Міністерство освіти і науки України

ВІСНИК

Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна

№ 931

Харків
2010

ISSN 0453–8048

Міністерство освіти та науки України

ВІСНИК

Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна

№ 931

Серія :

«Математика, прикладна математика і механіка»

Випуск 62

Заснована у 1965 р.

Харків
2010

До Віснику включено статті з математичного аналізу, диференціальних рівнянь, математичної теорії керування та механіки, які містять нові теоретичні результати у зазначених галузях і мають прикладне значення.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних сферах.

Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна (протокол №13 від 26 листопада 2010 р.).

Адреса редакційної колегії: 61077, Харків, пл. Свободи, 4,
ХНУ імені В.Н. Каразіна, механіко-математичний факультет, к.7-29.
Тел. 7075518, 7075135, Email: vestnik@univer.kharkov.ua
Интернет:
http://vestnik-math.univer.kharkov.ua/

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.09

ЗМІСТ

CONTENTS

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.982.22 № 931, 2010, с.5–19

Strong Daugavet operators and narrow operators with respect to Daugavet centers

T. V. Bosenko

V.N. Karazin Kharkiv National University,
Svobody Sqr. 4, 61077, Kharkiv, Ukraine
t.bosenko@mail.ru

A linear continuous nonzero operator G: $X \to Y$ is a Daugavet center if every rank-1 operator T: $X \to Y$ fulfills $\|G+T\| = \|G\| + \|T\|$. We introduce the notions of a G−strong Daugavet operator and a G−narrow operator which are the generalizations of the concepts of strong Daugavet and narrow operators for Daugavet centers. We also consider examples of G−narrow operators.

Т.В. Босенко, **Оператори із сильною властивістю Даугавета та вузькі оператори по відношенню до Даугаветових центрів.** Лінійний неперервний ненульовий оператор G: $X \to Y$ називається Даугаветовим центром, якщо для кожного одновимірного оператора T: $X \to Y$ виконується рівність $\|G+T\| = \|G\| + \|T\|$. У статті введені поняття оператора із G−сильною властивістю Даугавета та G−вузького оператора, які є узагальненнями понять оператора із сильною властивістю Даугавета та вузького оператора на Даугаветові центри. Розглядаються приклади G−вузьких операторів.

Т.В. Босенко, **Операторы с сильным свойством Даугавета и узкие операторы по отношению к Даугаветовым центрам.** Линейный непрерывный ненулевой оператор G: $X \to Y$ называется Даугаветовым центром, если для любого одномерного оператора T: $X \to Y$ выполняется равенство $\|G+T\| = \|G\| + \|T\|$. В статье введены понятия оператора с G−сильным свойством Даугавета и G−узкого оператора, которые являются обобщениями понятий оператора с сильным свойством Даугавета и узкого оператора на Даугаветовы центры. Рассматриваются примеры G−узких операторов.

2000 Mathematics Subject Classification 46B04, 46B20.

1. Introduction

In the present paper we deal with real Banach spaces and denote them X, Y or E. We use the notation $L(X,Y)$ for the space of all linear continuous operators $T\colon X \to Y$. Throughout the paper we use the word "operator" in the sense of "linear continuous operator". We denote the identity operator on a Banach space by the symbol Id.

Banach space X is said to have *the Daugavet property* [5] if every rank-1 operator $T\colon X \to X$ fulfills the equation

$$\|\mathrm{Id} + T\| = 1 + \|T\|, \tag{1}$$

which is known as *Daugavet equation.*

The Daugavet equation theory has been rapidly developing during the past two decades (see [5], [9], [11], [12]). Examples of spaces with the Daugavet property include $C(K)$ where K is a compact without isolated points [4], $L_1(\mu)$ and $L_\infty(\mu)$ where μ has no atoms [8], and some Banach algebras (see [5], [11], [12]). The notions of a strong Daugavet operator and a narrow operator were introduced in [7] and take an important place in the Daugavet equation theory.

Definition 1 *An operator $T\colon X \to E$ is said to be a* strong Daugavet operator *if for every x_0, y_0 from the unit sphere of X and for every $\varepsilon > 0$ there is a z from the unit ball of X such that $\|T(x_0 - z)\| < \varepsilon$ and $\|z + y_0\| > 2 - \varepsilon$.*

Definition 2 *Let X have the Daugavet property. An operator $T\colon X \to E$ is said to be* narrow *if for every $x^* \in X^*$ the operator $T \tilde{+} x^*\colon X \to E \oplus_1 \mathbb{R}$, $(T \tilde{+} x^*)x = (Tx, x^*(x))$ is a strong Daugavet operator.*

It is easy to see that every narrow operator on X is a strong Daugavet operator. Every strong Daugavet operator $T\colon X \to X$ satisfies (1). The class of narrow operators on a Banach space with the Daugavet property appeared to be large; in particular, weakly compact operators, operators not fixing a copy of ℓ_1, strong Radon-Nikodým operators and hereditary SCD−operators on Banach spaces with the Daugavet property are narrow [1], [7].

In [2] it was suggested to generalize the Daugavet equation theory with the help of the following concept.

Definition 3 *An operator $G \in L(X,Y) \setminus \{0\}$ is called a* Daugavet center *if every rank-1 operator $T\colon X \to Y$ fulfills the identity*

$$\|G + T\| = \|G\| + \|T\|. \tag{2}$$

Thus, the Daugavet equation theory extends to the spaces which have a Daugavet center acting from them, so called Daugavet domains, and to the spaces which have a Daugavet center acting into them, so called Daugavet ranges. Like spaces with the Daugavet property, Daugavet domains and Daugavet ranges are non-reflexive, contain subspaces isomorphic to ℓ_1, do not have an unconditional basis (countable or uncountable) and cannot have the Radon-Nikodým property ([2], [5], [10]). However, it was shown in [3] that a Daugavet domain, a Daugavet range and a space with the Daugavet property are three different notions indeed.

The aim of this paper is to find appropriate generalizations of the concepts of strong Daugavet and narrow operators for Daugavet centers (see Definition 4 and Definition 6 of G−strong Daugavet and G−narrow operators) in such a way that the basic facts about the original classes can be transfered to these generalizations.

In Section 2 we generalize some results of [7]. Namely, we find a collection $\mathcal{D}_G(X)$ of subsets in X such that $T \in L(X, E)$ is a G−strong Daugavet operator if and only if T is unbounded from below on every $A \in \mathcal{D}_G(X)$ (see Definition 5). We also present a geometrical characterization of a G−narrow operator (see Proposition 4).

In Section 3 we generalize some results of [1] and [6], namely we show that for every Daugavet center $G\colon X \to Y$ all the SCD−operators on X are G−strong Daugavet operators (see Proposition 5) and all the hereditary SCD−operators on X are G−narrow (see Corollary 2). As a consequence we obtain that weakly compact operators, operators not fixing a copy of ℓ_1, strong Radon-Nikodým operators on X are G−narrow as well.

Section 4 is devoted to examples of G−narrow operators. We show that the classes of narrow and G−narrow operators coincide for some Daugavet centers G, e.g. if G is a surjective isometry acting in a space with the Daugavet property. We also prove that there exist Daugavet centers G for which the classes of narrow and G−narrow operators do not coincide. We give a simple but surprising example of a narrow operator which is a Daugavet center (see Example 1).

In this work we use the following notation. The symbol B_X stands for the closed unit ball of X and S_X denotes its unit sphere. For an element $x^* \in X^*$, a slice of a (nonempty) bounded closed convex set $A \subset X$ is given by

$$S(A, x^*, \alpha) := \{x \in A\colon x^*(x) > \sup_{a\in A} x^*(a) - \alpha\}$$

where $0 < \alpha < \sup x^*(A)$. If $A \in X^*$ and $x \in X$ then we will say that the slice

$$S(A, x, \alpha) := \{z^* \in A\colon z^*(x) > \sup_{y^*\in A} y^*(x) - \alpha\}$$

is a w^*-slice of A.

In the present paper we deal with Daugavet centers G with $\|G\| = 1$ but our results extend easily to the case $\|G\| \neq 1$ because if operators G and T satisfy the equation (2) then $\|aG + bT\| = a\|G\| + b\|T\|$ holds true for every $a, b \geq 0$.

In the sequel we are going to use the following geometrical characterization of a Daugavet center.

Theorem 1 ([2], Theorem 2.1) *For an operator $G\colon X \to Y$ with $\|G\| = 1$ the following assertions are equivalent:*

(i) *G is a Daugavet center.*

(ii) *For every* $y_0 \in S_Y$, $x_0^* \in S_{X^*}$ *and* $\varepsilon > 0$ *there is an* $x \in S(B_X, x_0^*, \varepsilon)$ *with* $\|Gx + y_0\| > 2 - \varepsilon$.

(iii) *For every* $x_0^* \in S_{X^*}$ *and every* w^**-slice* $S(B_{Y^*}, y_0, \varepsilon_0)$ *there is another* w^**-slice* $S(B_{Y^*}, y_1, \varepsilon_1) \subset S(B_{Y^*}, y_0, \varepsilon_0)$ *such that for every* $y^* \in S(B_{Y^*}, y_1, \varepsilon_1)$ *the inequality* $\|G^*y^* + x_0^*\| > 2 - \varepsilon_0$ *holds true.*

2. G-strong Daugavet operators and G−Narrow operators

In this section we generalize some results from [7].

Definition 4 *Let* $G \in S_{L(X,Y)}$. *An operator* $T\colon X \to E$ *is said to be a* G−strong Daugavet operator *if for every* $x_0 \in S_X$, $y_0 \in S_Y$ *and* $\varepsilon > 0$ *there is a* $z \in B_X$ *such that* $\|T(x_0 - z)\| < \varepsilon$ *and* $\|Gz + y_0\| > 2 - \varepsilon$.

Note that in the above definition it is not important which space a G−strong Daugavet operator acts into, but $\|Tx\|$ for every $x \in X$ is significant. Therefore, following [7] we say that operators $T_1\colon X \to E_1$ and $T_2\colon X \to E_2$ are *equivalent* if $\|T_1x\| = \|T_2x\|$ for every $x \in X$. The symbol $\mathcal{OP}(X)$ denotes the class of all operators on X with the convention that equivalent operators are identified. We use the notation $\mathcal{SD}(X)$ for the class of all strong Daugavet operators $T \in \mathcal{OP}(X)$, and $\mathcal{NAR}(X)$ for the class of all narrow operators $T \in \mathcal{OP}(X)$. It was shown in [7] that $\mathcal{NAR}(X) \neq \emptyset$ if and only if X has the Daugavet property. In the present paper we denote the class of all G−strong Daugavet operators $T \in \mathcal{OP}(X)$ by $\mathcal{SD}(G, X)$.

Lemma 1 *Let* $G \in S_{L(X,Y)}$. *If* $T\colon X \to Y$ *is a* G*−strong Daugavet operator then* $\|G + T\| = 1 + \|T\|$.

Proof. We assume without loss of generality that $\|T\| = 1$. Let $\varepsilon > 0$ and $x \in S_X$ such that $\|Tx\| \geq 1 - \varepsilon$. Put $y = Tx/\|Tx\|$. By Definition 4 there is $z \in B_X$ such that $\|T(x - z)\| < \varepsilon$ and $\|Gz + y\| > 2 - \varepsilon$. Hence

$$2 - \varepsilon < \|Gz + y\| \leq \|Gz + Tx\| + \varepsilon \leq \|Gz + Tz\| + 2\varepsilon.$$

Then

$$\|Gz + Tz\| \geq 2 - 3\varepsilon$$

which proves the lemma. □

Our next goal is to show that if $G \in S_{L(X,Y)}$ is a Daugavet center then every finite-rank operator on X is a G−strong Daugavet operator. For future reference we record the following lemma.

Lemma 2 ([7], Lemma 3.9) *For every* $\tau > 0$ *and every pair of positive numbers* a, b *there is a* $\delta > 0$ *such that if* $v, x \in B_X$ *and* $\|x + v\| > 2 - \delta$, *then* $\|ax + bv\| > a + b - \tau$.

Now we prove a characterization of a Daugavet center. We use the idea of Lemma 3 of [10] in its proof.

Lemma 3 *For $G \in S_{L(X,Y)}$ the following assertions are equivalent:*

(i) *G is a Daugavet center.*

(ii) *For every $\varepsilon > 0$, $y \in S_Y$ and every nonvoid relatively weakly open subset U of B_X there exists an $x \in U$ such that $\|Gx + y\| > 2 - \varepsilon$.*

Proof.

(i) $\Rightarrow$ *(ii)* It was shown in [10] that there exist slices $S_1, S_2, \ldots, S_n$ of B_X such that a convex combination $\sum_{i=1}^n \lambda_i S_i \subset U$. Using Lemma 2 and item *(ii)* of Theorem 1 we find an $x_1 \in S_1$ with $\|\lambda_1 Gx_1 + y\| > \lambda_1 + 1 - \varepsilon$. Analogously there is an $x_2 \in S_2$ such that $\|\lambda_2 Gx_2 + \lambda_1 Gx_1 + y\| > \lambda_2 + \lambda_1 + 1 - \varepsilon$. Continuing in the same way we find an $x_n \in S_n$ with $\|\lambda_n Gx_n + \lambda_{n-1} Gx_{n-1} + \cdots + \lambda_1 Gx_1 + y\| > > \lambda_n + \lambda_{n-1} + \cdots + \lambda_1 + 1 - \varepsilon$. Denote $x := \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$. Then $x \in \sum_{i=1}^n \lambda_i S_i \subset U$ and $\|Gx + y\| > 2 - \varepsilon$.

The implication *(ii)* $\Rightarrow$ *(i)* follows easily from Theorem 1 because every slice $S(B_X, x^*, \varepsilon)$ of is a nonvoid relatively weakly open set. □

Proposition 1 *If $G \in S_{L(X,Y)}$ is a Daugavet center then every finite-rank operator on X is a $G-$strong Daugavet operator.*

Proof. Let $\varepsilon > 0$, $x_0 \in S_X$ and $y_0 \in S_Y$. Consider a finite-rank $T \in L(X, E)$. Then T is continuous, acting from X with the weak topology into E with the norm topology. Then $\{z \in B_X\colon \|Tx_0 - Tz\| < \varepsilon\}$ is a nonvoid relatively weakly open set. Hence Lemma 3 implies that there exists $z_0 \in B_X$ with $\|T(x_0 - z_0)\| < \varepsilon$ and $\|Gz_0 + y_0\| > 2 - \varepsilon$. Then by Definition 4 T is a $G-$strong Daugavet operator. □

Now we show a relationship between $G-$strong Daugavet operators and the following collection of sets.

Definition 5 *Let $G \in S_{L(X,Y)}$. For every $x \in S_X$, $y \in S_Y$ and every $\varepsilon > 0$ let us define*

$$D_G(x, y, \varepsilon) := \{z \in X : \|Gz + Gx + y\| > 2 - \varepsilon \ \& \ \|z + x\| < 1 + \varepsilon\}.$$

By $\mathcal{D}_G(X)$ we denote the collection of all sets $D_G(x, y, \varepsilon)$ where $x \in S_X$, $y \in S_Y$ and $\varepsilon > 0$.

Let $\mathcal{N}$ be a collection of subsets in X. Following [7] in our paper we use the symbol $\mathcal{N}^{\sim}$ for the class of all $T \in \mathcal{OP}(X)$ unbounded from below on every $A \in \mathcal{N}$, i.e.,

$$\forall A \in \mathcal{N}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists x \in A\colon \|Tx\| < \varepsilon.$$

We also use the notation

$$U_{T,\varepsilon} = \{x \in X\colon \|Tx\| < \varepsilon\}$$

for the tube determined by $T \in \mathcal{OP}(X)$ and $\varepsilon > 0$.

Proposition 2 $SD(G,X) = \mathcal{D}_G(X)^{\sim}$.

Proof. $T \in \mathcal{D}_G(X)^{\sim}$ if and only if for every $x \in S_X$, $y \in S_Y$ and $\varepsilon > 0$ there exists a $z \in D_G(x,y,\varepsilon)$ such that $\|Tz\| < \varepsilon$. This is equivalent to the following assertion: for every $x \in S_X$, $y \in S_Y$ and $\varepsilon > 0$ there is a $v \in x + U_{T,\varepsilon}$ such that $\|v\| < 1+\varepsilon$ and $\|Gv + y\| > 2 - \varepsilon$. Then by Definition 4 T is a $G-$strong Daugavet operator. □

Let us recall how the operation of addition is defined on $\mathcal{OP}(X)$ [7]. The *$\sim$sum* of $T_1\colon X \to E_1$ and $T_2\colon X \to E_2$ is

$$T_1 \tilde{+} T_2\colon X \to E_1 \oplus_1 E_2, \qquad x \mapsto (T_1x, T_2x);$$

i.e.,

$$\|(T_1 \tilde{+} T_2)x\| = \|T_1x\| + \|T_2x\|.$$

For non-empty subsets $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \subset \mathcal{OP}(X)$ their *$\sim$sum* is

$$\mathcal{M}_1 \tilde{+} \mathcal{M}_2 = \{T_1 \tilde{+} T_2\colon T_1 \in \mathcal{M}_1,\ T_2 \in \mathcal{M}_2\}$$

and their *$\sim$difference* is

$$\mathcal{M}_2 \tilde{-} \mathcal{M}_1 = \{T \in \mathcal{OP}(X)\colon T \tilde{+} T_1 \in \mathcal{M}_2 \textit{ whenever } T_1 \in \mathcal{M}_1\}.$$

Definition 6 *Let* $G \in S_{L(X,Y)}$. *Define the class of* $G-$narrow operators *by* $\mathcal{NAR}(G,X) = SD(G,X) \tilde{-} X^*$.

Thus, an operator $T\colon X \to E$ is $G-$narrow if for every $x^* \in X^*$ the $\sim$sum $T \tilde{+} x^*$ is a $G-$strong Daugavet operator. Definition 6, Lemma 1 and Proposition 1 imply the following facts:

- If $G \in S_{L(X,Y)}$ is a Daugavet center then every finite-rank operator on X is $G-$narrow.
- If for an operator G there exists at least one $G-$narrow operator then G is a Daugavet center.

Our next goal is to prove Proposition 4 which is a geometrical characterization of a $G-$narrow operator. For this purpose we use the following fact.

Proposition 3 ([7], Proposition 2.12) *Let* $\mathcal{M} \subset \mathcal{OP}(X)$ *and let* $\mathcal{N}$ *be a collection of subsets in* X. *Then* $\mathcal{N}^{\sim} \tilde{-} \mathcal{M} = \mathcal{N}_1^{\sim}$, *where* $\mathcal{N}_1$ *consists of all intersections of the form* $U_{T,\varepsilon} \cap A$, $T \in \mathcal{M}$, $A \in \mathcal{N}$, $\varepsilon > 0$.

Lemma 4 *Let* $G \in S_{L(X,Y)}$ *and* $T \in \mathcal{NAR}(G,X)$. *Then for every* $x \in S_X$, $y \in S_Y$, $\varepsilon > 0$ *and every slice* $S = S(B_X, x^*, \alpha)$ *containing* x *there is a* $v \in S$ *such that* $\|Gv + y\| > 2 - \varepsilon$ *and* $\|T(x - v)\| < \varepsilon$.

Proof. Suppose T is narrow. Since $x \in S$ then there is an $\varepsilon_1 > 0$ such that $x^*(x) > 1 - \alpha + \varepsilon_1$. Proposition 3 implies that for every $\delta > 0$ there is a $u \in U_{x^*,\delta} \cap D_G(x, y, \delta)$ with $\|Tu\| < \delta$. This means that $|x^*(u)| < \delta$, $\|Tu\| < \delta$, $\|x + u\| < 1 + \delta$ and $\|Gx + Gu + y\| > 2 - \delta$. Put $v := (x + u)/\|x + u\|$ then

$$x^*(v) > \frac{1}{1+\delta}(1 - \alpha + \varepsilon_1 - \delta)$$

and

$$\|T(x-v)\| = \left\|T\left(x - \frac{x+u}{\|x+u\|}\right)\right\| \le \frac{\big|\|x+u\|-1\big|\|Tx\| + \|Tu\|}{\|x+u\|} < \frac{\delta(\|T\|+1)}{1-\delta}$$

and

$$\|Gv + y\| \ge \|Gx + Gu + y\| - \left\|G(x+u) - \frac{G(x+u)}{\|x+u\|}\right\| > 2 - 2\delta.$$

If δ is small enough then v satisfies our requirements. □

Lemma 5 *Let $T \in \mathcal{NAR}(G, X)$.*

(a) *Let $S_1, \dots, S_n$ be a finite collection of slices and $U \subset B_X$ be a convex combination of these slices, i.e., there are $\lambda_k \ge 0$, $k = 1, \dots, n$, $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$, such that $\lambda_1 S_1 + \dots + \lambda_n S_n = U$. Then for every $\varepsilon > 0$, every $y \in S_Y$ and every $w \in U$ there is a $u \in U$ such that $\|Gu + y\| > 2 - \varepsilon$ and $\|T(w - u)\| < \varepsilon$.*

(b) *The same conclusion is true if $U \subset B_X$ is a relatively weakly open set.*

Proof. (a) Pick $x_j \in S_j$ such that $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = w$. We can assume that $x_j \in S_X$ since every $\hat{x} \in S_j$ can be represented as a convex combination of some $\hat{x}_1, \hat{x}_2 \in S_j \cap S_X$. Applying repeatedly Lemma 4 and Lemma 2 with sufficiently small ε_j to S_j, $x_j \in S_j$ and

$$y_j = \left(y + \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k G v_k\right) \Big/ \left\|y + \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k G v_k\right\|,$$

we select $v_k \in S_k$ with $\|T(x_k - v_k)\| < \varepsilon_k$, $k = 1, \dots, n$, in such a way that for every $j = 1, \dots, n$

$$\left\|y + \sum_{k=1}^{j} \lambda_k G v_k\right\| > 1 + \sum_{k=1}^{j} \lambda_k (1 - \varepsilon).$$

Then $u := \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$ is as required.

(b) It was proved in [10] that for every relatively weakly open set $U \subset B_X$ there is a convex combination V of slices of B_X such that $V \subset U$. In fact, it is easy to see that the union of all $V \subset U$ which are convex combinations of slices, is dense in U. Hence for every $w \in U$ and every $\varepsilon > 0$ there exists a convex combination V_0 of slices of B_X and there is a $v \in V_0$ such that

$$\|w - v\| < \frac{\varepsilon}{2\|T\|}.$$

Then (a) implies that for every $y \in S_Y$ there is a $u \in V_0$ such that $\|T(u-v)\| < \varepsilon/2$ and $\|Gu + y\| > 2 - \varepsilon$. So we have

$$\|T(w-u)\| \leq \|T(w-v)\| + \|T(v-u)\| < \varepsilon$$

which gives the needed result. □

Proposition 4 *Let $G \in S_{L(X,Y)}$ be a Daugavet center. For $T \in L(X,E)$ the following assertions are equivalent:*

(i) *T is $G-$narrow.*

(ii) *For every $x \in S_X$, $y \in S_Y$, $\varepsilon > 0$ and every slice $S = S(B_X, x^*, \alpha)$ containing x there is a $v \in S$ such that $\|Gv + y\| > 2 - \varepsilon$ and $\|T(x-v)\| < \varepsilon$.*

Proof. It only remains to prove $(ii) \Rightarrow (i)$. Remark that an operator satisfying (ii) also fulfills the conclusion of Lemma 5. Let $x_0^* \in X^*$, $x \in S_X$, $y \in S_Y$ and $\varepsilon > 0$. Consider the relatively weakly open set

$$U := \{z \in B_X \colon |x_0^*(x - z)| < \varepsilon/2\}$$

then $x \in U$. By Lemma 5 there is a $u \in U$ with $\|Gu + y\| > 2 - \varepsilon/2$ and $\|T(x-u)\| < \varepsilon/2$. By Definition 4 $T \mathbin{\tilde{+}} x_0^*$ is a $G-$strong Daugavet operator. Then T is $G-$narrow. □

3. Hereditary $SCD-$operators are G-narrow

In this section we generalize some results from [1] and [6]. A bounded convex set $A \subset X$ is a slicely countably determined (SCD) set if there is a sequence $\{S_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ of slices of A such that $A \subset \overline{\operatorname{conv}} B$ whenever $B \subseteq A$ intersects all the S_n's. A linear continuous operator $T \colon X \to E$ is called an $SCD-$operator if $T(B_X)$ is an SCD set, and a hereditary $SCD-$operator if every bounded convex subset of $T(B_X)$ is an SCD set. All the operators not fixing a copy of ℓ_1 and strong Radon-Nikodým operators are proved to be hereditary $SCD-$operators [1].

Our aim in this section is to show that for every Daugavet center $G \colon X \to Y$ all the SCD-operators on X are $G-$strong Daugavet operators and all the hereditary $SCD-$operators on X are $G-$narrow. First we prove a characterization of a Daugavet center.

Consider a $G \in S_{L(X,Y)}$. Denote $K(Y^*)$ the weak*-closure of the set of all extreme points of B_{Y^*}.

Remark 1 *Every w^*-slice $S(B_{Y^*}, y_0, \varepsilon_0)$ satisfies*

$$S(B_{Y^*}, y_0, \varepsilon_0) \cap K(Y^*) \neq \emptyset.$$

For $x^* \in X^*$ and $\varepsilon > 0$ we write $S'(x^*,\varepsilon) = \{x \in B_X : x^*(x) > 1-\varepsilon\}$. Remark that $S'(x^*,\varepsilon) \neq \emptyset$ if and only if $\|x^*\| > 1-\varepsilon$. For every $\varepsilon > 0$ and every slice S of B_X we denote

$$A(G,S,\varepsilon) = \{y^* \in K(Y^*) : S \cap S'(G^*y^*,\varepsilon) \neq \emptyset\}.$$

Remark 2 *For every $\varepsilon > 0$ and every slice S of B_X the set $A(G,S,\varepsilon)$ is relatively weak*-open in $K(Y^*)$.*

Lemma 6 *For a $G \in S_{L(X,Y)}$ the following assertions are equivalent:*

(i) *G is a Daugavet center.*

(ii) *For every $\varepsilon > 0$, every $y \in S_Y$ and every slice S of B_X there is a $y^* \in A(G,S,\varepsilon)$ such that $y \in S'(y^*,\varepsilon)$.*

(iii) *For every $\varepsilon > 0$ and every slice S of B_X the set $A(G,S,\varepsilon)$ is weak*-dense in $K(Y^*)$.*

(iv) *For every $\varepsilon > 0$ and every sequence $\{S_n : n \in \mathbb{N}\}$ of slices of B_X the set $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A(G,S_n,\varepsilon)$ is weak*-dense in $K(Y^*)$.*

Proof. *(i) ⇒ (ii)* Pick an $\varepsilon > 0$, a $y \in S_Y$ and an S. There exist $x_0^* \in S_{X^*}$ and $\delta > 0$ such that $S = S(B_X, x_0^*, \delta)$. Denote $\varepsilon_0 := \min\{\varepsilon,\delta\}$.

Consider the w^*-slice $S(B_{Y^*}, y, \varepsilon)$. If G is a Daugavet center then by item *(iii)* of Theorem 1 there is a w^*-slice $S(B_{Y^*}, y_1, \varepsilon_1) \subset S(B_{Y^*}, y, \varepsilon)$ such that every $y^* \in S(B_{Y^*}, y_1, \varepsilon_1)$ satisfies $\|G^*y^* + x_0^*\| > 2 - \varepsilon_0/2$.

According to Remark 1 we pick a $y^* \in S(B_{Y^*}, y_1, \varepsilon_1) \cap K(Y^*)$. Consider $S(B_X, G^*y^* + x_0^*, \varepsilon_0/2) = \{x \in B_X : G^*y^*(x) + x_0^*(x) > \|G^*y^* + x_0^*\| - \varepsilon_0/2\}$. Then every $x \in S(B_X, G^*y^* + x_0^*, \varepsilon_0/2)$ fulfills $G^*y^*(x) + x_0^*(x) > 2 - \varepsilon_0$. But $G^*y^*(x) \le 1$ and $x_0^*(x) \le 1$, hence we have $G^*y^*(x) > 1 - \varepsilon_0 \ge 1 - \varepsilon$ and $x_0^*(x) > 1 - \varepsilon_0 \ge 1 - \delta$. This means that $x \in S \cap S'(G^*y^*, \varepsilon)$. Consequently $y^* \in A(G,S,\varepsilon)$. And, since $y^* \in S(B_{Y^*}, y_1, \varepsilon_1) \subset S(B_{Y^*}, y, \varepsilon)$ then $y^*(y) > 1-\varepsilon$, hence $y \in S'(y^*,\varepsilon)$.

(ii) ⇒ (i) Pick an $\varepsilon > 0$, a $y \in S_Y$ and an $x^* \in S_{X^*}$. Then there is a $y^* \in A(G, S(B_X, x^*, \varepsilon), \varepsilon/2)$ such that $y \in S'(y^*, \varepsilon/2)$. Hence there exist an $x \in S(B_X, x^*, \varepsilon)$ such that $y^*(Gx) = (G^*y^*)(x) > 1 - \varepsilon/2$ and so

$$\|Gx + y\| \ge \|Gx + y\|\|y^*\| \ge |y^*(Gx) + y^*(y)| > 1 - \varepsilon/2 + 1 - \varepsilon/2 = 2 - \varepsilon.$$

Then by item *(ii)* of Theorem 1 G is a Daugavet center.

(ii) ⇒ (iii) To prove that $A(G,S,\varepsilon)$ is weak*-dense in $K(Y^*)$, it is sufficient to show that the weak* closure of $A(G,S,\varepsilon)$ contains every extreme point y^* of B_{Y^*}. Since w^*-slices form a base of neighborhoods of extreme points in B_{Y^*}, we need to prove that every w^*-slice $S(B_{Y^*}, y, \delta)$ with $\delta \in (0,\varepsilon)$ intersects $A(G,S,\varepsilon)$, i.e. that there is a point $y^* \in A(G,S,\varepsilon)$ such that $y^* \in S(B_{Y^*}, y, \delta)$. But we know that there is a point $y^* \in A(G,S,\delta) \subseteq A(G,S,\varepsilon)$ such that $y \in S'(y^*,\delta)$ which means that $y^* \in S(B_{Y^*}, y, \delta)$.

(iii) ⇒ *(ii)* If $A(G,S,\varepsilon)$ is weak*-dense in $K(Y^*)$ then by Remark 1 for every $y \in S_Y$ the w^*-slice $S(B_{Y^*}, y, \varepsilon)$ intersects $A(G,S,\varepsilon)$. Therefore there is a $y^* \in A(G,S,\varepsilon)$ such that $y \in S'(y^*,\varepsilon)$.

Since $A(G,S_n,\varepsilon)$ are weak*-dense and weak*-open then the equivalence *(iii)* ⇔ *(iv)* follows from the Baire theorem. □

Proposition 5 *Let $G \in S_{L(X,Y)}$ be a Daugavet center and $T\colon X \to E$ be an SCD-operator. Then T is a G-strong Daugavet operator.*

Proof. Let T be an *SCD*-operator. Then there exists a sequence $\{S_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ of slices of $T(B_X)$ such that $T(B_X) \subseteq \overline{\operatorname{conv}}(B)$ whenever $B \subseteq T(B_X)$ intersects all the S_n's. Remark that the sets $\hat{S}_n := T^{-1}(S_n) \cap B_X$ are slices of B_X.

Pick an $\varepsilon > 0$, an $x \in S_X$ and a $y \in S_Y$. Since G is a Daugavet center, item *(iv)* of Lemma 6 gives us that $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A(G,\hat{S}_n,\varepsilon/2)$ is weak*-dense in $K(Y^*)$. Remark 1 implies that there is a $y^* \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A(G,\hat{S}_n,\varepsilon/2)$ such that

$$y \in S'(y^*,\varepsilon/2). \tag{3}$$

By the definition of $A(G,\hat{S}_n,\varepsilon/2)$ we have that $\overline{S'(G^*y^*,\varepsilon/2)} \cap T^{-1}(S_n) \neq \emptyset$ for every $n \in \mathbb{N}$. Consequently,

$$T(\overline{S'(G^*y^*,\varepsilon/2)}) \cap S_n \neq \emptyset$$

for every $n \in \mathbb{N}$. Then

$$T(B_X) \subseteq \overline{\operatorname{conv}}(T(S'(G^*y^*,\varepsilon/2))) = \overline{T(S'(G^*y^*,\varepsilon/2))}.$$

Hence $Tx \in \overline{T(S'(G^*y^*,\varepsilon/2))}$ which implies that there is a $z \in S'(G^*y^*,\varepsilon/2)$ such that

$$\|Tx - Tz\| < \varepsilon.$$

We have $y^*(Gz) > 1 - \varepsilon/2$. By (3) we also have $y^*(y) > 1 - \varepsilon/2$. Therefore

$$\|y + Gz\| \geq \|y^*\|\|y + Gz\| \geq |y^*(y) + y^*(Gz)| > 1 - \varepsilon/2 + 1 - \varepsilon/2 = 2 - \varepsilon.$$

Then T is a G-strong Daugavet operator by Definition 4. □

Using Lemma 1 we obtain the following corollary:

Corollary 1 *Let $G \in S_{L(X,Y)}$ be a Daugavet center. If $T\colon X \to Y$ is an SCD-operator then $\|G + T\| = 1 + \|T\|$.*

It was shown in [6] that if $T\colon X \to Y$ is a hereditary *SCD*-operator then for every $x^* \in X^*$ the operator $T \tilde{+} x^*$ is an *SCD*-operator.

Corollary 2 *Let $G \in S_{L(X,Y)}$ be a Daugavet center, E be a Banach space, and let $T\colon X \to E$ be a hereditary SCD-operator. Then T is G-narrow.*

Corollary 3 *For a Daugavet center $G \in S_{L(X,Y)}$ all weakly compact operators, operators not fixing a copy of ℓ_1, and all strong Radon-Nikodým operators on X are $G-$narrow.*

4. Examples of Daugavet centers and G-narrow operators

The results of this section are concentrated around the following (in general still open) question: what one can say about two Daugavet centers G_1, G_2 on X, if $\mathcal{NAR}(G_1, X) = \mathcal{NAR}(G_2, X)$?

Proposition 6 *Let $G \in S_{L(X,Y)}$ be a Daugavet center and $V\colon Y \to E$ be a surjective isometry. Then $\mathcal{NAR}(V \circ G, X) = \mathcal{NAR}(G, X)$ and $\mathcal{SD}(V \circ G, X) = \mathcal{SD}(G, X)$.*

Proof. First we prove that $\mathcal{NAR}(V \circ G, X) = \mathcal{NAR}(G, X)$. Let $T \in \mathcal{NAR}(G, X)$, $\varepsilon > 0$, $x \in S_X$, $e \in S_E$ and let S be a slice of B_X with $x \in S$. Denote $y := V^{-1}e$. Remark that $y \in S_Y$. Then there is a $z \in S$ such that $\|T(x - z)\| < \varepsilon$ and $\|Gz + y\| > 2 - \varepsilon$. Hence

$$\|VGz + e\| = \|V(Gz + y)\| = \|Gz + y\| > 2 - \varepsilon.$$

Consequently, T is a $V \circ G-$narrow operator. So we have $\mathcal{NAR}(G, X) \subset \mathcal{NAR}(VG, X)$. Since V^{-1} is also a surjective isometry, then

$$\mathcal{NAR}(V \circ G, X) \subset \mathcal{NAR}(G, X).$$

Thus, we have $\mathcal{NAR}(V \circ G, X) = \mathcal{NAR}(G, X)$. One can prove $\mathcal{SD}(V \circ G, X) = \mathcal{SD}(G, X)$ in the same way. □

Corollary 4 *Let X have the Daugavet property and $G\colon X \to E$ be a surjective isometry. Then $\mathcal{NAR}(G, X) = \mathcal{NAR}(X)$ and $\mathcal{SD}(G, X) = \mathcal{SD}(X)$.*

Proposition 7 *Let $G \in S_{L(X,Y)}$ be a Daugavet center and $U\colon E \to X$ be a surjective isometry. Then*

(a) *For each $T \in \mathcal{NAR}(G, X)$ the composition $T \circ U \in \mathcal{NAR}(G \circ U, E)$.*

(b) *For each $T \in \mathcal{SD}(G, X)$ the composition $T \circ U \in \mathcal{SD}(G \circ U, E)$.*

Proof. We now prove part (a). Let $\varepsilon > 0$, $e \in S_E$, $y \in S_Y$ and let $S = S(B_E, x^*, \alpha)$ be a slice with $x^* \in S_{E^*}$ and $e \in S$. Then

$$Ue \in US = \{v \in B_X : x^*(U^{-1}v) > 1 - \alpha\}.$$

Recall that $\|U^{-1}\| = 1$, hence $x^* \circ U^{-1} \in S_{X^*}$ and $US = S(B_X, x^* \circ U^{-1}, \alpha)$. Since T is $G-$narrow, there is a $v_0 \in US$ with $\|T(Ue - v_0)\| < \varepsilon$ and $\|Gv_0 + y\| > 2 - \varepsilon$. Then for $z := U^{-1}v_0$ we have $z \in S$, $\|TU(e - z)\| < \varepsilon$ and $\|GUz + y\| > 2 - \varepsilon$. This means that $T \circ U$ is a $G \circ U-$narrow operator.

Part (b) can be proved in analogous way. □

Proposition 8 *Let $G \in S_{L(X,Y)}$, $J\colon Y \to E$ be an isometric embedding and let $J \circ G$ be a Daugavet center. Then G is a Daugavet center, $\mathcal{NAR}(J \circ G, X) \subset \subset \mathcal{NAR}(G, X)$ and $\mathcal{SD}(J \circ G, X) \subset \mathcal{SD}(G, X)$.*

Proof. Let $\varepsilon > 0$, $x \in S_X$, $y \in S_Y$ and let S be a slice of B_X with $x \in S$. Since J is an isometric embedding then $Jy \in S_E$. Let $T \in \mathcal{NAR}(J \circ G, X)$ then there is a $z \in S$ such that $\|T(x - z)\| < \varepsilon$ and

$$\|Gz + y\| = \|J(Gz) + Jy\| > 2 - \varepsilon,$$

which implies that $T \in \mathcal{NAR}(G, X)$. Then we have $\mathcal{NAR}(J \circ G, X) \subset \mathcal{NAR}(G, X)$. Consequently $\mathcal{NAR}(G, X) \neq \emptyset$, and hence G is a Daugavet center.

The proof of $\mathcal{SD}(J \circ G, X) \subset \mathcal{SD}(G, X)$ is analogous. □

Our next goal is to show that there exist G–narrow operators on $C(K)$ which are not narrow, and that there are narrow operators on $C(K)$ which are not G–narrow for some Daugavet center $G\colon C(K) \to Y$.

Let $K \subset [0, 1]$ be a compact set. Consider the restriction operator $G\colon C[0, 1] \to C(K)$ which maps every function f into its restriction to K. Theorem 3.7 of [2] implies that G is a Daugavet center if K has no isolated points. We use the idea of Theorem 3.7 of [2] to prove the following proposition.

Proposition 9 *Let $K_1 \subset [0, 1]$ and $K_2 \subset [0, 1]$ be compact sets with $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ and let K_2 have no isolated points. Consider $T\colon C[0, 1] \to C(K_1)$, $Tf = f\big|_{K_1}$ and $G\colon C[0, 1] \to C(K_2)$, $Gf = f\big|_{K_2}$. Then T is a G-narrow operator.*

Proof. Pick an $\varepsilon > 0$, an $x \in S_{C[0,1]}$, a $y \in S_{C(K_2)}$ and a slice $S = S(B_{C[0,1]}, x^*, \alpha)$ which contains x. We need to find a $z \in S$ satisfying $\|Tx - Tz\| < \varepsilon$ and $\|Gz + y\| > 2 - \varepsilon$. By the Riesz representation theorem for x^* there is a unique Borel regular signed measure σ on $\Delta := [0, 1]$ such that

$$x^*(f) = \int_\Delta f \, d\sigma$$

for all $f \in C(\Delta)$, and $\|x^*\| = |\sigma|(\Delta)$. So

$$\begin{aligned} S &= \{f \in B_{C(\Delta)}\colon \int_\Delta f \, d\sigma > |\sigma|(\Delta) - \alpha\} \\ &= \{f \in B_{C(\Delta)}\colon \int_\Delta (1 - (\mathbf{1}_{\Delta^+} - \mathbf{1}_{\Delta^-}) f) \, d|\sigma| < \alpha\}, \end{aligned}$$

where $\Delta = \Delta^+ \sqcup \Delta^-$ is a Hahn decomposition of Δ for σ and $\mathbf{1}_A$ denotes a characteristic function of the set A. Since $x \in S$ then there is an $\varepsilon_1 > 0$ such that

$$\int_\Delta (1 - (\mathbf{1}_{\Delta^+} - \mathbf{1}_{\Delta^-}) x) \, d|\sigma| < \alpha - \varepsilon_1.$$

Let $t_0 \in K_2$ be a point such that $|y(t_0)| = 1$. Without loss of generality we assume that $y(t_0) = 1$. Consider a neighborhood $U \subset K_2$ of a point t_0 such that $y(t) > 1 - \varepsilon$ for every $t \in U$. Since K_2 has no isolated points and σ has at most countable set of atoms then there are $t_1 \in U$ which is not an atom of σ, and an open neighborhood $V \subset \Delta$ of t_1 such that $K_1 \cap V = \emptyset$ and $|\sigma|(V) < \varepsilon_1/2$.

Now we construct the needed z. Put $z(t_1) = 1$ and $z = x$ on $\Delta \setminus V$. Since $(\Delta \setminus V) \cup \{t_1\}$ is a closed set then by the Tietze extension theorem we construct a continuous extension of z on $V \setminus \{t_1\}$ keeping the condition $\|z\| = 1$. Let us show that $z \in S$.

$$\begin{aligned}
\int_{\Delta} (1 - (\mathbf{1}_{\Delta^+} - \mathbf{1}_{\Delta^-})z)\, d|\sigma| &= \int_{\Delta \setminus V} (1 - (\mathbf{1}_{\Delta^+} - \mathbf{1}_{\Delta^-})x)\, d|\sigma| \\
&+ \int_{V} (1 - (\mathbf{1}_{\Delta^+} - \mathbf{1}_{\Delta^-})z)\, d|\sigma| \\
&< \int_{\Delta} (1 - (\mathbf{1}_{\Delta^+} - \mathbf{1}_{\Delta^-})x)\, d|\sigma| + \varepsilon_1 \\
&< \alpha - \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \alpha.
\end{aligned}$$

In addition, we have

$$\|Gz + y\| = \sup_{t \in K_2} |z + y| \geq |z(t_1) + y(t_1)| > 2 - \varepsilon$$

and since $K_1 \cap V = \emptyset$ and $z = x$ on $\Delta \setminus V$, then

$$\|Tx - Tz\| = \sup_{t \in K_1} |x - z| = 0.$$

So, T is a $G-$narrow operator. $\square$

It was proved in [7] that for a compact K without isolated points and for $T \in L(C(K), Y)$ the following assertions are equivalent:

(i) $T \in \mathcal{NAR}(C(K))$.

(ii) For every $\varepsilon > 0$ and every proper closed subset $F \subset K$ there is an non-negative $f \in S_{C(K)}$ with $f\big|_F = 0$ and $\|Tf\| < \varepsilon$.

Proposition 10 *Let $K_0 \subset [0,1]$ be a compact set. For G: $C[0,1] \to C(K_0)$, $Gf = f\big|_{K_0}$ the following assertions are equivalent:*

(i) $G \in \mathcal{NAR}(C[0,1])$.

(ii) K_0 *is nowhere dense in* $[0,1]$.

Proof. $(ii) \Rightarrow (i)$. Pick $\varepsilon > 0$ and $(a,b) \subset [0,1]$. Since K_0 is nowhere dense in $[0,1]$ then there is an open set $U \subset (a,b)$ such that $U \cap K_0 = \emptyset$. Then for every non-negative $f \in S_{C[0,1]}$ with $\operatorname{supp} f \subset U$ we have $\|Gf\| = 0$. Therefore, G is a narrow operator.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Assume to the contrary that K_0 is dense in some $(a,b) \subset [0,1]$. Consider a non-negative $f \in S_{C[0,1]}$ with $\operatorname{supp} f \subset (a,b)$. Let $\varepsilon > 0$ then there is a $t \in K_0$ such that $|f(t)| > 1 - \varepsilon$. Hence $\|Gf\| > 1 - \varepsilon$. So G is not narrow. $\square$

Example 1 *Let K be the Cantor set on $[0,1]$ and $G\colon C[0,1] \to C(K)$, $Gf = f\big|_K$. Since Cantor set is nowhere dense then G is a narrow operator. But Cantor set also has no isolated points, so G is a Daugavet center and hence is not $G-$narrow.*

Example 2 *Consider compact sets $K_1 \subset [0,1]$ and $K_2 \subset [0,1]$ with $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Let K_1 contain some open set $U \subset [0,1]$ and let K_2 have no isolated points. Consider the restriction operators $T\colon C[0,1] \to C(K_1)$ and $G\colon C[0,1] \to C(K_2)$. Then by Proposition 9 T is G-narrow, and Proposition 10 implies that T is not narrow.*

Acknowledgement. The author is grateful to her scientific supervisor prof. Vladimir M. Kadets for attention and numerous fruitful discussions.

REFERENCES

1. Avileś A., Kadets V., Martín M., Merí J., Shepelska V. Slicely countably determined Banach spaces // C. R., Math., Acad. Sci. Paris. – 2009. – **347**. – P. 1277-1280.

2. Bosenko T., Kadets V. Daugavet centers // Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom. – 2010. – **6**.1. – P. 3-20.

3. Bosenko T. Daugavet centers and direct sums of Banach spaces // Cent. Eur. J. Math. – 2010. – **8**.2. – P. 346-356. – DOI 10.2478/s11533-010-0015-6.

4. Daugavet I. K. On a property of completely continuous operators in the space C // Uspekhi Mat. Nauk. – 1963. – **18**.5. – P. 157–158. – in Russian.

5. Kadets V. M., Shvidkoy R. V., Sirotkin G. G., Werner D. Banach spaces with the Daugavet property // Trans. Amer. Math. Soc. – 2000. – **352**. – P. 855–873.

6. Kadets V., Shepelska V. Sums of *SCD* sets and their applications to *SCD* operators and narrow operators // Cent. Eur. J.Math. – 2010. – **8**.1. – P. 129–134.

7. Kadets V. M., Shvidkoy R. V., Werner D. Narrow operators and rich subspaces of Banach spaces with the Daugavet property // Studia Math. – 2001. – **147** – P. 269–298.

8. Lozanovskii G. Ya. On almost integral operators in KB-spaces // Vestnik Leningrad Univ. Mat. Mekh. Astr. – 1966. – **21**. – P. 35–44. – in Russian.

9. Popov M. M. An extract Daugavet type inequality for small into isomorphisms in L_1 // Arch. Math. – 2008. – **90**. – P. 537–544.

10. Shvidkoy R. V. Geometric aspects of the Daugavet property // J. Funct. Anal. – 2000. – **176**. – P. 198–212.

11. Werner D. The Daugavet equation for operators on function spaces // J. Funct. Anal. – 1997. – **143**. – P. 117–128.

12. Wojtaszczyk P. Some remarks on the Daugavet equation // Proc. Amer. Math. Soc. – 1992. – **115**. – P. 1047–1052.

Article history: Received: 29 April 2010; Final form: 17 October 2010; Accepted: 26 October 2010.

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517 № 931, 2010, с.20–32

Нормальные функции в плоскости без точки нуль

Л.Д. Радченко

Харьковский национальный университет имени В.Н.Каразина, пл. Свободы, 4, 61077, Харьков, Украина
liudmyla.radchenko@gmail.com

В работе изучаются мероморфные функции $f(z)$ в $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$, для которых семейство $\{f(\lambda z)\}_{\lambda\in\mathbb{C}^*}$ является нормальным. Такие функции (при дополнительном ограничении — наличие полюса или устранимой особенности в нуле) изучал А. Островский. Он получил их представление в терминах нулей и полюсов. Позже, А. Еременко предположил, что результат Островского верен в общем случае. В данной работе приводится подробное доказательство, указанного Еременко результата.

Радченко Л.Д., **Нормальні функції у площині з вилученим початком координат**. У роботі вивчаються мероморфні функції $f(z)$ у $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$, для яких сімейство $\{f(\lambda z)\}_{\lambda\in\mathbb{C}^*}$ нормальне. Такі функції (при додатковому обмеженні — наявність полюса або переборної особливості у нулі) вивчав А. Островський. Він отримав їх представлення в термінах нулів і полюсів. Пізніше, А. Єрьоменко припустив, що результат Островського вірний у загальному випадку. В даній роботі наводиться докладний доказ, зазначеного Єрьоменком результату.

L.D. Radchenko, **Normal functions in a punctured plane**. In given work meromorphic functions $f(z)$ in $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ are concerned. For these functions the family $\{f(\lambda z)\}_{\lambda\in\mathbb{C}^*}$ is normal. Such functions (with additional restriction, namely, presence of a pole or removable singularity in zero) were studied by A. Ostrovsky. He received its representation in terms of zeros and poles. Later A. Eremenko assumed that Ostrovsky's result is true in the general case. In this work we give the detailed proof of this result.

2000 Mathematics Subject Classification 30D45.

1 Обозначения и основной результат

Данная работа является продолжением работы [4]. Напомним обозначения из первой части.

Пусть f – мероморфная функция в $\mathbb{C}^*$, a_k, b_k – ее нули и полюсы. Последовательности (a_k) и (b_k) могут быть конечными или бесконечными в одну или обе стороны, при этом будем считать, что $|a_k|$ и $|b_k| < 1$ при $k < 0$, $|a_k|$ и $|b_k| \geqslant 1$ при $k \geqslant 0$. Отметим, что $a_k, b_k \to 0$, $k \to -\infty$ и $a_k, b_k \to \infty$, $k \to +\infty$, если последовательности бесконечны в соответствующую сторону. Положим $\mathfrak{M}(r) = \dfrac{\prod_{k:0\leqslant\frac{\ln|a_k|}{\ln r}\leqslant 1}\frac{r}{|a_k|}}{\prod_{k:0\leqslant\frac{\ln|b_k|}{\ln r}\leqslant 1}\frac{r}{|b_k|}}$.

Через $\Gamma(r, R)$ обозначим открытое кольцо $\{z \in \mathbb{C} : r<|z|<R\}$. На множестве значений, т. е. в замкнутой комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, всегда рассматривается сферическая метрика ρ_S. На множестве мероморфных функций в Ω всегда, если не оговорено противное, рассматривается равномерная сходимость на компактах в Ω. Функция называется нормальной в $\mathbb{C}^*$, если из любой последовательности $\lambda_n \in \mathbb{C}^*$ можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся на компактах относительно сферической метрики. При проверке нормальности мероморфной функции в $\mathbb{C}^*$ можно ограничиться автоморфизмами $\lambda_n \to 0$ или $\lambda_n \to \infty$, т. к. если $\lambda_n \to \lambda_0 \neq 0, \infty$, то всегда $f(\lambda_n z) \to f(\lambda_0 z)$. Поскольку преобразование $z \to \dfrac{1}{z}$ сохраняет нормальность и меняет местами особенности в нуле и бесконечности, то при изучении характера особенностей в этих точках достаточно ограничиться особенностью в нуле. Через $cardA$ обозначим количество элементов конечного множества A.

Теперь сформулируем основной результат этой части работы.

Теорема 1. *Функция $f\colon \mathbb{C}^* \to \overline{\mathbb{C}}$ нормальна тогда и только тогда, когда $f(z)$ имеет вид*

$$f(z) = az^m \frac{\prod_{k\geqslant 0}(1 - \frac{z}{a_k}) \prod_{k<0}(1 - \frac{a_k}{z})}{\prod_{k\geqslant 0}(1 - \frac{z}{b_k}) \prod_{k<0}(1 - \frac{b_k}{z})}, \tag{1}$$

для некоторых $a \in \mathbb{C}$, $m \in Z$, $a_k, b_k \in \mathbb{C}^*$ и подчиняется следующим условиям:

1. *Для всех $0 < r_1 < r_2 < \infty$ величина $|card\{k : r_1<|a_k|<r_2\} - card\{k : r_1<|b_k|<r_2\}|$ ограничена константой, не зависящей от r_1, r_2.*

2. *Для всех $r > 0$ величины $card\{k : r\leqslant|a_k|\leqslant 2r\}$ и $card\{k : r\leqslant|b_k|\leqslant 2r\}$ ограничены константой, не зависящей от r.*

3. *Величина $\ln\mathfrak{M}(r) + m\ln r$ равномерно ограничена сверху для r из множества $\{r > 0 : r = |a_k|\}$ и снизу – для r из множества $\{r > 0 : r = |b_k|\}$.*

4. *Величина* $\inf_{k,l}\left|\frac{a_k}{b_l}-1\right|$ *строго положительна.*

Эта теорема в случае, когда в нуле устранимая особенность или полюс, была доказана А. Островским (см. [1], [3]). В общем случае она была сформулирована без доказательства А. Еременко (см. [2]).

Следствие. *Если* f_1, f_2 *— нормальные функции с одинаковыми нулями и полюсами с учетом кратности, то* $f_1 = Kf_2$, *где* $K \in \mathbb{C}$.

2 Вспомогательные результаты

В первой части этой работы [4] были доказаны следующие свойства нормальных функций.

Теорема 2 [4]. *Величина* $|card\{k : a_k \in \Gamma(r_1, r_2)\} - card\{k : b_k \in \Gamma(r_1, r_2)\}|$ *ограничена равномерно при* $0 < r_1 < r_2 < \infty$.

Теорема 3 [4]. *Величина* $card\{k : a_k \in \Gamma(r, 2r)\} + card\{k : b_k \in \Gamma(r, 2r)\}$ *ограничена равномерно при* $r > 0$.

Теорема 4 [4]. *Величина* $\inf_{k,l}\left|\frac{a_k}{b_l}-1\right|$ *строго положительна.*

Теорема 5 [4]. *Если нормальная функция в* $\mathbb{C}^*$ *в некотором круге с выколотым центром* $\{z : 0<|z|<\varepsilon\}$ *выпускает хотя бы одно значение, то она имеет в нуле либо устранимую особенность, либо полюс. Аналогичное утверждение верно для окрестности бесконечности.*

Покажем, что при проверке нормальности функции в $\mathbb{C}^*$ можно рассматривать не все последовательности $(\lambda_n) \subset \mathbb{C}^*$, а также проверять сходимость не на всех кольцах, а только на фиксированном кольце в $\mathbb{C}^*$.

Предложение 1. *Пусть* r, R *– произвольные числа,* $0 < r < R < \infty$, f *– мероморфная функция в* $\mathbb{C}^*$. *Если из любой последовательности чисел* p_n *можно выделить подпоследовательность* p'_n *такую, что* $f(p'_n z)$ *сходится равномерно по* $z \in \{r \leqslant |z| \leqslant R\}$, *то* f *нормальна в* $\mathbb{C}^*$.

Доказательство. Переходя к последовательности tp_n, получаем, что сходящуюся подпоследовательность можно выбрать для кольца вида $\{tr\leqslant|z|\leqslant tR\}$. Разобьем $\mathbb{C}^*$ на кольца $\{r_1\leqslant|z|\leqslant r_2\}$ так, что $\frac{r_2}{r_1} = \frac{R}{r}$. На каждом из таких колец из любой последовательности можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность. Применяя диагональный процесс, получим подпоследовательность, которая сходится на любом компакте в $\mathbb{C}^*$. ■

Предложение 2. *Пусть* $\{p_n\}$ *— последовательность положительных чисел,* $p_n \to \infty$ *при* $n \to +\infty$ *и* $p_n \to 0$ *при* $n \to -\infty$, $ap_n \leqslant p_{n-1} < p_n$ *при некотором* $a < 1$. *Тогда мероморфная функция* $f\colon \mathbb{C}^* \to \overline{\mathbb{C}}$ *нормальна в том и только том случае, если* $\{f(p_n z)\}$ *– нормальное семейство.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Покажем, что это условие является достаточным. Пусть h_k – произвольная последовательность. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\arg h_k \to \alpha \in [0, 2\pi)$.

Выберем подпоследовательность p_{n_k} так, чтобы $p_{n_k-1} < |h_k| \leqslant p_{n_k}$, и проредим так, чтобы $f(p_{n_k}z)$ сходилось равномерно на компактах в $\mathbb{C}^*$ к функции $g(z)$. Можно, проредив при необходимости подпоследовательность, считать, что $\frac{|h_k|}{p_{n_k}} \to b \in (a, 1]$.

Имеем: $\rho\left(f(h_k z), g(be^{i\alpha}z)\right) \leqslant \rho\left(f(p_{n_k}\frac{h_k}{p_{n_k}}z), g(\frac{h_k}{p_{n_k}}z)\right) + \rho\left(g(\frac{h_k}{p_{n_k}}z), g(be^{i\alpha}z)\right)$.

Оба слагаемых в последней сумме стремятся к нулю при $k \to \infty$. ■

Предложение 3. *Мероморфная функция $f\colon \mathbb{C}^* \to \overline{\mathbb{C}}$ нормальна в том и только том случае, если $\{f(2^n z)\}$ нормально в кольце $\{\frac{1}{2} \leqslant |z| \leqslant 2\}$.*

Доказательство. Необходимость очевидна.

Покажем, что данное утверждение является достаточным. Аналогично доказательству предложения 2 с $a = \frac{1}{2}$ рассмотрим произвольную подпоследовательность h_k, $\arg h_k \to \alpha \in [0, 2\pi)$. Выберем подпоследовательность n_k так, чтобы $2^{n_k-1} < h_k \leqslant 2^{n_k}$ и проредим так, чтобы $f(2^{n_k}z)$ сходилось равномерно на компактах в $\mathbb{C}^*$ к функции $g(z)$. Как и раньше, можно считать, что $\frac{|h_k|}{2^{n_k}} \to b \in (\frac{1}{2}, 1]$. При $z \in \{\frac{1}{2} \leqslant |z| \leqslant 2\}$, имеем $be^{i\alpha}z \in \bigcap_{b\in(\frac{1}{2},1]}\{bz : \frac{1}{2} \leqslant |z| \leqslant 2\} = \{z : \frac{1}{2} \leqslant |z| \leqslant 1\}$ и $\rho(f(h_k z), g(be^{i\alpha}z)) \to 0$ при $k \to \infty$. Следовательно, произвольное семейство нормально в кольце $\{z : \frac{1}{2} \leqslant |z| \leqslant 1\}$. Отсюда, применяя предложение 1, получим требуемое утверждение. ■

Далее докажем несколько свойств функции $\mathfrak{M}(r)$.

Прежде всего отметим, что при замене f на $\frac{1}{f}$, $\mathfrak{M}(r)$ меняется на $\frac{1}{\mathfrak{M}(r)}$.

Далее имеем,

$$\ln \mathfrak{M}(r) = \begin{cases} \int\limits_1^r \frac{card\{k:1<|a_k|<t\}-card\{k:1<|b_k|<t\}}{t}dt, & \text{если } r \geqslant 1; \\ \int\limits_r^1 \frac{card\{k:t<|a_k|<1\}-card\{k:t<|b_k|<1\}}{t}dt, & \text{если } r < 1. \end{cases} \tag{2}$$

Действительно, это равенство получается из определения $\mathfrak{M}(r)$ с помощью интегрирования по частям ввиду того, что

при $r > 1$ имеем $\{k : 0 \leqslant \frac{\ln\alpha_k}{\ln r} \leqslant 1\} \equiv \{k : 1 \leqslant \alpha_k \leqslant r\}$.

при $r < 1$ имеем $\{k : 0 \leqslant \frac{\ln\alpha_k}{\ln r} \leqslant 1\} \equiv \{k : r \leqslant \alpha_k \leqslant 1\}$.

Лемма 1. *Для любой мероморфной функции в $\mathbb{C}^*$ существуют числа $A, A' \in \mathbb{R}$ такие, что для $r > 1$ верно $\ln\mathfrak{M}(r) + A\ln r = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|f(e^{i\theta})|\,d\theta$, а для $r < 1$ верно аналогичное равенство с A' вместо A.*

Доказательство. Пусть $r > 1$, $\{a_k\}_{k=1}^n$ и $\{b_l\}_{l=1}^m$ — нули и полюсы $f(z)$ в кольце $\{1 \leqslant |z| \leqslant r\}$, а $\{a_k\}_{k=n+1}^{n'}$ и $\{b_l\}_{l=m+1}^{m'}$ — нули и полюсы $f(z)$ в кольце $\{r < |z| \leqslant r'\}$ для некоторого $r' > r$. Введем функцию $g(z) = f(z)\frac{\prod_{l=1}^{m'}(z - b_l)}{\prod_{k=1}^{n'}(z - a_k)}$.

Она голоморфна в кольце $\{1\leqslant|z|\leqslant r'\}$ и не имеет там нулей. Среднее по окружности $\{|z|=t\}$ от гармонической функции в кольце $\{1\leqslant|z|\leqslant r'\}$ есть линейная функция от $\ln t$, поэтому гармоническая в этом кольце функция $\ln|g(z)|$ при некотором $A=A(r')$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|g(re^{i\theta})|\,d\theta-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|g(e^{i\theta})|\,d\theta=A\ln r. \tag{3}$$

С другой стороны, используя равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|\alpha+\beta e^{i\theta}|\,d\theta=\ln\max\{|\alpha|,|\beta|\}, \tag{4}$$

имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|g(re^{i\theta})|\,d\theta-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|g(e^{i\theta})|\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|f(e^{i\theta})|\,d\theta+\sum_{j=1}^{m}\ln\frac{r}{|b_j|}-\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{r}{|a_i|}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|f(e^{i\theta})|\,d\theta-$$

$$-\int\limits_{1}^{r}\frac{card\{k:1\leqslant|a_k|\leqslant t\}-card\{k:1\leqslant|b_k|\leqslant t\}}{t}\,dt.$$

Используя (3) и (2), получим, что справедливо равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|f(e^{i\theta})|\,d\theta=\ln\mathfrak{M}(r)+A\ln r.$$

Отсюда, в частности, следует, что A не зависит от r', значит, утверждение леммы доказано для всех $r>1$.

При $r<1$ также обозначим через $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ и $\{b_l\}_{l=1}^{m}$ нули и полюсы $f(z)$ в кольце $\{r\leqslant|z|\leqslant1\}$, а через $\{a_k\}_{k=n+1}^{n'}$ и $\{b_l\}_{l=m+1}^{m'}$ — в кольце $\{r'\leqslant|z|<r\}$, для некоторого $r'<r$. Аналогично, введем функцию $g(z)=f(z)\dfrac{\prod_{l=1}^{m'}(z-b_l)}{\prod_{k=1}^{n'}(z-a_k)}$, для которой при некотором $A_1=A_1(r')$ будет выполнено

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|g(e^{i\theta})|\,d\theta-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|g(re^{i\theta})|\,d\theta=-A_1\ln r. \tag{5}$$

Далее имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|g(e^{i\theta})|\,d\theta-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|g(re^{i\theta})|\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|f(e^{i\theta})|\,d\theta-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta+\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{|a_i|}{r}-\sum_{j=1}^{m}\ln\frac{|b_j|}{r}+\ln r(card\{k:r'\leqslant|a_k|\leqslant 1\}-$$

$$-card\{k:r'\leqslant|b_k|\leqslant 1\})=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|f(e^{i\theta})|\,d\theta-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta+$$

$$+\int\limits_{r}^{1}\frac{card\{k:t\leqslant|a_k|\leqslant 1\}-card\{k:t\leqslant|b_k|\leqslant 1\}}{t}dt+$$

$$+\ln r(card\{k:r'\leqslant|a_k|\leqslant 1\}-card\{k:r'\leqslant|b_k|\leqslant 1\}).$$

Обозначая через $A'=A_1+card\{k:r'\leqslant|a_k|\leqslant 1\}-card\{k:r'\leqslant|b_k|\leqslant 1\}$, $A'=A'(r')$ и используя (5) и (2), получим, что для мероморфной функции в кольце $\{r\leqslant|z|\leqslant 1\}$ справедливо равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|f(e^{i\theta})|\,d\theta=\ln\mathfrak{M}(r)+A'\ln r.$$

Отсюда следует, что A' не зависит от r'. Утверждение леммы доказано полностью. ■

Замечание 1. *Если функция $f(z)$ допускает представление (1), то утверждение леммы 1 выполняется с $A=A'=m$.*

Действительно, используя (4), получим

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|f(e^{i\theta})|\,d\theta=m\ln r+\sum_{k\geqslant 0}\ln\max\{1,\frac{r}{|a_k|}\}+$$

$$+\sum_{k<0}\ln\max\{1,\frac{|a_k|}{r}\}-\sum_{k\geqslant 0}\ln\max\{1,\frac{r}{|b_k|}\}-\sum_{k<0}\ln\max\{1,\frac{|b_k|}{r}\}.$$

Пользуясь (2), для всех r имеем $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|f(e^{i\theta})|\,d\theta=$ $=m\ln r+\ln\mathfrak{M}(r)$. Поэтому $A=A'=m$.

Лемма 2. *Пусть f_n – мероморфные функции в $\mathbb{C}^*$, $f_n(z)\to f(z)\not\equiv 0$ – равномерно на компактах в $\mathbb{C}^*$. Тогда для всех $r>0$ верно:* $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|f_n(re^{i\theta})|d\theta\to\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|f(re^{i\theta})|d\theta$ *при $n\to\infty$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное $r>0$. Если на окружности $\{|z|=r\}$ нет ни нулей, ни полюсов функции $f(z)$, то утверждение Леммы очевидно. Пусть $a_1,\dots,a_k$, $b_1,\dots,b_l$ — нули и полюсы $f(z)$ на окружности $\{|z|=r\}$. Рассмотрим a_{in}, b_{jn} — нули и полюсы функций $f_n(z)$, $i=1,\dots,k$, $j=1,\dots,l$. Перенумеруем их так, чтобы $a_{in}\to a_i$, $b_{jn}\to b_j$ при $n\to\infty$. Введем функции $\widetilde{f}(z)=\dfrac{f(z)\prod_{j=1}^{l}(z-b_j)}{\prod_{j=1}^{k}(z-a_j)}$, $\widetilde{f_n}(z)=\dfrac{f_n(z)\prod_{j=1}^{l}(z-b_{jn})}{\prod_{j=1}^{k}(z-a_{jn})}$.

Зафиксируем $\delta>0$ такое, что на окружностях $|z|=r-\delta$ и $|z|=r+\delta$ нет нулей и полюсов функции $f(z)$. При $n\to\infty$, последовательность функций $\widetilde{f_n}(z)$ сходится к функции $\widetilde{f}(z)$ равномерно на этих окружностях. Используя принцип максимума, получим, что $\widetilde{f_n}(z)$ сходится к $\widetilde{f}(z)$ на окружности $|z|=r$. Поэтому $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|\widetilde{f_n}(re^{i\theta})|d\theta$ стремится к $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|\widetilde{f}(re^{i\theta})|d\theta$ при $n\to\infty$.

Ввиду (4), поскольку $a_{nj}\to a_j$, получим, что $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|re^{i\theta}-a_{nj}|d\theta$ стремится к $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|re^{i\theta}-a_j|d\theta$. Значит, $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|f_n(re^{i\theta})|d\theta$ стремится к $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|f(re^{i\theta})|d\theta$ при $n\to\infty$. ■

Теорема 6. *Пусть f – нормальная мероморфная функция в $\mathbb{C}^*$. Тогда величины $\ln\mathfrak{M}(r)+A\ln r$ и $\ln\mathfrak{M}(r)+A'\ln r$ ограничены сверху для всех $r\in\{|a_k|\}_{k\geqslant0}$, соответственно для всех $r\in\{|a_k|\}_{k<0}$, и снизу – для всех $r\in\{|b_k|\}_{k\geqslant0}$, соответственно для всех $r\in\{|b_k|\}_{k<0}$, где $A,A'\in\mathbb{R}$ – константы из леммы 1.*

Доказательство. Докажем теорему для $r\in\{|a_k|\}_{k\geqslant0}$. Рассмотрим произвольную последовательность индексов $p_n\to+\infty$ при $n\to\infty$. Последовательность функций $f(a_{p_n}z)$ нормальна в кольце $\{\frac12\leqslant|z|\leqslant2\}$. Следовательно, можно найти подпоследовательность $f(a_{p_{n_k}}z)$, равномерно сходящуюся к предельной функции $f_0(z)$ в этом кольце. Ввиду того, что $a_{p_{n_k}}$ — нули f, имеем: $f_0(1)=0$. Ввиду леммы 1,

$$\ln\mathfrak{M}(|a_{p_{n_k}}|)+A\ln(|a_{p_{n_k}}|)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|f(a_{p_{n_k}}e^{i\theta})|d\theta-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|f(e^{i\theta})|d\theta. \quad (6)$$

При $f_0(z)\not\equiv0$, используя предыдущую лемму, получим, что первое слагаемое правой части при $k\to\infty$ имеет своим пределом конечное число $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln|f_0(e^{i\theta})|d\theta$.

При $f_0(z)\equiv0$, первое слагаемое правой части стремится к $-\infty$, поэтому также правая часть ограничена сверху. Следовательно и величина $\ln\mathfrak{M}(|a_{p_{n_k}}|)+A\ln|a_{p_{n_k}}|$ ограничена сверху.

Для $r\in\{|a_k|\}_{k<0}$, достаточно заменить $f(z)$ на $f(\frac1z)$.

Для $r\in\{|b_k|\}$ достаточно заменить f на $\dfrac1f$. ■

3 Доказательство основного результата

Достаточность. Покажем, что при выполнении условий 1) - 4) функция вида $f(z) = az^m \dfrac{\prod_{k\geqslant 0}(1-\frac{z}{a_k})\prod_{k<0}(1-\frac{a_k}{z})}{\prod_{k\geqslant 0}(1-\frac{z}{b_k})\prod_{k<0}(1-\frac{b_k}{z})}$ является нормальной. Для этого (согласно предложению 3) достаточно показать, что семейство $\{f(2^n z)\}$ нормально в $\{\frac{1}{2} \leqslant |z| \leqslant 2\}$.

Заметим, что если достаточные условия теоремы выполнены для функции $f(z)$, то они выполнены для функции $f(\frac{1}{z})$. Действительно, пусть a_k и b_k – нули и полюсы f соответственно. Тогда $\frac{1}{a_k}$ и $\frac{1}{b_k}$ – нули и полюсы $f(\frac{1}{z})$. Проверка свойств 1) - 3) очевидна. Свойство 4) легко доказывается "от противного". Так как проверка нормальности семейства $\{f(2^n z)\}$ при $n \to -\infty$ сводится к проверке нормальности семейства $\{f(\frac{1}{2^n z})\}$ при $n \to +\infty$, то можно проверять только нормальность $\{f(2^n z)\}$ при $n \to +\infty$.

Мы можем написать:

$$f(2^n z) = P_{1n}(z)P_{2n}(z)Q_n(z)R_n(z), \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned}
P_{1n}(z) &= \frac{\prod_{k:|a_k|,|b_k|\leqslant 2^{n-2}}(1-\frac{a_k}{2^n z})}{\prod_{k:|a_k|,|b_k|\leqslant 2^{n-2}}(1-\frac{b_k}{2^n z})}\\
P_{2n}(z) &= \frac{\prod_{k:|a_k|,|b_k|\geqslant 2^{n+2}}(1-\frac{2^n z}{a_k})}{\prod_{k:|a_k|,|b_k|\geqslant 2^{n+2}}(1-\frac{2^n z}{b_k})}\\
Q_n(z) &= (-1)^{p_n+q_n}(2^n z)^m \frac{\frac{2^n z}{a_1}\cdots\frac{2^n z}{a_{p_n}}}{\frac{2^n z}{b_1}\cdots\frac{2^n z}{b_{q_n}}}\\
R_n(z) &= \frac{\prod_{k:2^{n-2}<|a_k|,|b_k|<2^{n+2}}(1-\frac{2^n z}{a_k})}{\prod_{k:2^{n-2}<|a_k|,|b_k|<2^{n+2}}(1-\frac{2^n z}{b_k})},
\end{aligned}$$

где p_n и q_n — количество нулей и полюсов функции f в кольце $\{1\leqslant|z|\leqslant 2^{n-2}\}$.

Положим $\Gamma_s = \{z : 2^{s-1} \leqslant |z| \leqslant 2^{s+1}\}$, $s \in \mathbb{Z}$.

Оценим $P_{1n}(z)$ в $\{\frac{1}{2} \leqslant |z| \leqslant 2\}$. По свойству 2 можно найти такое C_1, что имеется не более C_1 точек a_k в кольце Γ_{n-3}, не более C_1 точек a_k в кольце $\Gamma_{n-5}, \dots$

при $a_k \in \Gamma_{n-3} : |\ln|1-\frac{a_k}{2^n z}|| \leqslant \frac{|a_k|}{2^n|z|} < \frac{1}{2}$,
при $a_k \in \Gamma_{n-5} : |\ln|1-\frac{a_k}{2^n z}|| < \frac{1}{2^3}$,
при $a_k \in \Gamma_{n-7} : |\ln|1-\frac{a_k}{2^n z}|| < \frac{1}{2^5}$ и т.д.

Точно также оценивается $\left|\ln|1-\frac{b_k}{2^n z}|\right|$.

Имеем

$$|\ln|P_{1n}(z)|| = \left|C_1\sum_{k<0}\ln|1-\tfrac{a_k}{2^n z}| - C_1\sum_{k<0}\ln|1-\tfrac{b_k}{2^n z}|\right| < 2C_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2k+1}} < 2C_1.$$

Таким образом, в $\{\frac{1}{2} < |z| < 2\}$

$$\frac{1}{e^{2C_1}} \leqslant |P_{1n}(z)| \leqslant e^{2C_1} \tag{8}$$

Оценим $P_{2n}(z)$ в $\{\frac{1}{2} < |z| < 2\}$. По свойству 2 можно найти такое C_1, что имеется не более C_1 точек a_k в кольце Γ_{n+3}, не более C_1 точек a_k в кольце $\Gamma_{n+5}, \dots$

при $a_k \in \Gamma_{n+3} : |\ln|1 - \frac{2^n z}{a_k}|| \leqslant \frac{2^n|z|}{|a_k|} < \frac{2^{n+1}}{2^{n+2}} = \frac{1}{2}$,

при $a_k \in \Gamma_{n+5} : |\ln|1 - \frac{2^n z}{a_k}|| < \frac{1}{2^3}$, и т.д.

Точно также оценивается $|\ln|1 - \frac{2^n z}{b_k}||$.

Аналогично предыдущему случаю получим, что в $\{\frac{1}{2} < |z| < 2\}$:

$$\frac{1}{e^{2C_1}} \leqslant |P_{2n}(z)| \leqslant e^{2C_1} \tag{9}$$

Оценим $Q_n(z)$. Легко видеть, что $|Q_n(z)| = (4|z|)^{p_n - q_n}(2^n|z|)^m \mathfrak{M}(2^{n-2})$. Имеем,

$$\ln \frac{\mathfrak{M}(2^n)}{\mathfrak{M}(2^{n-2})} = \ln \mathfrak{M}(2^n) - \ln \mathfrak{M}(2^{n-2}) =$$

$$= \int\limits_{2^{n-2}}^{2^n} card\{k : 1<|a_k|<t\} - card\{k : 1<|b_k|<t\} dt.$$

В силу свойства 1, последняя разность не превосходит $C_2 \ln 4$, следовательно, отношение $\dfrac{\mathfrak{M}(2^n)}{\mathfrak{M}(2^{n-2})}$ ограничено. Согласно свойству 1, $|p_n - q_n| < C_2$. Следовательно, в кольце $\{\frac{1}{2} \leqslant |z| \leqslant 2\}$ верна следующая оценка: $2^{-3C_2+(n-1)m} < |(2^2 z)^{p_n - q_n}(2^n z)^m| < 2^{3C_2+(n+1)m}$.

Таким образом, получаем следующую оценку при $\frac{1}{2} \leqslant |z| \leqslant 2$:

$$C_3^{-1} 2^{mn} \mathfrak{M}(2^n) < |Q_n(z)| < C_3 2^{mn} \mathfrak{M}(2^n), \quad \text{где } C_3 < \infty \tag{10}$$

Далее покажем, что если в кольце $\{2^{n-1} \leqslant |z| \leqslant 2^{n+1}\}$ есть нуль a_n, то $\ln \mathfrak{M}(2^n) + m \ln 2^n$ ограничена сверху.

При $|a_n| < 2^n$ имеем:

$$\ln \mathfrak{M}(2^n) - \ln \mathfrak{M}(|a_n|) = \int\limits_{|a_n|}^{2^n} \frac{card\{k : 1 < |a_k| < t\} - card\{k : 1 < |b_k| < t\}}{t} dt.$$

В силу свойства 1, $card\{k : 1 < |a_k| < 2^n\} - card\{k : 1 < |b_k| < 2^n\} < C_2$.

Для $|a_n| > 2^n$ оценки проводятся так же. Согласно свойству 3, величина $\ln \mathfrak{M}(|a_n|) + m \ln |a_n|$ ограничена сверху. Так как $|\ln|a_n| - \ln 2^n| \leqslant \ln 2$, то

$\ln\mathfrak{M}(2^n)+m\ln 2^n$ также ограничена сверху. Следовательно, $|Q_n(z)|\leqslant C_4<\infty$ в кольце $\frac{1}{2}<|z|<2$.

Если существует $b_n\in\{2^{n-1}<|z|<2^{n+1}\}$, то можно аналогичным образом проверить, что величина $|\ln\mathfrak{M}(2^n)+m\ln 2^n$ ограничена снизу. Поэтому $|Q_n(z)|\geqslant\frac{1}{C_4}>0$ в кольце $\frac{1}{2}<|z|<2$.

Изучим теперь функцию $R_n(z)$. В силу свойства 2 количество нулей и полюсов этой функций на множестве $\{\frac{1}{2}<|z|<2\}$ равномерно ограничено. Рассмотрим несколько случаев:

Пусть последовательность $f(2^n z)$, начиная с некоторого номера, не имеет нулей (либо полюсов, либо и нулей, и полюсов) в кольце $\{\frac{1}{4}<|z|<4\}$. Тогда, в силу теоремы 5, функция $f(z)$ имеет на бесконечности несущественную особенность, поэтому этот случай сводится к случаю, рассмотренному Островским [3]. Следовательно, в этом случае можно выделить подпоследовательность $f(2^{n_k}z)$, равномерно сходящуюся в кольце $\{\frac{1}{2}\leqslant|z|\leqslant 2\}$, т. е. функция $f(z)$ нормальна.

Если существует подпоследовательность $f(2^{n_k}z)$, не имеющая полюсов в $\{\frac{1}{4}<|z|<4\}$, но имеющая хотя бы один нуль, тогда, по определению, функции $R_{n_k}(z)$ являются полиномами от z с ограниченными коэффициентами. Вследствие этого, функции $R_{n_k}(z)$ ограничены в кольце $\{\frac{1}{2}\leqslant|z|\leqslant 2\}$. Ввиду (7), (8), (9), (10) имеем:

$$f(2^{n_k}z)=F_{n_k}(z)2^{mn_k}\mathfrak{M}(2^{n_k}),$$

где $F_{n_k}(z)$ – ограниченная функция в $\{\frac{1}{2}\leqslant|z|\leqslant 2\}$, а выражение $2^{mn_k}\mathfrak{M}(2^{n_k})$ ограничено сверху. Из последовательности $F_{n_k}(z)$ можно выбрать подпоследовательность $F_{n'_k}(z)$, сходящуюся равномерно в $\{\frac{1}{2}\leqslant|z|\leqslant 2\}$; из числовой последовательности $2^{mn'_k}\mathfrak{M}(2^{n'_k})$ можно выбрать подпоследовательность $2^{mn''_k}\mathfrak{M}(2^{n''_k})$, имеющую ограниченный сверху предел. Значит подпоследовательность $f(2^{n''_k}z)$ сходится равномерно в $\{\frac{1}{2}\leqslant|z|\leqslant 2\}$, причем предельная функция ограничена сверху, в частности, может быть тождественным нулем.

Если существует подпоследовательность $f(2^{n_k}z)$, не имеющая нулей в $\{\frac{1}{4}<|z|<4\}$, но имеющая хотя бы один полюс, то заменяем f на $\frac{1}{f}$, сводя данный случай к предыдущему. В этом случае предельная функция будет ограниченной снизу и, в частности, может быть тождественной бесконечностью.

Иначе, существует подпоследовательность $f(2^{n_k}z)$, имеющая в $\{\frac{1}{4}<|z|<4\}$ хотя бы один нуль и хотя бы один полюс. В этом случае величина $2^{mn_k}\mathfrak{M}(2^{n_k})$ ограничена и сверху, и снизу. В силу (8), (9), (10), величины $|P_{1n_k}(z)|$, $|P_{2n_k}(z)|$, $|Q_{n_k}(z)|$ ограничены. Ввиду (7) мы можем записать:

$$f(2^{n_k}z)=R_{n_k}(z)F_{n_k}(z),$$

где $F_{n_k}(z)=P_{1n_k}(z)\ P_{2n_k}(z)\ Q_{n_k}(z)$. Так как при $\dfrac{1}{4}<|z|<4$ имеем

$0 < C_5^{-1} \leqslant\leqslant |F_{n_k}| \leqslant C_5 < \infty$, то существует подпоследовательность $F_{n'_k}(z)$, равномерно сходящаяся к функции $F(z)$ и $F(z) \not\equiv 0$, $F(z) \not\equiv \infty$.

Нули и полюсы функции $R_{n_k}(z)$ лежат в кольце $\{\frac{1}{4} < |z| < 4\}$ и, согласно свойству 2, их количество не превосходит $C_1 < \infty$. Отсюда следует, что $R_{n_k}(z)$ – рациональная дробь. Введем $U_n(z) = \prod_{k:2^{n-2}<|a_k|,|b_k|<2^{n+2}}(1 - \frac{2^n z}{a_k})$ и $V_n(z) = \prod_{k:2^{n-2}<|a_k|,|b_k|<2^{n+2}}(1 - \frac{2^n z}{b_k})$. Очевидно, что $U_n(z)$ и $V_n(z)$ многочлены от z степени, не превосходящей C_1. В принятых обозначениях, $R_{n_k}(z) = \dfrac{\prod_{l:2^{n_k-2}<|a_l|,|b_l|<2^{n_k+2}}(1 - \frac{2^{n_k} z}{a_l})}{\prod_{l:2^{n_k-2}<|a_l|,|b_l|<2^{n_k+2}}(1 - \frac{2^{n_k} z}{b_l})} = \dfrac{U_{n_k}(z)}{V_{n_k}(z)}$. Из того, что $U_{2n_k}(z)$ и $V_{2n_k}(z)$ – полиномы с ограниченными коэффициентами, следует, что существует подпоследовательность $n'_k \to \infty$ такая, что $U_{n'_k} \to U, V_{n'_k} \to V$ при $n'_k \to +\infty$, причем сходимость равномерна в кольце $\{\frac{1}{3} \leqslant |z| \leqslant 3\}$. Здесь U и V – многочлены степени, не превосходящей K. Заметим, что $\lim_{|z|\to 0} U(z) = \lim_{|z|\to 0} V(z) = 1$, так что $U(z) \not\equiv 0$, $V(z) \not\equiv 0$.

Покажем, что $f(2^{n'_k} z)$ сходится равномерно в кольце $\{\frac{1}{2} \leqslant |z| \leqslant 2\}$.

Достаточно проверить сходимость в окрестности каждой точки $z_0 \in \{z : \frac{1}{2} \leqslant |z| \leqslant 2\}$, а затем применить диагональный процесс. Рассмотрим следующие два случая:

1. $V(z) \neq 0$ в некоторой окрестности точки z_0.

   Тогда $R_{n'_k} = \dfrac{U_{n'_k}}{V_{n'_k}} \rightrightarrows \dfrac{U}{V}$ в этой окрестности. Обозначим предельную дробь через R. Тогда $f(2^{n'_k} z) = R_{n'_k} F_{n'_k} \rightrightarrows RF$.

2. $V(z_0) = 0$.

   Тогда $U(z_0) \neq 0$, т.к. любой нуль функции U является пределом точек $\frac{a_l}{2^{n'_k}}$, а любой нуль функции V является пределом последовательности точек $\frac{b_l}{2^{n'_k}}$. Эти пределы не совпадают в силу свойства 4, поэтому $U(z) \neq 0$ в некоторой окрестности точки z_0. Заменим $f(2^{n'_k} z)$ на $\dfrac{1}{f(2^{n'_k} z)}$ и проведем рассуждения предыдущего случая.

Необходимость.

Предположим, что $f(z)$ нормальная функция. Тогда свойства 1), 2), 4) выполнены в силу теорем 2, 3 и 4. Функцию $f(z)$ представим в виде

$$f(z) = H(z)\frac{\prod_{k\geqslant 0}(1 - \frac{z}{a_k})\prod_{k<0}(1 - \frac{a_k}{z})}{\prod_{k\geqslant 0}(1 - \frac{z}{b_k})\prod_{k<0}(1 - \frac{b_k}{z})},$$

где (a_k) и (b_k) – соответственно последовательности нулей и полюсов функции $f(z)$, а $H(z)$ – голоморфная функция в $\mathbb{C}^*$ без нулей. Далее будет показано, что бесконечные произведения сходятся равномерно на компактах в $\mathbb{C}^*$. Последовательности (a_k) и (b_k) могут быть конечными или бесконечными в одну или обе стороны, при этом будем считать, что $|a_k|$ и $|b_k| < 1$ при $k < 0$, $|a_k|$ и $|b_k| \geqslant 1$ при $k \geqslant 0$. Отметим, что $a_k, b_k \to 0, k \to -\infty$ и $a_k, b_k \to \infty$, $k \to +\infty$, если последовательности бесконечны в соответствующую сторону.

Рассмотрим представление, аналогичное (10):

$$f(2^n z) = H(2^n z) P_{1n}(z) P_{2n}(z) \widetilde{Q_n}(z) R_n(z).$$

Здесь $P_{1n}(z)$, $P_{2n}(z)$ и $R_n(z)$ имеют тот же вид, что и в доказательстве достаточности, а $\widetilde{Q_n}(z) = (-1)^{p_n+q_n} \dfrac{\frac{2^n z}{a_1} \cdots \frac{2^n z}{a_{p_n}}}{\frac{2^n z}{b_1} \cdots \frac{2^n z}{b_{q_n}}}$. Имеем $|\widetilde{Q_n}(z)| = (4|z|)^{p_n - q_n} \cdot \cdot \mathfrak{M}(2^{n-2})$. Рассуждая так же, как и в доказательстве достаточности, получим $C_3^{-1}\mathfrak{M}(2^n) < |\widetilde{Q_n}(z)| < C_3 \mathfrak{M}(2^n)$. Из (8), (9) и последнего неравенства, повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве достаточности получаем, что из любой последовательности $n \to \infty$, можно выделить подпоследовательность n', на которой функции $P_{1n'}(z)$, $P_{2n'}(z)$, $R_{n'}(z)$, $\dfrac{\widetilde{Q_{n'}}(z)}{\mathfrak{M}(2^{n'})}$ имеют предел, отличный от нуля и бесконечности, а также, бесконечные произведения сходятся равномерно на компактах в $\mathbb{C}^*$. Так как функция $f(z)$ нормальна, то при переходе к подпоследовательности получим, что функции $f(2^{n''} z)$ имеют предел, возможно равный нулю или бесконечности. Поэтому по некоторой подпоследовательности существует $\lim_{n'' \to \infty} H(2^{n''} z) \mathfrak{M}(2^{n''})$, возможно равный нулю или бесконечности.

Если функция $f(z)$ не имеет нулей (или полюсов) в области $\{\frac{1}{\varepsilon} < |z| < \infty\}$, то, в силу теоремы 5, $f(z)$ имеет на бесконечности устранимую особенность или особенность типа полюса. Следовательно, этот случай сводится к случаю, рассмотренному Островским [3]. В этом случае данная теорема доказана.

Аналогично рассуждаем в случае, когда функция $f(z)$ не имеет нулей либо полюсов, либо и нулей, и полюсов в области $\{0 < |z| < \varepsilon\}$.

Из определения $\mathfrak{M}(r)$ следует, что $-C_2 \ln r \leqslant \ln \mathfrak{M}(r) \leqslant C_2 \ln r$. При необходимости увеличив C_2, можно считать, что оно является целым числом. Имеем

$$\frac{|H(2^n z)|}{2^{nC_2}} \leqslant |H(2^n z)| \mathfrak{M}(2^n) \quad \text{и} \quad \frac{|H(2^n z)|}{2^{-nC_2}} \geqslant |H(2^n z)| \mathfrak{M}(2^n). \tag{11}$$

Если в любой окрестности вида $\{\frac{1}{\varepsilon} < |z| < \infty\}$ есть нули функции $f(z)$, то их бесконечно много. Значит, по свойству 1), в этой окрестности также бесконечно много плюсов $f(z)$.

Мы знаем, что для некоторой подпоследовательности n'', $\lim_{n'' \to +\infty} H(2^{n''} z) \mathfrak{M}(2^{n''})$ существует и возможно является тождественным нулем или бесконечностью. Из (11) следует, что $\lim_{n'' \to +\infty} \dfrac{H(2^{n''} z)}{2^{n'' C_2}}$ также существует и возможно является тождественным нулем или бесконечностью. Обозначим предельную функцию через $h(z)$. Если $h(z) \equiv 0$, то модуль функции $\dfrac{|H(2^{n''}z)|}{2^{n''C_2}}$ ограничен сверху на окружности $|z| = 1$. Функция $\dfrac{H(z)}{z^{C_2}}$ голоморфна в $\mathbb{C}^*$ и ограничена на последовательности окружностей $|z| = 2^{n''}$. Поэтому, применяя принцип максимума, получим, что модуль функции $\dfrac{H(z)}{z^{C_2}}$ ограничен сверху в окрестности бесконечности. В этом случае $H(z)$ имеет на бесконечности устранимую особенность или особенность типа полюса. Аналогично рассуждаем, когда $h(z) \equiv \infty$.

Пусть $h(z) \not\equiv 0$, $h(z) \not\equiv \infty$. Так как функция $\dfrac{H(2^{n''}z)}{2^{n''C_2}}$ не имеет ни нулей, ни полюсов в $\mathbb{C}^*$, то, по теореме Гурвица, $h(z)$ также не имеет ни нулей, ни полюсов в $\mathbb{C}^*$. Поэтому $h(z)$ ограничена на окружности $|z| = 1$, значит, функция $\dfrac{H(z)}{z^2}$ ограничена на последовательности окружностей $|z| = 2^{n''}$. Применяя к голоморфной в $\mathbb{C}^*$ функции $\dfrac{H(z)}{z^N}$ принцип максимума, получим, что ее модуль при некотором $N < \infty$ ограничен в окрестности бесконечности. Поэтому и в этом случае $H(z)$ имеет на бесконечности устранимую особенность или особенность типа полюса.

Повторяя рассуждения, проведенные выше, для окрестности вида $\{0 << |z| < \varepsilon\}$ получим, что $H(z)$ имеет в нуле либо устранимую особенность, либо особенность типа полюса.

В силу того, что $H(z) \neq 0$ и $H(z) \neq \infty$ в $\mathbb{C}^*$, получим, что $H(z) = Cz^m$.

Ввиду доказанного выше и замечания 1 получим, что условие 3) теоремы верно. ■

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A.Ostrovski, Uber Folgen analytischer Funktionen — Math.Zeitschrift.(1925), v.24, p.241

2. A. Eremenko. Normal holomorphic curves from parabolic regions to projective spaces. // Preprint. Purdue University. — 1999.

3. П. Монтель. Нормальные семейства аналитических функций. — М.: Объединенное научно-техническое издательство НКТП СССР, главная редакция общетехнической литературы и номографии. — 1936. — 239с.

4. Л.Д. Радченко. Аналитические функции в плоскости без точки нуль // Вестник Харьковского национального университета — 2010. — **922**. — С. 43-55.

Статья получена: 18.03.2010; окончательный вариант: 15.09.2010; принята: 21.09.2010.

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.948 № 931, 2010, с.33–48

О спектральных функциях полиномиальных последовательностей

С.М. Загороднюк

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, пл. Свободы, 4, 61077, Харьков, Украина
Sergey.M.Zagorodnyuk@univer.kharkov.ua

В данной работе мы описываем множество всех спектральных функций векторной полиномиальной последовательности. Установлены необходимые и достаточные условия для того, чтобы заданная матрица-функция была спектральной функцией. Получены необходимые и достаточные условия на матрицу-функцию для того, чтобы эта функция была корреляционной функцией векторной полиномиальной последовательности. Также получен критерий в терминах корреляционной функции для произвольного набора элементов гильбертового пространства с тем, чтобы этот набор был векторной полиномиальной последовательностью.

Загороднюк С.М., **Про спектральні функції поліноміальних послідовностей.** В цій роботі ми описуємо множину всіх спектральних функцій векторної поліноміальної послідовності. Встановлені необхідні і достатні умови для того, щоб задана матриця-функція була спектральною функцією. Одержані необхідні і достатні умови на матрицю-функцію для того, щоб ця функція була кореляційною функцією векторної поліноміальної послідовності. Також одержано критерій в термінах кореляційної функції для довільного набору елементів гільбертового простору для того, щоб цей набір був векторною поліноміальною послідовністю.

S.M. Zagorodnyuk, **On spectral functions of polynomial sequences.** In this paper we describe a set of all spectral functions of a vector polynomial sequence. The necessary and sufficient conditions for a given matrix-valued function to be a spectral function are established. The necessary and sufficient conditions for a given matrix-valued function to be the correlation function of a vector polynomial sequence are obtained. A criteria in terms of the correlation function for an arbitrary set of elements of a Hilbert space to be a vector polynomial sequence is obtained, as well.

2000 Mathematics Subject Classification 42C05, 33C45, 60G12.

Введение

Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в гильбертовом пространстве H. Эта последовательность называется полиномиальной, если найдется (хотя бы один) самосопряженный оператор A в H и набор ортогональных многочленов на вещественной оси $\{p_n(\lambda)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, такие, что последовательность допускает представление

$$x_n = p_n(A)x_0 = \int_{\mathbb{R}} p_n(\lambda)dE_\lambda x_0, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{1}$$

где $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ является ортогональным разложением единицы оператора A. Напомним, что набор вещественных многочленов $\{p_n(\lambda)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, где $\deg p_n = n$ и p_n имеет положительный старший коэффициент, называется системой ортогональных многочленов на вещественной оси относительно $\sigma(x)$, если выполняются соотношения:

$$\int_{\mathbb{R}} p_n(\lambda)p_m(\lambda)d\sigma(\lambda) = 0, \qquad n,m \in \mathbb{Z}_+ : n \neq m, \tag{2}$$

где $\sigma(\lambda)$ - неубывающая функция ограниченной вариации на $\mathbb{R}$. Отметим, что ортогональные многочлены удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\frac{1}{a_n}\left(c_{n-1}p_{n-1}(\lambda) - b_n p_n(\lambda) + c_n p_{n+1}(\lambda)\right) = \lambda p_n(\lambda), \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{3}$$

где $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$, $c_n > 0$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$, являются некоторыми числовыми последовательностями, а $c_{-1} = 0$, $p_{-1} = 0$. В частности, для многочленов Чебышева 1-го рода $T_n(\lambda) = \cos(n \arccos \lambda)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\lambda \in [-1,1]$, выполнено соотношение (3) с $a_n = 1$, $b_n = 0$, $c_n = \frac{1}{2}$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$.

Примером полиномиальной последовательности является полубесконечная цепочка, описывающая полубесконечный одномерный гармонический кристалл (см. [1],[2] относительно этого и других примеров). Предистория возникновения последовательностей вида (1) описана в статье [2], см. также ссылки в ней. В работе [3] для полиномиальных последовательностей было получено разложение Вольда. В [1] мы рассмотрели многомерные (векторные) полиномиальные последовательности. Напомним основные определения.

Определение 1 *Две полиномиальные последовательности* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *и* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *в гильбертовом пространстве* H, *отвечающие одной и той же системе многочленов* $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^\infty$ *в представлении (1), называются* **полиномиально связанными**, *если их взаимная корреляционная функция* $R_{n,m} := (x_n, u_m)_H$ *удовлетворяет соотношению*

$$\frac{1}{a_n}\left(c_{n-1}R_{n-1,m} - b_n R_{n,m} + c_n R_{n+1,m}\right) =$$

$$= \frac{1}{a_m}\left(c_{m-1}R_{n,m-1} - b_m R_{n,m} + c_m R_{n,m+1}\right), \qquad n,m \in \mathbb{Z}_+, \tag{4}$$

где $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}, \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *из рекуррентного соотношения (3)*, $c_{-1} = 0$, $R_{-1,m} = R_{n,-1} = 0$ $(n,m \in \mathbb{Z}_+)$.

Определение 2 *Набор из N полиномиальных последовательностей*

$$\{x_n^1\}_{n\in\mathbb{Z}_+}, \{x_n^2\}_{n\in\mathbb{Z}_+}, ..., \{x_n^N\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \tag{5}$$

в гильбертовом пространстве H $(N \in \mathbb{N})$, отвечающих одной и той же системе многочленов $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ в представлении (1), полиномиально связанных между собой, будем называть N-мерной (многомерной, векторной) полиномиальной последовательностью и изображать в виде вектор-столбца

$$\vec{x}_n = (x_n^k)_{k=1}^N.$$

Примером N-мерной полиномиальной последовательности является полубесконечный гармонический кристалл, в котором соседние ряды атомов слабо взаимодействуют друг с другом (квазиодномерное вещество, см. [4]).

Пусть задана некоторая N-мерная полиномиальная последовательность $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в гильбертовом пространстве H. Мы будем использовать следующие обозначения:

$$H_{\vec{x}} = \operatorname{span}\{x_n^r; n \in \mathbb{Z}_+, 1 \le r \le N\}, \quad L_{\vec{x}} = \operatorname{Lin}\{x_n^r; n \in \mathbb{Z}_+, 1 \le r \le N\}. \tag{6}$$

Подпространство $H_{\vec{x}}$ называем *пространством значений N-мерной полиномиальной последовательности* $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Определим оператор

$$A_{\vec{x}}x = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{j,k}\frac{1}{a_k}\left(c_{k-1}x_{k-1}^j - b_k x_k^j + c_k x_{k+1}^j\right),$$

$$x \in L_{\vec{x}}, \quad x = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{j,k}x_k^j, \ \alpha_{j,k} \in \mathbb{C}. \tag{7}$$

При выборе элементов из линейных оболочек здесь и далее суммы будут подразумеваться конечными. В [1] было показано, что это определение не зависит от выбора представления элемента x и является корректным. Оператор $A_{\vec{x}}$ является симметрическим оператором в пространстве значений последовательности $H_{\vec{x}}$ с плотной областью определения $L_{\vec{x}}$. Его дефектные числа не превосходят числа N. Оператор $A_{\vec{x}}$ мы называем оператором N-мерной полиномиальной последовательности $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Справедливо следующее представление:

$$x_n^r = p_n(A_{\vec{x}})x_0^r, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \ 1 \le r \le N. \tag{8}$$

Если $\widetilde{A}$ есть некоторое самосопряженное расширение $A_{\vec{x}}$ в гильбертовом пространстве $\widetilde{H} \supseteq H_{\vec{x}}$, то

$$x_n^r = p_n(\widetilde{A})x_0^r, \qquad n \in \mathbb{Z}_+,\ 1 \le r \le N. \tag{9}$$

Более того, всевозможные самосопряженные расширения оператора последовательности $A_{\vec{x}}$ дают все самосопряженные операторы $\widehat{A}$, для которых имеет место спектральное представление вида (9). Запишем соотношение (9) в векторном виде:

$$\vec{x}_n = p_n(\widetilde{A})\vec{x}_0 = \int_{\mathbb{R}} p_n(\lambda) d\widetilde{E}_\lambda \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \\ \vdots \\ x_0^r \end{pmatrix}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{10}$$

где $\{\widetilde{E}_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ является ортогональным разложением единицы оператора $\widetilde{A}$, и понимается, что операторы $p_n(\widetilde{A})$ и $\widetilde{E}_\lambda$ действуют на каждую компоненту вектора $\vec{x}_0$.

Определение 3 *Пусть $A_{\vec{x}}$ является оператором некоторой N-мерной полиномиальной последовательности $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в гильбертовом пространстве H. Пусть $\widetilde{A}$ является самосопряженным расширением $A_{\vec{x}}$ в гильбертовом пространстве $\widetilde{H} \supseteq H_x$. Матрицу-функцию*

$$F(\lambda) = (F_{j,k}(\lambda))_{j,k=1}^N = \left((P_{H_{\vec{x}}}^{\widetilde{H}} \widetilde{E}_\lambda x_0^j, x_0^k)_H \right)_{j,k=1}^N, \tag{11}$$

где $\{\widetilde{E}_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ является непрерывным слева ортогональным разложением единицы оператора $\widetilde{A}$, будем называть **спектральной матрицей-функцией N-мерной полиномиальной последовательности** $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$.

Функцию

$$K_{n,m} = (K_{n,m}^{r,s})_{r,s=1}^N, \qquad n, m \in \mathbb{Z}_+,$$

где $K_{n,m}^{r,s} := (x_n^r, x_m^s)_H$, называем (матричной) корреляционной функцией N-мерной полиномиальной последовательности $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Для нее имеет место представление:

$$K_{n,m} = \int_{\mathbb{R}} p_n(\lambda)p_m(\lambda) dF(\lambda), \qquad n, m \in \mathbb{Z}_+, \tag{12}$$

где F - спектральная матрица-функция последовательности.

Для случая многомерной стационарной последовательности в абстрактном гильбертовом пространстве, хорошо известна теорема Х. Крамера о необходимых и достаточных условиях на матрицу-функцию для того, чтобы она была спектральной функцией последовательности (см. [5],[6]). Аналог этой теоремы будет получен для случая N-мерной полиномиальной последовательности. По аналогии со стационарным случаем приводятся условия на матрицу-функцию для того, чтобы она была корреляционной функцией векторной полиномиальной последовательности. Для векторной полиномиальной последовательности возникает задача, для которой нет аналога в теории стационарных последовательностей: описание всех спектральных функций заданной векторной полиномиальной последовательности. Используя результаты А.В. Штрауса об обобщенных резольвентах симметрических операторов, эта задача полностью решается. Также мы установим необходимые и достаточные условия на корреляционную функцию последовательности для того, чтобы она была векторной полиномиальной последовательностью.

Обозначения. Как обычно, мы обозначаем $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ множества комплексных, вещественных, целых и натуральных чисел, соответственно, а также $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$. Алгебру всех комплексных $n \times n$ матриц мы будем обозначать $\mathbb{C}_{n\times n}$, $n \in \mathbb{N}$. Пространство n-мерных комплексных векторов $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, будет обозначаться $\mathbb{C}_n$, $n \in \mathbb{N}$. Если $a \in \mathbb{C}_n$, то a^* обозначает комплексно сопряженный вектор. Множество комплексных многочленов будем обозначать $\mathbb{P}$.

Посредством $(\cdot,\cdot)_H$, $\|\cdot\|_H$ мы обозначаем скалярное произведение и норму в некотором гильбертовом пространстве H. Если это не приводит к недоразумению, индекс H мы не пишем. Посредством $\operatorname{Lin} M$ и $\operatorname{span} M$ обозначены линейная оболочка и замкнутая линейная оболочка элементов множества M в H, соответственно. $\overline{M}$ означает замыкание множества $M \subseteq H$ в метрике H. Если L - подпространство H, то P_L^H обозначает оператор ортогонального проектирования в H на подпространство L. Для линейного оператора A в H мы обозначаем $D(A)$ его область определения, и посредством A^* обозначается сопряженный оператор, если он существует. Посредством $\overline{A}$ обозначается замыкание оператора A, если оно существует. Если для A существует обратный оператор, то мы обозначаем его A^{-1}. Если A ограничен, то $\|A\|$ обозначает его норму. Посредством E_H обозначается единичный оператор в H, т.е. $E_H x = x$, $x \in H$. Встречающиеся в работе гильбертовы пространства предполагаются сепарабельными.

Аналог теоремы Х. Крамера. Свойства корреляционной функции векторной полиномиальной последовательности

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1 *Для того, чтобы $\mathbb{C}_{N\times N}$-значная функция $F(\lambda) = (F_{j,k}(\lambda))_{j,k=1}^N$, $\lambda \in \mathbb{R}$, была спектральной функцией некоторой N-мерной полиномиальной последовательности необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

A) *$F(\lambda)$ является неубывающей матрицей-функцией на $\mathbb{R}$;*

B) *$F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = K$, где K является неотрицательной конечной матрицей;*

C) $\int_{\mathbb{R}} \lambda^{2n} dF_{j,j}(\lambda) < \infty$, *для всех* $n \in \mathbb{Z}_+$, $j = 1, 2, ..., N$.

Если условия A), B), C) *выполнены, то требуемая* N*-мерная полиномиальная последовательность* $\vec{x}_n = p_n(A)\vec{x}_0$, $n \in \mathbb{Z}_+$, *найдется для любой заданной системы ортогональных многочленов* $\{p_n(\lambda)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $F(\lambda) = (F_{j,k}(\lambda))_{j,k=1}^N$ является спектральной функцией некоторой N-мерной полиномиальной последовательности $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в гильбертовом пространстве H. По определению спектральной функции это значит, что выполнено (11), где $\{\widetilde{E}_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ является непрерывным слева ортогональным разложением единицы оператора $\widetilde{A}$. При этом оператор $\widetilde{A}$ является некоторым самосопряженным расширением в гильбертовом пространстве $\widetilde{H} \supseteq H$ оператора последовательности $A_{\vec{x}}$. Прежде всего заметим, что

$$\lim_{\lambda\to+\infty} F_{j,k}(\lambda) = \lim_{\lambda\to+\infty} (\widetilde{E}_\lambda x_0^j, x_0^k)_{\widetilde{H}} = (x_0^j, x_0^k)_H;$$

$$\lim_{\lambda\to-\infty} F_{j,k}(\lambda) = \lim_{\lambda\to-\infty} (\widetilde{E}_\lambda x_0^j, x_0^k)_{\widetilde{H}} = 0.$$

Полагая $K := ((x_0^j, x_0^k)_H)_{j,k=1}^N$, мы заключаем, что условие B) в формулировке теоремы выполнено. Для произвольного вектора $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N) \in \mathbb{C}_N$, и вещественных чисел $\alpha, \beta: \ \alpha \le \beta$, мы можем записать

$$\vec{\xi}(F(\beta) - F(\alpha))\vec{\xi}^* = \sum_{\mu,\nu=1}^N (F_{\mu,\nu}(\beta) - F_{\mu,\nu}(\alpha))\xi_\mu\overline{\xi_\nu}$$

$$= \sum_{\mu,\nu=1}^N \xi_\mu\overline{\xi_\nu}((\widetilde{E}_\beta - \widetilde{E}_\alpha)x_0^\mu, x_0^\nu)_{\widetilde{H}} = \left((\widetilde{E}_\beta - \widetilde{E}_\alpha)\sum_{\mu=1}^N \xi_\mu x_0^\mu, \sum_{\nu=1}^N \xi_\nu x_0^\nu \right)_{\widetilde{H}} \ge 0.$$

Значит, условие A) теоремы также выполнено. Из равенства (12) при $n = 0$ получаем, что

$$\int_{\mathbb{R}} p_m(\lambda) dF_{j,j}(\lambda) = \frac{1}{p_0} K_{0,m}^{j,j} < \infty, \qquad m \in \mathbb{Z}_+, \ j = 1, 2, ..., N. \tag{13}$$

Поскольку многочлен p_m имеет степень m, то многочлен λ^{2n} можно разложить в линейную комбинацию многочленов $p_0, p_1, ..., p_{2n}$:

$$\lambda^{2n} = \sum_{r=1}^{2n} \alpha_r p_r(\lambda), \qquad \alpha_r \in \mathbb{C}.$$

Следовательно, условие C) теоремы также является выполненным.

Достаточность. Пусть некоторая $\mathbb{C}_{N\times N}$-значная функция $F(\lambda) = (F_{j,k}(\lambda))_{j,k=1}^N$, $\lambda \in \mathbb{R}$, удовлетворяет условиям A), B) и C) из формулировки теоремы. Согласно хорошо известной теореме Наймарка (см. [7]), найдется ортогональное разложение единицы $\{\widehat{E}_\lambda\}$ в некотором гильбертовом пространстве $\widehat{H}$ и линейное ограниченное отображение R пространства $\mathbb{C}_N$ в $\widehat{H}$, такие, что

$$F(\lambda) = R^* \widehat{E}_\lambda R, \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Здесь R^* обозначает сопряженный оператор.

Пусть $\{\vec{e}_j\}_{j=1}^N$, $\vec{e}_j = (\delta_{j,k})_{k=1}^N$, - стандартный базис в $\mathbb{C}_N$. Положим

$$x_0^j = R\vec{e}_j, \qquad j = 1, 2, ..., N. \tag{15}$$

Тогда

$$F_{j,k}(\lambda) = (\vec{e}_j F(\lambda), \vec{e}_k)_{\mathbb{C}_N} = (R^* \widehat{E}_\lambda R \vec{e}_j, \vec{e}_k)_{\mathbb{C}_N} =$$

$$= (\widehat{E}_\lambda R\vec{e}_j, R\vec{e}_k)_{\widehat{H}} = (\widehat{E}_\lambda x_0^j, x_0^k), \quad 1 \le j, k \le N. \tag{16}$$

Рассмотрим самосопряженный оператор

$$\widehat{A} = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\widehat{E}_\lambda. \tag{17}$$

В силу соотношения (16) и условия C) теоремы, на векторах x_0^j, $j = 1, 2, ..., N$ определены все целые неотрицательные степени оператора $\widehat{A}$. Пусть $\{p_n(\lambda)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ - произвольная система ортогональных многочленов на вещественной оси. Положим

$$x_n^k = p_n(\widehat{A}) x_0^k, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \quad k = 1, 2, ..., N. \tag{18}$$

Для каждого фиксированного k, $1 \le k \le N$, последовательность $\{x_n^k\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ является полиномиальной, что следует прямо из определения полиномиальной последовательности. Проверим, что эти последовательности являются полиномиально связанными. Взаимная корреляционная функция имеет вид

$$R_{x^k,x^s}(n,m) = (x_n^k, x_m^s)_{\widehat{H}} = (p_n(\widehat{A})x_0^k, p_m(\widehat{A})x_0^s)_{\widehat{H}} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} p_n(\lambda) p_m(\lambda) d(\widehat{E}_\lambda x_0^k, x_0^s)_{\widehat{H}} = \int_{\mathbb{R}} p_n(\lambda) p_m(\lambda) dF_{k,s}(\lambda), \quad k = 1, 2, ..., N. \tag{19}$$

Воспользуемся теперь тем, что ортогональные многочлены удовлетворяют рекуррентному соотношению вида (3). Умножая обе части соотношения (3) на $p_m(\lambda)$ и интегрируя по $dF_{k,s}(\lambda)$, мы получим

$$\frac{1}{a_n}\left(c_{n-1} R_{x^k,x^s}(n-1,m) - b_n R_{x^k,x^s}(n,m) + c_n R_{x^k,x^s}(n+1,m)\right) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \lambda p_n(\lambda) p_m(\lambda) dF_{k,s}(\lambda). \tag{20}$$

Меняя в последнем соотношении местами n и m, и пользуясь тем, что $R_{x^k,x^s}(n,m) = R_{x^k,x^s}(m,n)$, мы получим соотношение

$$\frac{1}{a_m}\left(c_{m-1}R_{x^k,x^s}(n,m-1) - b_m R_{x^k,x^s}(n,m) + c_m R_{x^k,x^s}(n,m+1)\right) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \lambda p_n(\lambda) p_m(\lambda) dF_{k,s}(\lambda). \tag{21}$$

Сравнивая последние два соотношения, приходим к выводу, что выполнено соотношение (4). Значит последовательности $\{x_n^k\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ и $\{x_m^s\}_{m\in\mathbb{Z}_+}$ являются полиномиально связанными. Следовательно, векторная последовательность $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, составленная из последовательностей $\{x_n^k\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, является полиномиальной. Из соотношения (16) следует, что $F(\lambda)$ является ее спектральной функцией. □

Используя наши результаты о свойствах оператора полиномиальной последовательности в [1], нетрудно получить следующее усиление критерия полиномиальности последовательности из [2, Теорема 1, с. 9].

Теорема 2 *Пусть задана последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ элементов гильбертова пространства H. Эта последовательность является полиномиальной в H тогда и только тогда, когда корреляционная функция $K_{n,m}$ последовательности удовлетворяет следующим разностным соотношениям:*

$$\frac{1}{a_n}\left(c_{n-1}K_{n-1,m} - b_n K_{n,m} + c_n K_{n+1,m}\right) =$$

$$= \frac{1}{a_m}\left(c_{m-1}K_{n,m-1} - b_m K_{n,m} + c_m K_{n,m+1}\right), \qquad n,m\in\mathbb{Z}_+, \tag{22}$$

где $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ - некоторые последовательности положительных чисел, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ - некоторая последовательность вещественных чисел, $c_{-1} = 0$ и $K_{-1,m} = K_{n,-1} = 0$ $(n,m\in\mathbb{Z}_+)$.

Доказательство. Необходимость следует из необходимости вышеупомянутой теоремы 1 из [2, с. 9]. Из достаточности той же теоремы следует, что последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ является полиномиальной в некотором гильбертовом пространстве $\widetilde{H} \supseteq H$. Пусть $H_x = \mathrm{span}\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ является пространством значений последовательности, а A_x - оператор последовательности. Как было показано в [1] и упомянуто выше во введении, всевозможные самосопряженные расширения $\widehat{A} \supseteq A_x$ во всевозможных гильбертовых пространствах $\widehat{H} \supseteq H$ удовлетворяют соотношению

$$x_n = p_n(\widehat{A})x_0, \qquad n,m\in\mathbb{Z}_+. \tag{23}$$

Таким образом, последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ является полиномиальной в каждом таком пространстве $\widehat{H} \supseteq H$. С другой стороны, в [1] было показано, что оператор (одномерной) полиномиальной последовательности является симметрическим оператором с равными дефектными числами (нулевыми или равными единице). Значит, у оператора последовательности A_x найдется самосопряженное расширение $\widehat{A}$ в самом пространстве H. Значит, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ является полиномиальной последовательностью в H. $\square$

Последняя теорема допускает обобщение на случай векторных полиномиальных последовательностей. Именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 3 *Пусть задан набор последовательностей*

$$\{x_n^1\}_{n\in\mathbb{Z}_+}, \{x_n^2\}_{n\in\mathbb{Z}_+}, \ldots, \{x_n^N\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \tag{24}$$

в гильбертовом пространстве H $(N \in \mathbb{N})$. *Для того, чтобы эти последовательности образовывали* N*-мерную полиномиальную последовательность в гильбертовом пространстве* H, *необходимо и достаточно, чтобы взаимная корреляционная функция* $R_{x^k,x^s}(n,m) := (x_n^k, x_m^s)_H$ *удовлетворяла следующим разностным соотношениям:*

$$\frac{1}{a_n}\left(c_{n-1}R_{x^k,x^s}(n-1,m) - b_n R_{x^k,x^s}(n,m) + c_n R_{x^k,x^s}(n+1,m)\right) =$$

$$= \frac{1}{a_m}\left(c_{m-1}R_{x^k,x^s}(n,m-1) - b_m R_{x^k,x^s}(n,m) + c_m R_{x^k,x^s}(n,m+1)\right),$$

$$n,m \in \mathbb{Z}_+,\ k,s = 1,2,\ldots,N, \tag{25}$$

где $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}, \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *- некоторые последовательности положительных чисел,* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *- некоторая последовательность вещественных чисел,* $c_{-1} = 0$ *и* $R_{x^k,x^s}(-1,m) = R_{x^k,x^s}(n,-1) = 0$ $(n,m \in \mathbb{Z}_+)$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть последовательности (24) образуют N-мерную полиномиальную последовательность в некотором гильбертовом пространстве H. В таком случае, последовательности $\{x_n^k\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, $1 \le k \le N$, будут одномерными полиномиальными последовательностями с одной и той же системой многочленов. Следовательно, соотношение (25) при $k = s$ будет следовать из предыдущей теоремы. При этом, коэффициенты a_n, b_n, c_n являются коэффициентами рекуррентного соотношения для многочленов (см. доказательство необходимости теоремы 1 в [2]). Справедливость соотношения (25) при $k \ne s$ непосредственно следует из определения полиномиально связанных последовательностей.

Достаточность. Пусть задан набор последовательностей (24) в некотором гильбертовом пространстве H, и взаимная корреляционная функция последовательностей удовлетворяет соотношению (25). В силу теоремы 2 мы заключаем, что последовательности (24) являются полиномиальными последовательностями в H. При этом система ортогональных многочленов для каждой из них может быть выбрана одной и той же, тем способом, как это было сделано в доказательстве достаточности теоремы 1 в [2]. (Заметим, что полиномиальная последовательность, вообще говоря, может допускать представления с различными системами ортогональных многочленов. Очевидный пример - нулевая последовательность). Эти выбранные многочлены удовлетворяют соотношению (3). Соотношение (25) при $k \neq s$ означает, что последовательности $\{x_n^k\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ и $\{x_n^s\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ полиномиально связаны. Значит последовательности (24) образуют N-мерную полиномиальную последовательность в H. $\square$

Справедлива следующая теорема (см, например, [8, С.361-363]).

Теорема 4 *Пусть задана некоторая полубесконечная комплексная матрица* $\Gamma = (\gamma_{k,l})_{k,l=0}^{\infty}$, $\gamma_{k,l} \in \mathbb{C}$. *Если выполнено соотношение*

$$(\gamma_{k,l})_{k,l=0}^{r} \geq 0, \qquad r \in \mathbb{Z}_+, \tag{26}$$

то найдется гильбертово пространство H *и набор элементов* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *в* H *такие, что*

$$(x_n, x_m)_H = \gamma_{n,m}, \qquad n, m \in \mathbb{Z}_+. \tag{27}$$

При этом $\operatorname{span}\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+} = H$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное бесконечномерное линейное пространство V. Например, можно взять пространство полубесконечных комплексных последовательностей

$$(u_n)_{n\in\mathbb{Z}_+} = (u_0, u_1, u_2, \ldots), \qquad (u_n \in \mathbb{C}).$$

Рассмотрим произвольные линейно независимые элементы x_j, $j \in \mathbb{Z}_+$ этого пространства. В случае выбора пространства последовательностей, в качестве x_j можно взять последовательность, у которой j-я компонента равна единице, а остальные равны нулю ($j \in \mathbb{Z}_+$). Обозначим $V_0 = \operatorname{Lin}\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Определим следующий функционал:

$$[x, y] = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}_+} \gamma_{n,m} a_n \overline{b_m}, \tag{28}$$

для $x, y \in V_0$,

$$x = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} a_n x_n, \quad y = \sum_{m\in\mathbb{Z}_+} b_m x_m, \quad a_n, b_m \in \mathbb{C}.$$

Здесь все суммы подразумеваются конечными. Пространство V_0 с функционалом $[\cdot,\cdot]$ является квазигильбертовым. Проводя факторизацию и пополняя его ([9]) мы получим гильбертово пространство H и набор элементов $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ (мы сохранили для класса эквивалентности, порожденного элементом x_n, обозначение x_n) в H такие, что выполнено (27). Если $\operatorname{span}\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \neq H$, тогда требуемым пространством будет $\operatorname{span}\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$. $\square$

Хорошо известны условия на матрицу-функцию для того, чтобы она была корреляционной функцией многомерного стационарного процесса [6].

Следующая теорема дает условия на матрицу-функцию с тем, чтобы она была корреляционной функцией некоторой векторной полиномиальной последовательности.

Теорема 5 *Для того, чтобы* $\mathbb{C}_{N\times N}$*-значная функция* $K_{n,m} = (K^{r,s}_{n,m})^N_{r,s=1}$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$, *была корреляционной функцией некоторой* N*-мерной полиномиальной последовательности необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

A) *Полубесконечная блочная матрица* $K = (K_{n,m})^\infty_{n,m=0} = (\gamma_{k,l})^\infty_{k,l=0}$, $\gamma_{k,l} \in \mathbb{C}$, *имеет все неотрицательные главные угловые миноры, т.е. выполнено соотношение (26);*

B) *Выполнено соотношение*

$$\frac{1}{a_n}\left(c_{n-1}K^{r,s}_{n-1,m} - b_nK^{r,s}_{n,m} + c_nK^{r,s}_{n+1,m}\right) =$$

$$= \frac{1}{a_m}\left(c_{m-1}K^{r,s}_{n,m-1} - b_mK^{r,s}_{n,m} + c_mK^{r,s}_{n,m+1}\right),$$

$$n, m \in \mathbb{Z}_+,\ r, s = 1, 2, ..., N, \tag{29}$$

где $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *- некоторые последовательности положительных чисел,* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *- некоторая последовательность вещественных чисел,* $c_{-1} = 0$ *и* $K^{r,s}_{-1,m} = K^{r,s}_{n,-1} = 0$ $(n, m \in \mathbb{Z}_+)$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $K_{n,m} = (K^{r,s}_{n,m})^N_{r,s=1}$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$, является корреляционной функцией некоторой N-мерной полиномиальной последовательности $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в гильбертовом пространстве H. В этом случае, согласно определению корреляционной функции, записываем

$$K^{r,s}_{n,m} = (x^r_n, x^s_m)_H, \quad r, s = 1, 2, ..., N;\ n, m \in \mathbb{Z}_+,$$

и для произвольного набора векторов $\vec{\xi}_n = (\xi_{n,1}, \xi_{n,2}, ..., \xi_{n,N}) \in \mathbb{C}_N$, $n = 0, 1, ..., l$, $l \in \mathbb{Z}_+$, справедливо

$$\sum_{n,m=0}^{l} \vec{\xi}_n K_{n,m} \vec{\xi}^*_m = \sum_{n,m=0}^{l}\sum_{r,s=1}^{N} \xi_{n,r}\xi_{m,s}(x^r_n, x^s_m) =$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{l}\sum_{r=1}^{N} \xi_{n,r}x^r_n, \sum_{m=0}^{l}\sum_{s=1}^{N} \xi_{m,s}x^s_m\right) = \left\|\sum_{n=0}^{l}\sum_{r=1}^{N} \xi_{n,r}x^r_n\right\|^2 \geq 0.$$

Это означает, что для произвольного $l \in \mathbb{Z}_+$ блочная матрица $(K_{n,m})^l_{n,m=0}$ является неотрицательной. Следовательно, условие A) из формулировки теоремы выполнено. Справедливость условия B) непосредственно следует из теоремы 3.

Достаточность. Пусть для некоторой $\mathbb{C}_{N\times N}$-значной функции $K_{n,m} = (K^{r,s}_{n,m})^N_{r,s=1}$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$, выполнены условия A) и B) из формулировки теоремы и $K = (K_{n,m})_{n,m=0}^{\infty} = (\gamma_{k,l})_{k,l=0}^{\infty}$, $\gamma_{k,l} \in \mathbb{C}$. Согласно теореме 4 найдутся гильбертово пространство H и набор элементов $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в этом пространстве такие, что

$$\gamma_{k,l} = (y_k, y_l)_H \qquad k,l \in \mathbb{Z}_+. \tag{30}$$

Из структуры блочной матрицы K видно, что

$$K_{n,m}^{r,s} = \gamma_{nN+r-1,mN+s-1} \qquad n,m \in \mathbb{Z}_+,\ 1 \le r,s \le N. \tag{31}$$

Определим следующие элементы:

$$x_n^r = y_{nN+r-1} \qquad n \in \mathbb{Z}_+,\ 1 \le r \le N. \tag{32}$$

Тогда

$$K_{n,m}^{r,s} = (x_n^r, x_m^s)_H \qquad n,m \in \mathbb{Z}_+,\ 1 \le r,s \le N. \tag{33}$$

Таким образом, функция $K_{n,m}^{r,s}$, $n,m \in \mathbb{Z}_+$, является взаимной корреляционной функцией последовательностей $\{y_n^r\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ и $\{y_n^s\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ $(1 \le r,s \le N)$. Поскольку выполнено условие B) теоремы, то, применяя теорему 3, мы заключаем, что последовательности $\{y_n^r\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, $r = 1,2,...,N$, образуют N-мерную полиномиальную последовательность в H. При этом, согласно (33) функция $K_{n,m}$ является матричной корреляционной функцией этой последовательности. □

Спектральные функции

Из определения спектральной матрицы-функции векторной полиномиальной последовательности видно, что они порождаются спектральными функциями оператора последовательности. Используя результаты о спектральных функциях симметрического оператора, можно явно описать все спектральные функции векторной полиномиальной последовательности.

Пусть задана N-мерная полиномиальная последовательность $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, представляющая собой набор последовательностей

$$\{x_n^1\}_{n\in\mathbb{Z}_+}, \{x_n^2\}_{n\in\mathbb{Z}_+}, ..., \{x_n^N\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \tag{34}$$

в некотором гильбертовом пространстве H $(N \in \mathbb{N})$. Пусть $A_{\vec{x}}$ является оператором последовательности в пространстве последовательности $H_{\vec{x}}$. Пусть $\widehat{A}$ является произвольным самосопряженным расширением оператора последовательности $A_{\vec{x}}$ в некотором гильбертовом пространстве $\widehat{H} \supseteq H_{\vec{x}}$. Обозначим $R_z(\widehat{A})$ резольвенту $\widehat{A}$ и $\{\widehat{E}_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ его непрерывное слева ортогональное разложение единицы. Напомним, что операторнозначная функция $\mathbf{R}_z = P_H^{\widehat{H}} R_z(\widehat{A})$ называется обобщенной резольвентой $A_{\vec{x}}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Функция $\mathbf{E}_\lambda = P_H^{\widehat{H}} \widehat{E}_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, является непрерывной слева спектральной функцией симметрического оператора $A_{\vec{x}}$. Между обобщенными резольвентами и спектральными функциями (непрерывными слева или нормированными некоторым другим образом) существует взаимно однозначное соответствие согласно следующему соотношению ([8]):

$$(\mathbf{R}_z f, g)_{H_{\vec{x}}} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - z} d(\mathbf{E}_\lambda f, g)_{H_{\vec{x}}}, \qquad f, g \in H_{\vec{x}},\ z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}. \tag{35}$$

Напомним некоторые определения из [10], которые нам понадобятся в дальнейшем. Пусть B – замкнутый симметрический оператор в гильбертовом пространстве H с областью определения $D(B)$, $\overline{D(B)} = H$. Обозначим $\Delta_B(\lambda) = (B - \lambda E_H)D(B)$ и $N_\lambda = N_\lambda(B) = H \ominus \Delta_B(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Рассмотрим произвольный ограниченный линейный оператор C, отображающий N_i в N_{-i}. Для

$$g = f + C\psi - \psi, \qquad f \in D(B),\ \psi \in N_i, \tag{36}$$

мы полагаем

$$B_C g = Bf + iC\psi + i\psi. \tag{37}$$

Поскольку пересечение $D(A)$, N_i и N_{-i} состоит лишь из нулевого элемента, это определение корректно. Оператор B_C называют *квазисамосопряженным расширением оператора B, определяемым оператором C*. Имеет место следующая теорема [10, Теорема 7]:

Теорема 6 *Пусть B является замкнутым симметрическим оператором в гильбертовом пространстве H с областью определения $D(B)$, $\overline{D(B)} = H$. Все обобщенные резольвенты оператора B имеют следующий вид:*

$$\mathbf{R}_\lambda = \begin{cases} (B_{F(\lambda)} - \lambda E_H)^{-1}, & \operatorname{Im}\lambda > 0 \\ (B_{F^*(\bar\lambda)} - \lambda E_H)^{-1}, & \operatorname{Im}\lambda < 0 \end{cases}, \tag{38}$$

где $F(\lambda)$ является аналитической в $\mathbb{C}_+$ операторнозначной функцией, значениями которой являются сжатия, отображающие $N_i(B)$ в $N_{-i}(B)$ ($\|F(\lambda)\| \le 1$), и $B_{F(\lambda)}$ является квазисамосопряженным расширением B, определяемым $F(\lambda)$.

С другой стороны, любой операторнозначной функции $F(\lambda)$ с указанными свойствами отвечает, согласно соотношению (38), некоторая обобщенная резольвента оператора B.

Отметим, что соотношение (38) является взаимно однозначным [10]. Используя этот фундаментальный результат, мы приходим к следующему описанию спектральных функций векторной полиномиальной последовательности.

Теорема 7 *Пусть задана N-мерная полиномиальная последовательность $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в некотором гильбертовом пространстве H ($N \in \mathbb{N}$). Пусть*

$A_{\vec{x}}$ является оператором последовательности в пространстве последовательности $H_{\vec{x}}$. Все матричные спектральные функции последовательности $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ имеют следующий вид

$$F(\lambda) = (F_{j,k}(\lambda))_{j,k=1}^N, \tag{39}$$

где $F_{j,k}(\lambda)$ удовлетворяют соотношению

$$\int_R \frac{1}{\lambda - z} dF_{j,k}(\lambda) = \left(\left((A_{\vec{x}})_{G(z)} - zE_{H_{\vec{x}}} \right)^{-1} x_0^j, x_0^k \right)_H, \qquad z \in \mathbb{C}_+, \tag{40}$$

где $G(z)$ является аналитической в $\mathbb{C}_+$ операторнозначной функцией, значениями которой являются сжатия, отображающие $N_i(\overline{A_{\vec{x}}})$ в $N_{-i}(\overline{A_{\vec{x}}})$ ($\|G(z)\| \leq 1$), и $A_{G(z)}$ является квазисамосопряженным расширением $\overline{A_{\vec{x}}}$, определяемым $G(z)$.
С другой стороны, произвольной операторнозначной функции $G(z)$ с упомянутыми свойствами соответствует, согласно (40), некоторая матричная спектральная функция N-мерной полиномиальной последовательности $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$.
При этом, соответствие между всеми такими операторнозначными функциями и спектральными функциями последовательности, устанавливаемое соотношением (40), взаимно однозначно.

Доказательство. Все утверждения теоремы, за исключением последнего, непосредственно следуют из определения матричной спектральной функции N-мерной полиномиальной последовательности и предыдущей теоремы.

Пусть задана N-мерная полиномиальная последовательность $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ в некотором гильбертовом пространстве H ($N \in \mathbb{N}$), и $A_{\vec{x}}$ является оператором последовательности в пространстве последовательности $H_{\vec{x}}$. Предположим, что двум различным аналитическим в $\mathbb{C}_+$ операторнозначным функциям $G_1(z)$ и $G_2(z)$, значениями которых являются сжатия, отображающие $N_i(\overline{A_{\vec{x}}})$ в $N_{-i}(\overline{A_{\vec{x}}})$, отвечает одна и та же матричная спектральная функция $F(\lambda) = (F_{j,k}(\lambda))_{j,k=1}^N$ последовательности $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Поскольку $G_1(z)$ и $G_2(z)$ различны, то им отвечают различные обобщенные резольвенты $\mathbf{R}_{1,z}$ и $\mathbf{R}_{2,z}$ оператора $\overline{A_{\vec{x}}}$, в соответствии с теоремой 6. Из соотношения (40) мы получаем, что

$$\left(\mathbf{R}_{1,z} x_0^j, x_0^k \right)_H = \left(\mathbf{R}_{2,z} x_0^j, x_0^k \right)_H, \qquad z \in \mathbb{C}_+, \ 1 \leq j, k \leq N. \tag{41}$$

Пусть обобщенная резольвента $\mathbf{R}_{m,z}$ порождается резольвентой $R_{m,z}$ самосопряженного оператора $\widehat{A}_m \supseteq A_{\vec{x}}$ в некотором гильбертовом пространстве $\widehat{H}_m \supseteq H_{\vec{x}}$:

$$\mathbf{R}_{m,z} = P_{H_{\vec{x}}}^{\widehat{H}_m} R_{m,z}, \qquad m = 1, 2.$$

Обозначим $L_N := \mathrm{Lin}\{x_0^j\}_{1\leq j\leq N}$. Пользуясь линейностью и соотношением $R_{m,z}^* = R_{m,\bar{z}}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, $m = 1, 2$, мы получаем равенство

$$(\mathbf{R}_{1,z} x, y)_H = (\mathbf{R}_{2,z} x, y)_H, \qquad x, y \in L_N, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}. \tag{42}$$

Выберем произвольное число $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Пусть

$$H_z := \overline{(A_{\bar{x}} - zE_{H_{\bar{x}}})L_{\bar{x}}} = \overline{(A_{\bar{x}} - zE_{H_{\bar{x}}})D(A_{\bar{x}})}.$$

Положим

$$y_0^r := x_0^r - P_{H_z}^{H_{\bar{x}}} x_0^r, \qquad 1 \le r \le N. \tag{43}$$

Обозначим $H_0 := \operatorname{span}\{y_0^r\}_{r=1}^N$. В работе [1] (см. доказательство теоремы 2) было показано, что

$$H_{\bar{x}} = H_z \oplus H_0. \tag{44}$$

Таким образом, H_0 является дефектным подпространством оператора $\overline{A_{\bar{x}}}$, отвечающим невещественному z. Поскольку

$$R_{j,z}(A_{\bar{x}} - zE_{H_{\bar{x}}})x = (A_j - zE_{H_j})^{-1}(A_j - zE_{H_j})x = x, \qquad x \in L_{\bar{x}} = D(A_{\bar{x}}),$$

то

$$R_{1,z}u = R_{2,z}u \in H, \qquad u \in H_z; \tag{45}$$

$$\mathbf{R}_{1,z}u = \mathbf{R}_{2,z}u, \qquad u \in H_z,\ z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}. \tag{46}$$

Мы можем записать

$$(\mathbf{R}_{n,z}x, u)_H = (R_{n,z}x, u)_{H_n} = (x, R_{n,\bar{z}}u)_{H_n} = (x, \mathbf{R}_{n,\bar{z}}u)_H, \tag{47}$$

где $x \in L_N,\ u \in H_{\bar{z}},\ n = 1, 2$, и значит,

$$(\mathbf{R}_{1,z}x, u)_H = (\mathbf{R}_{2,z}x, u)_H, \qquad x \in L_N,\ u \in H_{\bar{z}}. \tag{48}$$

В работе [1] было показано, что произвольный элемент $y \in L_{\bar{x}}$ можно представить в виде $y = y_{\bar{z}} + y'$, $y_{\bar{z}} \in H_{\bar{z}}$, $y' \in L_N$. Используя (42) и (48), мы получаем

$$(\mathbf{R}_{1,z}x, y)_H = (\mathbf{R}_{1,z}x, y_{\bar{z}} + y')_H = (\mathbf{R}_{2,z}x, y_{\bar{z}} + y')_H = (\mathbf{R}_{2,z}x, y)_H,$$

где $x \in L_N,\ y \in L_{\bar{x}}$. Поскольку $\overline{L_{\bar{x}}} = H_{\bar{x}}$, мы получаем

$$\mathbf{R}_{1,z}x = \mathbf{R}_{2,z}x, \qquad x \in L_N,\ z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}. \tag{49}$$

Для произвольного $x \in L_{\bar{x}}$, $x = x_z + x'$, $x_z \in H_z$, $x' \in L_N$, используя соотношения (46), (49), мы получим

$$\mathbf{R}_{1,z}x = \mathbf{R}_{1,z}(x_z + x') = \mathbf{R}_{2,z}(x_z + x') = \mathbf{R}_{2,z}x, \qquad x \in L_{\bar{x}},\ z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}, \tag{50}$$

и

$$\mathbf{R}_{1,z}x = \mathbf{R}_{2,z}x, \qquad x \in H_{\bar{x}},\ z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}. \tag{51}$$

Полученное противоречие заканчивает доказательство теоремы. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Загороднюк С. М. О векторных полиномиальных последовательностях. // Вісник Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна. Серія "Математика, прикладна математика і механіка". – 2009. – **875.** – С. 25-47.

2. Загороднюк С. М., Клёц Л. Применение подхода А.Н. Колмогорова при изучении случайных последовательностей, связанных с ортогональными многочленами. // Вісник Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна. Серія "Математика, прикладна математика і механіка". – 2008. – **826**. – С. 3-37.

3. Загороднюк С. М. Разложение Вольда для полиномиальных последовательностей. // Вісник Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна. Серія "Математика, прикладна математика і механіка". – 2009. – **850**. – С. 57-70.

4. Тода М. Теория нелинейных решеток.– М.: Мир, 1984. – 264 с.

5. Колмогоров А. Н. Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве. // Бюлл. МГУ, – 1941. – **6**. – С. 1–40.

6. Розанов Ю. А. Стационарные случайные процессы.– М.: Наука, 1990. – 272 с.

7. Бродский М. С. Треугольные и жордановы представления линейных операторов.– М.: Наука, 1969. – 287 с.

8. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – Москва Ленинград: гос. издат-во тех.-теор. литер., 1950. – 484 с.

9. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наукова думка, 1965. – 800 с.

10. Штраус А. В. Обобщенные резольвенты симметрических операторов. // Известия АН СССР, – 1954. – **18**. – С. 51–86.

Статья получена: 17.02.2010; окончательный вариант: 17.11.2010; принята: 19.11.2010.

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 533.72 № 931, 2010, с.49–58

Перехідний режим між течіями типу "прискорення-ущільнення"

В.Д. Гордевський, Н.В. Лемешева
Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна
пл.Свободи, 4, 61077, Харків, Україна
gordevskyy2006@yandex.ru, lemesheva.kharkov@rambler.ru

Побудовано наближені розв'язки кінетичного рівняння Больцмана для твердих куль, які описують перехідний режим між двома течіями, що прискорюються та згущуються. Здобуто достатні умови мінімізації відхилу між частинами цього рівняння в деякій спеціальній метриці.

Гордевский В.Д., Лемешева Н.В., **Переходный режим между потоками типа "ускорение-уплотнение".** Построены приближенные решения кинетического уравнения Больцмана для твердых сфер, описывающие переходный режим между двумя ускоряющимимся и уплотняющимися потоками. Получены достаточные условия минимизации невязки между частями этого уравнения в некоторой специальной метрике.

V.D. Gordevskyy, N.V. Lemesheva, **Transitional regime between the flows of "accelerating-packing" type.** Approximate solutions of the kinetic Boltzmann equation for hard spheres are built which describe the transitional regime between two accelerating and packing flows. Sufficient conditions for the minimization of the discrepancy between the sides of this equation in some special metric are obtained.

2000 Mathematics Subject Classification: 76P05, 45K05, 82C40, 35Q55.

Вступ

Нелінійне кінетичне рівняння Больцмана, яке описує поведінку досить розрідженого газу з твердих куль, має вигляд [1, 2]:

$$D(f) = Q(f, f); \tag{1}$$

$$D(f) = \frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x}; \tag{2}$$

$$Q(f,f) = \frac{d^2}{2}\int_{R^3} dv_1 \int_{\Sigma} d\alpha |(v - v_1, \alpha)| \cdot$$

$$\cdot [f(t, v_1', x) f(t, v', x) - f(t, v_1, x) f(t, v, x)], \qquad (3)$$

де $f = f(t,v,x)$ - функція розподілу молекул, що шукається; $t \in R^1$ - час; $x = (x^1, x^2, x^3) \in R^3$ та $v = (v^1, v^2, v^3) \in R^3$ - координата та швидкість молекули; $d > 0$ - її діаметр; $\frac{\partial f}{\partial x}$ (або просто f') - просторовий градієнт функції f; α - вектор на одиничній сфері Σ в R^3; v, v_1 та v', v_1' - швидкості двох молекул до зіткнення та після нього, відповідно.

Єдиним класом точних розв'язків рівняння (1)-(3), який знайдено в явному вигляді до цього моменту, є максвеліани $M(t,v,x)$, тобто розв'язки системи

$$D(M) = Q(M,M) = 0. \qquad (4)$$

Глобальні (тобто незалежні ні від t, ні від x), а також локальні стаціонарні (залежні лише від x - так звані гвинти або "спіралі" [8]) максвеліани були відомі іще Максвеллу та Больцману [1, 2]. Найбільш загальний вигляд локальних максвеліанів, залежних ще й від t, було знайдено значно пізніше, і він виявився досить складним. В роботі [6] проведено детальний аналіз та запропоновано класифікацію таких розв'язків з точки зору їх фізичного сенсу та геометричної структури ("смерчі", "стиск-розширення", "прискорення-ущільнення" тощо).

Проте при переході до опису нерівноважних процесів в газі доводиться шукати вже не точні, а лише наближені явні розв'язки рівняння Больцмана. Вони будуються у вигляді бімодальних розподілів:

$$f = \varphi_1 M_1 + \varphi_2 M_2, \qquad (5)$$

з коефіцієнтними функціями φ_i, які задовольняють умови:

$$\varphi_i = \varphi_i(t,x) \geq 0; \quad \varphi_i \in C^1(R^4), \quad i = 1,2 \qquad (6)$$

та максвеліанами M_i, $i = 1,2$ того чи іншого з зазначених типів [3-9]. При цьому для оцінки величини "відхилу", тобто розбіжності між лівою та правою частинами рівняння (1), використовується декілька норм різниці між ними. Виявляється, що знайдені таким чином наближені розв'язки суттєво залежать саме від вибору згаданої норми, і це інколи приводить до необхідності накладати вельми жорсткі вимоги на вигляд функцій φ_i, $i = 1,2$ та на поведінку гідродинамічних параметрів (густина, температура тощо), що входять до M_i, $i = 1,2$ [6-9].

В даній роботі досліджується питання про наближений опис перехідного режиму між двома максвелівськими течіями типу "прискорення-ущільнення" з використанням відхилу "з вагою", який запропоновано тут з урахуванням специфіки таких потоків, що дозволяє суттєво розширити клас відповідних бімодальних розподілів.

Наведемо необхідні означення та точну постановку задачі.

Означення. *Назвемо рівномірно-інтегральним (або "змішаним") відхилом з вагою наступний вираз:*

$$\widetilde{\Delta} = \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{1}{1+|t|} \int_{R^3} |D(f) - Q(f,f)|\, dv \tag{7}$$

(зауважимо, що в більшості попередніх робіт щодо бімодальних розподілів, зокрема, в [7], вивчається відхил Δ, який відрізняється від (7) відсутністю "вагового" множника $\frac{1}{1+|t|}$).

Будемо шукати розподіл f у вигляді (5), (6), де максвеліани M_i відповідають течіям типу "прискорення-ущільнення" [6, 7]:

$$M_i = \rho_i \left(\frac{\beta_i}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\beta_i (v-\widetilde{v}_i)^2},\ i = 1,2 \tag{8}$$

$$\rho_i = \overline{\rho}_i \cdot e^{\beta_i (\widetilde{v}_i^2 + 2\overline{u}_i x)},\ i = 1,2 \tag{9}$$

$$\widetilde{v}_i = \overline{v}_i - \overline{u}_i t,\ i = 1,2 \tag{10}$$

(тут $\rho_i = \rho_i(t,x)$ - густина i-ої течії; $\beta_i = \frac{1}{2T_i}$ - її обернена температура; $\widetilde{v}_i = \widetilde{v}_i(t)$ - масова швидкість; $\overline{\rho}_i, \overline{v}_i, \overline{u}_i$ - скалярні та векторні константи).

Треба знайти функції φ_i, $i = 1,2$ та поведінку параметрів, що забезпечують довільну мализну відхилу (7).

В наступному розділі наведено декілька результатів, які дають розв'язок цієї задачі.

Основні результати

Теорема 1. *Нехай коефіцієнтні функції в розподілі (5) мають вигляд:*

$$\varphi_i(t,x) = C_i \left(x + \overline{u}_i \frac{(\overline{v}_i - \overline{u}_i t)^2}{2\overline{u}_i^2} \right),\ i = 1,2, \tag{11}$$

де $C_i \geq 0$ - довільні фінітні або досить швидко спадаючі на нескінченності гладкі функції. Нехай, крім того,

$$\overline{u}_i = \overline{u}_{oi} \beta_i^{-n_i},\ \ i = 1,2, \tag{12}$$

$$\overline{v}_i = \overline{v}_{oi} \beta_i^{-k_i},\ i = 1,2, \tag{13}$$

де $\overline{u}_{oi}, \overline{v}_{oi} \in R^3$ - довільні та фіксовані, а числа n_i, k_i такі, що

$$n_i \geq 1;\ k_i \geq \frac{1}{2};\ k_i \geq \frac{n_i}{2},\ \ i = 1,2. \tag{14}$$

Тоді має місце твердження

$$\lim_{\beta_1,\beta_2 \to +\infty} \widetilde{\Delta} = 0. \tag{15}$$

Доведення. Легко перевірити з використанням техніки розвинутої в [7], та з урахуванням (9)-(11), що величини

$$t\varphi_i\rho_i(t,x);\ \ \frac{\partial\varphi_i}{\partial t}\rho_i(t,x);\ \left|\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right|\rho_i(t,x);\ t\left(\overline{u}_i,\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right)\rho_i(t,x),\quad i=1,2 \qquad (16)$$

обмежені на R^4 після множення на $\frac{1}{1+|t|}$. Звідси, в силу припущення про гладкість функцій φ_i, випливає, що така ж "обмеженість з вагою" має місце й для величин $\sqrt{|t|}\varphi_i\rho_i(t,x)$, $i=1,2$, отже, і для їх добутку: $|t|\varphi_1\varphi_2\rho_1(t,x)\rho_2(t,x)$, що знову внаслідок гладкості гарантує те ж саме й без множника $|t|$. Звідси випливає, що коректно визначена оцінка зверху $\widetilde{\Delta}'$ для відхилу (7):

$$\widetilde{\Delta}\le\widetilde{\Delta}' \qquad (17)$$

наступного вигляду (вона здобувається після підстановки в (1)-(3)відомих формул для v', v_1' [1-3], а також (5), (8)-(10) з урахуванням (4) та використанням техніки робіт [7, 8]):

$$\widetilde{\Delta}'=\sup_{(t,x)\in R^4}\frac{1}{1+|t|}\sum_{i,j=1,i\neq j}^{2}\Bigg[\int_{R^3}\left|\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}+\left(\frac{u}{\sqrt{\beta_i}}+\overline{v}_i-\overline{u}_it\right)\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+\varphi_1\varphi_2\rho_j(t,x)\frac{d^2}{\sqrt{\pi}}\int_{R^3}F_{ij}e^{-w^2}dw\right|\rho_i(t,x)\pi^{-3/2}e^{-u^2}du+$$

$$+\varphi_1\varphi_2\frac{\rho_1(t,x)\rho_2(t,x)}{\pi^2}d^2\int_{R^6}e^{-w^2-u^2}F_{ij}dwdu\Bigg] \qquad (18)$$

де

$$F_{ij}=\left|\frac{u}{\sqrt{\beta_i}}+\overline{v}_i-\overline{v}_j+(\overline{u}_j-\overline{u}_i)t-\frac{w}{\sqrt{\beta_j}}\right|,\quad i,j=1,2,\ i\neq j. \qquad (19)$$

Переходячи тепер в (9)-(11), (18), (19) до границі коли $\beta_1,\beta_2\to+\infty$ з урахуванням умов (12)-(14) (можливість такого граничного переходу обгрунтовується за допомогою Леми 1 роботи [8] та стандартних теорем про граничний перехід під знаком інтеграла - умови всіх цих тверджень легко перевіряються завдяки структурі виразів (18), (19), гладкості функцій, що до них входять, та хорошій збіжності всіх інтегралів), здобудемо:

$$\lim_{\beta_1,\beta_2\to+\infty}\rho_i(t,x)=\overline{\rho}_i\mu_i(x),\quad i=1,2, \qquad (20)$$

де

$$\mu_i(x)=\begin{bmatrix}1; & n_i>1;k_i>\frac{1}{2};\\ \exp\{2\overline{u}_{oi}x\}; & n_i=1;k_i>\frac{1}{2};\\ \exp\{\overline{v}_{oi}^2+2\overline{u}_{oi}x\}; & n_i=1;k_i=\frac{1}{2};\end{bmatrix} \qquad (21)$$

$$\lim_{\beta_1,\beta_2\to+\infty}\varphi_i=C_i\left(x+a_i\right), \qquad (22)$$

де

$$a_i = \begin{bmatrix} 0, & k_i > \frac{1}{2}n_i, \\ \frac{\overline{u}_{oi}\overline{v}_{oi}^2}{2\overline{u}_{oi}^2}, & k_i = \frac{1}{2}n_i; \end{bmatrix} \tag{23}$$

$$\lim_{\beta_1,\beta_2\to+\infty} \frac{\partial\varphi_i}{\partial t} = \lim_{\beta_1,\beta_2\to+\infty} \frac{t\overline{u}_i^2 - (\overline{u}_i,\overline{v}_i)}{\overline{u}_i^2}\left(\overline{u}_i, C_i'\left(x + \overline{u}_i\frac{(\overline{v}_i - \overline{u}_i t)^2}{2\overline{u}_i^2}\right)\right) = 0; \tag{24}$$

$$\lim_{\beta_1,\beta_2\to+\infty} \frac{\partial\varphi_i}{\partial x} = C_i'(x + a_i); \tag{25}$$

$$\lim_{\beta_1,\beta_2\to+\infty} F_{ij} = 0, \quad i \neq j, \tag{26}$$

і, значить,

$$\lim_{\beta_1,\beta_2\to+\infty} \widetilde{\Delta}' = 0, \tag{27}$$

що з урахуванням (17) і тягне за собою (15). Теорему доведено.

Зауваження 1. Умови, що накладаються на функції C_i, $i = 1, 2$ можна було б дещо полегшити, бо, як видно з (9), (20)-(25), множники при цих функціях зростають не за всіма напрямками в R^3, а лише вздовж вектора $\overline{u}_i$.

Теорема 2. *Нехай функції φ_i в розподілі (5) мають вигляд:*

$$\varphi_i(t,x) = \psi_i(t,x)\exp\left\{-\beta_i((\overline{v}_i - \overline{u}_i t)^2 + 2\overline{u}_i x)\right\}, \quad i = 1, 2 \tag{28}$$

де функції ψ_i такі, що вирази

$$t\psi_1\psi_2; \ \frac{\partial\psi_i}{\partial t}; \ t\psi_i; \ \left|\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right|; \ t\left(\overline{u}_i, \frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right), \quad i = 1, 2 \tag{29}$$

обмежені на R^4 після множення на $\frac{1}{1+|t|}$. Нехай до того ж виконується (12) при

$$n_i > \frac{1}{2}. \tag{30}$$

Тоді справедлива оцінка (17), причому існує скінченна границя:

$$\lim_{\beta_1,\beta_2\to+\infty} \widetilde{\Delta}' = \sum_{i,j=1,i\neq j}^{2} \overline{\rho}_i \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{1}{1+|t|}\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t} + \overline{v}_i\frac{\partial\psi_i}{\partial x} + \psi_1\psi_2\pi d^2\overline{\rho}_j|\overline{v}_1 - \overline{v}_2|\right| +$$

$$+2\pi d^2\overline{\rho}_1\overline{\rho}_2|\overline{v}_1 - \overline{v}_2| \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{1}{1+|t|}(\psi_1\psi_2). \tag{31}$$

Доведення. З урахуванням (9), (10), (28) маємо:

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial t} = \overline{\rho}_i[\rho_i(t,x)]^{-1}\left\{\frac{\partial\psi_i}{\partial t} + 2\beta_i\psi_i\left((\overline{v}_i,\overline{u}_i) - t\overline{u}_i^2\right)\right\}, \tag{32}$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = \overline{\rho}_i [\rho_i(t,x)]^{-1} \left\{ \frac{\partial \psi_i}{\partial x} - 2\beta_i \psi_i \overline{u}_i \right\}, \quad i = 1,2, \tag{33}$$

тому замість (18) здобудемо (існування відповідних супремумів випливає з умови (29) нашої теореми):

$$\widetilde{\Delta}' = \pi^{-3/2} \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{1}{1+|t|} \sum_{i=1}^{2} \overline{\rho}_i \int_{R^3} \left[\left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + A_i + B_i \right| + A_i \right] e^{-u^2} du, \tag{34}$$

де

$$A_i = A_i(u,t) = \psi_1 \psi_2 \frac{d^2}{\sqrt{\pi}} \overline{\rho}_j \int_{R^3} e^{-w^2} F_{ij} dw, \quad i \neq j, \tag{35}$$

$$B_i = B_i(u,t) = \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \left(\frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{v}_i - \overline{u}_i t \right) - 2\psi_i \sqrt{\beta_i}(u, \overline{u}_i) \tag{36}$$

при збереженні (19). Значить, граничний перехід завдяки (12), (30) тепер дає (його обгрунтування таке ж, як при доведенні Теореми 1):

$$\lim_{\beta_1,\beta_2 \to +\infty} F_{ij} = |\overline{v}_1 - \overline{v}_2|; \tag{37}$$

$$\lim_{\beta_1,\beta_2 \to +\infty} A_i = \psi_1 \psi_2 \pi d^2 \overline{\rho}_j |\overline{v}_1 - \overline{v}_2|, \quad i \neq j; \tag{38}$$

$$\lim_{\beta_1,\beta_2 \to +\infty} B_i = \overline{v}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x}, \quad i = 1,2. \tag{39}$$

Все це після переходу до границі в (34) та подальшого інтегрування по u приводить до (31). Теорему доведено.

Легко тепер сформулювати наслідок з цієї теореми, який дає одну з можливих достатніх умов довільної мализни відхилу (7).

Наслідок 1. *Нехай виконуються всі умови Теореми 2, і ψ_i має вигляд:*

$$\psi_i = C_i (x - \overline{v}_i t), \quad i = 1,2 \tag{40}$$

або

$$\psi_i = C_i ([x \times \overline{v}_i]), \quad i = 1,2, \tag{41}$$

де $C_i \geq 0$ - фінітні гладкі функції.

Тоді:

1) Якщо C_1, C_2, $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$ задовольняє наступні умови:

$$suppC_1 \cap suppC_2 = \oslash \tag{42}$$

або

$$\overline{v}_1 = \overline{v}_2, \tag{43}$$

то має місце твердження (15).

2) При довільних C_1, C_2, $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$ маємо:

$$\lim_{d \to 0} \lim_{\beta_i \to +\infty, i=1,2} \widetilde{\Delta} = 0. \tag{44}$$

Доведення. Перш за все, легко бачити, що функції вигляду (40) або (41) за накладених тут умов задовольняють вимоги Теореми 2. Дійсно, для (40) виконується:

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial t} = -\left(\overline{v}_i, C_i'\right), \quad i = 1,2, \tag{45}$$

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial x} = C_i', \quad i = 1,2; \tag{46}$$

а у випадку (41) буде:

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial t} = 0, \tag{47}$$

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial x} = \left[\overline{v}_i \times C_i'\right], \quad i = 1,2. \tag{48}$$

Значить, справедливе (31), і, крім того, в обох випадках

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial t} + \overline{v}_i\frac{\partial\psi_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1,2. \tag{49}$$

Остання рівність разом з (42) або (43), як видно з (31) дає або просто (27), або прямування цього виразу до нуля при $d \to 0$. Звідси завдяки (17) здобудемо (15). Наслідок 1 доведено.

Наступне твердження можна розглядати як деяке "проміжкове" між теоремами 1 і 2, оскільки показник експоненти в (28) замінюється тепер лише одним з присутніх там доданків.

Теорема 3. *Нехай*

$$\varphi_i(t,x) = \psi_i(t,x)\exp\{-\beta_i(\overline{v}_i - \overline{u}_i t)^2\}, \quad i = 1,2, \tag{50}$$

причому вирази

$$t\psi_1\psi_2\exp\{2\beta_1\overline{u}_1 x + 2\beta_2\overline{u}_2 x\}; \ \frac{\partial\psi_i}{\partial t}\exp\{2\beta_i\overline{u}_i x\}; \ t\psi_i\exp\{2\beta_i\overline{u}_i x\};$$

$$\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right|\exp\{2\beta_i\overline{u}_i x\}; \ t\left(\overline{u}_i, \frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right)\exp\{2\beta_i\overline{u}_i x\}, \quad i = 1,2 \tag{51}$$

обмежені з вагою $\frac{1}{1+|t|}$, а припущення (12) виконується для

$$n_i \geq 1. \tag{52}$$

Тоді справедливе (17), причому існує скінченна границя величини $\widetilde{\Delta}'$, яка дорівнює виразу (31) при $n_i > 1$, а при $n_i = 1$

$$\lim_{\beta_1,\beta_2\to+\infty}\widetilde{\Delta}' = \sum_{i,j=1, i\neq j}^{2}\overline{\rho}_i \sup_{(t,x)\in R^4}\frac{1}{1+|t|}\left|\mu_i(x)\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial t} + \overline{v}_i\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right) + \right.$$

$$\left. +\psi_1\psi_2\mu_1(x)\mu_2(x)\pi d^2\overline{\rho}_j|\overline{v}_1 - \overline{v}_2|\right| + 2\pi d^2\overline{\rho}_1\overline{\rho}_2|\overline{v}_1 - \overline{v}_2| \times$$

$$\times \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{1}{1+|t|}\left[\mu_1(x)\mu_2(x)\psi_1(t,x)\psi_2(t,x)\right]+$$

$$+2\sum_{i=1}^{2}\overline{\rho}_i|(\overline{u}_{oi},\overline{v}_i)| \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{1}{1+|t|}\{\mu_i(x)\psi_i(t,x)\}, \tag{53}$$

де

$$\mu_i(x)=\exp\{2\overline{u}_{oi}x\}, \quad i=1,2. \tag{54}$$

Доведення аналогічне доведенню Теореми 2, але зараз завдяки (50) замість (32), (33) будемо мати:

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}=\exp\left\{-\beta_i(\overline{v}_i-\overline{u}_it)^2\right\}\cdot\left\{\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+2\beta_i\psi_i\left((\overline{v}_i,\overline{u}_i)-t\overline{u}_i^2\right)\right\}, \tag{55}$$

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}=\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\exp\left\{-\beta_i(\overline{v}_i-\overline{u}_it)^2\right\}. \tag{56}$$

Тому в (34) перед інтегралом з'явиться множник $\exp\{2\beta_i\overline{u}_ix\}$ (і в (35) - такий же множник, але з індексом j), а другий доданок в (36) заміниться на (із знаком плюс!):

$$2\beta_i\psi_i\left((\overline{u}_i,\overline{v}_i)-t\overline{u}_i^2\right). \tag{57}$$

Тоді при граничному переході, коли $\beta_1,\beta_2\to+\infty$, рівність (37) взагалі не зміниться, в (38) при $n_i=1$, $i=1,2$ виникає множник $\mu_j(x)$, $j\neq i$, а замість (39) здобудемо:

$$\lim_{\beta_1,\beta_2\to+\infty} B_i=\overline{v}_i\frac{\partial\psi_i}{\partial x}+2\psi_iH_i, \quad i=1,2, \tag{58}$$

де

$$H_i=\begin{bmatrix} 0, & n_i>1 \\ (\overline{u}_{oi},\overline{v}_i), & n_i=1. \end{bmatrix} \tag{59}$$

Оскільки, очевидно, границя величин $\exp\{2\beta_i\overline{u}_ix\}$ при $n_i>1$ дорівнює просто 1, а при $n_i=1$ збігається з (54), то саме в цьому (другому) випадку в граничному виразі для $\widetilde{\Delta}'$ не тільки виникають множники $\mu_i(x)$, $i=1,2$, але з'являється ще й додаткова сума (див. (58), (59)), яка не зустрічалася раніше, тобто в теоремах 1, 2, що й тягне за собою (53). Теорему доведено.

Наслідок 2. *Нехай в формулі (12) параметри n_i, $i=1,2$ задовольняють нерівність (52). Нехай, крім того, виконується додаткова умова:*

$$\overline{u}_i\perp\overline{v}_i, \quad i=1,2, \tag{60}$$

і зберігаються припущення (50) та (40) або (41). Тоді твердження 1), 2) Наслідка 1 залишаються в силі.

Доведення. Перш за все перевіримо, що функції вигляду (40) або (41) при виконанні умов даного наслідка задовольняють вимоги Теореми 3.

Нехай спочатку виконане (40), тоді перший з виразів (51) за припущенням (42) просто дорівнює нулю тотожньо, а у випадку (43) після заміни

$$y = x - \overline{v}_i t \tag{61}$$

з урахуванням (60) набуває вигляду:

$$tC_1(y)C_2(y)e^{2y(\beta_1\overline{u}_1+\beta_2\overline{u}_2)}. \tag{62}$$

Оскільки $C_1(y)$ та $C_2(y)$ фінітні, то після множення на $\frac{1}{1+|t|}$ вираз (62), очевидно, є обмеженим.

Якщо ж брати ψ_i у вигляді (41) і знову розглянути ситуацію (43), то після розкладення довільного вектора x по ортогональному (внаслідок (60)!) базису:

$$\overline{u}_i, \overline{v}_i, [\overline{u}_i \times \overline{v}_i], \quad i = 1, 2, \tag{63}$$

завдяки специфіці аргументів в (41) виявиться, що функції C_i "зануляються" саме за тими напрямками в R^3, за якими відповідні експоненти в (51) здатні зростати (множник t з огляду на наявність ваги є несуттєвим).

Решта виразів, що входять до (51), оцінюються цілком аналогічно з використанням формул (45) та (46), або (47) та (48).

Отже, ми можемо скористатися твердженням Теореми 3, тобто формулою (31) при $n_i > 1$ або формулами (53), (54) при $n_i = 1$. Але всі доданки, що в них входять, або просто дорівнюють нулю внаслідок чи (42), чи (43), чи (49), або прямують до нуля при $d \to 0$. Звідси завдяки (17) здобудемо (15). Наслідок 2 доведено.

Зауваження 2. Запропонований відхил з вагою $\widetilde{\Delta}$ вигляду (7) дозволив в даній роботі здобути низку нових наближених розв'язків рівняння Больцмана для твердих куль, які описують перехідний режим між течіями типу "прискорення-ущільнення" та суттєво відрізняються від побудованих раніше в [7] за допомогою розглянутого в [3-9] та інших роботах "звичайного" рівномірно-інтегрального відхилу Δ. Так, розподіл (11) тепер не містить не тільки окремого множника, спадаючого з часом на $\pm\infty$, а й мультиплікативної константи, без довільної мализни якої в роботі [7] не вдається здобути результат, аналогічний (15), а лише значно слабіше твердження, де в правій частині відповідної рівності замість нуля фігурує деяка величина, яка потребує подальшої мінімізації за рахунок інших параметрів розподілу. Те ж саме стосується і аналогів Наслідків 1,2, де завдяки новому відхилу вдається суттєво розширити класи знайдених розв'язків, а саме, вигляду (40) або (41), які до того ж можуть мати і цікавий фізичний сенс.

ЛІТЕРАТУРА

1. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана.– М.: Мир, 1978. – 495 с.

2. Карлеман Т. Математические задачи кинетической теории газов.– М.: ИИЛ, 1960. – 118 с.

3. Гордевский В.Д. Приближенное бимодальное решение уравнения Больцмана для твердых сфер // Матем. физ., анализ, геом. – 1995. – Т.2, **2**. – С. 168–176.

4. Гордевский В.Д. Критерий малости невязки для бимодального решения уравнения Больцмана // Матем. физ., анализ, геом. – 1997. – Т.4, **1/2**. – С. 46–58.

5. Гордевский В.Д. Приближенное двухпотоковое решение уравнения Больцмана // ТМФ – 1998. – Т.114, **1**. – С. 126–136.

6. Gordevskyy V.D. On the non-stationary Maxwellians // Math. Meth. Appl. Sci. – 2004. – V.27, **2**. – P. 231–247.

7. Gordevskyy V.D., Andriyasheva N.V. Interaction between "accelerating-packing" flows in a low-temperature gas // Math. Phys., Anal., Geom. – 2009. – V.5, **1**. – P. 38–53.

8. Гордевский В.Д. Двухпотоковые распределения с винтовыми модами // ТМФ – 2001. – Т.126, **2**. – С. 283–300.

9. Gordevskyy V.D. Transitional regine between vortical states of a gas//Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications – 2003. – V.53, **3-4**. – P. 481–494.

Стаття одержана: 10.10.2010; перероблений варіант: 7.11.2010; прийнята: 10.11.2010.

Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.9:535.4 № 931, 2010, с.59–72

Электростатическое поле сегмента, экранированного секционированными сферами

В.А. Резуненко
Харьковский национальный университет им.В.Н.Каразина, Украина

Методом регуляризации решена задача электростатики для сферического сегмента, экранированного замкнутыми секционированными сферами. Для обращения главной части матричного оператора задачи использовано решение интегральных уравнений типа Абеля. Получена система алгебраических уравнений Фредгольма II рода. Рассмотрены некоторые варианты постановки задачи, вычисления потенциалов и обобщения задачи.

Резуненко В.О. **Електростатичне поле сегменту, що екранований секційними сферами.** Методом регуляризації розв'язана задача електростатики для сферичного сегменту, екранованого замкненими секційними сферами. Для обернення головної частини матричного оператора задачі використано розв'язок інтегральних рівнянь типу Абеля. Одержана система алгебраїчних рівнянь Фредгольма II роду. Розглянуті деякі випадки постановки задачі, розрахунку потенціалів та узагальнення задачі.

V.A. Rezunenko, **Electrostatic field of a segment which is shielded by sectional spheres.** The electrostatic problem for a spherical segment which is shielded by sectional spheres is solved by a method of regularization. The main part of matrix operator of the problem is inverted using the solution of Abel integral equations. The Fredholm system of the second kind of algebraic equations has been obtained. Some generalizations and numerical results of the problem are considered.

2000 Mathematics Subject Classification: 65N12, 35A25, 78A45.

1. Введение.

Анализ электростатических потенциалов внутри ограниченных объёмов является актуальным, как в теоретическом, так и в прикладном плане. С прикладной точки зрения возникают, например, вопросы, как создавать требуемое распределение электростатического поля в заданной области пространства, как устранить электрический пробой в газах, наполняющих рабочий объём электроприборов, как избежать накопления электростатических зарядов на поверхностях различных устройств. С теоретической точки зрения интересны вопросы разработки методов моделирования и численно-аналитической регуляризации как новых, так и классических задач электростатики, магнитостатики и электродинамики для различных, в том числе сферических, структур со сложными границами. Также важными являются вопросы оптимизации численных алгоритмов и процедур рассматриваемых задач. Задачи электростатики и магнитостатики на сферических структурах в некоторых случаях являются тестовыми для теоретических и прикладных направлений, например, обратных задач магнитотеллурического зондирования, позволяющих делать выводы о глубинном строении земной коры по измеренному на поверхности земли магнитному полю. Многочисленные применения сферических структур стимулируют развитие методов решения прямых и обратных задач математической физики, электростатики, электродинамики и теории дифракции (см. [1]-[9]). Вместе с тем, работ, посвященных таким задачам электростатики на сферических поверхностях, явно недостаточно (см. [2, 3, 4, 8]). Целью работы является построение численно-аналитического алгоритма задачи расчета электростатического потенциала идеально проводящего сферического сегмента, размещённого между секционированными замкнутыми сферами. При этом отметим, что для каждой секции замкнутых сфер может быть выбран свой потенциал. Этот выбор позволяет моделировать в широком диапазоне требуемое распределение результирующего потенциала. Так, задание нулевого потенциала на одной из внешних экранирующих секций может моделировать поверхность стыковки конструктивных опор структуры. Для решения задачи применен метод регуляризации парных сумматорных функциональных уравнений. Использованы методы работ (см. [1]-[12]), в том числе, методы решения неоднородных интегральных уравнений Абеля первого рода, суммирования разрывных рядов функций комплексного переменного. Отметим, что регуляризацию исходной задачи можно выполнить несколькими методами. В работе применен метод регуляризации задачи электростатики в трехмерном пространстве, сводящий исходную задачу к эффективно разрешимой системе алгебраических уравнений Фредгольма второго рода. Отметим, что решаемая в работе задача не сводится к ранее рассмотренным задачам (см. [1]-[4]). Получено и исследовано решение актуальной многопараметрической задачи электростатики. Рассмотрены некоторые варианты постановки задачи, вычисления потенциалов и обобщения задачи.

2. Постановка задачи.

Пусть центр сферического сегмента, центры двух экранирующих сегмент секционированных замкнутых сфер помещены в начало декартовой и сферической систем координат. Сегмент и секционированные сферы имеют несколько параметров, опишем их подробно. Полагаем a_0 - радиус сферического сегмента, θ_0 - полярный угол, измеряющий сегмент (на сегменте $\theta_0 < \theta \leq \pi$). Пусть b_1, b_2 - радиусы соответственно внутренней и внешней секционированных сфер ($b_1 < a_0 < b_2$). Пусть диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, в которой рассматриваются сферические структуры, есть $\varepsilon_1 \neq 1$, $\mu_1 \neq 1$ и проводимость $\sigma = 0$. Для сферического сегмента выбираем потенциал V_0/ε_1, отличный от нуля, $V_0 \neq 0$. Пусть сферический сегмент и секционированные замкнутые сферы являются идеально проводящими (их проводимость $\sigma = \infty$). Предполагаем, что секционированные сферы состоят из частей - секций, разделенных непроводящими бесконечно тонкими перегородками, расположенными на сечениях сферы плоскостями, параллельными плоскости $X0Y$. Для размещения секций на поверхности внутренней сферы (радиуса b_1) заданы полярные углы $\theta_{j,1}$ перегородок между N секциями сферы $[\theta_{j-1,1} < \theta_{j,1}, (j = 1, 2, .., N)]$, при этом отмечаем, что, по определению $\theta_{0,1} = 0$, $\theta_{N,1} = \pi$. Пусть каждая (j) - секция имеет свой (независимый) потенциал $V_{j,1}/\varepsilon_1$. Обозначим $V_1^{(N)}/\varepsilon_1$ потенциал всех секций поверхности внутренней сферы, равный потенциалу $V_{j,1}/\varepsilon_1$ на (j) секции. Для внешней сферы (радиуса b_2) аналогично полагаем:
А) заданными полярные углы $\theta_{i,2}$ перегородок между M секциями [при этом $\theta_{0,2} = 0$, $\theta_{M,2} = \pi$],
Б) также заданными потенциалы секций $V_{i,2}/\varepsilon_1 \quad (i = 1, 2, 3, ..., M)$,
В) для потенциала всей внешней сферы принято обозначение $V_2^{(M)}/\varepsilon_1$.
Значит,

$$V_1^{(N)} = V_{j,1}, \quad r = b_1, \theta_{j-1,1} < \theta < \theta_{j,1}, \quad 1 \leq j \leq N, \tag{1}$$

$$V_2^{(M)} = V_{i,2}, \quad r = b_2, \theta_{i-1,2} < \theta < \theta_{i,1}, \quad 1 \leq i \leq M. \tag{2}$$

Электростатические поля $\overrightarrow{E}$ и вектор электрической индукции $\overrightarrow{D}$ всюду вне сегмента и вне секционированных сфер должны удовлетворять уравнениям Максвелла и материальным уравнениям

$$rot\overrightarrow{E} = 0, \qquad div\overrightarrow{D} = \rho, \quad \overrightarrow{D} = \varepsilon_1 \overrightarrow{E}, \tag{3}$$

где ρ - плотность зарядов на поверхности проводников.
Электростатические поля, в силу однородности уравнений Максвелла (3), представим, с точностью до калибровочной константы, скалярными потенциалами U, для которых $\overrightarrow{E} = -grad(U)$. При этом учитываем, что в данной постановке задачи магнитостатическое поле $\overrightarrow{H}$ и магнитная индукция $\overrightarrow{B}$ отсутствуют, т. е. $\overrightarrow{H} = 0$, $\overrightarrow{B} = 0$. Полные потенциалы U должны удовлетворять граничным условиям:

а) быть непрерывными на поверхности сегмента и на поверхности каждой части секционированных сфер;

б) нормальные производные потенциалов должны быть непрерывными на дополнении сферического сегмента до замкнутого сегмента. Полные потенциалы должны исчезать на бесконечности $U = O(r^{-1})$, $r \to \infty$ и удовлетворять условию конечности интеграла энергии в любой ограниченной области W трехмерного пространства $\int_W (grad(U))^2 dw < \infty$.

Требуется найти полные потенциалы вне сферического сегмента и вне секционированных сфер. В такой постановке задача электростатики имеет единственное решение [13].

3. Ряды Фурье-Лежандра для потенциалов.

Для решения задачи сначала применим метод частичных областей в пространстве R^3 и метод разделения переменных для уравнений Максвелла (3) в сферической системе координат. Пусть в R^3 выделены четыре области $Q_1, Q_2, \ Q_3, Q_4$, разделенных тремя сферами радиусов $r = b_1$, $r = a_0$, $r = b_2$, полагая $0 \le b_1 < a_0 < b_2$. Для всех областей полагаем $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Используя принцип суперпозиции, будем искать в первой области Q_1 вторичный потенциал U_1, во второй области Q_2 - потенциалы U_2 и U_3, для области Q_3 - потенциалы U_4 и U_5, для Q_4 - потенциал U_6. Вторичные потенциалы представим рядами Фурье - Лежандра, обеспечивающими выполнение условия исчезания на бесконечности и условия ограниченности потенциала в окрестности начала системы координат:

$$U_1 = \frac{1}{\varepsilon_1} \sum_{n=0}^{\infty} F_n r^n P_n(\cos\theta), \quad 0 \le r < b_1, \tag{4}$$

$$U_2 = \frac{1}{\varepsilon_1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^{-n-1} P_n(\cos\theta), \quad b_1 < r < a_0, \tag{5}$$

$$U_3 = \frac{1}{\varepsilon_1} \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^n P_n(\cos\theta), \quad b_1 < r < a_0, \tag{6}$$

$$U_4 = \frac{1}{\varepsilon_1} \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^{-n-1} P_n(\cos\theta), \quad a_0 < r < b_2, \tag{7}$$

$$U_5 = \frac{1}{\varepsilon_1} \sum_{n=0}^{\infty} D_n r^n P_n(\cos\theta), \quad a_0 < r < b_2, \tag{8}$$

$$U_6 = \frac{1}{\varepsilon_1} \sum_{n=0}^{\infty} H_n r^{-n-1} P_n(\cos\theta), \quad r > b_2, \tag{9}$$

где $P_n(\cos\theta)$ - полиномы Лежандра первого рода нулевого порядка степени n аргумента $\cos\theta$ (неотрицательных целых индексов n). Полиномы $P_n(\cos\theta)$

ортогональны с весом $\sin\theta$ на отрезке $(0,\pi)$; норма полиномов $P_n(x)$ равна $(2/(2n+1))^{(0.5)}$ в пространстве $L^2(-1,1)$, в котором они составляют базис; полиномы $P_n(x)$ - ограничены единицей по абсолютной величине для $x\in[-1,1]$, $n=0,1,2,3,...$

Коэффициенты $F_n, A_n, B_n, C_n, D_n, H_n$ рядов (4)-(9) будем искать в гильбертовом пространстве $\widetilde{l_2}$ с некоторым весом, обеспечивающим выполнение условия конечности интеграла энергии и, в частности, следующих граничных условий:

$$U_2+U_3=U_4+U_5=V_1^{(N)},\quad 0\le\theta\le\pi,\quad r=b_1, \tag{10}$$

$$U_2+U_3=U_4+U_5=V_2^{(M)},\quad 0\le\theta\le\pi,\quad r=b_2, \tag{11}$$

$$\frac{\partial[U_2+U_3]}{\partial r}=\frac{\partial[U_4+U_5]}{\partial r},\quad r=a_0,\quad 0\le\theta<\theta_0. \tag{12}$$

4. Парные функциональные уравнения.

Построим парные сумматорные функциональные уравнения относительно неизвестных коэффициентов $B_n, n\geqslant 0$ потенциала U_3 (см. (6)). Сначала получаем вспомогательные функциональные уравнения, используя граничные условия на сферическом сегменте и условие (12):

$$\sum_{n=0}^{\infty}(A_na_0^{-n-1}+B_na_0^n)P_n(\cos\theta)=V_0,\quad \theta_0<\theta\le\pi. \tag{13}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-n-1)a_0^{-n-2}(A_n-C_n)+na_0^{n-1}(B_n-D_n)\right]P_n(\cos\theta)=0,\quad 0\le\theta<\theta_0, \tag{14}$$

Исключим из уравнений (13), (14) три последовательности неизвестных коэффициентов A_n, C_n, D_n потенциалов U_2, U_4, U_5 (см. (5),(7),(8)), выразив их через коэффициенты B_n потенциала U_3 (см. (6)). Для этого в граничных условиях воспользуемся ортогональностью полиномов Лежандра $P_n(\cos\theta)$ с весом $sin\theta$ на отрезке $(0,\pi)$ и выполним интегрирование по θ. В результате получим для каждого $n=0,1,2,...$, систему трех линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_n,C_n,D_n:

$$A_nb_1^{-n-1}+B_nb_1^n=J_{n,1}^{(N)}, \tag{15}$$

$$A_na_0^{-n-1}+B_na_0^n-C_na_0^{-n-1}-D_na_0^n=0, \tag{16}$$

$$C_nb_2^{-n-1}+D_nb_2^n=J_{n,2}^{(M)}, \tag{17}$$

где

$$J_{n,1}^{(N)} = (2n+1)/2 \int_0^\pi (U_1^{(N)}) P_n(\cos\theta)\, sin\theta\, d\theta, \tag{18}$$

$$J_{n,2}^{(M)} = (2n+1)/2 \int_0^\pi (U_2^{(M)}) P_n(\cos\theta)\, sin\theta\, d\theta. \tag{19}$$

Для интегралов $J_{n,1}^{(N)}$ (18) и $J_{n,2}^{(M)}$ (19) величины потенциалов $U_1^{(N)}$ и $U_2^{(M)}$ введены в (1), (2).

Решение линейной системы (15)–(17) единственно, так как её определитель

$$\Delta_n^{(0)} = a_0^{-n-1} b_2^n - a_0^n b_2^{-n-1} \tag{20}$$

отличен от нуля (для каждого $n \geq 0$) в силу заданного по условию неравенства $a_0 < b_2$. Решаем линейную систему (15)–(17) по правилу Крамера, получаем:

$$A_n = -B_n b_1^{2n+1} + J_{n,1}^{(N)} b_1^{n+1}, \tag{21}$$

$$C_n = \left[B_n (a_0^n - b_1^{2n+1} a_0^{-n-1}) b_2^n + J_{n,1}^{(N)} b_1^{n+1} a_0^{-n-1} b_2^n - J_{n.2}^{(M)} a_0^n \right] / \Delta_n^{(0)} \tag{22}$$

$$D_n = \left[B_n (b_1^{2n+1} - a_0^n) b_2^{-n-1} - J_{n,1}^{(N)} \left(\frac{b_1}{a_0 b_2}\right)^{n+1} + J_{n,2}^{(M)} a_0^{-n-1} \right] / \Delta_n^{(0)}. \tag{23}$$

Подставим A_n, C_n, D_n (21)–(23) в (13), (14) и приходим к новым вспомогательным функциональным уравнениям:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Delta_n^{(0)}} \left\{ (2n+1) \left[B_n b_2^n \left(\left(\frac{b_1}{b_2}\right)^{2n+1} + 1 \right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + J_{n,1}^{(N)} \left(\frac{b_1}{b_2}\right)^{n+1} - J_{n,2}^{(M)} \right] \right\} P_n(\cos\theta) = 0, \quad 0 \leq \theta < \theta_0, \tag{24}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ B_n \left[a_0^n (1 - (b_1/a_0)^{2n+1} \right] + J_{n,1}^{(N)} (b_1/a_0)^{n+1} \right\} P_n(\cos\theta) = V_0, \quad \theta_0 < \theta \leq \pi. \tag{25}$$

Теперь в функциональных уравнениях (24), (25), содержащих одни отыскиваемые коэффициенты B_n, выделим главную часть и подготовим уравнения к регуляризации. Для этого в (24), (25) введем параметр малости $\widetilde{\beta_n}$ и выполним переобозначения коэффициентов $B_n, n \geq 0$:

$$\widetilde{\beta_n} = \frac{\left(\frac{b_1}{a_0}\right)^{2n+1} + \left(\frac{b_1}{b_2}\right)^{2n+1} + \left(\frac{a_0}{b_2}\right)^{2n+1} \left(1 - \left(\frac{b_1}{b_2}\right)^{2n+1}\right)}{1 + \left(\frac{b_1}{b_2}\right)^{2n+1}}, \tag{26}$$

$$B_n^{(1)} = B_n b_2^n \left[1 + (b_1/b_2)^{2n+1}\right] \frac{a_0^{-1}}{\Delta_n^{(0)}}. \tag{27}$$

Этим получили парную систему сумматорных функциональных уравнений, которую далее удобно преобразовывать в систему алгебраических уравнений:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\left\{B_n^{(1)} + \frac{1}{\Delta_n^{(0)}} J_{n,1}^{(N)} (\frac{b_1}{b_2})^{n+1}\right\} P_n(\cos\theta) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)\left\{\frac{1}{\Delta_k^{(0)}} J_{k,2}^{(M)}\right\} P_k(\cos\theta), \quad 0 \leqslant \theta < \theta_0, \tag{28}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{B_n^{(1)}\left[1 - \widetilde{\beta_n}\right] + J_{n,1}^{(N)}\left(\frac{b_1}{a_0}\right)^{n+1}\right\} P_n(\cos\theta) = V_0, \quad \theta_0 < \theta \leq \pi. \tag{29}$$

Рассмотрим некоторые свойства системы функциональных уравнений (28), (29):

а) в систему входят ряды по функциям Лежандра первого рода;

б) коэффициенты в (28), (29) при неизвестных $B_n^{(1)}$ имеют асимптотику при $n \to \infty$, отличающуюся на $O(n)$;

в) матричный оператор системы является неограниченным в пространстве $L_2(0, \pi)$.

До сих пор общего эффективного метода решения таких уравнений не найдено. Прямые численные методы решения таких систем и в настоящее время, время сверх мощных компьютеров, мало пригодны, в том числе из-за сложности оценок погрешностей решения уравнений. Вместе с тем, система (28), (29) допускает регуляризацию. Основу регуляризации составляет, в частности, применение интегральных преобразований типа Абеля. В результате в работе получена эффективно разрешимая система алгебраических уравнений второго рода. Для этого сначала сведем задачу отыскания коэффициентов $B_n^{(1)}$ (см. (28), (29)) к решению неоднородных интегральных уравнений I рода типа Абеля. С этой целью рассмотрим функциональное уравнение (29). Преобразование уравнения начнем с подстановки вместо функций Лежандра $P_n(cos\theta)$ их интегральных представлений Мелера-Дирихле [14]

$$P_n(\cos\theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{\theta}^{\pi}[\sin(n+\frac{1}{2})y]/\sqrt{\cos\theta - \cos y dy}. \tag{30}$$

Воспользуемся принадлежностью коэффициентов $B_n^{(1)}$ в (29) пространству l_2 и поменяем порядки интегрирования и суммирования. Этим преобразовываем сумматорное уравнение (29) в неоднородное интегральное уравнение типа Абеля первого рода

$$\int_{\theta}^{\pi} f(y)/\sqrt{\cos\theta-\cos y dy}=V_0. \tag{31}$$

Интегральное уравнение (31) имеет корневую особеность в ядре, возникшую в связи с применением (30) для функций Лежандра; здесь функция $f(y)\in \in L_2(0,\pi)$ и $f(y)$ содержит тригонометрический ряд. Спектр интегрального оператора, соответствующего левой части уравнения (31), имеет единственную точку сгущения $\{0\}$. Решим уравнение (31), применяя интегральное преобразование типа Абеля, и найдем единственное его решение

$$f(y)=\frac{2}{\pi}\frac{d}{dy}\int_{y}^{\pi}[V_0]/\sqrt{\cos y-\cos t\,dt}. \tag{32}$$

Запишем полученное решение $f(y)$ (32) в виде нового уравнения, учитывая, что $f(y)$ содержит новый тригонометрический ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{(1)}\left(1-\widetilde{\beta_n}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)y=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left[J_{k,1}^{(N)}\left(\frac{b_1}{b_2}\right)^{k+1}+V_0\delta_{k,0}\right]\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)y,\quad \theta_0<y\le\pi, \tag{33}$$

где $\delta_{k,0}$ - символ Кронекера.

Рассмотрим уравнение (28). Для его преобразования воспользуемся разностной связью между полиномами Лежандра и производными полиномов Лежандра

$$(2n+1)P_n(x)=P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x), \tag{34}$$

и подставим (34) в (28). Далее, учитывая равномерную сходимость рядов в (28), выполним почленное интегрирование и находим константу интегрирования, привлекая граничные условия. Теперь в обеих частях нового уравнения заменим полиномы Лежандра интегральными представлениями Мелера-Дирихле

$$P_n(\cos\theta)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{0}^{\theta}[\cos(n+\frac{1}{2})y]/\sqrt{\cos y-\cos\theta\,dy}. \tag{35}$$

Перенеся в уравнении (28) все слагаемые в левую часть равенства, воспользуемся принадлежностью коэффициентов рядов гильбертовому пространству l_2, вновь меняем порядки суммирования и интегрирования. Этим получили однородное интегральное уравнение первого рода типа Абеля

$$\int_{0}^{\theta} g(y)/\sqrt{\cos y-\cos\theta\,dy}=0. \tag{36}$$

Уравнение (36) имеет корневую особенность в ядре; функция $g(y) \in L_2(0,\pi)$, $g(0) = 0$, и $g(y)$ содержит тригонометрические ряды. Решим интегральное уравнение типа Абеля, применяя композицию с ядром. Найдем единственное его решение $g(y) = 0, \quad 0 \leq y < \theta_0$. Теперь запишем полученное решение $g(y) = 0$ в виде нового уравнения, также учитывая, что $g(y)$ содержит тригонометрические ряды. В итоге получили искомое функциональное уравнение:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(1)} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) y =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\Delta_m^{(0)}} \left[J_{m,1} \left(\frac{b_1}{b_2}\right)^{m+1} - J_{m,2} \right] \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) y, \quad 0 \leq y < \theta_0. \tag{37}$$

Уравнения (33), (37) составляют парную систему функциональных уравнений по полному ортогональному счетному набору тригонометрических функций $\sin\left(m + \frac{1}{2}\right) y$, $m = 0, 1, 2, ...$ в пространстве $L_2(0,\pi)$.

5. Система алгебраических уравнений второго рода.

Рассмотрим систему функциональных уравнений (33), (37) и завершим её регуляризацию. Отметим, что величины $\widetilde{\beta_n}$ - параметра малости, входящие в множители при коэффициентах $B_n^{(1)}$ в уравнении (33) имеют предел при $n \to \infty$, равный нулю, так как, согласно (26), находим, оценку для $\widetilde{\beta_n}$:

$$\widetilde{\beta_n} = O\left(q^{2n+1}\right), \quad q = \max\left[\frac{a_0}{b_2}, \frac{b_1}{a_0}, \frac{b_1}{b_2}\right], \quad 0 < q < 1, \quad n \to \infty. \tag{38}$$

Отметим, что в уравнениях (33), (37) все ряды есть ряды Фурье в $L_2(0,\pi)$. Полуобратим систему функциональных уравнений (33), (37), используя подход, близкий к методу задачи Римана-Гильберта [5].

В результате получаем искомую систему алгебраических уравнений второго рода:

$$B_n^{(1)} = \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(1)} \widetilde{\beta_n} [\delta_{m,0} - \omega_{n,m}(\theta_0)] +$$

$$+ \sum_{i=0}^{\infty} \left[J_{i,1}^{(N)} \left(\frac{b_1}{b_2}\right)^{i} + V_0 \delta_{i,0} \right] [\delta_{i,0} - \omega_{i,n}(\theta_0)] +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Delta_k^{(0)}} \left[J_{k,1}^{(N)} \left(\frac{b_1}{b_2}\right)^{k+1} - J_{k,2}^{(M)} \right] \omega_{k,n}(\theta_0), \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{39}$$

где искомые коэффициенты $B_n^{(1)}$ - введены в (6), (27), величины $\widetilde{\beta_n}$ - введены в (26), $J_{k,1}^{(N)}$ - в (18), $J_{k,2}^{(M)}$ - в (19), $\Delta_k^{(0)}$ - в (20), V_0 - известный потенциал сферического сегмента, $\delta_{n,m}$ - символ Кронекера,

$$\omega_{k,n}(\theta_0)=\frac{1}{\pi}\frac{\sin\left[(k-n)\theta_0\right]}{k-n}-\frac{1}{\pi}\frac{\sin\left[(k+n+1)\theta_0\right]}{k+n+1},\ k\neq n,$$

$$\omega_{n,n}(\theta_0)=\frac{1}{\pi}\theta_0-\frac{1}{\pi}\frac{\sin\left[(2n+1)\theta_0\right]}{2n+1},\quad k=n=0,1,2,... \tag{40}$$

Матричный оператор системы (39) вполне непрерывен в пространстве l_2. Это следует из того, что:

1) параметр малости (26) $\widetilde{\beta_n}$ убывает до нуля по степенному закону согласно оценке (38),

2) $\omega_{k,n}(\theta_0)$ (40) при фиксированном n и $k\to\infty$ имеют предел и предел равен нулю,

3) $J_{k,1}^{(N)}$ и $J_{k,2}^{(M)}$ по абсолютной величине ограничены равномерно по $k\geqslant 0$, отметим, что величины N, M - определяют число секций на секционированных сферах и по условию являются ограниченными,

4) $1/\Delta_n^{(0)}=O(a_0/b_2)^n,\quad a_0<b_2,\quad n\to\infty,$

5) правый столбец системы (39) принадлежит l_2, так как он состоит из двух сумм - сходящихся рядов, которые принадлежат l_2, при этом ряды сходятся равномерно по $\theta_0\in(0,\pi)$ (и при $b_1<a_0<b_2$).

Система уравнений (39) разрешима как аналитически, так и численно [15]- [18]. Численно система разрешима, например, методом редукции для любых значений $\theta_0\in(0,\pi)$, измеряющих величину угла среза сферического сегмента. Для ускорения метода редукции необходимо в системе (39) выполнить переобозначение коэффициентов $B_n^{(1)}$ и параметра малости $\widetilde{\beta_n}$ так, что

$$B_n^{(2)}=B_n^{(1)}q^n,\ \widetilde{\beta_n}^{(1)}=\widetilde{\beta_n}/q^n.$$

В результате вместо системы (39) получаем новую алгебраическую систему:

$$B_n^{(2)}=\sum_{m=0}^{\infty}B_m^{(2)}\widetilde{\beta_m}^{(1)}q^n[\delta_{m,0}-\omega_{n,m}(\theta_0)]+$$

$$+\sum_{i=0}^{\infty}\left[J_{i,1}^{(N)}\left(\frac{b_1}{b_2}\right)^i+V_0\delta_{i,0}\right][\delta_{i,0}-\omega_{i,n}(\theta_0)]q^n+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Delta_k^{(0)}}\left[J_{k,1}^{(N)}\left(\frac{b_1}{b_2}\right)^{k+1}-J_{k,2}^{(M)}\right]\omega_{k,n}(\theta_0)q^n,\quad n=0,1,2,..., \tag{41}$$

Аналитически система (39) и система (41) разрешимы, например, методом последовательных приближений для углов θ_0 таких, что $\theta_0<<1$ или $\pi-\theta_0<<1$. При этом для углов θ_0, близких к π, необходимо в системе (41) перейти к углам $\theta_1=\pi-\theta_0$ и вновь выполнить переход от $B_n^{(2)}$ к $B_n^{(3)}=(-1)^nB_n^{(2)}$, $n\geq 0$.

6. Некоторые варианты постановки и решения задачи.

Постановка исходной задачи электростатики предусматривает одновременное рассмотрение нескольких независимых задач. Отметим, что прикладное значение имеет знание величин потенциалов и полей вблизи сферических закруглений узлов и приборов электронных систем. Такое распределение поля можно первоначально моделировать несколькими вариантами - с помощью варьирования параметрами задачи:

а) выбором величин радиусов $r = b_1, r = a_0, r = b_2$,

б) выбором чисел N и M - числа секций на поверхностях секционированных сфер,

в) выбором значений потенциалов V для каждой секции,

г) выбором азимутальной ширины по θ каждой секции.

Эти варианты постановки задачи соответствуют разбиению пространства

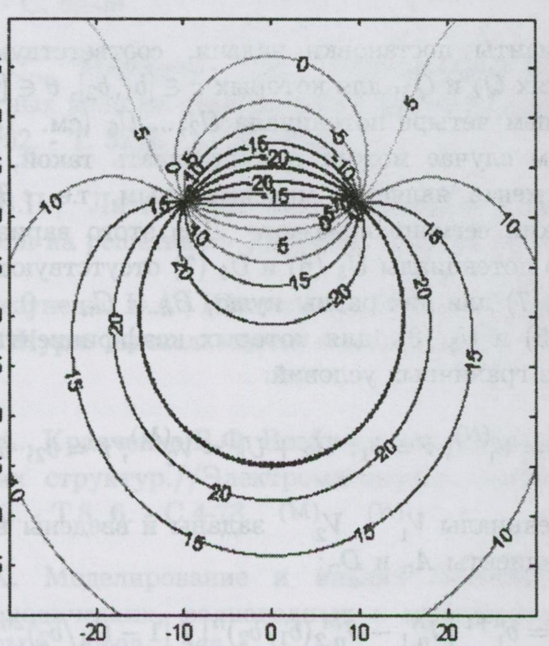

Рис. 1: Электростатические потенциалы двух секционированных сфер.

R^3 на четыре области $Q_1, ..., Q_4$. Сначала рассмотрим тестовые задачи, для которых решения строятся в явном виде; это задачи для областей Q_1 и Q_4, для которых полагаем, что $\theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi]$. В области Q_1, где $0 \leq r < b_1$, отыскиваем только один потенциал U_1 (см.(4)). Для потенциала U_1 коэффициенты F_n ряда Фурье находим в явном виде: $F_n = J_{n,1}^{(N)}/(b_1)^n$, $n \geqslant 0, \quad b_1 \neq 0$, где величины $J_{n,1}^{(N)}$ введены в (18). В области Q_4, для которой $r > b_2 > 0$, отыскиваем также только один потенциал U_6 (см. (9)). Коэффициенты H_n для потенциала U_6 таковы: $H_n = J_{n,2}^{(M)}(b_2)^{n+1}, n \geqslant 0$,

где значения $J_{n,1}^{(M)}$ определены в (19). К рассмотренным двум вариантам сводится случай, когда радиус сферического сегмента ($r = a_0$) и радиус внешней секционированной сферы ($r = b_2$) устремлены к бесконечности. В этом случае области Q_2, Q_3 и Q_4 объединяются в одну область Q, для которой $r > b_1$. При этом ищем потенциал U, ряд Фурье которого представим в виде ряда для U_6 с коэффициентами L_n. Коэффициенты L_n находим такими: $L_n = J_{n,1}^{(N)}/(b_1)^{n+1}, n \geqslant 0$.
(см. рис.1). На рис. 1 рассмотрен тестовый вариант, для которого даны:
1) потенциалы $V_1^{(N)} = -25$ и $V_2^{(M)} = 25$ соответственно для верхней и и нижней секционированных сфер,
2) $r = b_1 = 7.5$,
3) $\theta_{1,1} = \theta_{1,2} = 40$ градусов - полярный угол, соответствующий плоскости, разделяющей секционированные сферы,
4) $V_0 = 0$,
5) $a_0, b_2 \to \infty$.
Рассмотрим варианты постановки задачи, соответствующие построению решений в областях Q_2 и Q_3, для которых $r \in [b_1, b_2]$, $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi]$. В этих областях ищем четыре потенциала $U_2, ..., U_5$ (см. (5)-(8)). Тестовым вариантом в этом случае можно рассматривать такой, когда угол среза сферического сегмента является максимальным, т.е. $\theta_0 = \pi$. В этом случае сферический сегмент исчезает. Для этого варианта полагаем, по определению, что потенциалы U_3 (6) и U_4 (7) отсутствуют и коэффициенты рядов Фурье (6), (7) для них равны нулю, $B_n = C_n = 0$. Поиску подлежат потенциалы U_2 (5) и U_5 (8), для которых коэффициенты A_n и D_n рядов Фурье находим из граничных условий:

$$U_2 + U_5 = V_1^{(N)},\ r = b_1;\ U_2 + U_5 = V_2^{(M)},\ r = b_2;\ \theta \in (0, \pi), \qquad (42)$$

для которых потенциалы $V_1^{(N)}$, $V_2^{(M)}$ заданы и введены в (1), (2). Из (42) получаем коэффициенты A_n и D_n:

$$A_n = b_1^{n+1}\left[J_{n,1}^N - J_{n,2}^M (b_1/b_2)^n\right] / \left[1 - (b_1/b_2)^{2n+1}\right],$$

$$D_n = b_2^{-n}\left[J_{n,2}^M - J_{n,1}^N (b_1/b_2)^n\right] / \left[1 - (b_1/b_2)^{2n+1}\right],\ n = 0, 1, 2...$$

7. Выводы.

В работе решена задача электростатики на сферическом сегменте, размещенном между двумя секционированными сферами. Решение протестировано аналитически и численно рассмотрением нескольких ключевых предельных вариантов постановки задачи. Алгоритм решения задачи построен по блочному принципу и допускает применение для других задач на сферических и, например, на сферо - конических структурах.

Список литературы

1. Конторович М.И., Лебедев Н.Н. Об одном методе решения некоторых задач дифракции и родственных ей проблем. // Журн. Тех. Физ. - 1938. - Т.8, **10-11**. - С. 1193-1206.

2. Гринберг Г.А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. - М.:Изд-во АН СССР,1948. - 727с.

3. Уфлянд Я.С. О решении одного класса задач электростатики методом парных рядов.//Письма в Журн. Тех. Физ . - 1976. - Т.2, **17**. - С. 794-798.

4. Резуненко В.А. Интегральное уравнение задачи электростатики для сферического сегмента и диэлектрического закругления конусеа.// Вісн. ХНУ ім В.Н.Каразіна, Серія "Матем., прикладна матем. і механіка". - 2006. - Т. 749. - С. 50-56.

5. Агранович З.С., Марченко В.А., Шестопалов В.П. Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках. // Журн. техн. физ. - 1962. - Т. 32,4. - С. 381-394.

6. Шестопалов В.П., Литвиненко Л.Н., Масалов С.А., Сологуб В.Г. Дифракция волн на решетках. - Харьков: Изд. ХГУ, - 1973. - 288 с.

7. Радин А.М., Резуненко В.А., Шестопалов В.П. Излучение волн сферой с отверстием. //Журн. вычисл. матем. и матем. физ. - 1977. -Т.17, **2**. - С. 394-406.

8. Дорошенко В.А., Кравченко В.Ф. Возбуждение незамкнутых конических и биконических структур.//Электромагнитные волны и электронные системы. - 2003. - Т.8, **6**. - С.4-78.

9. Сиренко Ю.К. Моделирование и анализ переходных процессов в открытых периодических, волноводных и компактных резонаторах. - Харьков: ЭДЕНА, - 2003. - 363 с.

10. Свищев Ю.В., Тучкин Ю.А. Векторная задача дифракции электромагнитных волн на двух сферических сегментах.// ДАН УССР, сер. А. - 1987. - Т. 12. - С. 56-60.

11. Резуненко В.А. Рассеяние плоской волны сферой с круговым отверстием. //Электромагнитные волны и электронные явления. - 2005. - Т. 10, **8**. С. 5-15.

12. Куриляк Д.Б., Назарчук З.Т. Аналітико-числові методи в теорії дифракції хвиль на конічних і клиноподібних поверхнях. - Київ: Наукова Думка, - 2006. - 275 с.

13. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. - М.: -Мир, - 1987. - 312 с.

14. Суетин П.К. Еласситческие ортогональные многочлены. - М.: Наука, - 1979. - 416 с.

15. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. -Киев: Наукова Думка, - 1977. - 362 с.

16. Садовничий В.А. Теория операторов.- М.: Высшая школа, - 1999. - 368 с.

17. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. - Киев: Наукова Думка, - 1986. - 543 с.

18. Singh B.M., Rokne J.G. and Dhaliwal R.S. Two-Dimensional Electrostatic Problem in a Plane With Earthed Elliptic Cavity due to One or Two Collinear Charged Electroststic Strips //International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. Volume 2007, Article ID 60595, 9 pages, 2007. doi:10.1155/2007/60595.

Статья получена: 10.10.2010; окончательный вариант: 15.11.2010; принята: 19.11.2010.