УДК 517.5

А. Г. ЧЕРНЯВСКИЙ

КРИТЕРИИ КВАЗИАНАЛИТИЧНОСТИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Классическая задача о квазианалитических классах функций одной переменной допускает обобщения [см., например, 1] на классы функций нескольких вещественных переменных. Одно из таких обобщений состоит в следующем. Для фиксированного оператора H в частных производных нужно указать условия на положительную последовательность $\{m_n\}_0^\infty$, а тем самым на класс функций $u(x)$, определенных в области $\Omega \subset R^m$ и удовлетворяющих там оценкам типа $|H^n u(x)| \leqslant m_n$, $n = 0, 1, \ldots$, при которых функция $u(x)$ из класса, равная нулю на подмножестве $\Omega_1 \subset \Omega$ вместе со всеми функциями вида $H^n u$ и некоторыми производными от этих функций, с необходимостью продолжается нулем в область Ω.

Настоящая заметка посвящена изучению этой задачи для операторов H, коэффициенты которых по пространственным переменным являются целыми функциями экспоненциального типа, ограниченными при вещественных значениях аргументов. Для упрощения записи мы ограничимся случаем одной пространственной переменной.

Пусть на отрезке $[-t_0, t_0]$, $t_0 > 0$ задан обыкновенный дифференциальный по t оператор Q порядка r, коэффициенты которого — бесконечно дифференцируемые по t функции, а коэффициент при старшей производной равен единице, и пусть оператор H имеет вид

$$H = Q^k + \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{r(k-i)} a_{ij}(x) Q^i D_x^j, \quad |t| \leqslant t_0, \ x \in R^1, \tag{1}$$

причем бесконечно дифференцируемые коэффициенты $a_{ij}(x)$ удовлетворяют оценкам

$$|D_x^n a_{ij}(x)| \leqslant C_0^n, \quad |t| \leqslant t_0, \ n = 0, 1, \ldots, C_0 > 0. \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть задан оператор H вида* (1), *коэффициенты $a_{ij}(x)$ которого удовлетворяют оценкам* (2). *Предположим, что* *последовательность* $\{m_n\}_0^\infty$ *такова, что модифицированная последовательность* $m'_n = \max\{m_p \exp(kr(n-p)\ln(nk)),\quad 0 \leqslant p \leqslant n\}$ *удовлетворяет условию квазианалитичности**

$$\int_0^\infty \frac{\ln T(t)\,dt}{t^{1+(kr)^{-1}}} = \infty, \tag{3}$$

где $T(t)$ *есть функция А. Островского последовательности* $\{m'_n\}$.

Тогда, если функция $u(t, x)$ *при* $|t| \leqslant t_0$, $x \in R^1$, $n = 0, 1, \ldots$, $q = 0, \ldots, kr-1$, $i = 0, \ldots, k-1$, *удовлетворяет условиям*

$$H^n u(t, x) \in C^{rk}([-t_0, t_0] \times R^1),\ D_t^q H^n u(0, x) = 0 \tag{4}$$

$$\text{и } \max|D_t^p D_x^s u(t, x)| < \infty,\ |Q^i H^n u(t, x)| \leqslant m_n,\ p + s \leqslant kr,$$

то $u(t, x) \equiv 0$, $|t| \leqslant t_0$, $x \in R^1$.

Для доказательства теоремы 1 и других теорем нам понадобятся вспомогательные утверждения, к изложению которых мы переходим.

Лемма 1. *Пусть оператор* H *имеет вид* (1) *и выполняются оценки* (2), *функции* $H^n u(t, x)$, $n = 0, 1, \ldots$ *принадлежат классу* $C^{rk}([-t_0, t_0] \times R^1)$, *а функция* $f(x)$ — *классу* $C^\infty(R^1)$, *и пусть* $\|(D_t^p D_x^q H^n u) D_x^l f\|_{L^1(R^1)} < \infty$, $p + q \leqslant kr$, $l = 0, 1, \ldots$. *Тогда если* $I_u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t, x) f(x)\,dx$, *то для любого натурального* l *выполнено включение* $I_u(t) \in C^{r(l+1)}(R^1)$ *и справедливо тождество*

$$Q^l I_u(t) = \sum_{p=0}^{\left[\frac{l}{k}\right]} \sum_{q=0}^{k-1} \int_{-\infty}^{\infty} (Q^q[H^p u]) L_{p,q,l}[f]\,dx, \tag{5}$$

в котором обыкновенные дифференциальные по x *операторы* $L_{p,q,l}$ *имеют бесконечно дифференцируемые коэффициенты, зависящие только от* x. *При этом* $L_{p,q,l} = 0$, *если* $l < pk + q$, *а в случае* $l \geqslant pk + q$ *порядок* $\alpha_{p,q,l}$ *оператора* $L_{p,q,l}$ *не превышает* $r(l - pk - q)$. *Максимум* $X_{l,p,q,s}$ *любой производной порядка не выше* s *от каждого коэффициента оператора* $L_{p,q,l}$ *удовлетворяет оценке* $X_{l,p,q,s} \leqslant C_1^l \exp((r(l - pk - q) + s)\ln(C_0 l))$, *где* $C_1 = 2 + kr\exp(kr\ln(3C_0))$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы 1 и коэффициенты* a_{ij} *постоянны. Тогда операторы* $L_{p,q,l}$ *в тождествах* (5) *имеют постоянные коэффициенты и справедливы оценки*

$$X_{l,p,q,0} \leqslant \exp(l \ln C),\ C = C(C_0, k, r).$$

---

* Для этого достаточно, например, чтобы сама последовательность $\{m_n\}$ удовлетворяла условию (3), была логарифмически выпуклой и выполнялись неравенства $m_n \geqslant n^{nkr}$, $n = 0, 1, \ldots$.

Лемма 3. *Пусть* Φ *есть пространство функций* $\varphi(x)$, $x \in R^1$, *удовлетворяющих оценкам* $\|\varphi^{(n)}(x)\|_{L^1} \leqslant (C(\varphi))^n$, $n = 0, 1, \ldots$. *Тогда пространство* Φ *достаточно богато функциями в смысле работы* [2].

Лемма 4. *Пусть* $\beta(t)$, $t \geqslant 0$ *есть произвольная неотрицательная непрерывная функция. Тогда существует такая монотонно растущая квазианалитическая последовательность* $\{M_n\}_0^\infty$ [*см.* 1], *что* $M_k M_n \leqslant M_{k+n}$, *и пространство* $\Phi_\beta(M_n) = \{\varphi(x),\ x \in R^1,\ \|\varphi^{(n)}(x)\,\beta(|x|)\|_{L^1} \leqslant (C(\varphi))^n M_n,\ n = 0, 1, \ldots\}$ *достаточно богато функциями в смысле* [2].

Доказательство теоремы 1. Воспользуемся леммой 1, в которой $f(x) \in \Phi$. Тогда для $n = 0, 1, \ldots$ получим, что $D_t^n I_u(0) = 0$ и $|Q^{nk} I_u(t)| \leqslant C_4^n m_n'$, $|t| \leqslant t_0$. В силу результата работы [3] отсюда следует, что $I_u(t) \equiv 0$, $|t| \leqslant t_0$. Применяя лемму 3, получим, что $u(t, x) \equiv 0$. Теорема доказана.

Справедлива также

Теорема 2. *Пусть оператор* H *имеет вид* (1) *и коэффициенты* a_{ij} *постоянны. Предположим, что последовательность* $\{m_n\}_1^\infty$ *такова, что модифицированная последовательность* $m_n'' = \max\{m_p,\ 1 \leqslant p \leqslant n\}$ *удовлетворяет условию квазианалитичности* (3). *Тогда, если функция* $u(t, x)$ *удовлетворяет условиям* (4) *и* $\max|D_t^p D_x^s H^n u(t, x)| < \infty$, $|Q^i H^n u(t, x)| \leqslant m_n$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$, $x \in R^1$, $p + s \leqslant kr$, $|t| \leqslant t_0$, $n = 1, 2, \ldots$, *то* $u(t, x) \equiv 0$, $|t| \leqslant t_0$, $x \in R^1$.

Доказательство. Пользуясь леммами 2 и 3, как и при доказательстве теоремы 1, получим, что $Hu(t, x) \equiv 0$. Далее, как и в работе [2], оценим производные от функции $I_u(t)$. Положим $\beta(|x|) = \max\{|D_t^p D_x^q u(t, x)|,\ |t| \leqslant t_0,\ p, q = 0, \ldots, kr\}$ и воспользуемся леммой 2, в которой $f(x) \in \Phi_\beta(M_n)$. Получим $|Q^{nk} I_u(t)| \leqslant C_5^n M_{nkr}$, $D_t^n I_u(0) = 0$, $|t| \leqslant t_0$, $n = 0, 1, \ldots$. Пользуясь результатом работы [3] и учитывая лемму 4, имеем $u(t, x) \equiv \equiv 0$. Теорема доказана.

Доказанные теоремы являются развитием теоремы 3 [1], последняя установлена лишь для операторов H с постоянными коэффициентами и финитных функций u. В случае, когда $m_n = 0$, $n \geqslant 1$, теорема 2 не следует из известных теорем единственности для операторов с неаналитическими коэффициентами [4], поскольку мы не накладываем никаких требований на простоту характеристик оператора H. Можно также показать, что если H — гиперболический оператор с постоянными коэффициентами и $r = 1$, то достаточно требовать, чтобы сама последовательность $\{m_n\}$ (а не последовательности $\{m_n'\}$ или $\{m_n''\}$) удовлетворяла условию (3).

В заключение отметим, что в случае, когда последовательность $\{m_n\}$ не удовлетворяет условию квазианалитичности (3), доказанные теоремы перестают быть справедливыми.

Автор признателен В. А. Ткаченко за полезные советы и помощь при выполнении работы.

Список литературы. 1. *Мацаев В. И., Ронкин Л. И.* Квазианалитические классы функций от нескольких переменных. — Зап. мат. отд. физ.-мат. фак. и Харьк. мат. о-ва, 1961, т. 27, серия 4, с. 49—57. 2. *Чаус Н. Н.* О единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. — Укр. мат. журн., 1964, т. 16, № 3, с. 417—421. 3. *Хрыптун В. Г.* Классы функций, квазианалитические относительно обыкновенного линейного дифференциального оператора, и их применение.— ДАН СССР, 1967, т. 177, № 3, с. 528—530. 4. *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М., Мир, 1965. 379 с.

Поступила 5 сентября 1976 г.