соответствующим представлениям $\hat{H}$, $\hat{R}_z$ операторов H и R_z. Введем в $l_2(\boldsymbol{Z}^d)$ оператор $(T\psi)_n = t_n\psi_n$, $n \in \boldsymbol{Z}^d$. Здесь также удобно перейти к преобразованию Фурье

$$\hat{\psi}(p) = \sum_{n \in \boldsymbol{Z}^d} e^{i2\pi(p,\, n)}\psi_n, \quad p \in \boldsymbol{T},$$

где тор $\boldsymbol{T} = \left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)^d$. Часто функции $\psi \in L_2(\boldsymbol{T})$ будут рассматриваться как периодические функции, $\psi(\cdot) = \psi(\cdot + n)$, $n \in \boldsymbol{Z}^d$, во всем $\boldsymbol{R}^d$. Введем линейный оператор $(\cdot)_{\boldsymbol{T}}$, ставящий в соответствие функции $\psi(p)$ периодическую функцию $\psi_{\boldsymbol{T}}(p)$

$$(\psi)_{\boldsymbol{T}}(p) = \sum_{n \in \boldsymbol{Z}^d} \psi(p + n), \quad p \in \boldsymbol{R}^d. \tag{1.6}$$

Отсюда имеем следующее представление для $\hat{H}$:

$$(\hat{H}\psi)(p) = p^2\psi(p) + v(p)\,\hat{T}\,(v^*\psi)_{\boldsymbol{T}}. \tag{1.7}$$

После несложных преобразований из (1.7) получим

$$(\hat{R}_z\varphi)(p) = \frac{\varphi(p)}{p^2 - z} - \frac{v(p)}{p^2 - z}(\hat{T}^{-1} + W_z)^{-1}\left(\frac{v^*\varphi}{p^2 - z}\right)_{\boldsymbol{T}}(p), \tag{1.8}$$

$$W_z(p) = \left(\frac{\hat{v}^*(p)\,\hat{v}(p)}{p^2 - z}\right)_{\boldsymbol{T}}. \tag{1.9}$$

Отметим, что из равенства (1.8) следует, что пространства $\mathcal{H}_{<\rho}$, $\mathcal{H}_{>\rho}$ приводят $\hat{H}$ и сужение H на $\mathcal{H}_{>\rho}$ совпадают с сужением на это подпространство оператора $-(2\pi)^{-2}\Delta$ и, следовательно, имеет место соотношение (1.5).

Чтобы определить собственные функции $u_\lambda(p)$ и соответствующие собственные значения λ, воспользуемся (1.7), откуда получим $(p^2 - \lambda)\, u_\lambda + v\hat{T}\,(v^*u_\lambda)_{\boldsymbol{T}} = 0$.

Отсюда ясно, что собственные функции имеют вид

$$u_\lambda(p) = \frac{v(p)}{p^2 - \lambda} g_\lambda(p), \quad g_\lambda(p+n) = g_\lambda(p), \qquad (1.10)$$

где периодическая функция g_λ как элемент $L_2(T)$ удовлетворяет уравнению $(\hat{T}^{-1} + W_\lambda) g_\lambda = 0$ **(1.11).**

Как следует из равенства (1.11), λ будет собственным значением тогда и только тогда, когда уравнение (1.11) имеет нетривиальное решение. Для исследования этого вопроса дадим удобное представление оператору $\hat{T}^{-1} + W_\lambda$, для чего введем унитарный в $l_2(\boldsymbol{Z}^d)$ оператор U умножения на $\exp\{-2\pi i(\alpha, n)\}$. Тогда, как нетрудно видеть,

$$\hat{T}^{-1} = i(I + \varkappa\hat{U})(I - \varkappa\hat{U})^{-1}, \quad \varkappa = e^{-2i\omega}, \quad (\hat{U}\psi)(p) = \psi(p-\alpha). \qquad (1.12)$$

Отсюда после элементарных преобразований получим

$$\hat{T}^{-1} + W_\lambda = (W_\lambda + iI)[I - C_\lambda\varkappa\hat{U}](I - \varkappa\hat{U})^{-1}, \quad C_\lambda(p) = \frac{W_\lambda(p) - i}{W_\lambda(p) + i}. \qquad (1.13)$$

Введем в рассмотрение функции $f(\lambda, p) = \ln C_\lambda(p)$ **(1.14),**

$$f_0(\lambda) = \int_T f(\lambda, p)\, dp = im(\lambda), \ m(\lambda) \in \boldsymbol{R}, \qquad (1.15)$$

$$t(\lambda, p) = (I - \hat{U})^{-1}[f(\lambda, p) - f_0(\lambda)]. \qquad (1.16)$$

Если функция $f(\lambda, p)$ бесконечно дифференцируема по p, то и $t(\lambda, p)$ такая же. Это нетрудно проверить, рассматривая f и t как элементы пространства $l_2(\boldsymbol{Z}^d)$ и пользуясь важным здесь условием (1.3). Из (1.14), (1.16) следует

$$C_\lambda\hat{U} = e^{f_0(\lambda)} e^{t(\lambda)} \hat{U} e^{-t(\lambda)}. \qquad (1.17)$$

Отсюда и равенства (1.13) имеем

$$\hat{T}^{-1} + W_\lambda = (W_\lambda + iI) e^{t(\lambda)} [I - e^{f_0(\lambda)}\varkappa\hat{U}] e^{-t(\lambda)} (I - \varkappa\hat{U})^{-1}. \qquad (1.18)$$

Пусть теперь

$$e_\lambda = e^{-t(\lambda)} (I - \varkappa\hat{U})^{-1} g_\lambda. \qquad (1.19)$$

Тогда из (1.18) следует, что уравнение (1.11) эквивалентно уравнению $(I - e^{f_0(\lambda)}\varkappa\hat{U}) e_\lambda = 0$ **(1.20),** откуда нетрудно усмотреть, что собственные значения λ являются решениями уравнения $m(\lambda) - 2\omega - 2\pi(\alpha, n) = 0 \pmod{2\pi}$, $n \in \boldsymbol{Z}^d$ **(1.21),** при получении которого учтено соотношение (1.15). При каждом n уравнение (1.21) имеет не более одного решения λ_n (что означает однократность спектра), которому отвечает $e_{\lambda_n} = \exp\{i\, 2\pi(\alpha, n)\}$. Отсюда ввиду (1.19) и (1.16) имеем

$$g_{\lambda_n}(p) = (I - \varkappa\hat{U}) e^{t(\lambda_n p)} e^{i\, 2\pi(n, p)}, \qquad (1.22)$$

$$g_{\lambda_n}(p) = -2i(W_{\lambda_n}(p) - i)^{-1} e^{t(\lambda_n, p)} e^{i\, 2\pi(n, p)}. \qquad (1.23)$$

Подставляя в равенство (1.10) найденные g_{λ_n}, получим искомые собственные функции.

В заключение отметим, что самым важным с аналитической точки зрения местом в приведенных выше рассуждениях является предположение о гладкости функции $f(\lambda, p)$, являющееся определяющим при анализе точечного спектра H.

§ 2. Аналитические свойства вспомогательных функций. Настоящий параграф посвящен изучению аналитических свойств функций $W_z(p)$, $f(z, p)$, $f_0(z)$ и $t(z, p)$. Все важные для дальнейшего свойства этих функций будут здесь подробно сформулированы и собраны в леммы. Практически все эти свойства почти непосредственно вытекают из имеющихся аналитических представлений изучаемых функций. Поэтому мы опустим подробные доказательства, а ограничимся лишь необходимыми пояснениями. Всюду ниже $z \in \boldsymbol{C}$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$.

Лемма 2.1. *Пусть* $\rho > 1/4$. *Тогда* (a) $\operatorname{Im} z \operatorname{Im} W_z(p) \geqslant 0$; (b) существует достаточно малое $\rho_1 > 0$, что при $\lambda \leqslant \rho_1$: $W_\lambda(p) \in [-\infty, -1] \cup [0, \infty]$, $p \in \boldsymbol{T}$; (c) можно выбрать непрерывную ветвь $\ln(\cdot)$ так, что равенство (1.14) корректно определяет функцию $f(\lambda, p)$, $\lambda \leqslant \rho_1$, $p \in \boldsymbol{T}$, причем $f(\lambda, p) = -2i \operatorname{Arcctg} W_\lambda(p)$, где $\operatorname{Arcctg} w = \{\pm\pi/2,\ w = \pm 0;\ \pm 0,\ w = \pm\infty\}$; (d) функция $f(\lambda, p)$, с заменой в формуле (1.14) λ на z, расширяется в полосу $L_{\rho_1, \varepsilon_1} = \{z: \operatorname{Re} z \leqslant \rho_1,\ |\operatorname{Im} z| \leqslant \varepsilon_1\}$, причем при достаточно малом ε_1 $f(z, p)$ — бесконечно дифференцируемая функция своих аргументов $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ и p в области $L_{\rho_1, \varepsilon_1} \times \boldsymbol{T}$; (e) $f_0(z)$ — бесконечно дифференцируемая функция аргументов $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ в области $L_{\rho_1, \varepsilon_1}$; при $\operatorname{Im} z > 0$: $\operatorname{Re} f_0(z) < 0$; $f_0(\lambda) = im(\lambda)$, $m(\lambda) = -\int_{\boldsymbol{T}} 2 \operatorname{Arcctg} W_\lambda(p)\, dp$; $m(\lambda)$ — монотонно возрастающая, гладкая функция $\lambda \leqslant \rho_1$, со значениями в интервале $(-\pi, \pi)$, $m(-\infty) = -\pi$; (f) существует положительное $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ такое, что для $\lambda \leqslant \rho_1$ и $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_2$: $\forall \xi \in \boldsymbol{C}$, $|\xi| = 1$

$$|e^{f_0(\lambda+i\varepsilon)}\xi - 1| \geqslant \frac{1}{2} |e^{f_0(\lambda)}\xi - 1|; \tag{2.1}$$

(g) функция $t(z, p)$, определенная как решение гомологического уравнения $t(z, p) - t(z, p - \alpha) = f(z, p) - f_0(z)$, $p \in \boldsymbol{T}$, **(2.2)**, бесконечно дифференцируема по своим аргументам $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ и p в области $L_{\rho_1, \varepsilon_1} \times \boldsymbol{T}$.

Лемма 2.2. *Пусть* $\rho < 1/4$. *Тогда*

(a) $\operatorname{Im} z \operatorname{Im} W_z \geqslant 0$; *функция* $W_z(p)$ *отлична от нуля в области тора* $\boldsymbol{T}$, *определяемой неравенством* $p^2 < \rho$, *и равна нулю в остальной части тора;* (b) *при* $\lambda < \rho$: $W_\lambda(\rho) \in [-\infty, -\tau_1] \cup [0, \infty)$; *при* $\lambda > \rho$: $W_\lambda(p) \in [-\tau_2, 0]$, *где* τ_1, τ_2 — *положительные, зависящие от* λ *числа;* (c) *для функции* $f(\lambda, p)$ *справедливо утверждение* (c) *леммы* 2.1, *при этом для каждого фиксированного* λ $f(\lambda, p)$ *бесконечно дифференцируема по* $p \in \boldsymbol{T}$; $f(\lambda, p)$ *бесконечно дифференцируема по совокупности переменных* λ, p *в областях* $\{\lambda < \rho\} \times \boldsymbol{T}$; $\{\lambda \geqslant \rho\} \times \boldsymbol{T}$; $\boldsymbol{R} \times \{p^2 < \rho\}$; *при* $\lambda < \rho$ и $p^2 > \rho$ $f(\lambda, p) = -\pi$; *а при* $\lambda > \rho$ *и* $p^2 > \rho$: $f(\lambda, p) = \pi$, *т. е. при* $p^2 \geqslant \rho$ $f(\lambda, p)$ *испытывает скачок от* $-\pi$ *до* π *при* $\lambda = \rho \mp 0$; (d) *для любого замкнутого интервала* $\Delta \subset \boldsymbol{R}$ *такого, что* $\rho \overline{\in} \Delta$ *можно указать такое* $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\Delta) > 0$, *что функция $f(\lambda, p)$ после замены λ на z будет бесконечно дифференцируемой по своим аргументам* $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ *и* p, *когда* z *принадлежит прямоугольнику* $L_{\Delta, \varepsilon_1} = \{z\colon \operatorname{Re} z \in \Delta, \ |\operatorname{Im} z| < \varepsilon_1\}$; (e) $f_0(z) = \int_T f(z, p)\, dp$ — *бесконечно дифференцируема в области* $L_{\Delta, \varepsilon_1}$; *при* $\operatorname{Im} z > 0$: $\operatorname{Re} f_0(z) < 0$; $f_0(\lambda) = im(\lambda)$, *где* $m(\lambda)$ — *вещественнозначная, монотонно возрастающая функция* λ, *причем* $m(\pm\infty) = \pm\pi$; $m(\lambda)$ *является гладкой функцией при* $\lambda \neq \rho$, *в точке* $\lambda = \rho$ *она непрерывна справа и имеет скачок, равный* $2\pi(1 - V_\rho)$, *где* V_ρ — *объем* d-*мерного шара радиуса* ρ; (f) *в прямоугольнике* $L_{\Delta, \varepsilon_2}$ *при достаточно малом* ε_2 *справедливо неравенство* (2.1); (g) *функция* $t(z, p)$, *определенная так же, как и в лемме* 2.1, *является бесконечно дифференцируемой в области* $L_{\Delta, \varepsilon_1} \times \boldsymbol{T}$.

Доказательство пунктов (a)—(f) лемм 2.1, 2.2 опирается в существенном на то обстоятельство, что множество значений функции $W_\lambda(p)$, $p \in \boldsymbol{T}$, имеет «окно» на вещественной прямой, благодаря чему функция $f(\lambda, p)$, определенная равенством (1.14), может за счет подходящего выбора ветви $\ln(\cdot)$ сделана гладкой функцией p. Последнее обстоятельство является существенным для разрешимости в гладких функциях гомологического уравнения (2.2). Действительно, если $t_n(\lambda)$ и $f_n(\lambda)$ — коэффициенты Фурье функции $t(\lambda, p)$ и $f(\lambda, p)$, то из уравнения (2.2) получим $t_n(\lambda) = (1 - e^{-i2\pi(\alpha, n)})^{-1} f_n(\lambda)$, $n \neq 0$; $t_0(\lambda) = 0$ **(2.3)**. В силу условия (1.3) первый множитель в (2.3) растет не быстрее чем $|n|^\beta$, тогда как ввиду гладкости f, $f_n(\lambda)$ убывают быстрее любой степени $|n|$, т. е. $t(\lambda, p)$ — бесконечно дифференцируемая функция $p \in \boldsymbol{T}$.

§ 3. Самосопряженность и структура спектра. Доказательство существенной самосопряженности H и структуры спектра будет проводиться в следующей последовательности: доказательство ограниченности оператора $\hat{R}_z$, $\operatorname{Im} z \neq 0$, определенного равенством (1.8), и соотношения $R_z S \subseteq S$, откуда уже почти непосредственно вытекает справедливость теоремы 1.1; нахождение всех собственных значений и собственных функций оператора H; доказательство при $\rho < {}^1/_4$ полноты системы собственных функций в подпространстве $H_{<\rho}$, т. е. утверждения теоремы 1.3; доказательство теоремы 1.2 аналогично обоснованию теоремы 1.3 и поэтому опускается.

Лемма 3.1. (a) *если* $\varphi(p)$ — *периодическая функция, то* $(\varphi\psi)_T = \varphi(\psi)_T$:

$$\int_T |(g\psi)_T|^2\, dp \leqslant \sup_{p \in T} (|g|^2)_T(p) \int_{R^d} |\psi|^2\, dp; \tag{3.1}$$

(b) соотношение (1.17) с заменой λ на z справедливо при $\rho < 1/4$ и $z \in L_{\Delta, \varepsilon_1}$; $\rho > 1/4$ и $z \in L_{\rho_1, \varepsilon_1}$; соотношение (1.18) имеет место для тех же z при условии $\operatorname{Im} z > 0$; (c) для z из предыдущего пункта при условии $\operatorname{Im} z > 0$ справедливо неравенство

$$\|(\hat{T}^{-1} + W_z)^{-1}\| \leqslant 2(1 - e^{\operatorname{Re} f_0(z)})^{-1}; \tag{3.2}$$

(d) оператор $\hat{R}_z$, определенный равенством (1.8), при z из предыдущего пункта является ограниченным и $R_z S \subseteq S$.

Доказательство. Утверждение (a) вытекает из (1.6) и неравенства Коши. Утверждения (b) и (c) вытекают из лемм 2.1, 2.2 (d) — (g). Справедливость (d) следует из (1.8) и пункта (c) настоящей леммы.

Из леммы 3.1 вытекает справедливость теоремы 1.1, так как непосредственная проверка показывает, что $(\hat{H} - zI)\hat{R}_z\psi = \psi$, $\psi \in S$ **(3.3)**.

Лемма 3.2. *Пусть* $\rho < 1/4$ *и* $O_\rho = (-\pi,\ m(\rho - 0)) \cup [m(\rho),\ \pi]$, *где функция* $m(\lambda)$ *определена в лемме* 2.2 е. *Тогда*

(a) *множество собственных значений оператора* H *совпадает с множеством решений уравнения* (1.20), *при этом при каждом* n *имеется не более одного решения, а в точности одно решение имеется тогда и только тогда, когда* $2\pi(\alpha, n) + \omega \in O_\rho\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$ **(3.4)**; (b) *каждому* n, *удовлетворяющему равенству* (3.4), *отвечает единственная собственная функция* u_{λ_n} *с собственным значением* λ_n *таким, что* $m(\lambda_n) = 2\pi(\alpha, n) + \omega\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$; *для функции* u_{λ_n} *справедливо представление* (1.10), (1.22), (1.23) *и* $u_{\lambda_n} \in S$.

Доказательство. Пусть $\hat{H}u_\lambda = \lambda u_\lambda$, где $u_\lambda \in L_2$. Тогда $\hat{R}_z u_\lambda = (\lambda - z)^{-1} u_\lambda$, откуда ввиду (1.8) легко получим

$$u_\lambda(p) = \hat{v}(p)(p^2 - \lambda)^{-1} g_\lambda(p); \tag{3.5}$$

$$g_\lambda = -(\lambda - z)(\hat{T}^{-1} + W_z)^{-1}(\hat{v}^*(p)(p^2 - z)^{-1} u_\lambda)_T. \tag{3.6}$$

Если теперь выражение (3.5) подставить в (3.6) и к обеим частям получившегося равенства применить оператор $\hat{T}^{-1} + W_z$, то в силу леммы 3.1 a—c получим равенство (1.11) и $\hat{T}^{-1} g_\lambda$, $W_\lambda g_\lambda \in L_2(T)$ **(3.7)**. Введем вектор $\tilde{e}_\lambda = (I - \varkappa\hat{U})^{-1} g_\lambda$, который в силу (3.7) принадлежит $L_2(T)$. Подействовав на обе части равенства (1.11) ограниченным оператором $(W_\lambda + iI)^{-1}$, получим $(I - (W_\lambda - iI)(W_\lambda + iI)^{-1}\varkappa\hat{U})\tilde{e}_\lambda = 0$ **(3.8)**. Отсюда из равенств (1.14), (2.2) вытекает справедливость равенства (1.20), из которого, рассуждая, как в § 1, получим, что λ_n и u_{λ_n} с необходимостью удовлетворяют утверждениям леммы 3.2 a, b. В том, что соответствующие λ_n и u_{λ_n} действительно являются собственными значениями и функциями, нетрудно убедиться непосредственной проверкой.

Лемма 3.3. *Пусть* $\rho < 1/4$. *Собственные функции* u_{λ_n} *из предыдущей леммы образуют базис пространства* $\mathcal{H}_{<\rho}$.

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно показать, что для любого конечного интервала Δ, не содержащего точку ρ, с концами не совпадающими с множеством собственных значений $\Lambda = \{\lambda_n\}$, существует семейство вложенных друг в друга множеств Δ_δ, $\delta > 0$, такое, что каждое Δ_δ является объединением счетного числа интервалов в $\boldsymbol{R}$ и

$$\Delta \supset \Delta_\delta \supset \Delta \cap \Lambda; \quad \Delta_\delta \downarrow \Delta \cap \Lambda,\ \delta \downarrow 0; \tag{3.9}$$

$$E(\Delta_\delta)\mathcal{H}_{<\rho} = E(\Delta)\mathcal{H}_{<\rho}. \tag{3.10}$$

Чтобы проверить равенство (3.10), мы воспользуемся следующим общим фактом: если A — самосопряженный оператор, $R(z)$ — его резольвента, а Γ — счетное объединение интервалов, концы которых не являются собственными значениями A, то для любого вектора φ

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \pi^{-1}\varepsilon \int_{\Gamma} \| R(\lambda+i\varepsilon)\varphi\|^2 d\lambda = (E(\Gamma)\varphi, \varphi). \tag{3.11}$$

Построим семейство множеств Δ_δ, удовлетворяющих соотношениям (3.9). Задавшись $\delta > 0$ и обозначив $S^1 = \{\xi \in \boldsymbol{C}: |\xi| = 1\}$, введем

$$S_\delta^1 = \bigcup_{n\in Z^d} \{\xi \in S^1: |\operatorname{Arg}\xi - \operatorname{Arg} e^{i2\pi(\alpha,n)}| \leqslant \leqslant \delta(1+|n|)^{-d-\nu}\}, \quad \widetilde{S}_\delta^1 = S^1 \setminus S_\delta^1, \tag{3.12}$$

где γ — фиксированное положительное число. Очевидно, что

$$\operatorname{mes} S_\delta^1 \to 0, \quad \operatorname{mes} \widetilde{S}_\delta^1 \to 2\pi \text{ при } \delta\to 0; \tag{3.13}$$

$$|1 - e^{-i2\pi(\alpha,\widetilde{n})}\xi| \geqslant \delta(1+|n|)^{-d-\nu}, \quad w \in \boldsymbol{Z}^d, \quad \xi \in \widetilde{S}_\delta^1. \tag{3.14}$$

Рассмотрим образ интервала Δ при отображении h: $\lambda \to \varkappa \exp\{f_0(\lambda)\} = \varkappa \exp\{im(\lambda)\}$. В силу леммы 2.2е, h является взаимнооднозначным, непрерывным отображением Δ на $h\Delta \subset S^1$, причем $h(\lambda_n) = \varkappa \exp\{i2\pi(\alpha, n)\}$, $\lambda_n \in \Delta$. Введем $\Delta_\delta = \Delta \cap h^{-1}S_\delta^1$ и $\widetilde{\Delta}_\delta = \Delta \cap h^{-1}\widetilde{S}_\delta^1$. Очевидно, что

$$\Delta = \Delta_\delta \cup \widetilde{\Delta}_\delta, \quad \Delta_\delta \cap \widetilde{\Delta}_\delta = \varnothing; \quad \Delta_\delta \downarrow \Delta \cap \Lambda, \quad \delta \downarrow 0. \tag{3.15}$$

Ввиду (3.11) доказательство (3.10) сводится к лемме

Лемма 3.4. $\forall\varphi \in \mathscr{H}_{<\rho} \cap C^\infty(\boldsymbol{R}^d)$, $\lambda \in \widetilde{\Delta}_\delta$ *и* $z = \lambda + i\varepsilon$

$$\varepsilon\|\hat{R}_z\varphi\|^2 \leqslant 2\|\varphi\|^2 \quad \textbf{(3.16)}; \qquad \lim_{\varepsilon\to+0} \varepsilon\|\hat{R}_z\varphi\|^2 = 0 \quad \textbf{(3.17)}.$$

При этом неравенство (3.16) справедливо, так как $\hat{R}_z$ — резольвента самосопряженного оператора, а доказательство (3.17) ввиду (1.8) в свою очередь сводится к доказательству такой леммы. Введем при $z = \lambda + i\varepsilon$ обозначения

$$\varphi_\varepsilon(p) = \varphi(p) - \hat{v}(p)\,u_\varepsilon(p); \tag{3.18}$$

$$u_\varepsilon(p) = (\hat{T}^{-1} + W_z)^{-1}(\hat{v}^*\varphi(p^2-z)^{-1})_{\boldsymbol{T}}. \tag{3.19}$$

При этом, очевидно, $(\hat{R}_z\varphi)(p) = \varphi_\varepsilon(p)(p^2-z)^{-1}$ **(3.20)** и имеет место

Лемма 3.5. *Пусть* $\lambda \in \widetilde{\Delta}_\delta$ *и положительное* ε *достаточно мало. Тогда* (a) $u_\varepsilon(p) \in C^\infty(\boldsymbol{T})$ *и в метрике* $C(\boldsymbol{T})$ *при* $\varepsilon \to +0$ $u_\varepsilon(p) \to u_0(p) \in C^\infty(\boldsymbol{T})$; (b) *если* $\lambda > 0$ *и* $p^2 = \lambda$, *то* $\hat{v}(p)\,u_0(p) = \varphi(p)$;

(c) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0} \varepsilon \int_{\boldsymbol{T}} |\varphi_\varepsilon(p)|^2 [(p^2-\lambda)^2 + \varepsilon^2]^{-1} dp = 0.$ (3.21)

Доказательство. Утверждение (a) вытекает из соотношения (1.18), где в силу леммы 3.1 b можно заменить λ на z, неравенства (2.1), а также неравенства (3.14), куда ввиду определения множества $\tilde{\Delta}_\delta$ можно подставить $\xi = \varkappa \exp\{if_0(\lambda)\}$. Пункт (b) леммы вытекает из (a) и равенства, получаемого из (3.19) после применения к нему оператора $\hat{T}^{-1} + W_z$ с последующим предельным переходом $\varepsilon \to +0$. Пункт (c) вытекает из (3.18) при использовании уже доказанных пунктов (a), (в) настоящей леммы.

Таким образом, (3.19) и (3.20) означают справедливость равенства (3.17), что завершает доказательство леммы 3.4, из которой, в свою очередь, следует правильность соотношения (3.10), а с ним и леммы 3.3. Но лемма 3.3 вместе с теоремой 1.1 дадут утверждение теоремы 1.3.

Поступила в редколлегию 05.06.86