ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХАРЬКОВСКОГО ГОСУНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXVII. Серия 4 1961

ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИНВАРИАНТА ТРАНЗИТИВНОЙ ГРУППЫ

Е. Г. Ушакова

Н. Г. Чеботарев [1], рассматривая меру группы Ли как интегральный инвариант этой группы, привел условия инвариантности интеграла

$$\int M(x_1 \ldots x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \tag{1}$$

относительно группы преобразований с инфинитезимальными операторами

$$X_i(f) = \sum_{j=1}^{n} \xi_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \qquad i = 1, 2 \ldots r, \tag{2}$$

необходимые и достаточные, если группа — просто-транзитивна $(r = n)$.

Г. И. Дринфельд [2] указал дополнительные условия существования интегрального инварианта (1) группы (2) для случая транзитной группы $(r > n)$.

Изменив в случае надобности нумерацию, предположим, что операторы $X_1(f) \ldots X_n(f)$ линейно несвязаны. Тогда

$$X_{n+i}(f) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} X_j(f) \qquad i = 1, 2 \ldots r-n, \tag{3}$$

где для каждого i хоть одно p_{ij} — не постоянная величина.

Условия, приведенные в статье [2], таковы:

$$\sum_{k=1}^{n} X_k(p_{ik}) = 0 \quad i = 1, 2 \ldots r-n \tag{4}$$

Стока [3] нашел дополнительные условия существования интегрального инварианта (1) группы (2) в виде

$$\sum_{u,v,i,j=1}^{n} \sum_{m=1}^{r} C_{uv}^{m} \xi_{ki} \xi_{mj} \bar{\xi}_j^u \bar{\xi}_i^v = \sum_{u,j=1}^{n} \sum_{m=1}^{r} C_{uk}^{m} \xi_{mj} \bar{\xi}_j^u. \tag{5}$$

где $C_{\alpha\beta}^{\gamma}$ — структурные константы группы, $\bar{\xi}_m^k = \frac{\bar{\xi}_{km}}{\Delta}$, а $\bar{\xi}_{km}$ — алгебраическое дополнение элемента ξ_{km} в детерминанте $\Delta = |\xi_{ij}|$.

В настоящей заметке доказывается, что среди условий (5) есть только $r-n$ независимых и при том эквивалентных условиям (4).

По-видимому, работы [1], [2] Стока не были известны.

Из (3) следует

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\xi_{jk} = \xi_{n+i,\,k} \quad k = 1,\ 2\ \dots\ n;\ i = 1,\ 2\ \dots\ r-n.$$

Отсюда

$$p_{ik} = \frac{\begin{vmatrix} \xi_{11} & \dots & \xi_{k-1,\,1} & \xi_{n+i,\,1} & \xi_{k+1,\,1} & \dots & \xi_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{1n} & \dots & \xi_{k-1,\,n} & \xi_{n+i,\,n} & \xi_{k+1,\,n} & \dots & \xi_{n1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \xi_{11} & \dots & \xi_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{1n} & \dots & \xi_{nn} \end{vmatrix}} \equiv \frac{\Delta_{k,n+i}}{\Delta}$$

Подставляя p_{ik} в (4), получаем

$$\sum_{k,\,i=1}^{n} \xi_{ki} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{\Delta_{k,n+s}}{\Delta} \right\} = 0. \qquad s = 1,\ 2\ \dots\ r-n. \tag{6}$$

Обозначим левую часть (6) через S и воспользуемся равенствами

$$\Delta_{k,\ n+s} = \sum_{m=1}^{n} \xi_{n+s,\ m}\bar{\xi}_{km}.$$

Тогда

$$S = \sum_{k,\ i=1}^{n} \xi_{ki} \left\{ \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta_{k,\ n+s}}{\partial x_i} - \frac{\Delta_{k,\ n+s}}{\Delta^2} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial x_i} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\Delta} \sum_{k,\ i,\ m=1}^{n} \xi_{ki}\xi_{n+s,\ m} \frac{\partial \bar{\xi}_{km}}{\partial x_i} + \frac{1}{\Delta} \sum_{k,\ i,\ m=1}^{n} \xi_{ki}\bar{\xi}_{km} \frac{\partial \xi_{n+s,\ m}}{\partial x_i} -$$

$$- \frac{1}{\Delta^2} \sum_{i,\ k,\ m=1}^{n} \xi_{ki}\xi_{n+s,\ m}\bar{\xi}_{km} \frac{\partial \Delta}{\partial x_i}.$$

Выполнив суммирование по k во второй и третьей суммах, получим

$$S = \frac{1}{\Delta} \sum_{i,\ k,\ m=1}^{n} \xi_{ki}\xi_{n+s,\ m} \frac{\partial \bar{\xi}_{km}}{\partial x_i} + \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \xi_{n+s,\ m}}{\partial x_m} - \frac{1}{\Delta} \sum_{m=1}^{n} \xi_{n+s,\ m} \frac{\partial \Delta}{\partial x_m}.$$

Воспользуемся тождествами

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_{ki}\bar{\xi}_{km} = \begin{cases} 0 & i \neq m \quad i = 1,\ 2\ \dots\ n \\ \Delta & i = m \quad m = 1,\ 2\ \dots\ n. \end{cases} \tag{7}$$

Дифференцируя i-тое тождество по x_i и суммируя по i, получим

$$\sum_{k,\ i=1}^{n} \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_i} \bar{\xi}_{km} + \sum_{k,\ i=1}^{n} \xi_{ki} \frac{\partial \bar{\xi}_{km}}{\partial x} = \frac{\partial \Delta}{\partial x_m}, \qquad m = 1,\ 2\ \dots\ n.$$

Умножая m-тое равенство на $\xi_{n+s,m}$ и суммируя по m, имеем

$$\sum_{i,\,k,\,m=1}^{n} \xi_{n+s,\,m}\xi_{ki}\frac{\partial\bar{\xi}_{km}}{\partial x_i}=\sum_{m=1}^{n}\xi_{n+s,\,m}\frac{\partial\Delta}{\partial x_m}-\sum_{i,\,k,\,m=1}^{n}\xi_{n+s,\,m}\bar{\xi}_{km}\frac{\partial\xi_{ki}}{\partial x_i}.$$

Таким образом

$$S=\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial\xi_{n+s,\,m}}{\partial x_m}+\frac{1}{\Delta}\sum_{m=1}^{n}\xi_{n+s,\,m}\frac{\partial\Delta}{\partial x_m}-\frac{1}{\Delta}\sum_{m=1}^{n}\xi_{n+s,\,m}\frac{\partial\Delta}{\partial x_m}-$$
$$-\frac{1}{\Delta}\sum_{i,\,k,\,m=1}^{n}\xi_{n+s,\,m}\bar{\xi}_{km}\frac{\partial\xi_{ki}}{\partial x_i}$$

и условия (4) принимают вид

$$\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial\xi_{n+s,\,m}}{\partial x_m}=\frac{1}{\Delta}\sum_{i,\,k,\,m=1}^{n}\xi_{n+s,\,m}\bar{\xi}_{km}\frac{\partial\xi_{ki}}{\partial x_i}. \tag{8}$$

Обратимся теперь к условиям (5). Так как операторы (2) являются операторами группы, то

$$(X_k,\ X_s)f=\sum_{j=1}^{r}C_{ks}^{j}X_j(f),\qquad k,\ s=1,\ 2\ \ldots\ r, \tag{9}$$

где C_{ks}^{j} — структурные константы.

Из (9) следуют тождества

$$\sum_{j=1}^{n}\left\{\xi_{kj}\frac{\partial\xi_{si}}{\partial x_j}-\xi_{sj}\frac{\partial\xi_{ki}}{\partial x_j}\right\}=\sum_{j=1}^{r}C_{ks}^{j}\xi_{ji}, \tag{10}$$

которые мы используем для преобразования условий (5).

Заменяя в условиях (5) $\sum\limits_{m=1}^{r}C_{nv}^{m}\xi_{mj}$ и $\sum\limits_{m=1}^{r}C_{uk}^{m}\xi_{mj}$ их значениями из (10), получим

$$\sum_{i,\,j,\,u,\,v,\,m=1}^{n}\xi_{ki}\xi_{um}\bar{\xi}_{j}^{u}\bar{\xi}_{i}^{v}\frac{\partial\xi_{vj}}{\partial x_m}-\sum_{i,\,j,\,u,\,v,\,m=1}^{n}\xi_{ki}\xi_{um}\bar{\xi}_{j}^{u}\bar{\xi}_{i}^{v}\frac{\partial\xi_{uj}}{\partial x_m}=$$
$$=\sum_{u,\,j,\,m=1}^{n}\xi_{um}\bar{\xi}_{i}^{u}\frac{\partial\xi_{kj}}{\partial x_m}-\sum_{u,\,j,\,m=1}^{n}\xi_{km}\bar{\xi}_{j}^{u}\frac{\partial\xi_{uj}}{\partial x_m}.$$

Учитывая, что $\bar{\xi}_{\beta}^{\alpha}=\frac{\bar{\xi}_{\alpha\beta}}{\Delta}$ и выполняя суммирование в первых трех суммах, имеем

$$\sum_{i,\,v,\,m=1}^{n}\xi_{ki}\bar{\xi}_{i}^{v}\frac{\partial\xi_{vm}}{\partial x_m}-\sum_{j,\,u,\,m=1}^{n}\xi_{km}\bar{\xi}_{j}^{u}\frac{\partial\xi_{uj}}{\partial x_m}+\sum_{u,\,j,\,m=1}^{n}\xi_{km}\bar{\xi}_{j}^{u}\frac{\partial\xi_{uj}}{\partial x_m}=\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial\xi_{km}}{\partial x_m}$$

$$\sum_{i,\,v,\,m=1}^{n}\xi_{ki}\bar{\xi}_{i}^{v}\frac{\partial\xi_{vm}}{\partial x_m}=\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial\xi_{km}}{\partial x_m},\qquad k=1,\ 2\ \ldots\ r. \tag{11}$$

Если $k = 1, 2 \ldots n$, то выполнив суммирование в левой части по i и учитывая (7) убедимся в том, что условия (11) превращаются в тождества

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \xi_{km}}{\partial x_m} = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \xi_{km}}{\partial x_m} \qquad k = 1, 2 \ldots n.$$

Если же $k = n + s$ $(s = 1, 2 \ldots r - n)$, то в виду равенства $\bar{\xi}_i^v = \frac{\bar{\xi}_{vi}}{\Delta}$ получаем

$$\frac{1}{\Delta} \sum_{i,\, m,\, v=1}^{n} \xi_{n+s,\, i}\, \bar{\xi}_{vi} \frac{\partial \xi_{vm}}{\partial x_m} = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \xi_{n+s,\, m}}{\partial x_m}; \; s = 1, 2 \ldots r - n.$$

Таким образом, условия (5) сводятся к тем же условиям (8) которым эквивалентны условия (4).

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Н. Г. Чеботарев, Про визначення об'єму в групах Лі. «Записки Харьк. математ. об-ва», т. XIV, 1937 г.

[2]. Г. И. Дринфельд. О мере групп Ли. «Зап. научно-исследоват. ин-та математики и механики и харьк. математ. об-ва», т. 21, стр. 47—58.

[3]. Stoka. M, Asupra grupurilor G_r masurabile dintr-un spatiu E_n. Comunicarile Acad. RPRT., VIII, Nr. 10, 1958.