ГЛАВА II.

О ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЯХЪ ПЕРВАГО ПОРЯДКА МЕЖДУ ДВУМЯ ПЕРЕМѢННЫМИ.

Общія свойства дифференціальныхъ уравненій перваго порядка и первой степени.

20. Мы уже видѣли, что дифференціальныя уравненія перваго порядка, вида

$$f\left(x,\,y,\frac{dy}{da}\right)=0, \qquad (1)$$

получаются чрезъ исключеніе произвольнаго постояннаго количества c изъ уравненій вида

$$F(x,y,c)=0, \qquad (2)$$

носящихъ названіе *полныхъ первообразныхъ* уравненій по отношенію къ дифференціальнымъ уравненіямъ, изъ нихъ выводимымъ. Каждому данному первообразному уравненію, содержащему одно произвольное постоянное количество, непремѣнно соотвѣтствуетъ, какъ уже было доказано, одно опредѣленное дифференціальное уравненіе перваго порядка; но имѣетъ ли каждое данное дифференціальное уравненіе перваго порядка непремѣнно одно опредѣленное полное первообразное вида (2), это — вопросъ, на который намъ еще нужно отвѣчать. Отвѣтъ здѣсь тѣмъ болѣе важенъ, что главная задача всей теоріи дифференціальныхъ уравненій заключается въ построеніи пріемовъ разысканія по даннымъ дифференціальнымъ уравненіямъ ихъ полныхъ первообразныхъ уравненій.

Общее доказательство существованія для каждаго даннаго дифференціальнаго уравненія перваго порядка опредѣленнаго первообразнаго уравненія, содержащаго одно произвольное постоянное количество, впервые дано было французскимъ геометромъ Коши; французскіе же ученые Бріо и Буке значительно упростили это доказательство и распространили его на случай системы какого бы то ни было числа дифференціальныхъ уравненій перваго порядка. Для желающихъ ознакомиться съ пріемомъ, употребленнымъ этими геометрами, я укажу на извѣстный Курсъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія Серре, гдѣ онъ изложенъ весьма отчетливо, здѣсь же ограничусь изложеніемъ болѣе простаго доказательства существованія полнаго первообразнаго для каждаго дифференціальнаго уравненія перваго порядка и первой степени, употребленнаго англійскимъ геометромъ Булемъ въ его Treatise on differential equations (S. 26, 2-e edition).

21. Дифференціальное уравненіе перваго порядка, вида

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0 \tag{1}$$

можетъ быть той или другой степени по отношенію къ производной $\frac{dy}{dx}$ неизвѣстной функціи. Когда оно первой степени относительно этой производной, тогда оно естественно приводится къ формѣ

$$M+N\frac{dy}{dx}=0,$$

или къ слѣдующей:

$$Mdx+Ndy=0, \tag{2}$$

гдѣ M, N вообще нѣкоторыя функціи количествъ x, y. Уравненіями этого вида и займемся теперь.

Начнемъ съ доказательства слѣдующаго общаго предложенія, на которое придется въ-послѣдствіи опираться.

Предложеніе. *Для того, чтобы изъ двухъ количествъ V и v, представляющихъ явныя функціи двухъ перемѣнныхъ x, y, первое могло быть разсматриваемо какъ функція втораго, и на-оборотъ, необходимо и достаточно, чтобы тождественно удовлетворялось условіе:*

$$\frac{dV}{dx}\frac{dv}{dy}-\frac{dV}{dy}\frac{dv}{dx}=0. \tag{3}$$

Докажемъ сперва, что условіе (3) непремѣнно удовлетворяется тождественно, когда V представляетъ функцію v. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $V=\Phi(v)$; въ такомъ случаѣ будетъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dV}{dx}&=\frac{dV}{dv}\frac{dv}{dx},\\ \frac{dV}{dy}&=\frac{dV}{dv}\frac{dv}{dy}\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

и, по умноженіи перваго изъ этихъ уравненій на $\frac{dv}{dy}$, а втораго на $\frac{dv}{dx}$ и составленіи разности слѣдствій, мы получаемъ:

$$\frac{dV}{dx}\frac{dv}{dy}-\frac{dV}{dy}\frac{dv}{dx}=0,$$

т. е. условіе (3). При этомъ очевидно, что уравненіе (3), какъ логическое слѣдствіе тождественно удовлетворяющихся уравненій (4), само имѣетъ мѣсто тождественно.

Теперь, на-оборотъ, докажемъ, что тождественное существованіе уравненія (3) влечетъ за собою возможность выразить V какъ функцію v. Для этого замѣчаемъ, что какъ бы ни выражались V и v въ перемѣнныхъ x, y, всегда можно чрезъ исключеніе одного изъ количествъ x, y представить V въ формѣ функціи остающагося перемѣннаго и количества v. Пусть, напримѣръ, найдено этимъ путемъ, что

$$V=\psi(x, v);$$

въ такомъ случаѣ будемъ имѣть:

$$\frac{dV}{dx} = \frac{\partial\psi(x,v)}{dx} + \frac{\partial\psi(x,v)}{dv}\frac{dv}{dx},$$
$$\frac{dV}{dy} = \frac{\partial\psi(x,v)}{dv}\frac{dv}{dy}$$

и подстановка этихъ выраженій $\frac{dV}{dx}$ и $\frac{dV}{dy}$ въ условное тождество (3) доставитъ:

$$\frac{\partial\psi(x,v)}{dx}\frac{dv}{dy} = 0, \tag{5}$$

уравненіе, которое опять должно удовлетворяться тождественно, т. е. для какихъ бы то ни было значеній x. Однако множитель $\frac{dv}{dy}$ не можетъ быть постоянно нулемъ, такъ-какъ v, по положенію, явнымъ образомъ зависитъ отъ y, а потому мы должны имѣть тождественно

$$\frac{\partial\psi(x,v)}{dx} = 0,$$

условіе, требующее, чтобы $\psi(x,v) = V$ не зависѣло непосредственно отъ x, т. е. чтобы V выражалось въ одномъ v. Слѣдовательно существованіе тождества (3) дѣйствительно устанавливаетъ функціональную зависимость V отъ одного v.

22. Докажемъ теперь, что *всякое уравненіе вида*

$$M + N\frac{dy}{dx} = 0, \tag{1}$$

непремѣнно обусловливаетъ первообразное отношеніе между x, y, вида

$$F(x,y) = c,$$

гдѣ c произвольное постоянное.

Разсмотримъ сперва — каковъ *непосредственный* смыслъ уравненія (1). Такъ-какъ $\frac{dy}{dx}$ представляетъ собою предѣлъ, къ которому стремится отношеніе $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ соотвѣтствующихъ другъ другу приращеній количествъ x, y по мѣрѣ того какъ эти приращенія стремятся къ нулю, то начнемъ съ разсмотрѣнія уравненія

$$M + N\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0, \tag{2}$$

изъ котораго непосредственно находимъ, что вообще

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{M}{N} = \varphi(x, y), \tag{3}$$

гдѣ форма функціи $\varphi(x, y)$ опредѣляется количествами M, N.

Теперь, если взять какой бы то ни было рядъ значеній x, то можно будетъ составить соотвѣтствующій рядъ значеній y, въ которомъ, какъ только одно значеніе y изберемъ произвольно, всѣ остальныя значенія опредѣлятся уравненіемъ (3). Пусть же x_0, x_1, x_2,.... рядъ произвольно избранныхъ значеній x, а y_0 произвольное значеніе y, соотвѣтствующее x_0; въ такомъ случаѣ, означая черезъ Δx_0 то приращеніе, которое нужно придать x_0 для полученія x_1, черезъ Δx_1 то приращеніе, которое нужно придать x_1 для полученія x_2, и т. д., изъ уравненія (3) найдемъ:

$$\Delta y_0 = \varphi(x_0, y_0)\Delta x_0,$$

почему будетъ:

$$y_0 + \Delta y_0 = y_0 + \varphi(x_0, y_0)\Delta x_0.$$

Но такъ-какъ Δy_0 представляетъ приращеніе, которое получаетъ y_0 въ то время, какъ x_0 получаетъ приращеніе Δx_0, то очевидно, что $y_0 + \Delta y_0$ будетъ значеніемъ y, соотвѣтствующимъ значенію $x_1 = x_0 + \Delta x_0$ количества x. Означивъ это значеніе y черезъ y_1, будемъ имѣть:

$$y_1 = y_0 + \varphi(x_0, y_0)\Delta x_0 = y_0 + \varphi(x_0, y_0)(x_1 - x_0). \tag{4}$$

Такимъ-же образомъ найдемъ, что

$$\left.\begin{array}{l} y_2 = y_1 + \varphi(x_1, y_1)(x_2 - x_1), \\ y_3 = y_2 + \varphi(x_2, y_2)(x_3 - x_2), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ ; \end{array}\right\} \tag{5}$$

но такъ-какъ, по избраніи для y_1 произвольнаго значенія, y_1

вполнѣ опредѣляется формулою (4), то ясно, что затѣмъ вполнѣ опредѣлятся формулами (5) и всѣ прочія значенія y, т. е. y_2, y_3...... Слѣдовательно предложеніе, нами высказанное, и оправдано.

Теперь, если предположимъ, что приращенія

$$\Delta x_0, \Delta x_1, \Delta x_2, \ldots.$$

всѣ послѣдовательно убываютъ, то и соотвѣтствующія имъ приращенія

$$\Delta y_0, \Delta y_1, \Delta y_2, \ldots.$$

количества y также будутъ соотвѣтственно убывать, такъ что при непрерывномъ измѣненіи x, и y будетъ измѣняться непрерывно и притомъ, въ виду формулы

$$\Delta y = \varphi(x, y)\Delta x,$$

совершенно опредѣленнымъ образомъ. Поэтому y представляетъ непрерывную функцію x, избравъ для которой *произвольно* значеніе c, соотвѣтствующее значенію x_0 перемѣннаго x, мы будемъ имѣть:

$$y = c + \varphi(x_0, c)(x - x_0),$$

отношеніе, которое всегда принимаетъ форму уравненія

$$F(x, y) = c,$$

гдѣ c произвольное постоянное количество, а F опредѣленная функція.

23. Точно такъ-же легко убѣдиться въ томъ, что *двухъ различныхъ между собою полныхъ первообразныхъ отношеній уравненіе $Mdx + Ndy = 0$ имѣть не можетъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, допустивъ противное, т. е. предположивъ, что уравненіе это имѣетъ два полныхъ первообразныхъ

$$u = c \text{ и } v = c',$$

чрезъ дифференцированіе ихъ найдемъ:

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{dv}{dx} + \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx} = 0,$$

а исключивъ отсюда $\frac{dy}{dx}$, получимъ для всевозможныхъ значеній x:

$$\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy} - \frac{du}{dy}\frac{dv}{dx} = 0,$$

что показываетъ (см. предложеніе нумера 21), что v представляетъ функцію u. Слѣдовательно второе первообразное уравненіе сводится на $\psi(u) = c'$ и разбивается затѣмъ на уравненія вида $u = c$, изъ которыхъ каждое не болѣе какъ повтореніе перваго изъ полныхъ первообразныхъ уравненій.

Изъ вышесказаннаго, въ связи съ предложеніемъ нумера 21, слѣдуетъ также, что *если $u = c$ представляетъ полное первообразное уравненія $Mdx + Ndy = 0$, то и всякое отношеніе вида $\psi(u) = c'$, гдѣ ψ какая бы то ни была функція, также будетъ полнымъ первообразнымъ того-же дифференціальнаго уравненія.*

Полное первообразное уравненіе, въ виду пріемовъ служащихъ для его вывода изъ даннаго дифференціальнаго уравненія, по большей части называется *полнымъ интеграломъ* дифференціальнаго уравненія.

Интегрированіе уравненій перваго порядка и первой степени чрезъ раздѣленіе перемѣнныхъ.

24. Убѣдившись въ томъ, что каждое дифференціальное уравненіе вида

$$Mdx + Ndy = 0 \tag{1}$$

непремѣнно обусловливаетъ существованіе полнаго интеграла вида

$$F(x, y) = c, \tag{2}$$

разсмотримъ теперь—какимъ образомъ по данному уравненію (1) находить его полный интегралъ. Замѣтимъ при этомъ, что общаго рѣшенія этого вопроса до сихъ поръ не найдено и что поэтому намъ придется ограничиться изложеніемъ пріемовъ, приложимыхъ только къ большему или меньшему числу частныхъ случаевъ.

Первый изъ такихъ пріемовъ есть пріемъ *раздѣленія перемѣнныхъ*, основанный на слѣдующемъ предложеніи.

Если данное дифференціальное уравненіе приводится къ виду

$$Xdx + Ydy = 0, \tag{3}$$

гдѣ X функція одного x, а Y функція одного y, то полный интегралъ его всегда представится уравненіемъ

$$\int Xdx + \int Ydy = c, \tag{4}$$

гдѣ c произвольное постоянное количество.

Справедливость этого предложенія обнаруживается изъ того, что дифференцированіе уравненія (4) непосредственно приводитъ къ уравненію (3); слѣдовательно уравненіе (4), какъ отношеніе, связывающее между собою количества x, y и существующее совмѣстно съ даннымъ уравненіемъ (3), представляетъ рѣшеніе этого послѣдняго; если же принять въ соображеніе, что уравненіе (4) есть отношеніе между x, y и произвольнымъ постояннымъ c, вида $F(x, y) = c$, двухъ же различныхъ между собою отношеній такого вида, удовлетворяющихъ дифференціальному уравненію (3), существовать не можетъ (см. нумеръ 23), то ясно обнаружится, что формула (4) представляетъ полный интегралъ уравненія (3).

Такъ-какъ разысканіе интеграла каждой непрерывной и достаточно опредѣленной функціи одного перемѣннаго признается теоретически всегда возможнымъ, то и интеграція дифференціальнаго уравненія также признается возможною какъ-только удастся раздѣлить въ немъ перемѣнныя, т. е. привести его къ виду уравненія (3).

25. Приложимъ только-что высказанныя соображенія къ интеграціи частныхъ видовъ дифференціальныхъ уравненій, такъ-какъ общихъ пріемовъ для приведенія каждаго данного уравненія къ виду $Xdx + Ydy = 0$ не существуетъ. При этомъ начнемъ съ того, что проинтегрируемъ нѣсколько такихъ уравненій, въ которыхъ перемѣнныя уже раздѣлены.

1) Пусть требуется проинтегрировать уравненіе

$$x^m dx + y^n dy = 0,$$

гдѣ m и n числа отличныя отъ -1. Перемѣнныя въ немъ раздѣлены, а потому полный интегралъ его представляется въ формѣ

$$\int x^m dx + \int y^n dx = c.$$

Отсюда, произведя самыя интеграціи, найдемъ:

$$\frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{y^{n+1}}{n+1} = c,$$

т. е.

$$(n+1)x^{m+1} + (m+1)y^{n+1} = C,$$

гдѣ $C = (m+1)(n+1)c$ — произвольное постоянное количество. Это и есть полный интегралъ даннаго уравненія.

2) Возьмемъ еще уравненіе

$$\frac{dx}{b+ax} + \frac{dy}{b'+a'y} = 0.$$

Перемѣнныя раздѣлены, а потому полный интегралъ представится чрезъ

$$\int \frac{dx}{b+ax} + \int \frac{dy}{b'+a'y} = c.$$

Произведя интеграціи на дѣлѣ, получимъ:

$$\frac{1}{a}\log\left(x + \frac{b}{a}\right) + \frac{1}{a'}\log\left(y + \frac{b'}{a'}\right) = c,$$

или

$$\log\sqrt[a]{x + \frac{b}{a}} + \log\sqrt[a']{y + \frac{b'}{a'}} = c,$$

или

$$\log\left[\sqrt[a]{x+\frac{b}{a}}\sqrt[a']{y+\frac{b'}{a'}}\right]=c. \qquad (\alpha)$$

Это и есть полный интегралъ даннаго уравненія; но его можно еще преобразовать и привести къ формѣ алгебраическаго уравненія. Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе (α) влечетъ за собою слѣдующее:

$$\sqrt[a]{x+\frac{b}{a}}\sqrt[a']{y+\frac{b'}{a'}}=e^c=C,$$

гдѣ C опять произвольное постоянное.

3) Имѣя уравненіе

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=0,$$

непосредственно находимъ:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=c,$$

т. е.

$$\text{arc}\sin x+\text{arc}\sin y=c. \qquad (\beta)$$

Этотъ полный интегралъ даннаго уравненія можетъ быть приведенъ къ формѣ алгебраическаго уравненія. Въ самомъ дѣлѣ, формула (β) влечетъ за собою слѣдующую:

$$\sin[\text{arc}\sin x+\text{arc}\sin y]=\sin c=C,$$

т. е.

$$\sin(\text{arc}\sin x).\cos(\text{arc}\sin y)+\cos(\text{arc}\sin x)\sin(\text{arc}\sin y)=C,$$

или

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=C.$$

26. Форма, въ которой получается полный интегралъ дифференціальнаго уравненія, измѣняется съ измѣненіемъ пріемовъ, употребляемыхъ для его разысканія; но при этомъ одна форма всегда должна быть способна преобразоваться въ другую въ виду того предложенія, что два отношенія $u=c$, $v=c'$, гдѣ u, v функціи x, y, тогда только могутъ одновременно представлять полный интегралъ одного и того-же дифференціальнаго уравненія, когда $v=\psi(u)$ и слѣдовательно $c'=\psi(c)$.

Поясимъ это примѣромъ.

Мы нашли, что уравненіе

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=0$$

имѣетъ полнымъ интеграломъ

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=c. \qquad (\alpha)$$

Если теперь данное уравненіе, чрезъ умноженіе на (-1), привести сперва къ виду

$$\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}}=0,$$

то, интегрируя его, получимъ:

$$\arccos x+\arccos y=c',$$

или

$$\cos[\arccos x+\arccos y]=\cos c'=C',$$

т. е.

$$xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}=C'. \qquad (\beta)$$

Это уравненіе, будучи полнымъ интеграломъ даннаго, въ тоже время отлично отъ уравненія (α); но

$$1-[xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}]^2=[x\sqrt{1-x^2}+y\sqrt{1-y^2}]^2,$$

а потому уравненіе (β) переходитъ въ

$$x\sqrt{1-x^2}+y\sqrt{1-y^2}=\sqrt{1-C'^2}=C_1,$$

т. е. сводится на уравненіе (α).

27. До сихъ поръ мы брали дифференціальныя уравненія, въ которыхъ перемѣнныя были уже раздѣлены; но на практикѣ приходится часто достигать раздѣленія перемѣнныхъ въ дифференціальномъ уравненіи подвергая его извѣстнымъ преобразованіямъ. Въ иныхъ случаяхъ достаточно для этого умножить

или раздѣлить данное дифференціальное уравненіе на прилич
выбранное выраженіе. Приведемъ примѣры.

1) Въ уравненіи

$$\frac{xdx}{1+y}-\frac{ydy}{1+x}=0$$

перемѣнныя раздѣляются отъ умноженія его на $(1+x)(1+y)$.
Мы получаемъ:

$$(1+x)\,xdx-(1+y)\,ydy=0,$$

т. е.

$$(x^2+x)\,dx-(y^2+y)\,dy=0,$$

послѣ чего интеграція прямо даетъ:

$$\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-\frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{2}=c,$$

т. е.

$$2\,(x^3-y^3)+3\,(x^2-y^2)=c_1.$$

2) Въ уравненіи

$$x\sqrt{1+y^2}\,dx+y\sqrt{1+x^2}\,dy=0$$

достаточно раздѣлить обѣ части на $\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}$; это
доставитъ:

$$\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}}=0$$

и, проинтегрировавъ, мы получимъ:

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}+\int\frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}}=c,$$

т. е.

$$\frac{1}{2}\left\{\int\frac{d\,(x^2)}{\sqrt{1+x^2}}+\int\frac{d\,(y^2)}{\sqrt{1+y^2}}\right\}=c,$$

или

$$\frac{1}{2}\left\{\int\frac{d\,(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}+\int\frac{d\,(1+y^2)}{\sqrt{1+y^2}}\right\}=c$$

и наконецъ

$$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=c.$$

3) Замѣтимъ, что, вообще, во всякомъ уравненіи вида

$$X_1 Y_1 dx + X_2 Y_2 dy = 0,$$

гдѣ X_1, X_2 функціи x, а Y_1, Y_2 функціи y, перемѣнныя раздѣляются какъ только умножимъ уравненіе на $\frac{1}{X_2 Y_1}$. Этимъ путемъ уравненіе переходитъ въ

$$\frac{X_1}{X_2} dx + \frac{Y_2}{Y_1} dy = 0$$

и затѣмъ интегралъ его выражается формулою

$$\int \frac{X_1 dx}{X_2} + \int \frac{Y_2 dy}{Y_1} = c.$$

28. Въ иныхъ случаяхъ раздѣленіе перемѣнныхъ въ дифференціальномъ уравненіи вида $Mdx + Ndy = 0$ достигается путемъ преобразованій, основанныхъ на замѣнѣ перемѣнныхъ.

Приведемъ примѣры.

1) Пусть дано дифференціальное уравненіе

$$(x - y^2)\, dx + 2xydy = 0. \qquad (\alpha)$$

Положивъ въ немъ $y^2 = xz$, гдѣ z новое перемѣнное, приводимъ его къ виду

$$\frac{dx}{x} + dz = 0.$$

Здѣсь уже перемѣнныя раздѣлены, а потому, интегрируя, находимъ:

$$\log x + z = c,$$

или, такъ-какъ $z = \frac{y^2}{x}$, то

$$\log x + \frac{y^2}{x} = c.$$

Это и есть интегралъ уравненія (α).

2) Дано дифференціальное уравненіе

$$(y - x)\sqrt{1 + x^2}\, dy - n\,(1 + y^2)^{3/2}\, dx = 0. \qquad (\beta)$$

Полагаемъ

$$x = \operatorname{tang} \vartheta\,,\ y = \operatorname{tang} \varphi; \qquad (\gamma)$$

получаемъ:

$$(\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\vartheta)\sec\vartheta \,.\, \sec^2\varphi \,.\, d\varphi - n\sec^3\varphi \,.\, \sec^2\vartheta \,.\, d\vartheta = 0.$$

Это уравненіе сводится на слѣдующее:

$$\sin(\varphi-\vartheta)\,d\varphi - nd\vartheta = 0,$$

положивъ въ которомъ $\varphi - \vartheta = \psi$, найдемъ:

$$\sin\psi\, d\,\vartheta = nd\varphi - nd\psi,$$

почему будетъ:

$$d\varphi = \frac{nd\psi}{n-\sin\psi}$$

и слѣдовательно

$$\varphi = \int\frac{nd\psi}{n-\sin\psi} + C,$$

или

$$\varphi - \int\frac{nd\psi}{n-\sin\psi} = C \qquad (\delta)$$

Теперь остается найдти выраженіе интеграла

$$n\int\frac{d\psi}{n-\sin\psi}.$$

Для этого замѣчаемъ, что

$$n\int\frac{d\psi}{n-\sin\psi} = n\int\frac{d\psi}{n\left[\cos^2\frac{\psi}{2}+\sin^2\frac{\psi}{2}\right]-2\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\psi}{2}}$$

$$= n\int\frac{\dfrac{d\psi}{\cos^2\frac{\psi}{2}}}{n\left[1+\operatorname{tg}^2\frac{\psi}{2}\right]-2\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}} = 2n\int\frac{d\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}}{n\left[1+{}^2\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\right]-2\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}},$$

а далѣе полагаемъ

$$\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} = z;$$

находимъ:

$$n\int\frac{d\psi}{1-\sin^2\frac{\psi}{2}} = 2\int\frac{dz}{z^2-\frac{2}{n}z+1}$$

При $n > 1$ уравненіе $z^2 - \frac{2}{n} z + 1 = 0$ имѣетъ мнимые корни, поэтому, употребивъ пріемъ, изложенный въ нумерѣ 109 моихъ «Лекцій исчисленія безконечно-малыхъ», получимъ:

$$n \int \frac{d\psi}{n - \sin\psi} = \frac{n}{\sqrt{n^2-4}} \operatorname{arctg}\left[\frac{n \operatorname{tg}\frac{\psi}{2} - 1}{\sqrt{n^2-4}}\right].$$

Слѣдовательно формула (δ) приметъ видъ:

$$\varphi - \frac{n}{\sqrt{n^2-4}} \operatorname{arctg}\left[\frac{n \operatorname{tg}\frac{\psi}{2} - 1}{\sqrt{n^2-4}}\right] = c. \qquad (\varepsilon)$$

Замѣтивъ же, что въ силу сдѣланныхъ допущеній $\psi = \varphi - \vartheta$, $\varphi = \operatorname{arctg} y$, $\psi = \operatorname{arctg} x$, мы окончательно найдемъ:

$$\operatorname{arctg} y - \frac{n}{\sqrt{n^2-4}} \operatorname{arctg}\left\{\frac{2n(y-x)-(4-yx)}{\sqrt{n^2-4}(4-yx)}\right\} = c$$

Это и есть полный интегралъ даннаго дифференціальнаго уравненія.

29. Однородныя уравненія. Уравненія вида

$$Mdx + Ndy = 0,$$

гдѣ M и N однородныя функціи x, y, составляютъ классъ дифференціальныхъ уравненій 1-го порядка, для которыхъ можно дать общій пріемъ преобразованія, приводящій къ раздѣленію перемѣнныхъ.

Въ самомъ дѣлѣ, не трудно показать, что въ однородномъ уравненіи достаточно сдѣлать $y = vx$ для того, чтобы перемѣнныя затѣмъ легко раздѣлились. Пусть M и N однородныя функціи n-ой степени; въ такомъ случаѣ будетъ непремѣнно

$$M = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \quad N = x^n \psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

почему данное дифференціальное уравненіе приметъ видъ

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right) dx + \psi\left(\frac{y}{x}\right) dy = 0. \qquad (1)$$

Но допущеніе $y = vx$ влечетъ за собою уравненія

$$\frac{y}{x} = v\,,\; dy = vdx + xdv,$$

а потому уравненіе (1) сведется на

$$\varphi(v)dx + \psi(v)\,(vdx + xdv) = 0,$$

или на

$$(\varphi(v) + v\psi(v))dx + \psi(v)xdv = 0.$$

Теперь уже легко видѣть, что перемѣнныя раздѣлятся и что уравненіе приметъ видъ:

$$\frac{dx}{x} + \frac{\psi(v)dv}{\varphi(v) + v\psi(v)} = 0, \tag{2}$$

такъ-что полный интегралъ его будетъ таковъ:

$$\log x + \int \frac{\psi(v)dv}{\varphi(v) + v\psi(v)} = c \tag{3}$$

Въ немъ, конечно, остается, по совершеніи интегрированія на дѣлѣ, замѣнить v его выраженіемъ $\frac{y}{x}$.

Возьмемъ примѣры.

1) Дано уравненіе

$$(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0, \tag{α}$$

въ которомъ коэффиціенты у dx, dy однородныя функціи первой степени. Допускаемъ

$$y = vx,\;\; dy = vdx + xdv$$

и чрезъ это ур. (α) приводимъ къ формѣ

$$(vx + x\sqrt{1 + v^2})dx - x(vdx + xdv) = 0.$$

Далѣе, раздѣливъ на x, получаемъ:

$$\sqrt{1 + v^2}.\,dx - xdv = 0,$$

а за-тѣмъ

$$\frac{dx}{x} - \frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}} = 0.$$

Перемѣнныя теперь уже раздѣлены и интеграція даетъ:

$$\log x - \int \frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}} = c,$$

т. е.

$$\log x - \log(v + \sqrt{1+v^2}) = c,$$

или

$$\log x - \log\left(\frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\right) = c,$$

или

$$\log\left[\frac{x^2}{y+\sqrt{x^2+y^2}}\right] = c,$$

откуда

$$\frac{x^2}{y+\sqrt{x^2+y^2}} = C = e^c$$

и слѣдовательно

$$x^2 = (y + \sqrt{x^2+y^2})C,$$

или

$$x^2 = 2C'y + C'^2.$$

2) Дано уравненіе

$$(x - \sqrt{xy} - y)\,dx + \sqrt{xy}\,.\,dy = 0.$$

Положивъ $y = vx$, получаемъ:

$$(x + x\sqrt{v} - xv)dx + x\sqrt{v}(vdx + xdv) = 0,$$

далѣе

$$[(1-v)(1-\sqrt{v})]\,dx + x\sqrt{v}\,.\,dv = 0,$$

или

$$\frac{dx}{x} + \frac{\sqrt{v}\,.\,dv}{(1-v)(1-\sqrt{v})} = 0.$$

Проинтегрировавъ, найдемъ теперь

$$\log x + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \log(\sqrt{x}-\sqrt{y}) + \frac{1}{2}\log(x-y) = c.$$

30. **Интеграція уравненія $Mdx + Ndy = 0$ въ случаѣ, когда M и N линейныя функціи количествъ x, y.** Уравненіе вида

$$(ax + by + c)\,dx + (a_1x + b_1y + c_1)\,dy = 0 \quad (1)$$

можетъ быть приведено къ виду однороднаго уравненія, а затѣмъ и проинтегрировано при помощи пріема раздѣленія перемѣнныхъ. Этого достигаютъ двумя различными пріемами преобразованія.

Первый пріемъ. Полагаемъ

$$x = x' - \xi, \quad y = y' - \eta, \tag{2}$$

гдѣ x', y' новыя перемѣнныя, а ξ, η постоянныя количества. Въ такомъ случаѣ будетъ

$$dx = dx', dy = dy'$$

и уравненіе (1) приметъ видъ:

$$(ax' + by' + c - a\xi - b\eta)dx' + (a_1x' + b_1y' + c_1 - a_1\xi - b_1\eta)dy' = 0.$$

Для того, чтобы оно сдѣлалось однороднымъ, необходимо и достаточно, чтобы мы имѣли

$$a\xi + b\eta = c, \qquad a_1\xi + b_1\eta = c_1,$$

т. е. чтобы

$$\xi = \frac{cb_1 - c_1b}{ab_1 - a_1b}, \quad \eta = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b}. \tag{3}$$

Опредѣливъ такимъ образомъ ξ, η, уравненіе наше приведемъ къ формѣ однороднаго уравненія, именно получимъ:

$$(ax' + by')dx' + (a_1x' + b_1y')dy' = 0. \tag{4}$$

Положивъ теперь $y' = vx$, $dy' = vdx' + x'dv$, сведемъ это уравненіе на слѣдующее:

$$\frac{dx'}{x'} + \frac{[a_1 + b_1v]dv}{b_1v^2 + (a_1 + b)v + a} = 0,$$

въ которомъ перемѣнныя уже раздѣлены. Для полнаго интеграла найдемъ теперь непосредственно

$$\log x' + \int \frac{[a_1 + b_1v]dv}{b_1v^2 + (a_1 + b)v + a} = c \tag{5}$$

Здѣсь остается произвести указанную интеграцію на дѣлѣ и затѣмъ замѣнить v и x' ихъ выраженіями въ x, y.

Второй пріемъ. Допустивъ

$$ax+by+c=x', \quad a_1x+b_1y+c_1=y',$$

получаемъ

$$dx=\frac{b_1dx'-bdy'}{ab_1-a_1b}, \; dy=\frac{-a_1dx'+ady'}{ab_1-a_1b},$$

почему уравненіе (1) принимаетъ видъ:

$$(b_1x'-a_1y')dx'+(ay'-bx')dy'=0.$$

Положивъ, далѣе, $y'=vx'$, сведемъ его на

$$\frac{dx'}{x'}+\frac{(av-b)}{av^2-(a_1+b)v+b_1}=0,$$

почему полный интегралъ представится формулою

$$\log x'+\int\frac{(av-b)dv}{av^2-(a_1+b)v+b_1}=c,$$

и намъ останется, по совершеніи указанной интеграціи на дѣлѣ, замѣнить x' и v ихъ выраженіями въ x, y.

Примѣч. Оба пріема преобразованія уравненія, только-что изложенные нами, неприменимы въ томъ частномъ случаѣ, когда

$$ab_1-a_1b=0;$$

но здѣсь $b_1=\frac{a_1b}{a}$, почему уравненіе (1) представляется въ формѣ

$$(ax+by+c)dx+\frac{a_1}{a}\left(ax+by+\frac{ac_1}{a_1}\right)dy=0,$$

и допустивъ

$$ax+by=z,$$

$$adx+bdy=dz,$$

мы находимъ:

$$(z+c)dx+\frac{a_1}{a}\left(z+\frac{a_1c_1}{a_1}\right)\frac{dz-adx}{b}=0,$$

или

$$dx+\frac{\left[\frac{a_1}{a}z+c_1\right]dz}{(b-a_1)z+bc-ac_1}=0.$$

Теперь перемѣнныя раздѣлены, а потому интегрируемъ и получаемъ:

$$x+\int\frac{\left[\frac{a_1}{a}z+c_1\right]dz}{(b-a_1)z+bc-ac_1}=C.$$

Это и есть интегралъ даннаго дифференціальнаго уравненія; въ немъ только нужно, по совершеніи указанной интеграціи, замѣнить z его выраженіемъ въ x, y.

31. Интегрированіе линейныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка. - На раздѣленіе перемѣнныхъ сводится интегрированіе такъ называемыхъ *линейныхъ* уравненій перваго порядка, т. е. такихъ уравненій, въ которыя не только дифференціалы перемѣнныхъ, но и одно изъ самыхъ перемѣнныхъ входятъ только въ первой степени. Эти уравненія представляются, слѣдовательно, въ такой формѣ:

$$\frac{dy}{dx}+Py=Q, \tag{1}$$

гдѣ P, Q функціи одного x.

Для интегрированія такихъ уравненій можно дать два различныхъ пріема.

Первый пріемъ. Полагаемъ

$$y=uv,\ dy=vdu+udv.$$

Здѣсь u, v неопредѣленныя количества, изъ которыхъ одно можетъ быть взято произвольно. Уравненіе (1) приметъ теперь форму

$$u[dv + vPdx] + vdu = Qdx \qquad (2)$$

и количество v можно будетъ опредѣлить такъ, чтобы первый членъ первой части уравненія (2) обращался въ нуль. Въ самомъ дѣлѣ, положивъ вообще

$$dv + v.P.dx = 0,$$

изъ этого уравненія найдемъ, что

$$v = c.e^{-\int Pdx}, \qquad (3)$$

гдѣ c произвольное постоянное количество. Послѣ такого допущенія относительно v уравненіе (2) перейдемъ въ

$$c.e^{-\int Pdx} \times du - Qdx = 0$$

или въ слѣдующее

$$du = \frac{1}{c} e^{\int Pdx} Qdx, \qquad (4)$$

въ которомъ перемѣнныя уже раздѣлены, такъ что, совершивъ интеграцію, найдемъ:

$$u = C + \frac{1}{c} \int e^{\int Pdx} Qdx,$$

т. е.

$$y = e^{-\int Pdx}\left(C_1 + \int e^{\int Pdx} Qdx \right). \qquad (5)$$

Это и есть полный интегралъ уравненія (1).

Второй пріемъ. Проинтегрировать уравненіе (1) можно еще пользуясь пріемомъ *измѣненія произвольнаго постояннаго*. Такъ какъ пріемъ этотъ играетъ очень важную роль въ теоріи дифференціальныхъ уравненій, какъ средство для интеграціи многихъ такихъ уравненій, къ которымъ другіе пріемы непосредственно приложены быть не могутъ, то и воспользуемся настоящимъ случаемъ для уясненія себѣ его сущности.

Пріемъ измѣненія произвольнаго постояннаго заключается собственно въ обобщеніи формы интеграла дифференціальнаго уравненія болѣе простаго, чрезъ замѣну въ немъ произвольнаго постояннаго функціональнымъ количествомъ, подчиненнымъ прилично избраннымъ условіямъ, такимъ образомъ, чтобы интегралъ этотъ сдѣлался полнымъ интеграломъ даннаго, болѣе сложнаго уравненія. Здѣсь, слѣдовательно, рѣшеніе данной задачи сводится на рѣшеніе задачи болѣе простой.

Въ примѣненіи этого пріема къ интеграціи уравненія

$$\frac{dy}{dx}+Py=Q \tag{1}$$

начинаемъ съ интеграціи болѣе простаго уравненія

$$\frac{dy}{dx}+Py=0. \tag{2}$$

Въ этомъ послѣднемъ перемѣнныя раздѣляются, и мы находимъ:

$$\log y=-\int Pdx+c,$$

откуда

$$y=Ce^{-\int Pdx}, \tag{3}$$

гдѣ C произвольное постоянное количество. Это и есть интегралъ уравненія (2).

Не трудно теперь показать, что чрезъ замѣну въ формулѣ (3) постояннаго количества C функціональнымъ количествомъ ϑ уравненіе (3) можно преобразовать въ полный интегралъ уравненія (1). Въ самомъ дѣлѣ, мы получаемъ:

$$y=\vartheta\,.\,e^{-\int Pdx}, \tag{4}$$

и продифференцировавъ, находимъ:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\vartheta}{dx}\,e^{-\int Pdx}-P\vartheta\,e^{-\int Pdx},$$

или

$$\frac{dy}{dx}=\left[\frac{d\vartheta}{dx}-P\vartheta\right]e^{-\int Pdx}. \tag{5}$$

Для того, чтобы уравненіе (4) было рѣшеніемъ даннаго дифференціальнаго уравненія (1), очевидно, достаточно, чтобы выраженіе, доставляемое для $\frac{dy}{dx}$ формулою (5), было тождественно съ тѣмъ выраженіемъ $\frac{dy}{dx}$, которое доставляетъ уравненіе (1), т. е. чтобы имѣли

$$\left[\frac{d\vartheta}{dx}-P\vartheta\right]e^{-\int Pdx}=Q-Py,$$

или, такъ-какъ въ силу (4)

$$y=\vartheta\,.\,e^{-\int Pdx},$$

то

$$\frac{d\vartheta}{dx}-P\vartheta=Qe^{\int Pdx}-P\vartheta,$$

или

$$\frac{d\vartheta}{dx}=Qe^{\int Pdx}. \tag{6}$$

Отсюда находимъ

$$\vartheta=\int Qe^{\int Pdx}dx+c,$$

а потому уравненіе (4) принимаетъ видъ

$$y=e^{-\int Pdx}\left[c+\int Qe^{\int Pdx}dx\right]. \tag{7}$$

Это и есть искомый интегралъ уравненія (1).

32. Приложимъ изложенныя нами соображенія къ частнымъ случаямъ.

1) Дано уравненіе

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3.$$

Здѣсь

$$P = \frac{-2}{x+1},\ Q = (x+1)^3;$$

поэтому полный интегралъ даннаго уравненія, въ силу формулы (7) послѣдняго нумера, представится чрезъ

$$y = e^{2\int\frac{dx}{x+1}}\left[c + \int (x+1)^3\, e^{-2\int\frac{dx}{x+1}} dx\right];$$

но

$$2\int\frac{dx}{x+1} = \log (x+1)^2,$$

а потому

$$y = e^{\log(x+1)^2}\left[c + \int (x+1)^3 e^{\log(x+1)^{-2}} dx\right],$$

т. е.

$$y = (x+1)^2\left[c + \frac{(x+1)^2}{2}\right].$$

2) Пусть дано уравненіе

$$\frac{dy}{dx} - \frac{ny}{x-1} = e^x(x+1)^n.$$

Здѣсь

$$P = \frac{-n}{x+1},\ Q = e^x(x+1)^n,$$

а потому формула (7) послѣдняго нумера даетъ:

$$y = c^{\int \frac{n dx}{x+1}} \left[c + \int e^x (x+1)^n e^{-\int \frac{n dx}{x+1}} dx \right];$$

но

$$\int \frac{n dx}{x+1} = \log (x+1)^n,$$

а потому

$$y = (x+1)^n \left[c + \int e^x dx \right],$$

или

$$y = (x+1)^n (e^x + c).$$

33. Интегрированіе уравненія Бернулли. На интегрированіе линейнаго уравненія сводится интегрированіе уравненія

$$y^p \frac{dy}{dx} + P y^{p+1} = Q y^q, \qquad (1)$$

гдѣ P, Q функціи x. Это уравненіе извѣстно подъ названіемъ уравненія Бернулли.

Сдѣлавъ $q - p = n$, уравненіе (1) сводимъ на слѣдующее:

$$\frac{dy}{dx} + P y = Q y^n \qquad (2)$$

которое можетъ быть написано въ формѣ

$$\frac{d\left[\frac{1}{y^{n-1}}\right]}{dx} - (n-1) P \left[\frac{1}{y^{n-1}}\right] = -(n-1) Q, \qquad (3)$$

а положивъ здѣсь

$$\frac{-1}{y^{n-1}} = z,$$

получаемъ:

$$\frac{dz}{dx} - (n-1) P z = -(n-1) Q.$$

Это уже линейное уравненіе, а потому

$$z = e^{(n-1)\int P dx}\left[c - \int (n-1) Q e^{(1-n)\int P dx} dx\right],$$

такъ-что, замѣнивъ z его выраженіемъ въ y, получимъ:

$$y = (1-n)^{\frac{1}{1-n}} e^{\int P dx}\left[c - \int e^{(1-n)\int P dx} Q dx\right]^{\frac{1}{1-n}}$$

Замѣтимъ, что уравненіе Бернулли можетъ еще быть проинтегрировано и непосредственно пріемомъ измѣненія произвольнаго постояннаго. Пояснимъ это на примѣрѣ.

Пусть дано уравненіе

$$dy + y dx = x y^3 dx.$$

Интегрируемъ сперва уравненіе

$$dy + y dx = 0$$

и находимъ:

$$y = c e^{-x}.$$

Подставимъ теперь вмѣсто c функціональное количество ϑ и продифференцируемъ слѣдствіе; получимъ:

$$y = \vartheta . e^{-x}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d\vartheta}{dx} e^{-x} - \vartheta e^{-x}.$$

Въ то-же время изъ даннаго уравненія

$$\frac{dy}{dx} = x y^3 - y,$$

а потому мы должны имѣть:

$$\frac{d\vartheta}{dx} = \vartheta + [x y^3 - y] e^x,$$

или, такъ-какъ $y = \vartheta e^{-x}$, то

$$\frac{d\vartheta}{dx} = xe^{-2x}\vartheta^3,$$

откуда

$$\vartheta^{-3}d\vartheta = xe^{-2x}dx.$$

Интегрированіе доставляетъ теперь непосредственно

$$\vartheta^{-2} = [x + {}^1/_2]e^{-2x} + c,$$

такъ-что окончательно найдемъ:

$$\frac{1}{y^2} = [x + {}^1/_2] + ce^{2x}.$$

Это и есть полный интегралъ даннаго уравненія.

Интегрированіе уравненія Рикатти.

34. Существуютъ нѣкоторыя частныя формы дифференціальныхъ уравненій перваго порядка и первой степени, въ которыхъ перемѣнныя раздѣляются не иначе, какъ при допущеніи нѣкоторыхъ ограниченій относительно постоянныхъ (коэффиціентовъ или показателей степени), входящихъ въ уравненіе. Изслѣдованіе тѣхъ случаевъ, въ которыхъ такія уравненія могутъ быть дѣйствительно проинтегрированы, естественно останавливало на себѣ вниманіе ученыхъ. Особенную извѣстность пріобрѣло изъ числа подобныхъ уравненій слѣдующее уравненіе:

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^m, \tag{1}$$

въ которомъ a, b постоянные коэффиціенты, а m какое бы то ни было число. Оно получило названіе уравненія *Рикатти*, итальянскаго ученаго, впервые изслѣдовавшаго случаи, въ которыхъ оно можетъ быть проинтегрировано. Случаи эти, соотвѣтствующіе извѣстнымъ значеніямъ показателя степени m, мы и разсмотримъ теперь.

35. Замѣтимъ прежде всего, что для $m=0$ уравненіе

$$\frac{dy}{dx}+ay^2=bx^m \tag{1}$$

интегрируется безъ труда чрезъ раздѣленіе перемѣнныхъ. Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ оно принимаетъ видъ

$$\frac{dy}{dx}+ay^2=b, \tag{2}$$

откуда

$$adx+\frac{dy}{y^2-\frac{b}{a}}=0. \tag{3}$$

Здѣсь перемѣнныя уже раздѣлены, а потому полный интегралъ уравненія (2) представится чрезъ

$$ax-c=-\int\frac{dy}{y^2-\frac{b}{a}}, \tag{4}$$

гдѣ c означаетъ произвольное постоянное.

Теперь остается найдти выраженіе интеграла, входящаго во вторую часть формулы. Для этого замѣчаемъ, что

$$\int\frac{dy}{y^2-\frac{b}{a}}=\int\frac{dy}{\left(y-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\left(y+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\frac{b}{a}}}\left\{\int\frac{dy}{1-\sqrt{\frac{b}{a}}}-\int\frac{dy}{1+\sqrt{\frac{b}{a}}}\right\},$$

т. е.

$$\int\frac{dy}{y^2-\frac{b}{a}}=\frac{1}{2\sqrt{\frac{b}{a}}}\log\left[\frac{y-\sqrt{\frac{b}{a}}}{y+\sqrt{\frac{b}{a}}}\right];$$

поэтому формула (4) приметъ видъ:

$$2(ax-c)\sqrt{\frac{b}{a}} = -\log\left[\frac{y-\sqrt{\frac{b}{a}}}{y+\sqrt{\frac{b}{a}}}\right],$$

такъ что, перейдя отъ логариѳмовъ къ самымъ числамъ, получимъ:

$$\frac{y-\sqrt{\frac{b}{a}}}{y+\sqrt{\frac{b}{a}}} = e^{-2(ax-c)\sqrt{\frac{b}{a}}},$$

откуда

$$y = \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot \frac{1+e^{-2(ax-c)\sqrt{\frac{b}{a}}}}{1+e^{-2(ax-c)\sqrt{\frac{b}{a}}}}$$

или

$$y = \sqrt{\frac{b}{a}}\,\frac{e^{(ax-c)\sqrt{\frac{b}{a}}}+e^{-(ax-c)\sqrt{\frac{b}{a}}}}{e^{(ax-c)\sqrt{\frac{b}{a}}}-e^{-(ax-c)\sqrt{\frac{b}{a}}}}. \qquad (5)$$

Это и есть полный интегралъ уравненія (2).

Въ случаѣ, когда $\frac{b}{a}$ отрицательная величина, для разысканія выраженія интеграла, входящаго въ формулу (4), выгоднѣе употребить пріемъ, изложенный въ нумерѣ 109 моихъ «Лекцій исчисленія безконечно-малыхъ»; этимъ путемъ найдемъ:

$$y = \sqrt{\frac{b}{a}}\,\mathrm{cotg}\left[(ax-c)\sqrt{\frac{b}{a}}\right]. \qquad (6)$$

И такъ, *уравненіе Рикатти интегрируется* въ случаѣ, *когда $m=0$, т. е. когда оно сводится на*

$$\frac{dy}{dx}+ay^2=b.$$

36. Для опредѣленія другихъ случаевъ интегрируемости уравненія

$$\frac{dy}{dx}+ay^2=bx^m \qquad (1)$$

необходимо преобразовать его.

Допускаемъ

$$y=\frac{y'}{x^2}+\frac{1}{ax} \qquad (2)$$

и слѣдовательно

$$y^2=\frac{y'^2}{x^4}+\frac{2y'}{ax^3}+\frac{1}{a^2x^2},$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^2}\frac{dy'}{dx}-\frac{2y}{x^3}-\frac{1}{ax^2};$$

въ слѣдствіе этого уравненіе (1) перейдетъ въ слѣдующее:

$$\frac{dy'}{dx}+a\frac{y'^2}{x^2}bx=bx^{m+2}, \qquad (3)$$

которое, въ случаѣ $m=-2$, переходитъ, въ свою очередь, въ однородное уравненіе

$$[bx^2-ay'^2]dx+x^2dy'=0,$$

интегрирующееся, какъ мы уже видѣли выше, чрезъ раздѣленіе перемѣнныхъ.

Слѣдовательно *уравненіе Рикатти интегрируется и въ случаѣ $m=-2$, когда оно сводится на*

$$\frac{dy}{dx}+ay^2=bx^{-2}.$$

37. Если въ уравненіи (3) послѣдняго нумера допустить

$$y'=\frac{1}{y_1},\ x=x_1^{\frac{1}{m+3}},$$

то оно сведется на

$$\frac{dy_1}{dx_1}+\frac{b}{m+3}y^2=\frac{a}{m+3}x_1^{-\frac{m+4}{m+3}}$$

или же, при допущеніи, для краткости,

$$a_1=\frac{b}{m+3},\ b_1=\frac{a}{m+3},$$

$$m_1=-\frac{m+4}{m+3}, \tag{1}$$

на слѣдующее

$$\frac{dy_1}{dx_1}+a_1y_1^{\,2}=b_1x_1^{\,m_1}. \tag{2}$$

Это послѣднее уравненіе, будучи слѣдствіемъ исходнаго уравненія

$$\frac{dy}{dx}+ay^2=bx^m, \tag{3}$$

въ то-же время совершенно сходно съ нимъ по формѣ, а потому и можетъ быть проинтегрировано въ случаяхъ $m_1=0$ и $m_1=2$; если же такъ, то оказывается, что и уравненіе (3) интегрируется въ случаяхъ

$$m_1=\frac{-m-4}{m+3}=0 \text{ и } m_1=\frac{-m-4}{m+3}=-2,$$

т. е. когда

$$m=-4 \text{ и } m=-2.$$

Отсюда мы въ-правѣ заключить, что уравненіе (2) интегрируется въ случаѣ $m_1=-4$; а если такъ, то данное уравненіе (3) проинтегрируется и въ случаѣ, когда

$$m_1=\frac{-m-4}{m+3}=-4,$$

т. е. когда

$$m = -\frac{8}{3} = -\frac{4.2}{2.2-1}.$$

Далѣе, продолжая точно такъ-же сопоставлять уравненія (2) и (3), найдемъ, что это послѣднее интегрируется въ случаяхъ, когда

$$m = -\frac{12}{5} = -\frac{4.3}{2.3-1},\ m = -\frac{16}{11} = -\frac{4.4}{2.4-1},\ \text{и т. д.}$$

Сопоставивъ между собою всѣ добытые выводы, мы заключимъ, что *уравненіе Рикатти*

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^m$$

интегрируется, когда m представляетъ, вообще, число вида

$$m = \frac{-4i}{2i-1},$$

гдѣ i равно нулю или цѣлому положительному числу.

38. Если, наконецъ, въ уравненіи

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^m$$

допустить

$$y = \frac{1}{v},\quad x = u^{\frac{1}{m+1}},$$

то оно перейдетъ въ слѣдующее:

$$\frac{dv}{du} + \frac{b}{m+1}v^2 = au^{\frac{-m}{m+1}},$$

которое сходно съ нимъ по формѣ и потому будетъ, въ силу доказаннаго въ послѣднемъ нумерѣ, интегрироваться, когда

$$-\frac{m}{m+1} = -\frac{4i}{2i-1}$$

и слѣдовательно

$$m = \frac{-4i}{2i+1}.$$

Отсюда заключимъ, что *уравненіе Рикатти*

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^m$$

интегрируется не только въ случаѣ, когда $m = \frac{-4i}{2i-1}$, *но и въ томъ, когда* $m = \frac{-4i}{2i+2}$.

39. Изъ предыдущаго анализа видно, что интеграція уравненія Рикатти можетъ быть произведена только въ ограниченномъ числѣ частныхъ случаевъ. Замѣтимъ, что извѣстный французскій ученый Льювиль доказалъ, что внѣ этихъ случаевъ полный интегралъ уравненія Рикатти и не можетъ быть выраженъ посредствомъ алгебраическихъ и элементарныхъ трансцендентныхъ функцій. Изложеніе самаго доказательства справедливости такого заключенія я считаю однако выходящимъ за предѣлы нашего курса, такъ-какъ для этого намъ пришлось бы посвятить слишкомъ много мѣста вопросу, имѣющему совершенно частный характеръ. Вмѣсто этого укажемъ на нѣкоторыя формы дифференціальныхъ уравненій, интеграція которыхъ сводится на интеграцію уравненія Рикатти.

Къ числу такихъ уравненій относится слѣдующее:

$$dy = by^2x^n dx + ax^m dx,$$

гдѣ n какое бы то ни было число, отличное отъ единицы. Въ самомъ дѣлѣ, положивъ

$$x^m dx = dz,$$

данное уравненіе непосредственно приведемъ къ виду

$$dy = a(n+1)^{\frac{n-m}{n+1}} z^{\frac{n-m}{n+1}} dz + by^2 dz,$$

а это уже уравненіе Рикатти.

Возьмемъ еще уравненіе

$$dy = ay^2 dx + byx^m dx + cx^n dx.$$

Положивъ $y = z + \alpha x^r$, получимъ:

$$dz = -r\alpha x^{r-1} dx + az^2 dx + 2az\alpha x^r dx + a\alpha^2 x^{2r} dx + bzx^n dx \\ + b\alpha x^{n+r} dx + cx^n dx,$$

а сдѣлавъ, сверхъ того,

$$r - 1 = 2r = r + n, \text{ т. е. } r = -1, \; n = -1,$$

найдемъ:

$$dz = (a\alpha^2 + b\alpha + \alpha)x^{-2} dx + (2a\alpha + b) zx^{-1} dx + az^2 dx + cx^n dx.$$

Два первые члена уничтожатся и уравненіе обратится въ уравненіе Рикатти, если только

$$a\alpha^2 + b\alpha + \alpha = 0\,,\; 2a\alpha + b = 0,$$

откуда

$$\alpha = \frac{-1-b}{a},\; \alpha = -\frac{b}{2a},\; b + 1 = \frac{b}{2},\; b = -2.$$

Теорія интегрирующаго множителя дифференціальныхъ уравненій перваго порядка и первой степени.

40. Для того, чтобы выраженіе

$$Mdx + Ndy$$

представляло полный дифференціалъ функціи двухъ перемѣнныхъ, которую означимъ черезъ V, необходимо и достаточно, чтобы имѣли тождественно

$$M=\frac{dV}{dx}, \quad N=\frac{dV}{dy}.$$

Продифференцировавъ однако первое изъ этихъ равенствъ по y, а второе по x и вычтя одинъ результатъ изъ другаго, получимъ:

$$\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}=0, \tag{1}$$

отношеніе, которое также должно удовлетворяться тождественно. Разъ это условіе удовлетворяется, M, N могутъ быть разсматриваемы какъ первыя частныя производныя функціи V двухъ перемѣнныхъ, а потому

$$Mdx+Ndy=dV.$$

Въ этомъ случаѣ дифференціальное уравненіе

$$Mdx+Ndy=0 \tag{2}$$

сводится собственно на

$$dV=0$$

и имѣетъ полнымъ интеграломъ своимъ отношеніе

$$V=c, \tag{3}$$

гдѣ c произвольное постоянное количество. Это потому, что функція, полный дифференціалъ которой постоянно равенъ нулю, должна сохранять постоянное значеніе для всѣхъ значеній перемѣнныхъ.

Въ виду этого вопросъ объ интегрированіи уравненія (2), въ случаѣ существованія тождества (1), когда лѣвая часть уравненія представляетъ полный дифференціалъ функціи двухъ перемѣнныхъ, сводится на разысканіе этой послѣдней функціи.

Означая эту неизвѣстную функцію черезъ V, мы имѣемъ:

$$\frac{dV}{dx}=M, \tag{4}$$

$$\frac{dV}{dy}=N. \tag{5}$$

Умноживъ первое изъ этихъ уравненій на dx и слѣдствіе проинтегрировавъ, получаемъ:

$$V = \int M dx + \vartheta(y), \tag{6}$$

гдѣ $\vartheta(y)$ произвольная функція y. Чтобы исключить ее изъ выраженія V, формулу (6) дифференцируемъ по y и находимъ:

$$\frac{d\vartheta(y)}{dy} = \frac{dV}{dy} - \frac{d\int M dx}{dy},$$

а принявъ во вниманіе уравненіе (5), имѣемъ:

$$\frac{d\vartheta(y)}{dy} = N - \frac{d\int M dx}{dy}.$$

Умноживъ обѣ части этой формулы на dy и проинтегрировавъ, найдемъ теперь:

$$\vartheta(y) = \int N dy - \int \frac{d\int M dx}{dy} dy + c. \tag{7}$$

Внеся, наконецъ, найденное такимъ образомъ выраженіе $\vartheta(y)$ въ формулу (6), получимъ:

$$V = \int M dx + \int \left\{ N - \frac{d\int M dx}{dy} \right\} dy + c.$$

Въ виду этого полный интегралъ уравненія (2) представится чрезъ

$$\int M dx + \int \left(N - \frac{d\int M dx}{dy} \right) dy = c. \tag{8}$$

И такъ, *коль-скоро въ уравненіи*

$$M dx + N dy = 0$$

количества M, N *удовлетворяютъ тождественно услові*

$$\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} = 0$$

и, *слѣдовательно, лѣвая часть даннаго дифференціальнаго уравненія представляетъ точный дифференціалъ, полный интегралъ его выразится формулою*

$$\int M dx + \int \left(N - \frac{d \int M dx}{dy} \right) dy = C.$$

41. Приложимъ изложенный пріемъ къ интеграціи нѣсколькихъ частныхъ уравненій.

1) Пусть имѣемъ уравненіе

$$(x^2 - 4xy - 2y^2) dx + (y^2 - 4xy - 2x^2) dy = 0.$$

Лѣвая часть его представляетъ точный дифференціалъ, такъ-какъ имѣемъ тождественно

$$\frac{d(x^2 - 4xy - 2y^2)}{dy} = \frac{d(y^2 - 4xy - 2x^2)}{dx},$$

а потому, примѣняя общую формулу (8), получаемъ для полнаго интеграла такое выраженіе:

$$\int (x^2 - 4xy - 2y^2) dx + \int \left(y^2 - 4xy - 2x^2 - \frac{d \int (x^2 - 4xy - 2y^2) dx}{dy} \right) dy = c,$$

т. е.

$$\frac{x^3}{3} - 2x^2 y - 2xy^2 + \frac{y^3}{3} = c.$$

2) Дано уравненіе

$$\frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] \frac{dy}{y} = 0.$$

Первая часть его также удовлетворяетъ условію (1) предыдущаго нумера, а потому примѣняемъ формулу (8) и пишемъ:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \int \left[\frac{1}{y} - \frac{x}{(\sqrt{x^2 + y^2}) y} - \frac{d \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{dy} \right] dy = c,$$

т. е.

$$\log[x+\sqrt{x^2+y^2}]=c,$$

или

$$y^2=C^2-2Cx.$$

Это и есть полный интегралъ даннаго уравненія.

42. Существованіе общаго способа опредѣленія полнаго интеграла уравненія вида

$$Mdx+Ndy=0$$

въ томъ случаѣ, когда его первая часть представляетъ точный дифференціалъ, вызвало ученыхъ на изслѣдованіе вопроса: нельзя ли для каждаго дифференціальнаго уравненія вида

$$Mdx+Ndy=0$$

опредѣлить такой множитель V, по умноженіи на который первая часть уравненія обращалась бы въ точный дифференціалъ. Вопросъ этотъ былъ рѣшенъ утвердительно еще Эйлеромъ, изслѣдованія котораго привели къ открытію весьма важныхъ предложеній, установившихъ новые пути для интеграціи дифференціальныхъ уравненій.

Докажемъ сперва, что *каждому уравненію вида*

$$Mdx+Ndy=0 \qquad (1)$$

всегда соотвѣтствуетъ множество множителей, обращающихъ его первую часть въ точный дифференціалъ.

Выше было уже доказано, что каждое уравненіе (1) имѣетъ полный интегралъ вида

$$F(x,y)=c, \qquad (2)$$

дифференцированіе котораго доставляетъ

$$\frac{\partial F(x,y)}{dx}+\frac{\partial F(x,y)}{dy}\frac{dy}{dx}=0. \qquad (3)$$

Выраженіе, доставляемое для $\frac{dy}{dx}$ этимъ уравненіемъ, должно быть тождественно съ выраженіемъ $\frac{dy}{dx}$, получаемымъ изъ уравненія (1), т. е. мы должны имѣть тождественно

$$\frac{\frac{\partial F(x,y)}{dx}}{M} = \frac{\frac{\partial F(x,y)}{dy}}{N}. \qquad (4)$$

Если теперь означить чрезъ V значеніе каждаго изъ этихъ отношеній, то будетъ:

$$\frac{\partial F(x,y)}{dx} = VM \;, \; \frac{\partial F(x,y)}{dy} = NV,$$

т. е. произведенія VM, VN будутъ частными производными одной и той-же функціи $F(x, y)$, а потому выраженіе $VMdx + VNdy$ будетъ точнымъ дифференціаломъ. Слѣдовательно, выраженіе $Mdx + Ndy$ всегда можетъ быть обращено въ точный дифференціалъ при помощи множителя V.

Найдя одинъ *интегрирующій* множитель V, доставляющій

$$VMdx + VNdy = dF,$$

можно затѣмъ найдти множество и другихъ множителей, также обращающихъ $Mdx + Ndy$ въ точный дифференціалъ. Въ самомъ дѣлѣ, составивъ какую бы то ни было функцію отъ F, напримѣръ $\varphi(F)$, мы получимъ:

$$V\varphi(F)(Mdx + Ndy) = \varphi(F)\, dF.$$

Здѣсь правая часть есть точный дифференціалъ, а потому и лѣвая часть также точный дифференціалъ, т. е. $V\varphi(F)$ представляетъ интегрирующій множитель уравненія (1).

И такъ, каждое дифференціальное уравненіе (1) имѣетъ множество интегрирующихъ множителей.

Выводы, нами полученные, можемъ формулировать еще такимъ образомъ:

Если V интегрирующій множитель уравненія $Mdx + Ndy = 0$, а $u = c$ полный интегралъ этого уравненія, полученный чрезъ умноженіе его на V и интегрированіе, то $V\varphi(u)$ будетъ типической формою всѣхъ интегрирующихъ множителей этого уравненія.

43. Изъ доказаннаго, какъ слѣдствіе, вытекаетъ то заключеніе, что, *найдя два интегрирующихъ множителя уравненія $Mdx + Ndy = 0$, можно затѣмъ найдти полный интегралъ его, не производя самой интеграціи.*

Пусть V одинъ интегрирующій множитель; въ такомъ случаѣ всякій другой такой-же множитель представится произведеніемъ $V\varphi(u)$, гдѣ u функція, удовлетворяющая условію

$$VMdx + VNdy = du;$$

поэтому, раздѣливъ второй интегрирующій множитель на первый и частное приравнявъ произвольному постоянному, получимъ:

$$\varphi(u) = c,$$

отношеніе, представляющее полный интегралъ уравненія (1).

44. Такъ-какъ лѣвая часть дифференціальнаго уравненія

$$Mdx + Ndy = 0\,, \tag{1}$$

по умноженіи на интегрирующій множитель V, дѣлается точнымъ дифференціаломъ, то мы должны имѣть вообще

$$\frac{d[VM]}{dy} = \frac{d[VN]}{dx}, \tag{2}$$

т. е.

$$N\frac{dV}{dx} + V\frac{dN}{dx} = M\frac{dV}{dy} + V\frac{dM}{dy},$$

или

$$N\frac{dV}{dx} - M\frac{dV}{dy} = \left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right)V. \tag{3}$$

Таково уравненіе, выражающее условіе *необходимое* и *достаточное* для того, чтобы V было интегрирующимъ множителемъ дифференціальнаго уравненія (1); оно представляетъ однако уравненіе въ частныхъ производныхъ перваго порядка, составъ котораго измѣняется съ измѣненіемъ состава функціональныхъ количествъ M, N и проинтегрировать которое *вообще* мы не имѣемъ способовъ. Въ виду этого разысканіе интегрирующихъ множителей каждаго даннаго дифференціальнаго уравненія вида (1) составляетъ задачу, общаго рѣшенія которой мы еще не имѣемъ. Существуетъ однако рядъ частныхъ случаевъ, въ которыхъ опредѣленіе V становится для насъ возможнымъ. Главнѣйшіе изъ этихъ случаевъ мы и разсмотримъ теперь.

45. Случай, когда интегрирующій множитель представляетъ функцію одного x. Когда V представляетъ функцію одного x, такъ что $\frac{dV}{dy}=0$, тогда уравненіе (3) предыдущаго нумера принимаетъ видъ:

$$N\frac{dV}{dx}=\left(\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}\right)V,$$

такъ что изъ него

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dx}=\frac{\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}}{N},$$

т. е.

$$\frac{d\log V}{dx}=\frac{\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}}{N}. \qquad (1)$$

Если-бы теперь правая часть представляла функцію одного x, то интегрируя нашли бы

$$\log V=\int\frac{\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}}{N}\,dx,$$

откуда

$$V = e^{\int \frac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{N} dx} \quad . \tag{2}$$

Полученный результатъ показываетъ, что предположеніе, что интегрирующій множитель уравненія

$$Mdx + Ndy = 0$$

представляетъ функцію одного x оказывается, въ виду уравненія (1), законнымъ, когда отношеніе

$$\frac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{N}$$

зависитъ отъ одного x. Въ этомъ случаѣ формула (2) доставляетъ выраженіе искомаго интегрирующаго множителя.

И такъ, *интегрирующій множитель уравненія*

$$Mdx + Ndy = 0$$

опредѣляется формулою

$$V = e^{\int \frac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{N} dx},$$

если только выраженіе

$$\frac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{N}$$

не зависитъ отъ y.

Приложимъ эту теорему къ частнымъ примѣрамъ.

1) Пусть дано уравненіе

$$(3x^2 + 6xy + 3y^2)\, dx + (2x^2 + 3xy)\, dy = 0.$$

Здѣсь

$$M = 3x^2 + 6xy + 3y^2, \quad N = 2x^2 + 3xy,$$

почему

$$\frac{\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}}{N}=\frac{6x+6y-(4x+3y)}{2x^2+3xy}=\frac{1}{x};$$

слѣдовательно для интегрирующаго множителя нашего уравненія найдемъ выраженіе

$$V=e^{\int\frac{dx}{x}}=cx,$$

гдѣ c произвольное постоянное.

Умноживъ данное уравненіе на этотъ множитель, получимъ:

$$c\{(3x^3+6x^2y+3xy^2)dx+(2x^3+3x^2y)dy\}=0.$$

Лѣвая часть этого уравненія остается полнымъ дифференціаломъ, какое значеніе ни приписали бы произвольному постоянному c; поэтому дѣлаемъ $c=1$ и за-тѣмъ, интегрируя по формулѣ (δ) нумера 40, находимъ:

$$\frac{3x^4}{4}+2x^3y+\frac{3x^2y^2}{2}=c,$$

т. е. полный интегралъ даннаго уравненія.

2) Возьмемъ линейное уравненіе

$$\frac{dy}{dx}+Py-Q=0,$$

гдѣ P, Q функціи одного x, и напишемъ его въ формѣ

$$(Py-Q)\,dx+dy=0.$$

Въ настоящемъ случаѣ

$$M=Py-Q,\quad N=1.$$

а потому

$$\frac{\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}}{N}=P,$$ т. е. функціи отъ одного x.