Аффиннопараллельные поверхности

(Замечание к статье Д. З. Гордевского)

Я. П. Бланк

В предшествующей статье Д. З. Гордевский, в числе прочих результатов, определяет поверхности, допускающие параллельные поверхности с общими аффинными нормалями. Эта задача имеет следующее простое решение.

Пусть

$\bar{x}$ — радиус-вектор поверхности,

$\bar{y}$ — вектор аффинной нормали.

Для параллельной поверхности

$$\bar{x}^* = \bar{x} + \sigma \bar{y} \qquad (\sigma = \text{const.}).$$

Отнесём поверхность к аффинным линиям кривизны.

Имеют место формулы, аналогичные формулам Rodrigues'а:

$$\bar{x}_u + R_1 \bar{y}_u = 0, \qquad \bar{x}_v + R_2 \bar{y}_v = 0.$$

Отсюда

$$L^* = \left(\overset{*}{\bar{x}}_u \, \overset{*}{\bar{x}}_v \, \overset{*}{\bar{x}}_{uu}\right) = \rho_1^2 \rho_2 L,$$

где

$$\rho_1 = 1 - \frac{\sigma}{R_1}, \qquad \rho_2 = 1 - \frac{\sigma}{R_2}, \qquad N^* = \rho_1 \rho_2^2 N, \qquad M^* = 0;$$

следовательно,

$$E^* = \frac{L^*}{|L^* N^*|^{1/4}} = E \rho_1 |\rho_1 \rho_2|^{1/4}, \quad G^* = G \rho_2 |\rho_1 \rho_2|^{1/4}, \quad F^* = 0.$$

Обозначим

$$\sqrt{|\rho_1 \rho_2|} = \alpha.$$

По определению аффинной нормали

$$2\bar{y}^* = \frac{1}{\sqrt{E^* G^*}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \frac{G^* \overset{*}{\bar{x}}_u}{\sqrt{E^* G^*}} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{E^* \overset{*}{\bar{x}}_v}{\sqrt{E^* G^*}} \right\} =$$

$$= 2\alpha^{-\frac{1}{4}} \bar{y} + \alpha^{-\frac{5}{4}} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u} \frac{\bar{x}_u}{E} + \frac{\partial \alpha}{\partial v} \frac{\bar{x}_v}{G} \right).$$

Чтобы поверхность $\bar{x}^*$ имела с поверхностью $\bar{x}$ общие аффинные нормали, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} = \frac{\partial \alpha}{\partial v} = 0.$$

Итак, имеем:

$$\left(1 - \frac{\sigma}{R_1}\right)\left(1 - \frac{\sigma}{R_2}\right) = \pm\, \alpha^4$$

или

$$K\sigma^2 - 2\,H\sigma = \mathrm{const}.$$