Выпуск 9 1969

ОБ ОДНОМ ПРЕДЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

А. С. Сохин

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье рассматривается краевая задача Дирихле для бигармонического оператора в специального вида области, граница которой содержит большое число мелких кусков, и исследуется проведение решения этой задачи, когда число кусков неограниченно растет.

Пусть B — открытое множество, являющееся внутренностью круга $K_1 = \{x : |x| \leqslant R\}$ за исключением дуг Γ_i окружности $\Gamma_0 = \{x : x = r_0\}$, имеющих длину hr_0 и расположенных периодически с периодом lr_0, ∂B — множество граничных точек области B, т. е. $\partial B = \Gamma \cup \Gamma_1$, $\Gamma = \bigcup_i \Gamma_i$, $\Gamma_1 = \{x : |x| = R\}$, $C\Gamma$ — дополнение множества Γ до окружности Γ_0.

Рассмотрим в области B краевую задачу Дирихле для бигармонического оператора:

$$\Delta^2 u(x) = \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} = f(x), \quad (x_1, x_2) \in B, \tag{1}$$

$$u(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial B, \tag{1'}$$

где n — нормаль к ∂B, $f(x)$ — заданная функция из $L_2(B)$.

Пусть $u(x; B)$ — решение этой задачи. Обозначим через $B^{(k)}$ область B, у которой дуги Γ_i имеют длину $r_0 h_k$ и расположены периодически с периодом $r_0 l_k$. Основной результат статьи содержится в следующей теореме.

Теорема. *Пусть* h_k и l_k *при* $k \to \infty$ *стремятся к нулю так, что*

$$\lim_{k\to\infty}\left[-l_k \ln \sin \frac{\pi h_k}{2 l_k}\right] = a \qquad (0 < a < \infty); \tag{2}$$

тогда соответствующая последовательность решений $u(x; B^{(k)})$ *сходится к функции* $u(x)$, *удовлетворяющей уравнению* (1) *при* $|x| < r_0$ *и* $r_0 < |x| < R$, *граничным условиям*

$$u(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial r} = 0, \qquad x \in \Gamma_1 \tag{3}$$

и следующим граничным условиям на внутренней окружности Γ_0:

$$u^+ = u^- = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^+ = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^- = \frac{\partial u}{\partial r},$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right)^+ - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right)^- = \frac{4\pi}{a r_0}\frac{\partial u}{\partial r}, \tag{3'}$$

где знаками $\pm$ *отмечены предельные значения функций при* $r = r_0 \pm 0$ *соответственно.*

Как известно, уравнение (1) и граничные условия (1') описывают прогиб пластинки, жестко закрепленной по окружности Γ_1 и дугам окружности Γ_i, под действием силы, распределенной с плотностью $f(x)$ и действующей нормально к плоскости пластинки. Из сформулированной теоремы следует, что прогиб указанной пластинки, когда число дуг Γ_i окружности Γ_0 велико, можно приближенно найти, решая краевую задачу для пластинки с жестким закреплением на окружности Γ_1 и упругим закреплением на всей окружности Γ_0, которое определяется условием (3'). Последняя же задача значительно проще.

2. СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ К БЕСКОНЕЧНЫМ ЛИНЕЙНЫМ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ УРАВНЕНИЙ

Доказательство основного результата будет проведено для функции Грина задачи (1)—(1'). Назовем *функцией Грина* (с особенностью в точке $\xi=(\rho, \psi_0)$) задачи Дирихле для бигармонического оператора в области B функцию $G(x; \xi)$, удовлетворяющую уравнению

$$\Delta_x^2 G(x; \xi) = \delta(x; \xi), \qquad x \in B$$

и граничному условию

$$G(x; \xi) = \frac{\partial G(x; \xi)}{\partial n} = 0, \qquad x \in \partial B,$$

где n — нормаль к ∂B. Для определенности будем считать, что $|\xi| < r_0$. Не уточняя пока задачу и действуя формально, мы сведем ее к решению последовательности бесконечных линейных алгебраических систем уравнений, докажем их разрешимость и выясним свойства решений этих систем. После этого строго докажем, что построенная формально этим способом функция Грина удовлетворяет всем нужным требованиям.

Пусть $g_0(x; \xi)$ — функция Грина задачи Дирихле для бигармонического оператора в круге $K_0 = \{x : |x| \leqslant r_0\}$, продолженная нулем на всю плоскость, т. е.

$$g_0(x; \xi) = \begin{cases} \frac{1}{8\pi}|x-\xi|^2 \ln|x-\xi| + w_0(x; \xi), & |x| \leqslant r_0 \\ 0 & |x| \geqslant r_0 \end{cases}$$

где

$$\Delta_x^2 w_0(x; \xi) = 0, \qquad |x| < r_0,$$

$$g_0(x; \xi) = \frac{\partial g_0(x; \xi)}{\partial r} = 0, \qquad |x| = r_0.$$

Разложение функции $g_0(x; \xi)$ в ряд Фурье имеет вид

$$g_0(x; \xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n(r; \rho) e^{in(\varphi - \psi_0)},$$

где коэффициенты $g_n(r; \rho)$ — вещественные, непрерывно дифференцируемые и равные нулю при $r \geqslant r_0$ функции от r, обладающие свойствами

$$g_n(r; \rho) = g_{-n}(r; \rho),$$

$$\left|\frac{\partial^2 g_n(r_0; \rho)}{\partial r^2}\right| \leqslant K(\rho)\left(\frac{\rho}{r_0}\right)^{|n|}, \tag{4}$$

$$\left|\frac{\partial^3 g_n(r_0; \rho)}{\partial r^3}\right| \leqslant K(\rho)\left(\frac{\rho}{r_0}\right)^{|n|}.$$

Выражения для $g_n(r; \rho)$ выписаны в приложении. Функцию Грина ищем в виде

$$G(x; \xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\psi_0}[g_n(r; \rho) e^{in\varphi} + v_n(r; \varphi)], \tag{5}$$

функции $v_n(r, \varphi)$ трижды непрерывно дифференцируемы, имеют кусочно-непрерывные четвертые производные при $|x| < r_0$ и $r_0 < |x| < R$ удовлетворяют условиям:

1. $\Delta^2 v_n(r, \varphi) = 0, \ |x| < r_0, \ r_0 < |x| < R.$ (6)

2. $v_n(r, \varphi) = \dfrac{\partial v_n(r, \varphi)}{\partial r} = 0, \ x = (r, \varphi) \in \Gamma \cup \Gamma_1,$ (6′)

$$v_n(r_0 - 0, \varphi) = v_n(r_0 + 0, \varphi), \ \frac{\partial v_n(r_0 - 0, \varphi)}{\partial r} = \frac{\partial v_n(r_0 + 0, \varphi)}{\partial r}.$$
$(|\varphi| \leqslant \pi)$

3. Вторые и третьи производные по r функции $g_n(r, \varphi) e^{in\varphi} + v_n(r, \varphi)$ непрерывны при $x \in C\Gamma$.

4. $v_n(r, \varphi) \in W_2^2(B).$ (6″)

Пространство $W_2^k(B)$ определим как замыкание k раз непрерывно дифференцируемых в $B + \partial B$ функций по норме

$$\| u \|_k^2 = \iint_B [\, |u(x)|^2 + |\nabla_1 u(x)|^2 + \ldots + |\nabla_k u(x)^2] \, dx,$$

где

$$\nabla_k u(x) = \left\{ \frac{\partial^i u(x)}{\partial x_1^\alpha \partial x_2^\beta} \right\}_{\alpha+\beta=i} \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Нетрудно доказать, что сформулированные условия определяют функцию $v_n(r, \varphi)$ однозначно.

Из единственности функции $v_n(r, \varphi)$ следует, что

$$\overline{v}_n(r, \varphi) = v_{-n}(r, \varphi). \tag{7}$$

Поэтому достаточно определить функции $v_n(r, \varphi)$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$. Пусть решение задачи (6) — (6″) существует. Так как функция $e^{-inl} v_n(r, \varphi + l)$ удовлетворяет условиям (6) — (6″), то из единственности следует

$$e^{-inl} v_n(r, \varphi + l) \equiv v_n(r, \varphi).$$

Поэтому функция $e^{-in\varphi} v_n(r, \varphi)$ периодична по φ с периодом l и, следовательно, имеем разложения в ряды Фурье

$$v_n(r_0, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m^{(n)} e^{i(mp+n)\varphi},$$
$$\frac{\partial v_n(r_0, \varphi)}{\partial r} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \beta_m^{(n)} e^{i(mp+n)\varphi}. \tag{8}$$

Из условия (6″) следует, что

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |m|^3 |\alpha_m^{(n)}|^2 < +\infty,$$
$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |m| |\beta_m^{(n)}|^2 < +\infty. \tag{8′}$$

Методом разделения переменных, решая отдельно задачу для круга $r \leqslant r_0$ и кольца $r_0 \leqslant r \leqslant R$, найдем, что функция $v_n(r, \varphi)$, удовлетворяющая уравнению (6), условию (8) и граничному условию

$$v_n(r, \varphi) = \frac{\partial v_n(r, \varphi)}{\partial r} = 0, \ r = R,$$

имеет вид

$$v_n(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\alpha_m^{(n)} A_{mp+n}(r) + \beta_m^{(n)} B_{mp+n}(r)\right] e^{i(mp+n)\varphi}, \tag{9}$$

где $|n| = 0, 1, 2 \ldots$

$$A_n(r) = \frac{|n|+2}{2}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{n} - \frac{|n|}{2}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{|n|+2},$$

$$B_n(r) = \frac{r_0}{2}\left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^{|n|+2} - \left(\frac{r}{r_0}\right)^{|n|}\right], \quad r \leqslant r_0$$

$$A_n(r) = \frac{a_n(r) b_n'(r_0) - a_n'(r_0) b_n(r)}{a_n(r_0) b_n'(r_0) - a_n'(r_0) b_n(r_0)}, \tag{10}$$

$$B_n(r) = \frac{a_n(r_0) b_n(r) - a_n(r) b_n(r_0)}{a_n(r_0) b_n'(r_0) - a_n'(r_0) b_n(r)}, \quad r_0 \leqslant r \leqslant R,$$

при

$$a_0(r) = \left(\frac{r}{R}\right)^2 \ln\frac{r}{R} - \ln\frac{r}{R}, \quad b_0(r) = \left(\frac{r}{R}\right)^2 - 1 - 2\ln\frac{r}{R},$$

$$a_{\pm 1}(r) = \left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2\frac{r}{R} + \left(\frac{r}{R}\right)^{-1}, \quad b_{\pm 1}(r) = \frac{r}{R}\ln\frac{r}{R} - \frac{r}{2R} + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^{-1},$$

$$a_n(r) = \left(\frac{r}{R}\right)^{|n|+2} - \frac{|n|+1}{|n|}\left(\frac{r}{R}\right)^{|n|} + \frac{1}{|n|}\left(\frac{r}{R}\right)^{-|n|}, \tag{10'}$$

$$b_n(r) = \left(\frac{r}{R}\right)^{-|n|+2} - \frac{1}{|n|}\left(\frac{r}{R}\right)^{|n|} - \frac{|n|-1}{|n|}\left(\frac{r}{R}\right)^{-|n|}.$$

при $r_0 \leqslant r \leqslant R$, $|n| \geqslant 2$

Заметим, что

$$A_n(r_0) = B_n'(r_0) = 1, \; A_n'(r_0) = B_n(r_0) = A_n(R) = A_n'(R) = \\ = B_n(R) = B_n'(R) = 0.$$

Можно показать, что справедливы неравенства

$$\left|\frac{\partial^\alpha A_n(r)}{\partial r^\alpha}\right| \leqslant K(|n|+1)^\alpha, \quad \left|\frac{\partial^\alpha B_n(r)}{\partial r^\alpha}\right| \leqslant K(|n|+1)^{\alpha-1}. \tag{10''}$$

$$(|n| = 0, 1, 2, \ldots; \; \alpha = 1, 2, 3)$$

Найдем бесконечную линейную алгебраическую систему, из решения которой определяется последовательность

$$\{\alpha_m^{(n)}, \beta_m^{(n)}\}_{m=-\infty}^{\infty}.$$

Введем такие обозначения:

$$[f] = f(r_0+0) - f(r_0-0), \quad g_n'' = \frac{\partial^2 g_n(r_0; \rho)}{\partial r^2}, \quad g_n''' = \frac{\partial^3 g_n(r_0; \rho)}{\partial r^3}.$$

Из условий (6) и (6″) и свойств функции $g_n(r; \rho)$ следует

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m^{(n)} e^{imp\varphi} = 0, \quad \varphi \in \Gamma, \tag{11}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \beta_m^{(n)} e^{imp\varphi} = 0, \quad \varphi \in \Gamma, \tag{11'}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\alpha_m^{(n)}\left[A_{mp+n}''\right] + \beta_m^{(n)}\left[B_{mp+n}''\right]\right) e^{imp\varphi} - g_n'' = 0, \quad \varphi \in C\Gamma, \tag{11''}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\alpha_m^{(n)}\left[A_{mp+n}'''\right] + \beta_m^{(n)}\left[B_{mp+n}'''\right]\right) e^{imp\varphi} - g_n''' = 0, \quad \varphi \in C\Gamma.$$

Можно показать, что при $|n| \geqslant 2$

$$[A''_n] = \frac{4|n|}{r_0^2}(1 - \sigma_n^{(11)}),\quad [B''_n] = -\frac{4|n|}{r_0}(1 + \sigma_n^{(12)}), \tag{12}$$

$$[A'''_n] = \frac{4|n|(n^2-1)}{r_0^3}(1 - \sigma_n^{(21)}),\quad [B'''_n] = -\frac{4|n|(n^2-1)}{r_0^2}\sigma_n^{(22)},$$

где

$$|\sigma_n^{(11)}| = O\left[|n|^3\left(\frac{r_0}{R}\right)^{2|n|}\right],\quad |\sigma_n^{(12)}|,\quad |\sigma_n^{(21)}| = O\left[n^2\left(\frac{r_0}{R}\right)^{2|n|}\right],$$

$$|\sigma_n^{(22)}| = O\left[|n|\left(\frac{r_0}{R}\right)^{2|n|}\right]$$

при больших $|n|$. Выражения для $\sigma_n^{(ik)}$ $(i,\ k = 1,\ 2)$ выписаны в приложении. Пусть n_0 — ближайшее к $\frac{n}{p}$ целое число, т. е.

$$n = n_0 p + \delta p = n_0 p + \bar{n},\quad |\delta| \leqslant \frac{1}{2},\quad |\bar{n}| \leqslant \frac{p}{2}\ (\bar{n} \text{ — целое число}).$$

Имеем

$$|mp + n| = |mp + n_0 p + \bar{n}| \geqslant 2 \text{ при } m \neq -n_0,\ p = \frac{2\pi}{l} \geqslant 3. \tag{13}$$

Уравнения (11)—(11‴) достаточно рассматривать на интервале длины l. Выбирая оси координат так, чтобы изменению φ в пределах $\frac{l-h}{2} \leqslant |\varphi| \leqslant \frac{l}{2}$ отвечали точки границы и обозначая

$$p\varphi = \psi,\quad \frac{1}{p} = \frac{l}{2\pi} = \varepsilon,\quad \theta = \frac{\pi(l-h)}{l},\quad u = \cos\theta,$$

$$\frac{4}{r_0^2}\left(\alpha_{k-n_0}^{(n)} - r_0\beta_{k-n_0}^{(n)}\right) = \frac{y_k^{(n)}}{k+\delta},\quad k \neq 0;\quad \frac{4}{r_0^2}\left(\alpha_{-n_0}^{(n)} - r_0\beta_{-n_0}^{(n)}\right) = y_0^{(n)},$$

$$\frac{4}{r_0^3}\left[(k+\delta)^2 - \varepsilon^2\right]\alpha_{k-n_0}^{(n)} = x_k^{(n)},\quad k \neq 0;\quad \frac{4}{r_0^3}\alpha_{-n_0}^{(n)} = x_0^{(n)},$$

$$\alpha_{-n_0}^{(n)}\left[A''_{\bar{n}}\right] + \beta_{-n_0}^{(n)}\left[B''_{\bar{n}}\right] = M^{(n)},\quad \alpha_{-n_0}^{(n)}\left[A'''_{\bar{n}}\right] + \beta_{-n_0}^{(n)}\left[B'''_{\bar{n}}\right] = Q'', \tag{14}$$

$$\varepsilon_k^{(11)} = \frac{|k+\delta|}{k+\delta}\left(\sigma_{kp+\bar{n}}^{(21)} + \sigma_{kp+\bar{n}}^{(22)}\right),\quad \varepsilon_k^{(12)} = -\frac{\sigma_{kp+\bar{n}}^{(22)}\left[(k+\delta)^2 - \varepsilon^2\right]}{r_0|k+\delta|},$$

$$\varepsilon_k^{(21)} = \frac{r_0|k+\delta|\left(\sigma_{kp+\bar{n}}^{(11)} - \sigma_{kp+\bar{n}}^{(22)}\right)}{(k+\delta)^2 - \varepsilon^2},\quad \varepsilon_k^{(22)} = \frac{|k+\delta|}{k+\delta}\sigma_{kp+\bar{n}}^{(12)}.$$

Получим из (11)—(11‴) (после умножения на $e^{in\varphi}$ и замены индекса суммирования) следующие уравнения:

$$\sum_{k\neq 0}\frac{x_k^{(n)}}{(k+\delta)^2 - \varepsilon^2}e^{i(k+\delta)\psi} + x_0^{(n)}e^{i\delta\psi} = 0,\quad \theta < |\psi| < \pi, \tag{15}$$

$$\sum_{k\neq 0}\frac{y_k^{(n)}}{k+\delta}e^{i(k+\delta)\psi} + y_0^{(n)}e^{i\delta\psi} = 0,\quad \theta < |\psi| < \pi, \tag{15'}$$

$$\sum_{k\neq 0}\frac{|k|}{k}y_k^{(n)}e^{i(k+\delta)\psi} = -\varepsilon M^{(n)}e^{i\delta\psi} + \varepsilon g''_n e^{i(n_0+\delta)\psi} +$$

$$+ \sum_{k\neq 0}\left(\varepsilon_k^{(21)}x_k^{(n)} + \varepsilon_k^{(22)}y_k^{(n)}\right)e^{i(k+\delta)\psi},\quad |\psi| < \theta, \tag{15''}$$

$$\sum_{k\neq 0}|k+\delta|\, x_k^{(n)} e^{i(k+\delta)\psi} = -\varepsilon^3 Q^{(n)} e^{i\delta\psi} + \varepsilon^3 g_n''' e^{i(n_0+\delta)\psi} + \sum_{k\neq 0}(k+\delta)\left(\varepsilon_k^{(11)} x_k^{(n)} + \right.$$

$$\left. + \varepsilon_k^{(12)} y_k^{(n)}\right) e^{i(k+\delta)\psi}, \quad |\psi| < |\theta. \qquad (15''')$$

Заметим, что

$$|\varepsilon_k^{(ij)}| = O\left[k^2 \left(\frac{r_0}{R}\right)^{2|k|}\right].$$

Из равенства (7) следует вещественность коэффициентов $\alpha_m^{(n)}$, $\beta_m^{(n)}$. Значит, коэффициенты $x_m^{(n)}$, $y_m^{(n)}$ являются вещественными числами.

Необходимо различать случаи: 1) $n_0 = 0$, $\delta = 0$, т. е. $n = 0$; 2) $n_0 \neq 0$, $\delta = 0$, т. е. $n = n_0 p$; 3) $n_0 \neq 0$, $\delta \neq 0$, т. е. $n = n_0 p + \bar{n}$. Будем подробно рассматривать случай $n_0 \neq 0$, $\delta \neq 0$. Интегрируя почленно по ψ уравнение (15''') и учитывая, что

$$\frac{|k+\delta|}{k+\delta} = \frac{|k|}{k}$$

при $|\delta| \leqslant \frac{1}{2}$, получим

$$\sum_{k\neq 0}\frac{|k|}{k} x_k^{(n)} e^{ik\psi} = -\frac{\varepsilon^3}{\delta} Q^{(n)} +$$

$$+ \sum_{k\neq 0}\left(\varepsilon_k^{(11)} x_k^{(n)} + \varepsilon_k^{(12)} y_k^{(n)}\right) e^{ik\psi} + c^{(n)} e^{-i\delta\psi} + \frac{\varepsilon^3}{n} g_n''' e^{in_0\psi} \qquad (16)$$

при $|\psi| < \theta$, где $c^{(n)}$ — постоянная, определяемая в дальнейшем и равная умноженной на i постоянной интегрирования.

Объединяя продифференцированное два раза уравнение (15) и продифференцированное один раз уравнение (15') с уравнениями (15'') и (16) и равенствами, полученными из (15), (15'), (16) при подстановке $\psi = \pi$, получим следующие уравнения, записанные в векторной форме:

$$\sum_{k\neq 0}\vec{z}_k^{(n)} e^{ik\psi} + \Delta \vec{z}_0^{(n)} = \vec{0}, \quad \theta < |\psi| < \pi, \qquad (17)$$

$$\sum_{k\neq 0}\frac{|k|}{k}\vec{z}_k^{(n)} e^{ik\psi} + \Delta \vec{z}_0^{(n)} = \left(E_0^{(n)} + \Delta\right)\vec{z}_0^{(n)} +$$

$$+ \sum_{k\neq 0} E_k^{(n)} \vec{z}_k^{(n)} e^{ik\psi} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} c^{(n)} e^{-i\delta\psi} + \vec{d}^{(n)} e^{in_0\psi} = \vec{F}(e^{i\psi}), \quad |\psi| < \theta, \qquad (17')$$

$$\vec{z}_0^{(n)} = -\sum_{k\neq 0}\begin{pmatrix}\dfrac{(-1)^k}{(k+\delta)^2-\varepsilon^2}, & 0\\ 0, & \dfrac{(-1)^k}{k+\delta}\end{pmatrix}\vec{z}_k^{(n)}, \qquad (17'')$$

$$\sum_{k\neq 0}\frac{k(-1)^k}{(k+\delta)^2-\varepsilon^2}\, x_k^{(n)} = 0, \qquad (17''')$$

где

$$\vec{z}_k^{(n)} = \left(x_k^{(n)},\ y_k^{(n)}\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$$

$$E_0^{(n)}\vec{z}_0^{(n)} = \begin{pmatrix}-\dfrac{\varepsilon^3 Q^{(n)}}{\delta}\\ \\ -\varepsilon M^{(n)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\dfrac{\varepsilon^3 r_0^2}{4\delta}\left(r_0\left[A_{\bar{n}}'''\right] + \left[B_{\bar{n}}'''\right]\right), & \dfrac{\varepsilon^3 r_0}{4\delta}\left[B_{\bar{n}}'''\right]\\ -\dfrac{\varepsilon r_0^2}{4}\left(r_0\left[A_{\bar{n}}''\right] + \left[B_{\bar{n}}''\right]\right), & \dfrac{\varepsilon r_0}{4}\left[B_{\bar{n}}''\right]\end{pmatrix}\vec{z}_0^{(n)} =$$

$$= \begin{pmatrix} \varepsilon_0^{(11)}, & \varepsilon_0^{(12)} \\ \varepsilon_0^{(21)}, & \varepsilon_0^{(22)} \end{pmatrix} \vec{z}_0^{(n)}; \quad \Delta = \begin{pmatrix} \delta^2 - \varepsilon^2, & 0 \\ 0, & \delta \end{pmatrix};$$

$$E_k^{(n)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_k^{(11)}, & \varepsilon_k^{(12)} \\ \varepsilon_k^{(21)}, & \varepsilon_k^{(22)} \end{pmatrix}, \; k \neq 0; \; \vec{d}^{(n)} = \left(\frac{\varepsilon^2}{n} g_n''', \; \varepsilon g_n'' \right).$$

Уравнения (17)—(17′) для скалярного случая решались в [1] путем сведения к бесконечной линейной алгебраической системе уравнений. Мы тоже воспользуемся этим методом для нахождения коэффициентов $x_m^{(n)}$, $y_m^{(n)}$.

Решим уравнения (17)—(17′), считая правую часть в уравнении (17′) известной. Введем вектор-функции

$$\vec{X}^+(\zeta) = \sum_{k>0} \vec{z}_k^{(n)} (\zeta)^k + \Delta \vec{z}_0^{(n)}, \quad \vec{X}^-(\zeta) = -\sum_{k<0} \vec{z}_k^{(n)} (\zeta)^k,$$

аналитические, соответственно, внутри и вне окружности $|\zeta| = 1$. Тогда уравнение (17) *запишется в виде*

$$\vec{X}^+(e^{i\psi}) - \vec{X}^-(e^{i\psi}) = \vec{0}, \quad \theta < |\psi| < \pi,$$

т. е. функции $\vec{X}^+(\zeta)$ и $\vec{X}^-(\zeta)$ совпадают на дуге $\theta < |\arg \zeta| < \pi$ окружности $|\zeta| = 1$ и, следовательно, являются одной и той же аналитической вектор-функцией

$$\vec{X}(\zeta) = \begin{cases} \vec{X}^+(\zeta), & |\zeta| < 1, \\ \vec{X}^-(\zeta), & |\zeta| > 1. \end{cases}$$

Уравнение (17′) перепишется в виде

$$\vec{X}^+(e^{i\psi}) + \vec{X}^-(e^{i\psi}) = \vec{F}(e^{i\psi}), \quad |\psi| < \theta,$$

т. е. задача свелась к нахождению аналитической вектор-функции, равной нулю при $\zeta = \infty$, по сумме ее предельных значений на дуге $L = \{\zeta : |\zeta| = 1, \; |\arg \zeta| < \theta\}$. Известно, что решением этой задачи является функция

$$\vec{X}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{(\zeta - \alpha)(\zeta - \bar{\alpha})}} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\vec{F}(t) \sqrt{(t-\alpha)(t-\bar{\alpha})}}{t - \zeta} dt + \frac{\vec{C}}{\sqrt{(\zeta - \alpha)(\zeta - \bar{\alpha})}}, \tag{18}$$

где $\vec{C} = (C_1, C_2)$, C_1, C_2 — постоянные, $\alpha = e^{i\theta}$.
Обозначив

$$R(\zeta_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{(\zeta_0 - \alpha)(\zeta_0 - \bar{\alpha})}}, & |\zeta_0| = 1, \; |\arg \zeta_0| < \theta \\ 0, & |\zeta_0| = 1, \; \theta < |\arg \zeta_0| \leqslant \pi, \end{cases}$$

будем иметь для разности предельных значений на окружности $|\zeta| = 1$;

$$\vec{X}^+(\zeta_0) - \vec{X}^-(\zeta_0) = \frac{R(\zeta_0)}{\pi i} \int_L \frac{\vec{F}(t) \sqrt{(t-\alpha)(t-\bar{\alpha})}}{t - \zeta_0} dt + 2R(\zeta_0) \vec{C}. \tag{19}$$

Введем обозначения:

$$V_k(\zeta_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\zeta^k \sqrt{(\zeta - \alpha)(\zeta - \bar{\alpha})}}{\zeta - \zeta_0} d\zeta, \quad (\zeta_0 \in L, \; \alpha = e^{i\theta}),$$

$$V_m^k = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} V_k(e^{i\varphi})\,R(e^{i\varphi})\,e^{-im\varphi}d\varphi,$$

$$P_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R(e^{i\varphi})\,e^{-im\varphi}d\varphi, \tag{20}$$

$$P_\delta = \sum_{m\neq 0}\frac{(-1)^m}{m+\delta}P_m,\quad V_\delta^k = \sum_{m\neq 0}\frac{(-1)^m}{m+\delta}V_m^k.$$

Эти величины вычислены в [1] и в приложении выписаны соответствующие формулы. Положим далее

$$P_{\delta,\varepsilon}^i = \sum_{m\neq 0}\frac{(-1)^m P_m}{m^{i-1}\,[(m+\delta)^2-\varepsilon^2]},\quad (i=0,\,1).$$

$$V_m^\delta = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\sin\pi\delta\,(-1)^k}{\pi(k+\delta)}V_m^k,\quad R_m^k = V_m^k - V_0^k P_m,$$

$$R_\delta^k = \sum_{m\neq 0}\frac{(-1)^m R_m^k}{m+\delta},\quad R_m^\delta = V_m^\delta - V_0^\delta P_m = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\sin\pi\delta\,(-1)^k}{\pi(k+\delta)}R_m^k,$$

$$R_{\delta,\varepsilon}^{k,i} = \sum_{m\neq 0}\frac{(-1)^m R_m^k}{m^{i-1}\,[(m+\delta)^2-\varepsilon^2]},\quad R_{\delta,\varepsilon}^{\delta,i} = \sum_{m\neq 0}\frac{(-1)^m R_m^\delta}{m^{i-1}\,[(m+\delta)^2-\varepsilon^2]},$$

$$(i=0,\,1), \tag{20'}$$

$$R_m^{[\sigma]} = \sum_{k\neq 0}\frac{(-1)^k}{k}R_m^k,\quad R_{[\sigma]}^k = \sum_{m\neq 0}\frac{(-1)^m}{m}R_m^k,$$

$$R_{[0,\varepsilon]}^{[\sigma],i} = \sum_{m\neq 0}\frac{(-1)^m R_m^{[\sigma]}}{m^{i-1}\,(m^2-\varepsilon^2)},\quad (i=0,\,1).$$

В приложении выписаны необходимые для дальнейшей оценки этих величин.

Переходя в равенстве (19) к коэффициентам Фурье и используя при этом обозначения (20), (20′) и выражения для $\vec{F}(t)$ из уравнения (17′) получим

$$\vec{z}_m^{(n)} = V_m^0\left(E_0^{(n)}+\Delta\right)\vec{z}_0^{(n)} + \sum_{k\neq 0} V_m^k E_k^n \vec{z}_k^{(n)} + P_m\vec{C} +$$
$$+ V_m^\delta\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}c^{(n)} + V_m^{n_0}\vec{d}^{(n)},\qquad (m\neq 0,\,-1), \tag{21}$$

$$\Delta\vec{z}_0^{(n)} = V_0^0\left(E_0^{(n)}+\Delta\right)\vec{z}_0^n + \sum_{k\neq 0} V_0^k E_k^{(n)}\vec{z}_k^n + P_0\vec{C} +$$
$$+ V_0^\delta\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}c^n + V_0^{n_0}\vec{d}^{(n)}. \tag{22}$$

Подставляя в уравнения (21) вместо $\vec{C}$ его выражение, найденное из уравнения (22), и используя обозначения (20) и (20′), будем иметь

$$\vec{z}_m^{(n)} = \left\{P_m\Delta + R_m^0\left(E_0^{(n)}+\Delta\right)\right\}\vec{z}_0^{(n)} + \sum_{k\neq 0} R_m^k E_k^{(n)}\vec{z}_k^{(n)} +$$
$$+ R_m^\delta\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}c^n + R_m^{n_0}\vec{d}^{(n)},\quad (m\neq 0). \tag{23}$$

Из равенств (17) и (17′) получаем

$$\vec{z}_0^{(n)} = -\left\{P\Delta + R^0\left(E_0^{(n)} + \Delta\right)\right\}\vec{z}_0^{(n)} - \sum_{k\neq 0} R^{(k)}E_k^{(n)}\vec{z}_k^{(n)} - R_{\delta,\,\varepsilon}^{\delta,\,1}\binom{1}{0}c^{(n)} -$$

$$-R^{(n_0)}\vec{d}^{(n)}, \tag{23′}$$

$$0 = \left(\vec{l}_0 + R_{\delta,\,\varepsilon}^{0,\,0}\vec{\varepsilon}_0^{(1)}\right)\vec{z}_0^{(n)} + \sum_{k\neq 0} R_{\delta,\,\varepsilon}^{k,\,0}\vec{\varepsilon}_k^{(1)}\vec{z}_k^{(n)} + R_{\delta,\,\varepsilon}^{\delta,\,0}c^{(n)} + \frac{\varepsilon^2}{n}g_n'' R_{\delta,\,\varepsilon}^{n_0,\,0}, \tag{23″}$$

где

$$P = \begin{pmatrix} P_{\delta,\,\varepsilon}^1, & 0 \\ 0, & P_\delta \end{pmatrix}, \quad R^{(k)} = \begin{pmatrix} R_{\delta,\,\varepsilon}^{k,\,1}, & 0 \\ 0, & P_\delta^k \end{pmatrix},$$

$$\vec{l}_0 = \left((\delta^2 - \varepsilon^2)\left(P_{\delta,\,\varepsilon}^0 + R_{\delta,\,\varepsilon}^{0,\,0}\right),\ 0\right), \quad \vec{\varepsilon}_k^{(1)} = \left(\varepsilon_k^{(11)},\ \ \varepsilon_k^{(12)}\right).$$

Это бесконечная система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $c^{(n)}$, $x_m^{(n)}$, $y_m^{(n)}$, $(m = 0,\ \pm 1,\ \ldots)$. Коэффициенты системы уравнений зависят от параметров n, l, h через зависимость от δ, $\bar{n}$, n_0, u. *Аналогичным путем получаются следующие бесконечные системы* при $n = 0$ и $n = n_0 p$:

$$\vec{z}_m^{(n)} = \left(\tilde{P}_m + \tilde{R}_m E_0^{(0)}\right)\vec{z}_0^{(0)} + \sum_{k\neq 0} R_m^k E_k^{(0)}\vec{z}_k^{(0)} + R_m^0\binom{1}{0}c^{(0)} + \tilde{R}_m\vec{d}^{(0)},\ m \neq 0,$$

$$\vec{z}_0^{(0)} = -\left(\tilde{P}_0 + \tilde{R}_0 E_0^{(0)}\right)\vec{z}_0^{(0)} - \sum_{k\neq 0}\tilde{R}^{(k)}E_k^{(0)}\vec{z}_k^{(0)} - R_{[0,\,\varepsilon]}^{0,\,1}\binom{1}{0}c^{(0)}\tilde{R}_0\vec{d}^{(0)},$$

$$0 = \left(\vec{q}_0 + R_{[0,\,\varepsilon]}^{[\sigma],\,0}\vec{\varepsilon}_0^{(1)}\right)\vec{z}_0^{(0)} + \sum_{k\neq 0} R_{[0,\,\varepsilon]}^{k,\,0}\vec{\varepsilon}_k^{(1)}\vec{z}_k^{(0)} + R_{[0,\,\varepsilon]}^{0,\,0}c^{(0)} - \varepsilon^3 g_0''' R_{[0,\,\varepsilon]}^{[\sigma],\,0},$$

где

$$\tilde{P}_m = \begin{pmatrix} -\varepsilon^2\left(P_m + R_m^0\right), & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{R}_m = \begin{pmatrix} -R_m^{[\sigma]}, & 0 \\ & 0,\ R_m^0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{P}_0 = \begin{pmatrix} -\varepsilon^2\left(P_{[0,\,\varepsilon]}^1 + R_{[0,\,\varepsilon]}^{0,\,1}\right), & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{R}_0 = \begin{pmatrix} -R_{[0,\,\varepsilon]}^{[\sigma],\,1}, & 0 \\ & 0,\ R_{[\sigma]}^0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{R}^{(k)} = \begin{pmatrix} R_{[0,\,\varepsilon]}^{k,\,1}, & 0 \\ & 0,\ R_{[\sigma]}^k \end{pmatrix}, \quad \vec{q}_0 = \left(-\varepsilon^2\left(P_{[0,\,\varepsilon]}^1 + R_{[0,\,\varepsilon]}^{0,\,1}\right),\ 0\right),$$

$$\vec{d}_0 = \left(\varepsilon^3 g_0''',\ \varepsilon g_0''\right), \quad \vec{\varepsilon}^{(1)} = \left(-\varepsilon_0^{(11)},\ -\varepsilon_0^{(12)}\right), \quad \vec{\varepsilon}_k^{(1)} = \left(\varepsilon_k^{(11)},\ \varepsilon_k^{(12)}\right).$$

Уравнения, отвечающие случаю $n = n_0 p$, отличаются от предыдущих уравнений только свободным членом, а именно, вместо $\tilde{R}_m\vec{d}^{(0)}$ следует взять выражение

$$R_m^{n_0}\left(\frac{\varepsilon^2}{n}g_n''',\ \varepsilon g_n''\right).$$

3. ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Будем подробно исследовать систему уравнений (23) — (23″). Преобразуем ее к виду, удобному для исследования. В приложении показано, что коэффициент при $c^{(n)}$ в уравнении (23″) имеет вид

$$R_{\delta,\,\varepsilon}^{\delta,\,0} = -\ln\frac{2}{1+u} + \Delta R_{\delta,\,\varepsilon}^{\delta,\,0},$$

где

$$|\Delta R^{\delta,\,0}_{\delta,\,\varepsilon}| \leqslant K|\delta|\ln\frac{2}{1+u}.$$

Учитывая вид $R^{\delta,\,0}_{\delta,\,\varepsilon}$, уравнение (23″) перепишем в форме (24). Добавляя вектор $R^{(0)}E_0'\vec{z}_0^{(0)}$, где $E_0' = \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ 0, & \varepsilon_0^{(22)} \end{pmatrix}$, к левой и правой части равенства (23′) и, умножая полученное равенство слева на матрицу

$$\Lambda = (I + R^{(0)}E_0')^{-1} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & \dfrac{1}{1 + R^0_\delta \varepsilon_0^{(22)}} \end{pmatrix},$$

получим равенство (24′). Уравнение (23) перепишем без изменения. Таким образом, система уравнений (23) — (23″) эквивалентна системе

$$c^{(n)} = \frac{1}{\ln\dfrac{2}{1+u}}\left[\Delta R^{\delta,\,0}_{\delta,\,\varepsilon} c^{(n)} + \left(\vec{l}_0 + R^{0,\,0}_{\delta,\,\varepsilon}\vec{\varepsilon}_0^{(1)}\right)\vec{z}_0^{(n)} + \sum_{k\neq 0} R^{k,\,0}_{\delta,\,\varepsilon}\vec{\varepsilon}_k^{(1)}\vec{z}_k^{(n)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\varepsilon^2}{n} g_n''' R^{n_0,\,0}_{\delta,\,\varepsilon}\right], \tag{24}$$

$$\vec{z}_0^{(n)} = -R^{\delta,\,1}_{\delta,\varepsilon}\binom{1}{0}c^{(n)} + a_{00}\vec{z}_0^{(n)} - \sum_{k\neq 0}\Lambda R^{(k)}E_k^{(n)}\vec{z}_k^{(n)} - \Lambda R^{(n_0)}\vec{d}^{(n)}; \tag{24′}$$

$$\vec{z}_m^{(n)} = R^\delta_m\binom{1}{0}c^{(n)} + a_{m0}\vec{z}_0^{(n)} + \sum_{k\neq 0} R^k_m E_k^{(n)}\vec{z}_k^{(n)} + R^{n_0}_m\vec{d}^{(n)},\ m \neq 0, \tag{24″}$$

где

$$a_{m0} = P_m\Delta + R^0_m\left(E_0^{(n)} + \Delta\right),$$

$$a_{00} = \begin{pmatrix} (\varepsilon^2 - \delta^2)\left(P^1_{\delta,\,\varepsilon} + R^{0,1}_{\delta,\,\varepsilon}\right) - \varepsilon_0^{(11)}R^{0,1}_{\delta,\,\varepsilon}, & R^{0,1}_{\delta,\,\varepsilon}\varepsilon_0^{(12)} \\ \dfrac{\varepsilon_0^{(21)}R^0_\delta}{1 + \varepsilon_0^{(22)}R^0_\delta}, & \dfrac{-\delta\left(P_\delta + R^0_\delta\right)}{1 + \varepsilon_0^{(22)}R^0_\delta} \end{pmatrix}.$$

Обозначив через $a_{cc}^{(n)}$, $\vec{a}_{ck}^{(n)}$, $\vec{a}_{mc}^{(n)}$, $a_{mk}^{(n)}$ коэффициенты, соответственно, при неизвестных $c^{(n)}$, $\vec{z}_k^{(n)}$ и через $b_c^{(n)}$, $\vec{b}_m^{(n)}$ свободные члены в уравнениях системы (24) — (24″), будем иметь

$$c^{(n)} = a_{cc}^{(n)}c^{(n)} + \sum_{|k|=0}^{\infty}\vec{a}_{ck}^{(n)}\vec{z}_k^{(n)} + b_c^{(n)},$$

$$\vec{z}_m^{(n)} = \vec{a}_{mc}^{(n)}c^{(n)} + \sum_{|k|=0}^{\infty} a_{mk}^{(n)}\vec{z}_k^{(n)} + \vec{b}_m^{(n)}\quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{25}$$

Введем пространство $\tilde{m}$ последовательностей вида

$$z = (c,\ \vec{z}_0,\ \vec{z}_{-1},\ \vec{z}_1,\ \ldots)\ \text{с нормой}\ \|z\| = \sup_k(|c|,\ |\vec{z}_k|),$$

где c — константа и $|\vec{z}_k| = \sqrt{|x_k|^2 + |y_k|^2}$.
Рассмотрим матрицы вида

$$\begin{pmatrix} a_{cc}, & \vec{a}_{ck} \\ \vec{a}_{mc}, & a_{mk} \end{pmatrix}^{\infty}_{|m|,\ |k|=0} = A,$$

где α_{cc} — скаляр, $\vec{\alpha}_{ck}$, $\vec{\alpha}_{mc}$ — двумерные вектора, α_{mk} — матрица II порядка. Определим

$$Az = \left(\alpha_{cc}C + \sum_{|k|=0}^{\infty} \vec{\alpha}_{ck}\vec{z}_k,\ \vec{\alpha}_{mc}C + \sum_{|k|=0}^{\infty} \alpha_{mk}\vec{z}_k\right)_{|m|=0}^{\infty}.$$

Тогда A определяет однородный и аддитивный оператор, действующий из $\tilde{m}$ в $\tilde{m}$ и являющийся ограниченным, когда

$$N = \sup_m \left(|\alpha_{cc}| + \sum_{|k|=0} |\vec{\alpha}_{ck}|,\ |\vec{\alpha}_{mc}| + \sum_{|k|=0}^{\infty} \|\alpha_{mk}\|\right) < \infty,$$

причем, норма A не превосходит числа N.

Таким образом, обозначив

$$A_{l,h}^{(n)} = \begin{pmatrix} a_{cc}^{(n)}, & \vec{a}_{ck}^{(n)} \\ \vec{a}_{mc}^{(n)}, & a_{mk} \end{pmatrix}_{|m|,\ |k|=0}^{\infty}, \quad b_{l,h}^{(n)} = \left(b_c^{(n)},\ b_m^{(n)}\right)_{|m|=0}^{\infty},$$

получим, что система уравнений (25) эквивалентна уравнению

$$z = A_{l,h}^{(n)} z + b_{l,h}^{(n)} \tag{25'}$$

в пространстве $\tilde{m}$. То, что $b_{l,h}^{(n)} \in \tilde{m}$, нетрудно проверить, используя оценки из приложения.

Лемма 1. *Оператор $A_{l,h}^{(n)}$ вполне непрерывен в пространстве $\tilde{m}$.*

Докажем, что этот оператор переводит любое ограниченное в пространстве $\tilde{m}$ множество в компактное множество. Из уравнения (25) имеем при больших $|m|$

$$|\vec{\eta}_m| = |(A_{l,h}^{(n)} z)_m| \leqslant \|z\| \left(\sum_{|k|=0}^{\infty} \|a_{mk}^{(n)}\| + |\vec{a}_{mc}^{(n)}|\right).$$

Принимая во внимание выражения для $a_{mk}^{(n)}$, $\vec{a}_{mc}^{(n)}$ и используя оценки из приложения, будем иметь

$$|\vec{a}_{mc}^{(n)}| \leqslant K_{l,h}\frac{1}{\sqrt{|m|}}, \quad \|a_{m0}^{(n)}\| \leqslant K_{l,h}\frac{1}{\sqrt{|m|}},$$

$$\|a_{mk}^{(n)}\| \leqslant K_{l,h} \begin{cases} \dfrac{\sqrt{|m|}}{|m-k|\sqrt{|k|}} (kp+\bar{n})^2 \left(\dfrac{r_0}{R}\right)^{2|kp+\bar{n}|}, & k \neq m,\ k \neq 0 \\ (mp+\bar{n})^2 \left(\dfrac{r_0}{R}\right)^{2|mp+\bar{n}|}, & k = m. \end{cases}$$

Из последнего неравенства следует

$$\|a_{mk}^{(n)}\| \leqslant K_{l,h} \begin{cases} \dfrac{\sqrt{|m|}}{|m-k||k|^{1,5}}, & k \neq m,\quad k \neq 0 \\ \dfrac{1}{|m|}, & k = m. \end{cases}$$

Учитывая неравенство для $\|a_{mk}^{(n)}\|$ и неравенство

$$\sum_{k \neq 0,\ m} \frac{\sqrt{|m|}}{|m-k||k|^{1,5}} \leqslant M\frac{1}{\sqrt{|m|}},$$

получим

$$|(A_{l,h}^{(n)}z)_m| \leqslant K_{l,h} \frac{\|z\|}{\sqrt{|m|}}. \tag{26}$$

Пусть $m > 0$. Обозначим через $S_m z$ последовательность, полученную из z заменой нулем компонент с индексом $|k| \geqslant m+1$ и через $R_m z$ последовательность, полученную из z заменой нулем c и компонент с индексом $|k| \leqslant m$. Тогда

$$A_{l,h}^{(n)}z = S_m A_{l,h}^{(n)}z + R_m A_{l,h}^{(n)}z.$$

Выберем m настолько большим, чтобы

$$\|R_m A_{l,h}^{(n)}z\| \leqslant K_{l,h} \frac{\|z\|}{\sqrt{|m|}} \leqslant \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число. Так как множество $\{S_m A_{l,h}^{(n)}z\}$ конечномерно и ограничено, то оно обладает конечной ε-сетью, которая является конечной 2ε-сетью для множества $\{A_{l,h}^{(n)}z\}$.

Из существования конечной 2ε-сети и полноты $\tilde{m}$ следует, что множество $\{A_{l,h}^{(n)}z\}$, где $z \in \{z : \|z\| \leqslant K\}$, компактно.

Замечание. Оператор $A_{l,h}^{(n)}$ зависит от параметров ε и $\delta = \varepsilon\bar{n}$, $\bar{n}$. При фиксированных l и h и переменном $n = 0, 1, \ldots$ параметры δ и $\bar{n}$ принимают не более чем $\left[\frac{1}{2}p\right]$ (целая часть $\frac{1}{2}p$) значений, следовательно,

$$\|A_{l,h}^{(n)}\| \leqslant K_{l,h} \quad \text{равномерно по } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Лемма 2. *Если $z \in \tilde{m}$ и удовлетворяет уравнению*

$$z = A_{l,h}^{(n)}z + b_{l,h}^{(n)},$$

то

$$\vec{z}_k = \vec{T}_1 P_k(u) + \vec{T}_2 P_{k+1}(u) + \Delta\vec{z}_k,$$

$$|\Delta\vec{z}_k| \leqslant K_{l,h} \frac{|P_k(u)|\ln|k|}{|k|} \quad \text{при } k \to \infty, \tag{27}$$

где $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ — двумерные векторы, зависящие от параметров l, h, n, но не зависящие от k, $P_k(u)$ — полином Лежандра.

Доказательство такое же, как доказательство аналогичной леммы из [2], если учесть соответствующие оценки из приложения.

4. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ

Дадим точное определение функции Грина. Пусть $C^k(B)$ — множество функций, k раз непрерывно дифференцируемых в области $B + \partial B$, $C_0^k(B)$ — множество функций из $C^k(B)$, равных нулю на ∂B вместе с частными производными до k-го порядка.

Функцией Грина (с особенностью в точке ξ) задачи Дирихле для бигармонического оператора в области B назовем функцию

$$G(x; \xi) = \frac{1}{8\pi}|x-\xi|^2 \ln|x-\xi| + w(x; \xi),$$

удовлетворяющую условиям:

$$1.\ \Delta_x^2 w(x; \xi) = 0, \qquad x \in B, \tag{28}$$

$$2.\ G(x; \xi) \in C_0^1(B). \tag{28'}$$

$$3.\ G(x;\ \xi) \in W_2^2(B). \tag{28''}$$

Можно доказать, что так определенная функция Грина единственна.

Теперь, отправляясь от решения уравнения $z = A_{l,h}^{(n)} z + b_{l,h}^{(n)}$, построим функцию Грина. Докажем следующие теоремы.

Теорема 1. *Задача* (6) — (6″) *имеет единственное решение* $v_n(r,\ \varphi)$. *Кроме того,*

$$\| v_n(r,\ \varphi\|_{C^1(B)} \leqslant K_{l,\,h}(|n|+1)\left(\frac{\rho}{r_0}\right)^{|n|} \qquad (n = 0,\ \pm 1,\ \ldots) \tag{29}$$

и равномерно по l, h

$$\| v_n(r,\ \varphi) \|_{W_2^2(B)} \leqslant K(|n|+1)\left(\frac{\rho}{r_0}\right)^{|n|}. \tag{29'}$$

Теорема 2. *Функция*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\psi_0}[g_n(r;\ \rho)\, e^{in\varphi} + v_n(r,\ \varphi)] = g_0(x;\ \varepsilon) + v(x;\ \xi),$$

где $v_n(r,\ \varphi)$ — *решение задачи* (6) — (6″) *является искомой функцией Грина, т. е. удовлетворяет условиям* (28) — (28″).

Предварительно докажем несколько лемм.

Лемма 3. *Если* $z = (c^{(n)},\ \vec{z}_0^{(n)},\ \vec{z}_{-1}^{(n)},\ \vec{z}_1^{(n)}\ \ldots)$ *является решением уравнения* $z = A_{l,h}^{(n)} z + b_{l,h}^{(n)}$, *то*

$$\sum_{k \neq 0} \vec{z}_k^{(n)} e^{ik\psi} + \Delta \vec{z}_0^{(n)} = \vec{0}, \qquad \theta < |\psi| \leqslant \pi, \tag{30}$$

$$\sum_{k \neq 0} \frac{|k|}{k} \vec{z}_k^{(n)} e^{ik\psi} + \Delta \vec{z}_0^{(n)} = \left(E_0^{(n)} + \Delta\right) \vec{z}_0^{(n)} + \sum_{k \neq 0} E_k^{(n)} \vec{z}_k^{(n)} e^{ik\psi} + \binom{1}{0} c^{(n)} e^{-i\delta\psi} +$$
$$+ e^{in_0\psi} = \vec{F}(e^{i\psi}), \qquad |\psi| < \theta. \tag{30'}$$

Все ряды сходятся равномерно, если исключить сколь угодно малую окрестность точек $\psi = \pm\theta$.

Доказательство аналогично доказательству соответствующей леммы из [2].

Следствие 1. *Если из решения* $z = \left(c^{(n)},\ \vec{z}_0^{(n)},\ \vec{z}_{-1}^{(n)},\ \vec{z}_1^{(n)},\ \ldots\right)$ *уравнения* $z = A_{l,h}^{(n)} z + b_{l,h}^{(n)}$ *построить коэффициенты* $\alpha_m^{(n)}$, $\beta_m^{(n)}$ *по формулам*

$$\alpha_{m-n_0}^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{r_0^3 x_m^{(n)}}{4(m+\delta)^2 - \varepsilon^2} \\[2ex] \dfrac{r_0^3}{4}\, x_0^{(n)} \end{cases}, \qquad \beta_{m-n_0} = \begin{cases} \dfrac{r_0^2}{4} \dfrac{x_m^{(n)}}{(m+\delta)^2 - \varepsilon^2} - \dfrac{r_0 y_m^{(n)}}{4(m+\delta)}, \\[2ex] \dfrac{r_0^2}{4}\, x_0^{(n)} - \dfrac{r_0}{4}\, y_0^{(n)} \end{cases} \tag{31}$$

где $\left(x_k^{(n)},\ y_k^{(n)}\right) = z_k^{(n)}$, *то при* $n \neq 0$, $mp + n \neq 0$ *будут выполняться равенства*

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} \alpha_m^{(n)} \\ \beta_m^{(n)} \end{pmatrix} e^{i(mp+n)\varphi} = \binom{0}{0}, \quad \frac{d}{2} \leqslant |\varphi| \leqslant \frac{l}{2}, \tag{32}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} \dfrac{\left[A''_{mp+n}\right]}{mp+n}, & \dfrac{\left[B''_{mp+n}\right]}{mp+n} \\[2ex] \dfrac{\left[A'''_{mp+n}\right]}{(mp+n)^2}, & \dfrac{\left[B'''_{mp+n}\right]}{(mp+n)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_m^{(n)} \\ \beta_m^{(n)} \end{pmatrix} e^{i(mp+n)\varphi} - \begin{pmatrix} \dfrac{g''_n}{n} \\[2ex] \dfrac{g'''_n}{n} \end{pmatrix} e^{in\varphi} -$$
$$- i\varphi \binom{0}{1} c^{(n)} - \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\varphi| \leqslant \frac{d}{2}. \tag{33}$$

Аналогичные равенства можно выписать в случае $n = n_0 p$, $(n_0 = 0, \pm 1, \ldots)$.

Из оценки $|P_m(u)| \leqslant \frac{2}{\sqrt{1-u^2}} \frac{1}{\sqrt{|m|+1}}$ $(|u| < 1)$ для полиномов Лежандра, представления (27) для $\vec{z}_m^{(n)}$ и формул (31) получим

$$|\alpha_m^{(n)}| = 0\left(\frac{1}{|m|^{2,5}}\right), \quad |\beta_m^{(n)}| = 0\left(\frac{1}{|m|^{1,5}}\right) \tag{34}$$

при больших $|m|$. Следовательно, вектор-функция, представляемая рядом $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} \alpha_m^{(n)} \\ \beta_m^{(n)} \end{pmatrix} e^{i(mp+n)\varphi}$, непрерывна при $\varphi \leqslant \frac{l}{2}$.

Ввиду неравенств (10″) для $\frac{\partial^\alpha A_n(r)}{\partial r^\alpha}$, $\frac{\partial^\alpha B_n(r)}{\partial r^\alpha}$ и оценок (34) для $\alpha_m^{(n)}$, $\beta_m^{(n)}$ вектор-функция, представленная левой частью равенства (33), имеет коэффициенты Фурье, которые при больших $|m|$ убывают как $|m|^{-1,5}$, следовательно, упомянутая вектор-функция непрерывна при $|\varphi| \leqslant \frac{l}{2}$, причем равна нулю при $\varphi \leqslant \frac{d}{2}$.

Лемма 4. *Пусть* $\alpha_m^{(n)}$, $\beta_m^{(n)}$ *построены по формулам* (31) *из решения уравнения* $z = A_{l,h}^{(n)} z + b_{l,h}^{(n)}$ и $\eta(r, \varphi)$ — *произвольная функция из* $C_0^1(B) \cap C^2(B)$, $\Gamma^\pm(\delta) = \{x : |x| = r_0 \pm \delta\}$. *Тогда для функции*

$$v_n(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\alpha_m^{(n)} A_{mp+n}(r) + \beta_m^{(n)} B_{mp+n}(r)\right] e^{i(mp+n)\varphi}, \quad \left(p = \frac{2\pi}{l}\right)$$

справедливы равенства

$$\lim_{\delta_1, \delta_2 \to 0} \left(\int_{\Gamma^+(\delta_1)} - \int_{\Gamma^-(\delta_2)}\right) \frac{\partial^2 v_n}{\partial r^2} \frac{\partial \eta}{\partial r} ds = -\int_{C\Gamma} g_n'' e^{in\varphi} \frac{\partial \eta}{\partial r} ds, \tag{35}$$

$$\lim_{\delta_1, \delta_2 \to 0} \left(\int_{\Gamma^+(\delta_1)} - \int_{\Gamma^-(\delta_2)}\right) \frac{\partial^3 v_n}{\partial r^3} \eta ds = -\int_{C\Gamma} g_n''' e^{in\varphi} \eta ds. \tag{36}$$

Докажем, например, последнее равенство. Мы видим, что $v_n(r, \varphi) = \chi_n(r, \varphi) e^{in\varphi}$, где $\chi_n(r, \varphi)$ имеет по φ период l: Значит,

$$\int_{\Gamma^\pm(\delta)} \frac{\partial^3 \chi_n}{\partial r^3} e^{in\varphi} \eta dS = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{\left(k-\frac{1}{2}\right)l}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)l} \frac{\partial^3 \chi_n}{\partial r^3} e^{in\varphi} \eta \cdot (r_0 \pm \delta) d\varphi =$$

$$= (r_0 \pm \delta) \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\partial^3 v_n(r_0 \pm \delta, \varphi)}{\partial r^3} \zeta(r_0 \pm \delta, \varphi) d\varphi,$$

где

$$\zeta(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{p-1} e^{inkl} \eta(r, \varphi + kl) \in C_0^1(B) \cap C^2(B).$$

Обозначим

$$D_{mp+n}(r) = \alpha_m^{(n)} A_{mp+n}(r) + \beta_m^{(n)} B_{mp+n}(r),$$

$$F_1^{(n)}(r,\ \varphi)=\begin{cases}\sum\limits_{mp+n\neq 0}\dfrac{D'''_{mp+n}(r)}{i(mp+n)}e^{i(mp+n)\varphi}+\varphi D'''_{-n_0}(r), & n=n_0p,\\ \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}\dfrac{D'''_{mp+n}(r)}{i(mp+n)}e^{i(mp+n)\varphi}, & n=n_0p+\bar{n},\end{cases} \tag{37}$$

$$F_2^{(n)}(r,\ \varphi)=\begin{cases}\sum\limits_{mp+n\neq 0}\dfrac{D'''_{mp+n}(r)}{[i(mp+n)]^2}e^{i(mp+n)\varphi}+\dfrac{\varphi^2}{2}D'''_{-n_0}(r), & n=n_0p\\ \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}\dfrac{D'''_{mp+n}(r)}{[i(mp+n)]^2}e^{i(mp+n)\varphi}, & n=n_0p+\bar{n}.\end{cases} \tag{37'}$$

Интегрируя два раза по частям, получим

$$\int\limits_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\frac{\partial^3 v_n}{\partial r^3}\zeta d\varphi=\left[\zeta F_1^{(n)}-\zeta'_\varphi F_2^{(n)}\right]_{\varphi=-\frac{l}{2}}^{\varphi=\frac{l}{2}}+\int\limits_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}F_2^{(n)}\zeta''_{\varphi\varphi}d\varphi. \tag{38}$$

Ряд, определяющий $F_2^{(n)}(r,\ \varphi)$, сходится равномерно при $0\leqslant r\leqslant R$, $|\varphi|\leqslant\pi$, так как имеет сходящийся мажорантный ряд ввиду оценок для $\alpha_m^{(n)}$, $\beta_m^{(n)}$, A'''_{mp+n}, $B'''_{mp+n}(r)$. Докажем равномерную сходимость при $0\leqslant r\leqslant R$, $\varphi=\pm\frac{l}{2}$, 0 ряда, определяющего $F_1^{(n)}(r,\varphi)$. При $0\leqslant r\leqslant r_0-0$, $|k|\geqslant 3$ имеем

$$A'''_k(r)=\frac{k^2(|k|+2)}{2}f_k(r)+(|k|+2)|k|(1-3|k|)\left(\frac{r}{r_0}\right)^{|k|-3},$$

$$B'''_k(r)=\frac{|k|(|k|+2)}{2}f_k(r)+|k|(2-4|k|)\left(\frac{r}{r_0}\right)^{|k|-3},$$

где

$$f_k(r)=(|k|+3)\left(\frac{r}{r_0}\right)^{|k|-3}-(|k|+1)\left(\frac{r}{r_0}\right)^{|k|-1}.$$

Функция $f_k(r)$ равномерно ограничена по k и по r и монотонна по k.

$$f_{k+1}-f_k=\left(\frac{r}{r_0}\right)^{|k|-3}\left[(|k|+1)\left(1-\frac{r}{r_0}\right)\left(1-\frac{r^2}{r_0^2}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(1-\frac{r}{r_0}\right)^2\left(\frac{r}{r_0}+2\right)\right]\geqslant 0.$$

Из формул (27) и (31) для коэффициентов $\alpha_m^{(n)}$, $\beta_m^{(n)}$ следует

$$F_1^{(n)}\left(r,\ \pm\frac{l}{2}\right)=M_1\sum_m\left[\frac{(-1)^m(mp+n)^2(|mp+n|+2)}{|mp+n|^3}P_{m+n_0}(u)f_{mp+n}(r)+\right.$$
$$\left.+\frac{(-1)^m|mp+n|(|mp+n|+2)(1-3|mp+n|)}{(mp+n)^3}P_{m+n_0}(u)\left(\frac{r}{r_0}\right)^{|mp+n|-3}\right]+$$
$$+M_2\sum_m\left[\frac{(-1)^m|mp+n|}{(mp+n)^2}(|mp+n|+2)P_{m+n_0}(u)f_{mp+n}(r)+\right.$$

$$+\frac{(-1)^m |mp+n| (2-4|mp+n|)}{(mp+n)^2} P_{m+n_0}(u)\left(\frac{r}{r_0}\right)^{|mp+n|-3}\Bigg]+$$

$$+\sum_m O\left(\frac{\ln|m|}{|m|^{1,5}}\right),$$

где M_1 и M_2 означают постоянные, зависящие от l, h. Ряд для $F_1^{(n)}(r, 0)$ отличаются от предыдущего отсутствием множителя $(-1)^m$. Таким образом, функция $F_1^{(n)}(r, \varphi_j)$, $\left(\varphi_j = \pm\frac{l}{2}, 0\right)$ представляется в виде линейной комбинации рядов вида

$$\sum_m a_m b_m(r),$$

где $\sum\limits_m a_m < \infty$, $0 \leqslant b_m(r) \leqslant K$, $b_{m+1}(r) \geqslant b_m(r)$ при $0 \leqslant r \leqslant r_0 - 0$. Такие ряды, как известно, сходятся равномерно. Так же доказывается равномерная сходимость аналогичных рядов при $r_0 + 0 \leqslant r \leqslant R$. Поэтому существуют

$$\lim_{r\to r_0\pm 0} F_1^{(n)}(r, \varphi_j) = F_1^{(n)}(r_0 \pm 0; \varphi_j) \quad \left(\varphi_j = \pm\frac{l}{2}, 0\right),$$

$$\lim_{r\to r_0\pm 0} F_2^{(n)}(r, \varphi) = F_2^{(n)}(r_0 \pm 0, \varphi) \quad (|\varphi| \leqslant \pi),$$

и согласно (38)

$$\lim_{\delta_1,\delta_2\to 0}\left(\int\limits_{\Gamma+\delta_1} - \int\limits_{\Gamma-\delta_2}\right)\frac{\partial^3 v_n}{\partial r^3}\eta ds =$$

$$= r_0\left\{\zeta\left[F_1^{(n)}\right] - \zeta_\varphi'\left[F_2^{(n)}\right]\right\}_{\varphi=-\frac{l}{2}}^{\varphi=\frac{l}{2}} + r_0\int\limits_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\left[F_2^{(n)}\right]\zeta_{\varphi\varphi}'' d\varphi =$$

$$= r_0\int\limits_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}\left[F_2^{(n)}\right]_{r=r_0-0}^{r=r_0+0}\zeta_{\varphi\varphi}''(r_0, \varphi)\, d\varphi. \tag{39}$$

При этом мы учли, что $\zeta(r_0, \varphi) = \zeta_\varphi'(r_0, \varphi) = 0$ при $\frac{d}{2} \leqslant |\varphi| \leqslant \frac{l}{2}$. Согласно следствию 1 имеем

$$\left[F_2^{(n)}(r, \varphi)\right]_{r=r_0-0}^{r=r_0+0} = \begin{cases}\dfrac{g_n'''}{(in)^2}e^{in\varphi} - i\varphi c^{(n)} - C_2, & |\varphi| \leqslant \dfrac{d}{2},\ n \neq 0\\ g_0'''\dfrac{\varphi^2}{2} - i\varphi c^{(0)} - C_2, & |\varphi| \leqslant \dfrac{d}{2},\ n = 0.\end{cases}$$

Подставляя это выражение в (39) и интегрируя два раза по частям, получим требуемый результат.

Лемма 5. *Пусть $\alpha_m^{(n)}$, $\beta_m^{(n)}$ выражаются по формулам* (31) *через решение уравнения* (25′) *тогда функция*

$$v_n(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[\alpha_m^{(n)} A_{mp+n}(r) + \beta_m^{(n)} B_{mp+n}(r)\right] e^{i(mp+n)\varphi} \tag{40}$$

является решением задачи (6)—(6″).

Проверим выполнение условий (6)—(6″).

Так как функции $A_{mp+n}(r)$ и $B_{mp+n}(r)$ являются линейной комбинацией функций $(rr_0^{-1})^{|mp+n|}$, $(rr_0^{-1})^{|mp+n|+2}$ при $r \leqslant r_0$ и функций

$$\left(\frac{r}{R}\right)^{|mp+n|+2}, \left(\frac{r}{R}\right)^{|mp+n|}, \left(\frac{r_0}{r}\right)^{|mp+n|}, \left(\frac{r_0}{r}\right)^{|mp+n|-2}$$

при $r_0 \leqslant r \leqslant R$ с коэффициентами, допускающими оценку $K(mp+n)$, то ряд

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\partial^{s+t}}{\partial r^s \partial \varphi^t} \left\{\left[\alpha_m^{(n)} A_{mp+n}(r) + \beta_m^{(n)} B_{mp+n}(r)\right] e^{i(mp+n)\varphi}\right\},$$

где s, t — любые целые неотрицательные числа, сходится равномерно при $0 \leqslant r < r_0$, $r_0 < r < R$, т. е. $v_n(r, \varphi)$ является бесконечно дифференцируемой функцией при $r \neq r_0$, R а из

$$\Delta^2 \left\{\left[\alpha_m^{(n)} A_{mp+n}(r) + \beta_m^{(n)} B_{mp+n}(r)\right] e^{i(mp+n)\varphi}\right\} = 0$$

и законности почленного применения оператора Δ^2 в ряду для $v_n(r, \varphi)$ следует, что $\Delta^2 v_n(r, \varphi) = 0$, $0 \leqslant r < r_0$, $r_0 < r < R$.

Ввиду оценок (10″) для $\frac{\partial^\alpha A_n(r)}{\partial r^\alpha}$, $\frac{\partial^\alpha B_n(r)}{\partial r^\alpha}$ и оценок (34) для $\alpha_m^{(n)}$, $\beta_m^{(n)}$ ряды, определяющие $v_n(r, \varphi)$, $\frac{\partial v_n(r, \varphi)}{\partial r}$, $\frac{\partial v_n(r, \varphi)}{\partial \varphi}$, сходятся равномерно при $0 \leqslant r \leqslant R$. Так как функции $\frac{\partial^\alpha A_n(r)}{\partial r^\alpha}$, $\frac{\partial^\alpha B_n(r)}{\partial r^\alpha}$, $(\alpha = 0,1)$ непрерывны при $0 \leqslant r \leqslant R$, то функция $v_n(r, \varphi)$ непрерывна вместе с первыми производными в $B + \partial B$. Из равенства (32) и свойств функций $A_n(r)$, $B_n(r)$ следует, что $v_n(r, \varphi) \in C_0^1(B)$.

Записывая $\frac{\partial \Delta v_n}{\partial r}$, Δv_n, $\frac{\partial}{\partial r}\Delta(g_n e^{in\varphi})$, $\Delta(g_n e^{in\varphi})$ в полярных координатах, используя соответствующие свойства функций $v_n(r, \varphi)$, $g_n(r; \rho)$ и лемму 4, получим, что при любой функции $\eta(x)$ из $C_0^2(B)$

$$\lim_{\delta_1, \delta_2 \to 0} \left(\int_{\Gamma^+(\delta_1)} - \int_{\Gamma^-(\delta_2)}\right)\left(\frac{\partial \Delta v_n}{\partial r}\eta - \Delta v_n \frac{\partial \eta}{\partial r}\right) ds =$$

$$= \int_{C\Gamma} \left[\frac{\partial}{\partial r}\Delta(g_n e^{in\varphi})\eta - \Delta(g_n e^{in\varphi})\frac{\partial \eta}{\partial r}\right] ds. \quad (41)$$

Обозначим

$$B_\xi = \{x : x \in B,\ |\xi| + \varepsilon \leqslant |x|,\ |\xi| + \varepsilon < r_0,\ \varepsilon > 0\}, \quad (42)$$

$$B_\xi(\delta_i) = \{x : x \in B_\xi,\ |x| \leqslant r_0 - \delta_1,\ r_0 + \delta_1 \leqslant |x| \leqslant R - \delta_3;\ \varepsilon,\ \delta_i > 0\},$$

$$G_n(r, \varphi) = g_n e^{in\varphi} + v_n(r, \varphi),$$

$\partial B_\xi(\delta_i)$ — граница области $B_\xi(\delta_i)$. Пусть $\eta(x)$ — любая функция из $C_0^\infty(B) \subset C_0^2(B)$. Из формулы Грина

$$\iint_{B_\xi(\delta_i)} (\Delta^2 G_n \eta - G_n \Delta^2 \eta)\, dx =$$

$$= \int_{\partial B_\xi(\delta_i)} \left(\frac{\partial}{\partial r}\Delta G_n \eta - \Delta G_n \frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{\partial G_n}{\partial r}\Delta \eta - G_n \frac{\partial}{\partial r}\Delta \eta\right) ds,$$

принимая во внимание

$$\Delta^2 G_n(r, \varphi) = 0,\ |\xi| + \varepsilon \leqslant r \leqslant r_0 - \delta_1,\ r_0 + \delta_2 \leqslant r \leqslant R - \delta_3,$$

равенство (41), непрерывность G_n, $\frac{\partial}{\partial r} G_n$ и свойства функции $\eta(x)$, получим после перехода к пределу при $\delta_i \to 0$ $(i = 1, 2, 3)$ равенство

$$\iint\limits_{B_\xi} G_n \Delta^2 \eta dx = 0 \tag{43}$$

при любой $\eta(x)$ из $C_0^\infty(B)$. Следовательно, функция $G_n(r, \varphi)$ является слабым решением уравнения $\Delta^2 u = 0$ в области B_ξ. Известно [3], что слабое решение этого уравнения является его обычным решением, т. е.

$$G_n(r, \varphi) \in C^\infty_{\text{лок}}(B) \text{ и } \Delta^2 G_n(r, \varphi) = 0, \quad x \in B_\xi.$$

Значит, производные любого порядка функции $G_n(r, \varphi) = g_n(r, \varphi) e^{in\varphi} + v_n(r, \varphi)$ непрерывны при $x \in C\Gamma$.

Используя оценки (34) для $\alpha_m^{(n)}$, $\beta_m^{(n)}$ и оценки

$$\int_0^R \left| \frac{\partial^2 A_n(r)}{\partial r^2} \right| r dr \leqslant K(|n| + 1), \quad \int_0^R \left| \frac{\partial^2 B_n(r)}{\partial r^2} \right| r dr \leqslant K,$$

которые нетрудно получить, непосредственно проверяем, что

$$v_n(r, \varphi) \in W_2^2(B).$$

Лемма 6. *Уравнение $z = A_{l,h}^{(n)} z$ имеет в пространстве $\tilde{m}$ только нулевое решение.*

Пусть $z = \left(c^{(n)}, \vec{z}_0^{(n)}, \vec{z}_{-1}^{(n)}, \vec{z}_1^{(n)}, \ldots\right)$ — решение уравнения $z = A_{l,h}^{(n)} z$. Построим по формулам (31) коэффициенты $\alpha_m^{(n)}$, $\beta_m^{(n)}$. Тогда функция

$$v_n(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\alpha_m^{(n)} A_{mp+n}(r) + \beta_m^{(n)} B_{mp+n}(r)\right] e^{i(mp+n)\varphi}$$

удовлетворяет, как нетрудно проследить, повторяя проведенные выше рассуждения, условиям:

1. $\Delta^2 v_n(r, \varphi) = 0, \; 0 \leqslant r < r_0, \; r_0 < r < R.$
2. $v_n(r, \varphi) \in C_0^1(B).$ (44)
3. $\frac{\partial^2 v_n(r, \varphi)}{\partial r^2}$, $\frac{\partial^3 v_n(r, \varphi)}{\partial r^3}$ непрерывны при $x \in C\Gamma$.
4. $v_n(r, \varphi) \in W_2^2(B).$

Из этих условий следует, что

$$\Delta^2 v_n(r, \varphi) = 0 \text{ при всех } x \in B.$$

Значит, вследствие теоремы единственности $v_n(r, \varphi) \equiv 0$. Следовательно,

$$\alpha_m^{(n)} = \beta_m^{(n)} = 0 \text{ и } x_m^{(n)} = y_m^{(n)} = c^{(n)} = 0, \; m = 0, \; \pm 1, \ldots$$

Следствие 2. *Уравнение $z = A_{l,h}^{(n)} z + b_{l,h}^{(n)}$ имеет единственное решение $z_{l,h}^{(n)}$. Справедлива оценка*

$$\| z_{l,h}^{(n)} \| \leqslant K_{l,h} (|n| + 1) \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^{|n|}, \tag{45}$$

и при больших $|m|$

$$\left| \vec{z}_m^{(n)} \right| = \left| (z_{l,h}^{(n)})_m \right| = \sqrt{|x_m^{(n)}|^2 + |y_m^{(n)}|^2} \leqslant$$
$$\leqslant K_{l,h} \frac{|n| + 1}{\sqrt{|m|}} \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^{|n|}. \tag{46}$$

Существование и единственность решения следует из того, что оператор $A_{l,h}^{(n)}$ вполне непрерывен при любых фиксированных $h < l \leqslant \frac{2\pi}{3}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ и однородное уравнение имеет только нулевое решение. Поэтому оператор $I - A_{l,h}^{(n)}$ имеет ограниченный обратный $B_{l,h}^{(n)}$ и решение находится по формуле

$$z_{l,h}^{(n)} = B_{l,h}^{(n)} b_{l,h}^{(n)}.$$

Так как параметр n входит в оператор $A_{l,h}^{(n)}$, а значит, и в $B_{l,h}^{(n)}$, через $\bar{n}$, который принимает конечное число значений $\bar{n} = 0, 1, \ldots, \left|\frac{1}{2}p\right|$ и при каждом $\bar{n}$ оператор $B_{l,h}^{(n)}$ ограничен, то он ограничен равномерно по n при фиксированных l и h;

$$\| B_{l,h}^{(n)} \| \leqslant \max_{\bar{n}} \| B_{l,h}^{(n)} \| = K_{l,h}.$$

Значит,

$$\| z_{l,h}^{(n)} \| \leqslant K_{l,h} \| b_{l,h}^{(n)} \| \leqslant K_{l,h} (|n| + 1) \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^{|n|}.$$

Принимая во внимание оценки (26), (45), выражение для $R_m^{n_0}$ через полиномы Лежандра и оценку последних при $|u| < 1$, получим

$$\left| \vec{z}_m^{(n)} \right| = |(z_{l,h}^{(n)})_m| \leqslant |(A_{l,h}^{(n)} z_{l,h}^{(n)})_m| + |(b_{l,h}^{(n)})_m| \leqslant$$

$$\leqslant K_{l,h} \left[\frac{\| z_{l,h}^{(n)} \|}{\sqrt{|m|}} + |R_m^{n_0}| (|n| + 1) \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^{|n|} \right] \leqslant$$

$$\leqslant K_{l,h}^{(1)} \frac{|n| + 1}{\sqrt{|m|}} \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^{|n|}.$$

Теперь докажем сформулированные в начале пункта теоремы.

Доказательство теоремы 1. Из леммы 5 и следствия 2 вытекает, что функция $v_n(r, \varphi)$, представленная рядом (40), является решением задачи (6)—(6″). Докажем справедливость оценок (29) и (29′). Имеем

$$\| v_n \|_{C'(B)} = \max_{x \in B + \partial B} \left(|v_n| + \left| \vec{\nabla} v_n \right| \right) \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m^{(n)} A_{mp+n}(r) e^{i(mp+n)\varphi} \right\|_{C^1(B)} +$$

$$+ \left\| \sum_{m=-\infty}^{\infty} \beta_m^{(n)} B_{mp+n}(r) e^{i(mp+n)\varphi} \right\|_{C^1(B)}.$$

Учитывая оценки (10″) и (34), получим

$$\| v_n \|_{C'(B)} \leqslant K \sum_m | mp + n | \cdot | \alpha_m^{(n)} | + | \beta_m^{(n)} | < +\infty.$$

Пусть

$$K^+(\delta) = \{x : r_0 + \delta \leqslant |x| \leqslant R\}, \quad K^-(\delta) = \{x : |x| \leqslant r_0 - \delta\}.$$

Согласно лемме 4 для любой функции $\eta(x) \in C_0^1(B) \cap C^2(B)$ будем иметь

$$\iint_B \Delta v_n \Delta \eta \, dx = \lim_{\delta \to 0} \iint_{K^-(\delta) \cup K^+_{(\delta)}} (\Delta v_n \Delta \eta - \Delta^2 v_n \eta) \, dx =$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \left(\int_{\Gamma^-(\delta)} - \int_{\Gamma^+(\delta)} \right) \left(\Delta v_n \frac{\partial \eta}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} \Delta v_n \eta \right) ds =$$

$$= \int_{C_\Gamma} \left[\frac{\partial}{\partial r} \Delta (g_n e^{in\varphi}) \eta - \Delta (g_n e^{in\varphi}) \frac{\partial \eta}{\partial r} \right] ds. \tag{47}$$

Так как для любой функции $\eta(x) \in \overset{\circ}{C}{}^1(B) \cap W_2^2(B)$ справедливо неравенство

$$\|\eta\|^2_{W_2^2(B)} \leqslant K \iint\limits_B |\Delta\eta|^2 dx,$$

то, положив $\eta(x) = \overline{v}_n(r, \varphi)$ в равенстве (47), получим

$$\|v_n\|^2_{W_2^2(B)} \leqslant K(|n|+1)\left(\frac{\rho}{r_0}\right)^{|n|}\left(\|v_n\|_{L_2(\Gamma_0)} + \left\|\frac{\partial v_n}{\partial r}\right\|_{L_2(\Gamma_0)}\right).$$

По теореме вложения

$$\|v_n\|_{L_2(\Gamma_0)} + \left\|\frac{\partial v_n}{\partial r}\right\|_{L_2(\Gamma_0)} \leqslant K \|v_n\|_{W_2^2(B)}.$$

Значит, равномерно по l и h

$$\|v_n\|_{W_2^2(B)} \leqslant K(|n|+1)\left(\frac{\rho}{r_0}\right)^{|n|}$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Оценки (29) и (29′) обеспечивают сходимость ряда

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\psi_0} v_n(r, \Phi) = v(x; \xi)$$

в пространствах $C^1(B)$ и $W_2^2(B)$. Так как $v_n(r, \varphi) \in C^4(K^{\pm}(\delta))$, $(\delta > 0)$ и ряд (48) сходится в пространстве $C^4(K^{\pm}(\delta))$, то его сумма $v(x; \xi) \in C^4(K^{\pm}(\delta))$ и

$$\Delta_x^2 v(x; \xi) = 0, \ x \in K^{\pm}(\delta).$$

Очевидно, осталось проверить выполнение условия (28). Функцию $g_0(x; \xi)$ согласно (3) можем представить в виде

$$g_0(x; \xi) = \frac{|x-\xi|^2}{8\pi} \ln|x-\xi| + \begin{cases} w_0(x; \xi), & |x| \leqslant r_0 \\ w_1(x; \xi), & r_0 \leqslant |x| \leqslant R, \end{cases}$$

где

$$\Delta_x^2 w_0(x; \xi) = 0, \ 0 \leqslant |x| < r_0,$$

$$w_0(x; \xi) = -\frac{|x-\xi|^2}{8\pi}\ln|x-\xi|, \quad \frac{\partial w_0(x; \xi)}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\frac{|x-\xi|^2}{8\pi}\ln|x-\xi|,$$

при $x \in \Gamma_0$,

$$w_1(x; \xi) = -\frac{|x-\xi|^2}{8\pi}\ln|x-\xi|.$$

Таким образом,

$$g_0(x; \xi) + v(x; \xi) = \frac{|x-\xi|^2}{8\pi}\ln|x-\xi| + w(x; \xi),$$

где

$$w(x; \xi) = \begin{cases} v(x; \xi) + w_0(x; \xi), & |x| \leqslant r_0 \\ v(x; \xi) + w_1(x; \xi), & r_0 \leqslant |x| \leqslant R. \end{cases}$$

Необходимо показать, что $\Delta_x^2 w(x; \xi) = 0$ при $x \in B$. Для этого достаточно доказать, что $\Delta_x^2 w(x; \xi) = 0$ при $x \in B_\xi$. Из равенства (43) следует, что при любом конечном $N > 0$

$$\iint\limits_{B_\xi}\Big[\sum_{|n|<N} g_n(r; \rho)\, e^{in(\varphi-\psi_0)} + e^{-in\psi_0} v_n(r, \varphi)\Big]\Delta^2\eta\, dx = 0$$

для любой функции $\eta(x) \in C_0^\infty(B)$. Так как

$$\sum_{|n| \leqslant N} g_n(r;\ \rho)\, e^{in(\varphi-\psi_0)} + e^{-in\psi_0} v_n(r,\ \varphi) \underset{N\to\infty}{\to} g_0(x;\ \xi) + v(x;\ \xi)$$

в пространстве $L_2(B_\xi)$, то

$$0 = \iint_{B_\xi} \left[g_0(x;\ \xi) + v(x;\ \xi)\right] \Delta^2 \eta\, dx =$$

$$= \iint_{B_\xi} \left[\frac{|x-\xi|^2}{8\pi} \ln|x-\xi| + w(x;\ \xi)\right] \Delta^2 \eta\, dx.$$

Так как

$$\iint_{B_\xi} \frac{|x-\xi|^2}{8\pi} \ln|x-\xi|^2 \Delta^2 \eta\, dx = 0,$$

то

$$\iint_{B_\xi} w(x;\ \xi)\, \Delta^2 \eta\, dx = 0$$

при любой функции $\eta(x) \in C_0^\infty(B)$, т. е. функция $w(x;\ \xi)$ является слабым решением уравнения $\Delta^2 u(x) = 0$ при $x \in B_\xi$, а слабое решение является обычным решением. Теорема доказана.

5. ПРЕДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим последовательность изученных задач, когда период l и длина h закрепления стремятся к нулю.

Теорема 3. *Пусть $\{h_k\}_{k=1}^\infty$, $\{l_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательности чисел такие, что*

$$0 < h_k < l_k,\ k = 1,\ 2,\ \ldots;\ \lim_{k\to\infty} l_k = 0,$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(-l_k \ln \sin \frac{\pi h_k}{2 l_k}\right) = a, \tag{49}$$

где $0 \leqslant a \leqslant +\infty$. *Тогда последовательность $G^{(k)}(x;\ \xi)$ функций Грина в области $B^{(k)}$ с периодом l_k и длиной закрепления h_k сходится в нормах пространств $W_2^1(K_1)$, $C(K_1)$ к решению задачи*

$$\Delta_x^2 G(x;\ \xi) = \delta(x;\ \xi),$$

$$G^+ = G^- = 0, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial r}\right)^+ = \left(\frac{\partial G}{\partial r}\right)^- = \frac{\partial G}{\partial r}, \tag{49'}$$

$$\left(\frac{\partial^2 G}{\partial r^2}\right)^+ - \left(\frac{\partial^2 G}{\partial r^2}\right)^- = \frac{4\pi}{a r_0} \frac{\partial G}{\partial r},$$

$$G(x;\ \xi) = \frac{\partial G(x;\ \xi)}{\partial r} = 0,\ x \in \Gamma_1,$$

где знаками $\pm$ обозначены предельные значения функций при $|x| = r_0 \pm 0$ соответственно.

Предварительно докажем две леммы. Обозначим

$$A_{l_k,\, h_k}^{(n)} = A_k^{(n)},\quad b_{l_k,\, h_k}^{(n)} = b_k^{(n)}.$$

Пусть n фиксировано и l_k настолько мало, что $p_k = \frac{2\pi}{l_k} > 2n$. Тогда $\bar{n} = n$, $n_0 = 0$, $\delta = \frac{nl}{2\pi}$. Заметим, что если $a = 0$, то параметр $u_k = -$

$-\cos\theta_k$, от которого зависят коэффициенты уравнения (25′), может не иметь предела при $k\to\infty$. Но так как $|u_k|\leqslant 1$, то можно выбрать такую последовательность индексов $k_1, k_2, \ldots, k_n\to\infty$, что $\{u_{k_n}\}$ имеет предел при $k\to\infty$. Мы считаем, что $0<a<\infty$. Изменения, которые необходимо внести в последующие рассуждения, когда $a=0$ или $a=\infty$, очевидны.

Применяя оценки из приложения для элементов матрицы $A_k^{(n)}$, компонент $b_k^{(n)}$ и учитывая (49), находим, что

$$\| A_k^{(n)} - A_0^{(n)} \| \to 0, \quad \| b_k^{(n)} - b_0^{(n)} \| \to 0$$

при $k\to\infty$ (или $k_n\to\infty$), где $A_0^{(n)}$ и $b_0^{(n)}$ определяют следующее уравнение:

$$\begin{gathered} c^{(n)} = 0, \\ \vec{z}_0^{(n)} = \vec{a}_{oc}^{(0)} c^{(n)} + \begin{bmatrix} 0 & , & 0 \\ \dfrac{-ar_0^2\left(r_0\left[A_n''\right]+\left[B_n''\right]\right)}{4\pi - r_0 a\left[B_n''\right]} & , & 0 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{4ag_n''}{4\pi - r_0 a\left[B_n''\right]} \end{pmatrix}, \qquad (50) \\ \vec{z}_m^{(n)} = \vec{a}_{mc}^{(0)} c^{(n)}, \quad m\neq 0, \end{gathered}$$

которое имеет единственное решение:

$$\begin{gathered} c^{(n)} = 0, \\ x_0^{(n)} = 0, \quad y_0^{(n)} = \frac{4ag_n''}{4\pi - ar_0\left[B_n''\right]}, \qquad (50') \\ \vec{z}_m^{(n)} = \left(x_m^{(n)}, y_m^{(n)}\right) = (O, O), \quad m\neq 0, \end{gathered}$$

не зависящее от способа перехода к пределу по последовательности или подпоследовательности. Отсюда следует, что если выполнены условия (49) и $z_k^{(n)}$ является решением уравнения $z = A_k^{(n)} z + b_k^{(n)}$, то

$$\lim_{k\to\infty} \| z_k^{(n)} - z_0^{(n)} \| = 0.$$

Лемма 7. *Пусть $v_n^{(k)}(r,\varphi)$ — решение задачи (6) — (6″) в области $B^{(k)}$. Пусть выполнены условия (49), тогда*

$$\lim_{k\to\infty} v_n^{(k)}(r, \varphi) = \frac{ar_0 g_n''}{ar_0\left[B_n''\right] - 4\pi} B_n(r) e^{in\varphi} = v_n^{(\infty)}(r, \varphi)$$

в нормах пространств $W_2^1(K_1)$, $C(K_1)$.

Доказательство. Пусть $p_k = \dfrac{2\pi}{l_k} > 2n$, тогда

$$v_n^{(k)}(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\alpha_m^{(n)} A_{mp+n}(r) + \beta_m^{(n)} B_{mp+n}(r)\right] e^{i(mp+n)\varphi},$$

где

$$\alpha_0^{(n)} = \frac{r_0^3}{4} x_0^{(n)}, \quad \beta_0^{(n)} = \frac{r_0^2}{4} x_0^{(n)} - \frac{r_0}{4} y_0^{(n)},$$

$$\alpha_m^{(n)} = \frac{r_0^3}{4}\frac{x_m^{(n)}}{(m+\delta)^2-\varepsilon^2}, \quad \beta_m^{(n)} = \frac{r_0^2}{4}\frac{x_m^{(n)}}{(m+\delta)^2-\varepsilon^2} -$$

$$-\frac{r_0}{4}\frac{y_m^{(n)}}{m+\delta}, \quad m\neq 0; \quad \varepsilon_k = \frac{l_k}{2\pi}, \quad \left(x_m^{(n)}, y_m^{(n)}\right) = \vec{z}_m^{(n)},$$

$$\left(c^{(n)},\ \vec{z}_0^{(n)},\ \vec{z}_{-1}^{(n)},\ \vec{z}_1^{(n)},\ \ldots\right) = z_k^{(n)} \in \tilde{m}$$

решение уравнения $z = A_k^{(n)} z + b_k^{(n)}$.

Из уравнений (24) — (24″) находим, что при достаточно малом l_k

$$|c^{(n)}| \leqslant K^{(n)} l_k^2 \| z_k^{(n)} \|,$$

и, учитывая (51), получим

$$|c^{(n)}| \leqslant K_1^{(n)} l_k^2, \tag{52}$$

$$|x_m^{(n)}| \leqslant K^{(n)} l_k^2 \| z_k^{(n)} \| + K_1^{(n)} \left(l_k^2 + |c^{(n)}|\right) \leqslant K_2^{(n)} l_k^2, \tag{52′}$$

$$|y_m^{(n)}| \leqslant K_2^{(n)} l_k. \tag{52″}$$

Учитывая неравенства

$$|B_{mp+n}(r)| \leqslant K^{(n)} \frac{l_k}{|m|^2},\quad \int_0^R |B_{mp+n}(r)|\, r dr \leqslant K^{(n)} \frac{l_k^2}{|m|^2},$$

$$|A_{mp+n}(r)| \leqslant K^{(n)},\quad \int_0^R |A_{mp+n}(r)|\, r dr \leqslant K^{(n)} \frac{l_k}{|m|},$$

$$\int_0^R |B'_{mp+n}(r)|\, r dr \leqslant K^{(n)} \frac{l_k}{|m|},$$

$$\int_0^R |A'_{mp+n}(r)|\, r dr \leqslant K^{(n)}$$

и оценки (52) — (52″), получим

$$\| v_n^{(k)}(r, \varphi) - v_n^{(\infty)}(r, \varphi) \|_{C(K_1)} \leqslant K^{(n)} \| z_k^{(n)} - z_0^{(n)} \| \underset{k\to\infty}{\to} 0,$$

$$\| v_n^{(k)}(r, \varphi) - v_n^{(\infty)}(r, \varphi \|_{W_2^1(K_1)} \leqslant K^{(n)} \| z_k^{(n)} - z_0^{(n)} \| \underset{k\to\infty}{\to} 0.$$

Обозначим

$$v^{(\infty)}(x;\ \xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\psi_0} v_n^{(\infty)}(r, \varphi) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{ar_0 g_n'' B_n(r)}{ar_0\left[B_n''\right] - 4\pi} e^{in(\varphi-\psi_0)}. \tag{53}$$

Лемма 8. *Если выполнены условия* (49), *то при* $k \to \infty$ *последовательность функций*

$$v^{(k)}(x;\ \xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n^{(k)}(r, \varphi) e^{-in\psi_0}$$

сходится в метрике пространств $C(K_1)$, $W_2^1(K_1)$ *к функции* $v^{(\infty)}(x;\ \xi)$.

Доказательство следует из леммы 7 и равномерной по k оценки

$$\| v_n^{(k)} \|_{C(K_1);\ W_2^1(K_1)} \leqslant K \| v_n^{(k)} \|_{W_2^2(K_1)} \leqslant K(|n| + 1)\left(\frac{\rho}{r_0}\right)^{|n|}.$$

Доказательство теоремы 3. Как было показано, решение $G^{(k)}(x;\ \xi)$ задачи (1) — (2) представимо в виде

$$G^{(k)}(x;\ \xi) = g_0(x;\ \xi) + v^{(k)}(x;\ \xi) = g_0(x;\ \xi) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n^{(k)}(r, \varphi) e^{-in\psi_0},$$

где $v_n^{(k)}(r, \varphi)$ — решение задачи (6) — (6″), $g_0(x; \xi)$ — функция Грина бигармонической задачи Дирихле для круга $r \leqslant r_0$. По лемме 8

$$G^{(k)}(x; \xi) \to g_0(x; \xi) + v^{(\infty)}(x; \xi) = G^{(\infty)}(x; \xi), \quad k \to \infty$$

в нормах пространств $C(K_1)$ и $W_2^1(K_1)$. Непосредственно проверяется, что функция $G^{(\infty)}(x; \xi)$ удовлетворяет условиям (49′) и что эти условия определяют ее однозначно.

Замечание. Пусть $a > 0$, тогда необходимо $-\ln\sin\frac{\pi h_k}{2l_k} \to \infty$ и $\frac{h_k}{l_k} \to 0$ при $k \to \infty$. Следовательно, в этом случае

$$a = \lim_{k\to\infty}\left(-l_k \ln\sin\frac{\pi h_k}{2l_k}\right) = \lim_{k\to\infty}(-l_k \ln h_k).$$

6. ЗАДАЧИ С ДРУГИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Сравнение результатов

Рассмотренным методом можно изучить некоторые другие задачи. Пусть B — плоскость xOy, $\Gamma^{(n)} = \bigcup_{(i)} \Gamma_i^{(n)}$ — множество отрезков длины h_n, расположенных периодически с периодом l_n вдоль прямой $y = 0$, $B^{(n)}$ — открытое множество, являющееся дополнением множества $\Gamma^{(n)}$ до всей плоскости, $B^+ = \{(x, y) : y > 0\}$, $B^- = \{(x, y) : y < 0\}$, $C_0(B^\pm$ — множество непрерывных в $B^\pm$ функций, равных нулю при $x^2 + y^2 \to 0$, $W_2^1(B^\pm)$ — замыкание непрерывно дифференцируемых финитных в $B^\pm$ функций по норме

$$\|u\|_1^2 = \iint_{B^\pm} (|u(x, y)|^2 + |\nabla u(x, y)|^2)\,dxdy.$$

Рассмотрим в области $B^{(n)}$ краевую задачу для уравнения

$$\Delta^2 u + cu = f(x, y), \quad (c > 0) \tag{54}$$

при некоторых краевых условиях $l(u) = 0$ на $\Gamma^{(n)}$. Пусть $u^{(n)}(x, y)$ — решение этой задачи. Оказывается, что при неограниченном уменьшении периода последовательность функций $u^{(n)}(x, y)$ сходится к функции $u(x, y)$, которая удовлетворяет уравнению (54) в областях $B^\pm$ и некоторым краевым условиям $l^*(u) = 0$ на всей прямой $y = 0$, вид которых зависит, конечно, от исходных краевых условий $l(u) = 0$ на $\Gamma^{(n)}$. Точнее, справедлива следующая

Теорема 4. *Если $l_n \to 0$ при $n \to \infty$ так, что либо*

$$\lim_{n\to\infty}\left[-l_n \ln\sin\frac{\pi h_n}{2l_n}\right] = a > 0, \tag{A}$$

либо

$$\lim_{n\to\infty}\left[-l_n \ln\cos\frac{\pi h_n}{2l_n}\right] = b > 0, \tag{B}$$

то последовательность функций $u^{(n)}(x, y)$ сходится в метриках пространств $C_0(B^\pm)$ и $W_2^1(B^+)$ к функции $u(x, y)$, которая является решением уравнения (54) в областях B^+ и B^- и удовлетворяет на всей прямой $y = 0$ краевым условиям $l^*(u) = 0$. Следующая таблица указывает зависимость предельных краевых условий $l^*(u) = 0$ от краевых условий $l(u) = 0$ допредельной задачи. Знаками $\pm$ отмечены предельные значения функций при $y = \pm 0$, $[f]_\pm^+ = f^+ - f^-$.

Краевые условия допредельной краевой задачи, заданные на $\Gamma^{(n)}$	Краевые условия на прямой $y=0$, которым удовлетворяет предельная функция $u(x, y)$
Случай (A)	
$u^{(n)}=0, \quad \dfrac{\partial u^{(n)}}{\partial y}=0$	$u^{+}=u^{-}=0, \quad \dfrac{\partial u^{+}}{\partial y}=\dfrac{\partial u^{-}}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial y},$ $\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]_{-}^{+}=\dfrac{4\pi}{a}\dfrac{\partial u}{\partial y}$
$\dfrac{\partial u^{(n)}}{\partial y}=0, \quad \dfrac{\partial^3 u^{(n)}}{\partial y^3}=0$	$u^{+}=u^{-}, \quad \dfrac{\partial u^{+}}{\partial y}=\dfrac{\partial u^{-}}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial y}$ $\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]_{-}^{+}=\dfrac{4\pi}{a}\dfrac{\partial u}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial^3 u^{+}}{\partial y^3}=\dfrac{\partial^3 u^{-}}{\partial y^3}$
Случай (B)	
$u^{(n)}=0, \ \dfrac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial y^2}=0$	$u^{+}=u^{-}=0, \quad \dfrac{\partial^2 u^{+}}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 u^{-}}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ $\dfrac{\pi}{b}\left[\dfrac{\partial u}{\partial y}\right]_{-}^{+}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$
$M[u^{(n)}]=\sigma\dfrac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial y^2}=0,$ $P[u^{(n)}]=(2-\sigma)\dfrac{\partial^3 u^{(n)}}{\partial x^2\partial y}+$ $+\dfrac{\partial^3 u^{(n)}}{\partial y^3}=0, \quad (0<\sigma<1)$	$u^{+}=u^{-}, \quad M[u]^{+}=M[u]^{-}=M[u],$ $P[u]^{+}=P[u]^{-},$ $\dfrac{\pi\left[1-\left(\frac{\sigma+1}{2}\right)^2\right]}{b}\left[\dfrac{\partial u}{\partial y}\right]_{-}^{+}=M[u]$

7. ПРИЛОЖЕНИЕ

Выпишем представления и оценки коэффициентов, определенных формулами (20) и (20′),

$$R_m^n(u)=V_m^n(u)-V_0^n(u)P_m(u)=V_{m-1}^{n-1}(u), \qquad \left(u=-\cos\frac{\pi h}{l}\right), \tag{7. 1}$$

где

$$V_{m-1}^{n-1}(u)=\begin{cases} \dfrac{m}{2(m-n)}\left[P_{m-1}(u)P_n(u)-P_m(u)P_{n-1}(u)\right], & m\neq n \\ \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{n}\mu_{n-k}(u)P_{k-n}(u), & m=n\geqslant 1 \\ 0, & m=n=0 \\ -\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{|n|}\mu_{|n|-k}(u)P_{k-|n|}(u), & m=n\leqslant -1 \end{cases}$$

$$\mu_0(u)=1, \quad \mu_1(u)=-u, \quad \mu_n(u)=P_n(u)-2uP_{n-1}(u)+P_{n-2}(u)=$$
$$=\frac{1}{n}\left[P_{n-2}(u)-uP_{n-1}(u)\right]=\frac{1}{n-1}\left[uP_{n-1}(u)-P_n(u)\right], \quad (n\geqslant 2).$$

Имеют место следующие оценки:

$$|P_n(u)|\leqslant\frac{2}{\sqrt{1-u^2}}\,\frac{1}{\sqrt{|n|+1}}, \qquad (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{7.1′}$$

$$|R^n_n(u)| = |V^{n-1}_{n-1}(u)| \leqslant K(|n|+1)(1-u), \quad (n=0, \pm 1, \ldots), \tag{7.1''}$$

$$|R^n_m(u)| \leqslant K \quad (m,\ n \text{ — любые целые числа}), \tag{7.1'''}$$

$$R^\delta_m(u) = T_1(u)P_m(u) + Q_1(u)P_{m+1}(u) + T_2(u;\ m)P_m(u) + \\ + Q_2(u;\ m)P_{m+1}(u), \tag{7.2}$$

где

$$|T_2(u;\ m)|, \quad |Q_2(u;\ m)| \leqslant K(u)\frac{\ln(|m|+1)}{\sqrt{|m|+1}};$$

$$|R^\delta_m(u)| \leqslant K \ln(|m|+1), \tag{7.2}$$

$$|R^{n,\,1}_{\delta,\,\varepsilon}(u)| \leqslant K, \ (n=0, \pm 1, \ldots), \tag{7.3}$$

$$|R^{\delta,\,1}_{\delta,\,\varepsilon}(u)| \leqslant K, \quad |R^1_{\delta,\,\varepsilon}(u)| \leqslant K, \tag{7.4}$$

$$P^0_{\delta,\,\varepsilon}(u) = -\ln\frac{1+u}{2} + \Delta P^0_{\delta,\,\varepsilon}(u), \quad |\Delta P^0_{\delta,\,\varepsilon}| \leqslant K(|\delta| + \varepsilon^2), \tag{7.5}$$

$$P_\delta(u) = -\ln\frac{1+u}{2} + \Delta P_\delta(u), \quad |\Delta P_\delta(u)| \leqslant K|\delta|, \tag{7.5'}$$

$$|R^{n,\,0}_{\delta,\,\varepsilon}(u)| \leqslant K\ln\frac{2}{1+u}, \quad (n=0, \pm 1, \ldots), \tag{7.6}$$

$$R^n_\delta(u) = R^n_{[\sigma]}(u) + \Delta R^n_\delta(u), \quad |\Delta R^n_\delta(u) \leqslant K|\delta|, \ (n=0, \pm 1, \ldots) \tag{7.7}$$

$$R^n_{[\sigma]}(u) = \begin{cases} \ln\dfrac{1+u}{2}, & n=0 \\[2ex] \dfrac{P_{|n|}(u) - P_{|n|-1}(u)}{2|n|}, & n \neq 0 \end{cases} \tag{7.7'}$$

где

$$R^{\delta,\,0}_{\delta,\,\varepsilon}(u) = \ln\frac{1+u}{2} + \Delta R^{\delta,\,0}_{\delta,\varepsilon}(u), \tag{7.8}$$

$$|\Delta R^{\delta,\,0}_{\delta,\,\varepsilon}(u)| \leqslant K|\delta|\ln\frac{2}{1+u}. \tag{7.8'}$$

В качестве примера докажем оценку (7.6). При доказательстве мы воспользуемся оценками

$$|P_m(u) - P_{m-1}(u)| \leqslant (|m|+1)(1-u), \quad (m=0, \pm 1, \ldots) \tag{7.9}$$

$$\sum_{\substack{m \neq 0 \\ n}} \frac{1}{|m-n|\,|m|^\alpha} \leqslant \begin{cases} K\dfrac{\ln(|n|+1)}{|n|+1}, & \alpha = 1 \\[2ex] K_1(\alpha)\dfrac{\ln(|n|+1)}{(|n|+1)^\alpha}, & 0 < \alpha < 1 \\[2ex] K_2(\alpha)\dfrac{1}{|n|+1}, & \alpha > 1, \end{cases} \tag{7.10}$$

где $K_i(\alpha) \to \infty, \quad \alpha \to 0;\ 1.$

По определению

$$R^{n,\,0}_{\delta,\,\varepsilon}(u) = \sum_{m \neq 0} \frac{m(-1)^m}{(m+\delta)^2 - \varepsilon^2} R^n_m(u) = \sum_{m \neq 0}(-1)^m \frac{R^n_m(u)}{m} - \\ - 2\delta\sum_{m \neq 0}\frac{(-1)^m}{m^2 - \varepsilon^2}R^n_m(u) + \sum_{m \neq 0}(-1)^m\left\{\frac{\varepsilon^2 - \delta^2}{m[(m+\delta)^2 - \varepsilon^2]} + \right. \\ \left. + \frac{2\delta(2m\delta + \varepsilon^2 + \delta^2)}{(m^2 - \varepsilon^2)[(m+\delta)^2 - \varepsilon^2]}\right\} R^n_m(u).$$

Обозначив через $R^n_{[\sigma]}(u)$, $R^{n,1}_{[\varepsilon]}(u)$, $R^{n,2}_{\delta,\varepsilon}(u)$ соответствующие суммы в порядке их следования, получим

$$R^{n,0}_{\delta,\varepsilon}(u) = R^n_{[\sigma]}(u) - 2\delta R^{n,1}_{[\varepsilon]}(u) + R^{n,2}_{\delta,\varepsilon}(u). \tag{7.11}$$

Оценим каждое слагаемое в последнем выражении.

Повторяя вычисления способом, указанным в работе [1], находим, что величина $R^n_{[\sigma]}(u)$ выражается по формуле (7.7'). Учитывая оценку (7.9) и неравенство $1-u \leqslant \ln\frac{2}{1+u}$, получим

$$|R^n_{[\sigma]}(u)| \leqslant K\ln\frac{2}{1+u}. \tag{7.12}$$

Далее имеем

$$R^{n,1}_{[\varepsilon]}(u) = \frac{1}{2\varepsilon}\left\{\sum_{m\neq 0}\frac{(-1)^m}{m-\varepsilon}R^n_m(u) - \sum_{m\neq 0}\frac{(-1)^m}{m+\varepsilon}R^n_m(u)\right\} =$$
$$= \frac{1}{2\varepsilon}\, R^n_{[-\varepsilon]}(u) - R^n_{[\varepsilon]}(u)\,\Big]. \tag{7.13}$$

Повторяя вычисления способом работы [1], находим, что

$$R^n_{[\varepsilon]}(u) = \sum_{m\neq 0}\frac{(-1)^m R^n_m}{m+\varepsilon} \begin{cases} \dfrac{\pi}{2\sin\pi\varepsilon}\,\dfrac{\varepsilon}{n+\varepsilon}(P_\varepsilon P_n - P_{-\varepsilon}P_{n-1}), & n \geqslant 1 \\ \dfrac{\pi}{2\sin\pi\varepsilon}\,(P_{1-\varepsilon} - P_{-\varepsilon}), & n = 0 \\ \dfrac{\pi}{2\sin\pi\varepsilon}\,\dfrac{\varepsilon}{n-\varepsilon}(P_{-\varepsilon}P_n - P_\varepsilon P_{n-1}). \end{cases} \tag{7.13'}$$

Справедлива оценка

$$|R^{n,1}_{[\varepsilon]}(u)| \leqslant \frac{K}{|n|+1}\ln\frac{2}{1+u}. \tag{7.14}$$

Докажем ее, например, при $n \geqslant 1$. Из выражения (7.13) и (7.13') следует

$$R^{n,1}_{[\varepsilon]}(u) = \frac{\pi}{4\sin\pi\varepsilon}\,\frac{(P_{-\varepsilon}-1)P_n - (P_\varepsilon - 1)P_{n-1}}{n-\varepsilon} - \frac{\pi}{4\sin\pi\varepsilon}\times$$
$$\times\frac{(P_\varepsilon - 1)P_n - (P_{-\varepsilon}-1)P_{n-1}}{n+\varepsilon} + \frac{\pi(P_n - P_{n-1})}{4\sin\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{n-\varepsilon} - \frac{1}{n+\varepsilon}\right).$$

Известно, что $P_\varepsilon(u)$ выражается следующим образом через гипергеометрическую функцию $F(a,\ b,\ c;\ x)$:

$$P_\varepsilon(u) = F\left(1+\varepsilon,\ -\varepsilon,\ 1;\ \frac{1-u}{2}\right),$$

т. е.

$$P_\varepsilon(u) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(\varepsilon+1)\ldots(\varepsilon+r)(-\varepsilon)\ldots(-\varepsilon+r-1)}{(r!)^2}\left(\frac{1-u}{2}\right)^r.$$

Из этого представления следует

$$|P_{\pm\varepsilon}(u) - 1| \leqslant \sum_{r=1}^{\infty}\frac{2\varepsilon}{r}\left(\frac{1-u}{2}\right)^r = 2\varepsilon\ln\frac{2}{1+u}.$$

Значит,

$$|R^{n,1}_{\delta,\varepsilon}(u)| \leqslant \frac{K_1}{n}\ln\frac{2}{1+u} + K_2\frac{|P_n(u) - P_{n-1}(u)|}{n^2} \leqslant \frac{K}{|n|+1}\ln\frac{2}{1+u}.$$
$$(n \geqslant 1).$$

Докажем оценку

$$|R^{n,2}_{\delta,\varepsilon}(u)| \leqslant K(|\delta| + \varepsilon^2)(1-u). \tag{7.15}$$

Из выражения для $R^{n,\,2}_{\delta,\,\varepsilon}$ видно, что оценка для (7. 15) следует из оценки для суммы вида

$$\sum_{m\neq 0}\frac{(-1)^m}{m^3}R^n_m(u).$$

Пусть $n=0$. Тогда $R^0_m(u)=\frac{1}{2}[P_{m-1}(u)-P_m(u)]$. Учитывая оценку (7. 9), получим

$$\left|\sum_{m\neq 0}\frac{(-1)^m}{m^3}R^0_m(u)\right|\leqslant(1-u)\sum_{m\neq 0}\frac{|m|+1}{|m|^3}=K(1-u).$$

Пусть $n\neq 0$. Тогда, учитывая оценки (7. 9), (7. 10), (7. 1′), получим, подставляя вместо $R^n_m(u)$ его выражение согласно (7. 1),

$$\sum_{m\neq 0}\frac{(-1)^m}{m^3}R^n_m(u)=\sum_{m\neq 0,\,n}\frac{(-1)^m[P_{m-1}(u)-P_m(u)]P_n(u)}{m^3(m-n)}+$$
$$+\left[\sum_{m\neq 0,\,n}\frac{(-1)^m P_m(u)}{m(m-n)}+\sum_{m\neq 0,\,n}\frac{(-1)^m P_m(u)}{m^2}\right]\frac{P_{n-1}(u)-P_n(u)}{n}+$$
$$+\frac{(-1)^n}{n^3}V^{n-1}_{n-1}(u)=\frac{P_{n-1}(u)-P_n(u)}{n}\sum_{m\neq 0,\,n}\frac{(-1)^m P_m(u)}{m^2}+$$
$$+O\left[(1-u)\frac{\ln(|n|+1)}{|n|+1}\right].$$

Значит,

$$R^{n,\,2}_{\delta,\,\varepsilon}(u)=K(u;\ \delta;\ \varepsilon)\frac{P_{n-1}(u)-P_n(u)}{n}+O\left[(1-u)\frac{\ln(|n|+1)}{|n|+1}\right],\tag{7. 16}$$

где

$$|K(u;\ \delta;\ \varepsilon)|\leqslant K(|\delta|+\varepsilon^2).$$

Из неравенства (7. 9) и представления (7. 16) следует справедливость оценки (7. 15). Из оценок (7. 12), (7. 14), (7. 15) и равенства (7. 11) следует справедливость доказываемой оценки.

Напишем разложение функции $g_0(x;\ \xi)$ в ряд Фурье

$$g_0(x;\ \xi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}g_n(r;\ \rho)\,e^{in(\varphi-\psi_0)},$$

где

$$g_n(r;\ \rho)=\begin{cases}(r^2+\rho^2)\ln\dfrac{r}{r_0}+\dfrac{r_0^2+\rho^2}{2}\left(1-\dfrac{r^2}{r_0^2}\right), & n=0\\[2mm] h_n(r;\ \rho)-h_n(r_0;\ \rho)A_n(r)-\dfrac{\partial h_n(r_0;\ \rho)}{\partial r}B_n(r), & n\neq 0,\end{cases}$$

$$h_n(r;\ \rho)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}(2\rho r\ln r+\rho r+\rho^3 r^{-1}), & |n|=1\\[2mm] \dfrac{\rho_n}{n(n-1)r^{n-2}}-\dfrac{\rho^{n+2}}{n(n+1)r^n}, & |n|>1\end{cases}$$

при $r>\rho$. Функции $A_n(r)$, $B_n(r)$ выражаются по формулам (10) — (10′).

Выпишем величины $\sigma^{(ik)}_n$, фигурирующие в формуле (12), $\left(i,\ k=1,\ 2;\ n\geqslant 2,\ \sigma^{ik}_n=\sigma^{(ik)}_{-n},\ \frac{r_0}{R}=q\right)$:

$$\sigma^{(11)}_n=\frac{1}{4D_n}[2n^2(1-n)q^{2n-2}+4(n^2-1)(n-1)q^{2n}-(2n^3-2n^2-$$
$$-4n)q^{2n+2}+(n-2)q^{4n}],$$

$$\sigma_n^{(12)} = -\frac{1}{4nD_n}[2n^2(1-n)q^{2n-2} + (4n-1)(n^2-1)q^{2n} - \\ -2n^2(n+1)q^{2n+2} + 4nq^{4n}],$$

$$\sigma_n^{(21)} = -\frac{1}{4(n^2-1)D_n}[(3n^3-2n^2-3n-2)q^{2n-2} + (1-n^2)(4n^2-5n- \\ -4)q^{2n} + (2n^4-4n^3-2n^2+n)q^{2n+2} - 4(n^2-1)q^{4n}],$$

$$\sigma_n^{(22)} = -\frac{1}{4n(n^2-1)D_n}[(3n^4-2n^2-2)q^{2n-2} + (-6n^4+8n^2-2)q^{2n} + \\ +3n^4q^{2n+2} - (3n^2-3n)q^{4n}],$$

где

$$D_n = 1 - n^2q^{2n-2} + (2n^2-2)q^{2n} - n^2q^{2n+2} + q^{4n}.$$

Из выражений для $\sigma_n^{(ik)}$ получаем

$$|\sigma_n^{(11)}| = O(n^3q^{2n}); \quad |\sigma_n^{(12)}|, \quad |\sigma_n^{(21)}| = O(n^2q^{2n}), \quad |\sigma_n^{(22)}| = O(nq^{2n}).$$

при больших n.

В заключение автор выражает глубокую благодарность профессору В. А. Марченко за постановку задачи и руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов. Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках. ЖТФ, т. XXXII., вып. 4, 1962.

2. Е. Н. Подольский. Математические вопросы теории дифракции на плоской периодической решетке. Автореф. канд. дисс., Харьков, 1965.

3. С. Л. Соболев. Некоторые применения функционального анализа к математической физике. Сибирск. отд. АН СССР, 1962.

Поступила 21 февраля 1968 г.