ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХАРЬКОВСКОГО ГОСУНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXVII. Серия 4 1961

ОБ ОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ РОСТА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ОТ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Л. И. Ронкин

§ 1. Целую функцию $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ принято называть функцией конечной степени, если существуют константы $A > 0$ и $a > 0$ такие, что при всех $z_1, z_2, \ldots, z_n$ выполняется неравенство

$$|f(z_1, z_2, \ldots, z_n)| < Ae^{a(|z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|)}.$$

Точная нижняя граница чисел a, при которых можно подобрать A так, чтобы выполнялось это неравенство, называется степенью функции $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$.

Пусть $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ — целая функция конечной степени. Обозначим

$$M_f(R_1, R_2, \ldots, R_n) = \max_{|z_i| = R_i,\ i=1, 2, \ldots, n} |f(z_1, z_2, \ldots, z_n)|$$

и рассмотрим в n-мерном вещественном пространстве множество B_f всех точек P, координаты которых $a_1, a_2, \ldots, a_n$ удовлетворяют условию:

1) существует константа A_p такая, что неравенство

$$M_f(R_1, R_2, \ldots, R_n) < A_p e^{\sum_{k=1}^{n} a_k R_k}$$

выполняется при любых $R_1, R_2, \ldots, R_n$.

Так как $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ является по предположению функцией конечной степени, то множество B_f непусто. Из определения множества B_f следует, что вместе с каждой его точкой $(a_1', a_2', \ldots, a_n')$ этому множеству принадлежит весь гипероктант $\{a_i \geqslant a_i'\}_{i=1, 2, \ldots n}$. Поэтому множество $\mathring{B}_f$, состоящее из всех внутренних точек множества B_f, также непусто. Покажем, что множество B_f является выпуклым множеством. Действительно, пусть $(a_1', a_2', \ldots, a_n') \in B_f$ и $(a_1'', a_2'', \ldots, a_n'') \in B_f$. Это означает, что существуют константы A_1 и A_2 такие, что при любых $R_1, R_2, \ldots, R_n$

$$M_f(R_1, R_2, \ldots, R_n) \leqslant A_1 e^{\sum_{k=1}^{n} a_k' R_k}; \quad M_f(R_1, R_2, \ldots, R_n) \leqslant A_2 e^{\sum_{k=1}^{n} a_k'' R_k}.$$

Отсюда следует, что при $t \in [0, 1]$

$$M_f(R_1, R_2, \ldots, R_n) \leqslant A_1^t A_2^{1-t} \exp\{\sum_{k=1}^{n} [at_k + (1-t) a_k] R_k\},$$

то есть вместе с двумя точками в B_f входит и соединяющий их отрезок. Следовательно, множество B_f — выпукло, а $\mathring{B}_f$ есть некоторая выпуклая область. Поэтому совокупность граничных точек области $\mathring{B}_f$ образует некоторую непрерывную гиперповерхность, которую мы обозначим S_f. Эта гиперповерхность делит гипероктант $\{a_i \geqslant 0\}_{i=1, 2, \ldots, n}$ на две части. В одной из них (не содержащей начала координат) лежат точки, координаты которых удовлетворяют условию *1*), во второй же — точки, координаты которых не удовлетворяют этому условию. Тем самым гиперповерхность S_f является характеристикой роста функции $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Назовем S_f гиперповерхностью сопряженных степеней функции $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, а каждую систему чисел $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, являющуюся системой координат какой-либо точки $P \in S_f$, назовем системой сопряженных степеней рассматриваемой функции. Легко видеть, что принадлежность точки $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ к гиперповерхности S_f эквивалентна выполнению следующих двух условий:

2 а) для любого $\varepsilon > 0$ существует такая константа $A_\varepsilon > 0$, что при всех $R_1, R_2, \ldots, R_n$ выполняется неравенство

$$M_f(R_1, R_2, \ldots, R_n) < A_\varepsilon e^{\sum\limits_{k=1}^{n} (\sigma_k+\varepsilon) R_k}; \tag{1}$$

2 б) для любых $\sigma_1', \sigma_2', \ldots, \sigma_n'$, где все $\sigma_i' < \sigma_i$, существует последовательность $\{z_1^{(l)}, z_2^{(l)}, \ldots, z_n^{(l)}\}$ такая, что $\sum\limits_{k=1}^{n} |z_k^{(l)}| \to \infty$ при $l \to \infty$ и

$$|f(z_1^{(l)}, z_2^{(l)}, \ldots, z_n^{(l)})| > exp\{\sum_{k=1}^{n} \sigma_k' |z_k^{(l)}|\}. \tag{2}$$

Заметим, что выполнение условий *2 а*) и *2 б*) можно взять в качестве определения сопряженных степеней, не связанного с геометрическими представлениями *.

Гиперповерхность сопряженных степеней может содержать лучи, параллельные координатным осям. Так, кривая сопряженных степеней функции e^{az+bu} состоит из двух лучей $\{a_1 \geqslant |a|, a_2 = |b|\}$ и $\{a_1 = |a|, a_2 \geqslant |b|\}$. В этом случае системам сопряженных степеней $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, отвечающим внутренним точкам луча, параллельного, например, оси a_j, может быть сопоставлена система сопряженных степеней $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{j-1}, \sigma_j', \sigma_{j+1}, \ldots, \sigma_n)$, определяющая крайнюю точку луча. Последняя система обладает тем характеристическим свойством, что она перестает быть системой сопряженных степеней при замене числа σ_j' меньшим. Назовем число σ_j', обладающее таким свойством, степенью, нижнесопряженной к $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{j-1}, \sigma_{j+1}, \ldots, \sigma_n)$, и обозначим ее через $\underline{\sigma}_j(\sigma_1, \ldots, \sigma_{j-1}, \sigma_{j+1}, \ldots, \sigma_n)$ или просто $\underline{\sigma}_j$. Если в системе $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ каждое σ_i является степенью нижнесопряженной к остальным, то такую систему мы будем называть системой нижнесопряженных степеней. Например, упоминавшаяся уже функция e^{az+bu} имеет одну пару нижнесопряженных степеней, а именно: $(|a|, |b|)$. Приведем теперь без доказательств, которые весьма просты, следующие два свойства нижнесопряженных степеней:

а) из чисел $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, образующих систему сопряженных степеней, по крайней мере, одно является степенью, нижнесопряженной к остальным.

* Такой подход к определению сопряженных степеней был проведен нами в [1].

б) если целая функция $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ при всех $z_1, z_2, \ldots, z_n$ удовлетворяет неравенству

$$|f(z_1, z_2, \ldots, z_n)| < Me^{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k |z_k|} \qquad (a_k \geqslant 0, k = 1, 2, \ldots, n),$$

то существует, по крайней мере, одна система нижнесопряженных степеней $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ такая, что $\sigma_k \leqslant a_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Из *а*) следует, что гиперповерхность сопряженных степеней есть объединение всех гиперповерхностей

$$a_k = \underline{\sigma}_k (a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_n) \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Общая часть этих гиперповерхностей состоит из тех точек, координаты которых образуют системы нижнесопряженных степеней.

Важные свойства сопряженных степеней могут быть получены путем установления связи между сопряженными степенями целых функций конечной степени и областями сходимости некоторых степенных рядов. Эта связь выражается следующей теоремой, являющейся естественным обобщением известной теоремы Э. Бореля для функций одной переменной.

Теорема 1*. *Гиперповерхность сопряженных степеней целой функции конечной степени*

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_n = 0}^{\infty} \frac{a_{k_1, k_2, \ldots, k_n}}{k_1!\, k_2! \ldots k_n!} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \ldots z_n^{k_n} \tag{3}$$

*совпадает с гиперповерхностью сопряженных радиусов сходимости** ряда*

$$\sum_{k_1, k_2, \ldots, k_n = 0}^{\infty} \frac{a_{k_1, k_2, \ldots, k_n}}{z_1^{k_1+1} z_2^{k_2+1} \ldots z_n^{k_n+1}}. \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим через $\mathring{D}_f$ область, ограничиваемую гиперповерхностью сопряженных радиусов сходимости. Достаточно показать, что $\mathring{B}_f = \mathring{D}_f$. Пусть точка $(a_1, a_2 \ldots, a_n) \in \mathring{B}_f$. Из определения области $\mathring{B}_f$ следует, что для любого достаточно малого ε найдется такая константа A_ε, что при любых $R_1, R_2, \ldots . R_n$ будет выполняться неравенство.

Из этого неравенства, применяя неравенства Коши для коэффициентов степенного ряда, получим, что

$$\frac{|a_{k_1, k_2, \ldots, k_n}|}{k_1!\, k_2! \ldots k_n!} \leqslant \frac{A_\varepsilon \exp\left(\sum\limits_{k=1}^{n} (a_i - \varepsilon) R_i\right)}{R_1^{k_1} R_2^{k_2} \ldots R_n^{k_n}}$$

при любых $R_i > 0$. Подставляя $R_i = k_i (a_i - \varepsilon)^{-1}$ будем иметь

$$|a_{k_1, k_2, \ldots, k_n}| \leqslant A_\varepsilon \prod_{i=1}^{n} k_i! \left(\frac{e(a_i - \varepsilon)}{k_i}\right)^{k_i}.$$

* В несколько иной формулировке и другим путем эта теорема была получена нами в [1].

** Сопряженными радиусами сходимости ряда $\sum\limits_{0}^{\infty} z_1^{-k_1} z_2^{-k_2} \ldots z_n^{-k_n} a_{k_1, \ldots, k_n}$ называют каждую систему чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$, удовлетворяющую условию: рассматриваемый ряд сходится при $|z_i| > r_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ и расходится при $|z_i| < r_i$; $i = 1, 2, \ldots, n$ (см., например, [2]).

Отсюда непосредственно следует, что ряд (4) сходится при $|z_i| > a_i - \eta$. $0 < \eta < \varepsilon$, $i = 1,2,\ldots,n$. Это означает, что $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathring{D}_f$, то есть, что $\mathring{B}_f \subset \mathring{D}_f$. Для доказательства обратного включения предположим, что $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathring{D}_f$ то есть, что при достаточно малых положительных ε

$$\sum_{k_1 k_2, \ldots, k_n = 0}^{\infty} |a_{k_1 k_2, \ldots, k_n}| (a_1 - \varepsilon)^{-k_1 - 1} (a_2 - \varepsilon)^{-k_2 - 1} \ldots (a_n - \varepsilon)^{-k_n - 1} = M_\varepsilon < \infty.$$

Отсюда получаем, что

$$|a_{k_1 k_2, \ldots, k_n}| < M_\varepsilon (a_1 - \varepsilon)^{k_1 + 1} (a_2 - \varepsilon)^{k_2 + 1} \ldots (a_n - \xi)^{k_n + 1}$$

и, следовательно, функция $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ удовлетворяет неравенству

$$|f(z_1, z_2, \ldots, z_n)| \leqslant M_\varepsilon \sum_{k_1 k_2, \ldots, k_n = 0}^{\infty} \frac{(a_1 - \varepsilon)^{k_1 + 1} (a_2 - \varepsilon)^{k_2 + 1} \ldots (a_n - \varepsilon)^{k_n + 1} |z_1|^{k_1} |z_2|^{k_2} \ldots |z_n|^{k_n}}{k_1!\, k_2! \ldots k_n!},$$

то есть

$$|f(z_1, z_2, \ldots, z_n)| < M_\varepsilon^1 e^{\sum\limits_{k=1}^{n} (a_i - \varepsilon) | z_i |}.$$

Таким образом, $(a_1 - \varepsilon, a_2 - \varepsilon, \ldots, a_n - \varepsilon) \in \mathring{B}_f$, поэтому $(a_1, a_2, \ldots a_n) \in \mathring{B}_f$ и, стало быть, $\mathring{D}_f \subset \mathring{B}_f$. Теорема доказана.

В силу теоремы 1 всякое свойство сопряженных радиусов сходимости* может быть сформулировано как свойство сопряженных степеней. В частности, для того, чтобы числа $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, где все $\sigma_i > 0$ образовывали систему сопряженных степеней функции $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\overline{\lim_{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n) \to \infty}} \sqrt[k_1 + k_2 + \ldots + k_n]{\frac{|a_{k_1, k_2, \ldots, k_n}|}{\sigma_1^{k_1} \sigma_2^{k_2} \ldots \sigma_n^{k_n}}} = 1.$$

§ 2. Особый интерес представляет класс целых функций конечной степени, у которых гиперповерхностью сопряженных степеней является граница гипероктанта $\left\{ a_i > \sigma_i \atop i=1,2,\ldots,n \right\}$**. В этом случае функция имеет лишь

---

* О свойствах сопряженных радиусов сходимости см. [2].

** М. М. Джрбашяном [3] было определено понятие порядка и типа для некоторого класса целых функций от нескольких переменных. В случае экспоненциального роста целую функцию $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ он называет функцией типа $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, если:

1. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $R(\varepsilon)$, что при $r_k > R(\varepsilon)$, $k = 1,2, \ldots n$

$$M_f(r_1, r_2, \ldots r_n) < e^{\sum\limits_{k=1}^{n} (\sigma_k + \xi) r_k}.$$

2. Для любого $\varepsilon > 0$ существуют числа $r_1(\varepsilon), \ldots r_{i-1}(\varepsilon), r_{i+1}(\varepsilon), \ldots r_n(\varepsilon)$ и последовательность $\left\{ r_{ki}^{(k)} \right\}$ такие, что $r_i^k \to \infty$ при $k \to \infty$ и при любых $r > r_j(\varepsilon)$, $ij \neq i$

$$M_f(r_1, \ldots r_{i-1}, r_i^k, \ldots r_n) > e^{(\sigma_i - \varepsilon) r_i^{(k)}}.$$

Очевидно, что функция $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, имеющая в указанном смысле тип $(\sigma_1, \sigma_3, \ldots, \sigma_n)$, характеризуется в наших терминах, как функция, у которой гиперповерхностью сопряженных степеней является граница гипероктанта $\{a_i > \sigma_i\}_{i=1,2,\ldots n}$, при этом числа $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ образуют единственную для рассматриваемой функции систему нижнесопряженных степеней.

одну систему нижнесопряженных степеней. Оказывается, что к такого рода функциям относятся целые функции конечной степени, в определенном смысле медленно растущие при вещественных значениях переменных.

Обозначим через $\sigma_{f, z_i}(z_1, z_2, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_n)$ степень функции $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ по переменной z_i при фиксированных значениях остальных переменных. Обозначим также

$$\bar{\sigma}_{f,z_i} = \sup_{z_j,\, j \neq i} \bar{\sigma}_{f,z_i}(z_1, z_2, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_n).$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть целая функция $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ такая, что $\bar{\sigma}_{f,z_i} < \infty$; $i = 1,2, \ldots n$, мажорируется при вещественных значениях переменных произведением $\prod_{i=1}^{n} \alpha_i(x_i)$, в котором функции $\alpha_i(x) > 1$ и удовлетворяют условию*

а) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \alpha_i(t)}{1+t^2}\, dt < \infty$

и одному из условий

б) $\alpha(t_1 + t_2) \leqslant \alpha(t_1)\, \alpha(t_2)$

при любых t_1, t_2 или

б') $\alpha(t_1) \geqslant \alpha(t_2)$,

при $|t_1| > |t_2|$.

Тогда гиперповерхностью сопряженных степеней функции $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ служит граница гипероктанта $\{a_i > \bar{\sigma}_{f,z_i}\}_{i=1,2,\ldots,n}$.

Доказательство. Известно (см. 4, 5), что если положительная функция $\alpha(t)$ удовлетворяет условию а) и одному из условий б) или б'), то существует целая функция конечной степени $\Phi(z)$, удовлетворяющая при любом вещественном λ условию

$$\lim_{|x| \to \infty} \Phi(\lambda x)\, \alpha(x) = 0.$$

Пусть функции $\Phi_i(z)$, $i = 1,2, \ldots n$, целые функции конечной степени 1, обладающие указанным свойством относительно функций $\alpha_i(t)$, $i = 1,2, \ldots n$. Рассмотрим произведение

$$g_\lambda(z_1, z_2, \ldots, z_n) = f(z_1, z_2, \ldots z_n) \prod_{i=1}^{n} \Phi_i(\lambda z_i).$$

Так как

$$\lim_{|x| \to \infty} |\alpha_i(x)\, \Phi_i(\lambda x)| = 0$$

и при любых $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$|f(x_1, x_2, \ldots, x_n)| \leqslant \alpha_1(x_1)\, \alpha_2(x_2) \ldots \alpha_n(x_n),$$

то

$$\lim_{|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| \to \infty} |g_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n)| = 0.$$

Следовательно, функция $g_\lambda(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ ограничена при вещественных значениях переменных. Последовательно применяя к этой функции принцип Фрагмена-Линделефа для полуплоскости, получим следующие неравенства:

$$
\begin{aligned}
&|g_\lambda(z_1, x_2, \ldots, x_n)| \leqslant C_\lambda e^{\bar{\sigma}_{g_\lambda, z_1}|y_1|}\\
&|g_\lambda(z_1, z_2, x_3, \ldots x_n)| \leqslant C_\lambda \exp(\bar{\sigma}_{g_\lambda, z_1}|y_1| + \bar{\sigma}_{g_\lambda, z_2}|y_2|)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&|g_\lambda(z_1, z_2, \ldots, z_n)| \leqslant C_\lambda \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \bar{\sigma}_{g_\lambda, z_k}|y_k|\right),
\end{aligned}
\tag{5}
$$

где

$$C_\lambda = \operatorname*{Sup}_{x_1, x_2, \ldots, x_n} |g_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n)|.$$

Из последнего неравенства следует, что функция $g_\lambda(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ является функцией конечной степени, имеющей гиперповерхностью сопряженных степеней границу гипероктанта $\{a_i > \bar{\sigma}_{g_\lambda, z_i}\}$ $i = 1, 2, \ldots, n$.

Для получения неравенства, доказывающего аналогичное утверждение относительно функции $f(z_1, z_2, \ldots, z_n,)$ оценим снизу модуль каждой из функций $\Phi_i(\lambda z_i)$. Эти функции, как целые функции конечной степени, ограниченные на вещественной оси, являются функциями вполне регулярного роста [6]. Поэтому при любом $\varepsilon > 0$ для всех значений $r = |z|$, за исключением, быть может, множества E нулевой относительной меры,

$$\ln|\Phi_k(\lambda z)| > -\varepsilon r \quad k = 1, 2, \ldots n. \tag{6}$$

Следовательно, в любом интервале $(r_k, r_k(1+\varepsilon))$ найдется значение $r_k = r_k' \bar{\in} E$. Отсюда, в силу неравенств (5) и (6) следует, что при любых $r_1, r_2, \ldots, r_n$

$$
\begin{aligned}
\ln M_f(r_1, r_2, \ldots, r_n) &\leqslant \ln M_f(r_1', r_2', \ldots r_n') \leqslant\\
&\leqslant \ln C_\lambda + \sum_{k=1}^{n} (\bar{\sigma}_{g_\lambda, z_k} + \varepsilon) r_k' <\\
&< \ln C_\lambda + \sum_{k=1}^{n} \bar{\sigma}_{g_\lambda, z_k} r_k + \varepsilon \sum_{k=1}^{n} (\bar{\sigma}_{g_\lambda, z_k} + 1 + \varepsilon) r_k.
\end{aligned}
$$

Замечая, что $\bar{\sigma}_{g_\lambda, z_k} = \bar{\sigma}_{f, z_k} + \lambda$, и выбирая λ и ε достаточно малыми получаем, что для любого $\eta > 0$ при всех $z_1, z_2, \ldots, z_n$

$$|f(z_1, z_2, \ldots, z_n)| < A_\varepsilon e^{\sum_{k=1}^{n} (\sigma_{f, z_k} + \eta)|z_k|}.$$

Из этого неравенства и определения чисел $\bar{\sigma}_{f, z_k}$ следует, что числа $\sigma_{f, z_1}, \bar{\sigma}_{f, z_2}, \ldots, \bar{\sigma}_{f, z_n}$ образуют систему нижнесопряженных степеней. Очевидно, что других систем нижнесопряженных степеней у функции $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ не имеется. Следовательно, гиперповерхностью сопряженных степеней этой функции является граница гипероктанта $\{a_i > \bar{\sigma}_{f, z_i}\}_{i=1,2,\ldots n}$.

Теорема доказана.

В заключение приношу глубокую благодарность проф. Б. Я. Левину за ценные указания.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Л. И. Ронкин. О типах целой функции двух комплексных переменных Матем. сб. **39** (81), (1956), 253—266.

[2]. Б. А. Фукс. «Теория аналитических функций многих комплексных переменных». Гостехиздат, М.—Л. (1948), 76—86.

[3]. М. М. Джрбашян. К теории некоторых классов целых функций многих переменных, изд. АН Армянской ССР, сер. физ.-мат., естеств. и техн. наук, т. VIII, № 4, (1955), 1—23.

[4]. В. А. Марченко. О некоторых вопросах аппроксимации непрерывных функций на всей вещественной оси, «Зап. матем. отдел. физ.-мат. факультета ХГУ и Харьковского математ. об-ва», сер. 4, т. XXII, (1950), 115—125.

[5]. Л. И. Ронкин. Об аппроксимации целых функций тригонометрическими полиномами. «ДАН СССР», 92, № 5, (1953), 887—890.

[6]. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций, Гостехиздат, М., (1956).