1. Интерполяционные тригонометрические полиномы и квадратурные формулы с равноотстоящими узлами.

1.1. *Тригонометрический полином (конечная тригонометрическая сумма)* – функция, которую можно представить в виде

$$\boxed{f_n(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi} \qquad (1.1)$$

с коэффициентами $a_0; a_k, b_k, k = 1,...,n$, которые выражаются через $f_n(\varphi)$ по формулам

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_n(\varphi)\cos k\varphi d\varphi, k = 0,1,...,n, \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_n(\varphi)\sin k\varphi d\varphi, k = 1,...,n.$$

Число n называется *порядком* тригонометрического полинома. Если $|a_n| + |b_n| > 0$, то, желая обратить внимание на это обстоятельство, будем говорить, что тригонометрический полином $f_n(\varphi)$ *точно порядка n*.

Тригонометрический полином $f_n(\varphi)$ можно представить в *комплексной форме*

$$\boxed{f_n(\varphi) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\varphi}} \qquad (1.2)$$

Здесь $2c_0 = a_0$, $2c_k = a_k - ib_k$ при k>0 и $2c_k = a_{-k} + ib_{-k}$ при k<0.

Легко видеть, что $|a_n| + |b_n| > 0$ тогда и только тогда, когда $|c_n| + |c_{-n}| > 0$.

Выражения для коэффициентов c_k, $k = 0,\pm 1,...,\pm n$ имеют вид

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_n(\varphi) e^{-ik\varphi} d\varphi \quad {}^{*)}$$

---

[*] Для того чтобы получить эти выражения для коэффициентов, используют *соотношения ортогональности*

$$\int_0^{2\pi} e^{ik\varphi}\overline{e^{im\varphi}} d\varphi = \int_0^{2\pi} e^{i(k-m)\varphi} d\varphi = 0, k \ne m; k, m \in Z$$

1.2. Теперь покажем, что если *тригонометрический полином порядка n обращается в нуль в (2n+1)-ой различных точках интервала* $[0,2\pi)$*, то он обращается в нуль тождественно.* Для этого положим $e^{i\varphi}=z$ и перепишем представление (2) в виде

$$f_n(\varphi)=\sum_{k=-n}^{n}c_k e^{ik\varphi}=e^{-in\varphi}\sum_{k=-n}^{n}c_k z^{n+k}$$

Многочлен $\sum_{k=-n}^{n}c_k z^{n+k}$ степени 2n не может иметь более 2n различных нулей, откуда и следует справедливость нашего утверждения. Очевидно, что интервал $[0,2\pi)$ можно заменить на $[\alpha,2\pi+\alpha)$, где α - любое вещественное число.

1.3. Рассмотрим далее конкретный тригонометрический многочлен порядка точно n:

$$S_n(\varphi)=\frac{1}{2n+1}\left(1+2\sum_{k=1}^{n}\cos k\varphi\right)=\frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n}e^{ik\varphi}, \tag{1.3}$$

(здесь произведена «нормировка на единицу в нуле»).

Используя формулу для суммы членов геометрической прогрессии, находим

$$S_n(\varphi)=\frac{1}{2n+1}\frac{e^{in\varphi}e^{i\varphi}-e^{-in\varphi}}{e^{i\varphi}-1}=\frac{1}{2n+1}\frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}-e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}}{e^{i\frac{\varphi}{2}}-e^{-i\frac{\varphi}{2}}},$$

откуда окончательно имеем $S_n(\varphi)=\dfrac{1}{2n+1}\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}$.

Умножим обе части равенства (2) на $e^{-im\varphi}$ и проинтегрируем от 0 до 2π. Имеем:

$$\int_0^{2\pi}f_n(\varphi)e^{-im\varphi}d\varphi=\sum_{k=-n}^{n}c_k\int_0^{2\pi}e^{i(k-m)\varphi}d\varphi=2\pi c_m$$

Аналогично получаем и выражения для коэффициентов $a_0;a_k,b_k,k=1,...,n$ в (1).

Впрочем, эти выражения теперь могут быть выписаны и с использованием приведенных выше соотношений между коэффициентами представлений (1) и (2).

Поскольку на интервале (0,2π) $\sin\frac{\varphi}{2} > 0$, нули тригонометрического полинома $S_n(\varphi), \varphi \in (0,2\pi)$ находим из тригонометрического уравнения $\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi = 0$.

Обозначим *равноотстоящие «узлы»*

$$\boxed{\varphi_k^n = \frac{2\pi k}{2n+1},\ k \in Z} \tag{1.4}$$

Имеем $S_n(\varphi_k^n) = 0, k = 1,...,2n$ и, учитывая, что $S_n(0) = 1$, окончательно получаем

$$S_n(\varphi_k^n) = \delta_{0k}, \quad k = 0,1,...,2n \tag{1.5}$$

Поскольку $S_n(\varphi + 2\pi) = S_n(\varphi)$, $\varphi \in R$, то при любом $m \in Z$ $S_n(\varphi_{k+(2n+1)m}^n) = S_n(\varphi_k^n) = 0$, так что точки $\varphi_{k+(2n+1)m}^n$ при различных целых m (и фиксированных n и k) будем отождествлять.

1.4. Теперь введём в рассмотрение 2n+1 *фундаментальных тригонометрических полиномов* порядка точно n, построенных по специальным наборам значений в *равноотстоящих узлах* интервала $[0,2\pi)$:

$$S_{n,k}(\varphi) \equiv S_n(\varphi - \varphi_k^n), \quad k = 0,1,...,2n, \tag{1.6}$$

в явном виде

$$S_{n,k}(\varphi) = \frac{1}{2n+1}\sum_{p=-n}^{n} e^{ip(\varphi - \varphi_k^n)}. \tag{1.7}$$

С учётом (5) имеем

$$S_{n,k}(\varphi_q^n) = \delta_{kq}, \quad k,q = 0,1,...,2n. \tag{1.8}$$

Покажем, что (вещественнозначные) фундаментальные тригонометрические многочлены $S_{n,k}(\varphi), k = 0,1,...,2n$ образуют ортогональный базис в (2n+1)–мерном *пространстве тригонометрических многочленов порядка n со скалярным произведением* $(f_n, g_n) \equiv \int_0^{2\pi} f_n(\varphi)\overline{g_n(\varphi)}\,d\varphi$.

Действительно, подставляя в эту формулу явные выражения для фундаментальных тригонометрических полиномов, получаем

$$(S_{n,k}, S_{n,l}) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2n+1} \sum_{p=-n}^{n} e^{ip(\varphi - \varphi_k^n)} \frac{1}{2n+1} \sum_{q=-n}^{n} e^{-iq(\varphi - \varphi_l^n)} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{(2n+1)^2} \sum_{p=-n}^{n} \sum_{q=-n}^{n} e^{i(q\varphi_l^n - p\varphi_k^n)} \int_0^{2\pi} e^{i(p-q)\varphi} d\varphi .$$

И поскольку $\int_0^{2\pi} e^{i(p-q)\varphi} d\varphi = 0$ при p ≠ q, а при p = q имеем $q\varphi_l^n - p\varphi_k^n = q\left(\varphi_l^n - \varphi_k^n\right)$, находим

$$(S_{n,k}, S_{n,l}) = \frac{2\pi}{2n+1} \cdot \frac{1}{2n+1} \sum_{q=-n}^{n} e^{iq\left(\varphi_l^n - \varphi_k^n\right)} =$$

$$= \frac{2\pi}{2n+1} S_{n,k}\left(\varphi_l^n\right).$$

Наконец, с учетом (8), окончательно получаем

$$\boxed{(S_{n,k}, S_{n,l}) = \frac{2\pi}{2n+1} \delta_{kl}, \quad k,l = 0,1,...,2n} \qquad (1.9)$$

Так что при $k \neq l$, $k,l = 0,...,2n$ фундаментальные тригонометрические полиномы ортогональны, а при $k = l$ имеем квадрат нормы фундаментального тригонометрического полинома:

$$\left\| S_{n,k} \right\|^2 = (S_{n,k}, S_{n,k}) = \frac{2\pi}{2n+1}, \quad k = 0,1,...,2n.. \qquad (1.10)$$

Далее определим интерполяционный тригонометрический полином по системе равноотстоящих 2n+1 узлов и, используя полученные в этом пункте результаты, выведем точные интерполяционные квадратурные формулы для тригонометрического многочлена порядка n и произведения двух таких многочленов.

1.5. *Тригонометрическое интерполирование* – приближённое представление 2π-периодической функции $f(\varphi)$ в виде тригонометрического полинома (1) (или в комплексной форме (2)), значения которого в заданных точках совпадают с соответствующими значениями функции $f(\varphi)$. Именно, всегда можно подобрать 2n+1 коэффициентов $a_0; a_k, b_k, k = 1,...,n$ тригонометрического полинома $f_n(\varphi)$ (1) порядка n так, чтобы его значения в наперёд заданных 2n+1 различных *узловых* точках φ_k, $\{\varphi_k\}_{k=0}^{2n} \subset [0,2\pi)$ совпадали со значениями функции $y = f(\varphi)$ в этих точках

$$f_n(\varphi_k) = f(\varphi_k) = y_k, \quad k = 0,1,...,2n \tag{1.11}$$

Из соображений, изложенных в пункте 1.2, следует, что при этом тригонометрический полином $f_n(\varphi)$ определяется единственным образом.

В самом деле, если кроме соотношений (11) для тригонометрического полинома $f_n(\varphi)$ выполняются такие же соотношения $g_n(\varphi_k) = y_k$, $k = 0,1,...,2n$ и для тригонометрического полинома $g_n(\varphi)$ степени n, то тригонометрический полином $h_n(\varphi) = f_n(\varphi) - g_n(\varphi), \varphi \in R$ обращается в нуль в 2n+1 различных точках φ_k, $k = 0,1,...,2n$ интервала $[0,2\pi)$ и, следовательно, $h_n(\varphi) = 0, \varphi \in R$, так что $f_n(\varphi) = g_n(\varphi), \varphi \in R$.

Тригонометрический полином $f_n(\varphi)$, единственным образом определённый соотношениями (11), называют *интерполяционным тригонометрическим полиномом функции* $y = f(\varphi)$ *по системе 2n+1 узловых точек (узлов) - различных точек* $\{\varphi_k\}_{k=0}^{2n}$ *интервала* $[0,2\pi)$.

В дальнейшем рассматриваются равноотстоящие узлы $\varphi_k = \varphi_k^n$ (5) при k=0,1,…,2n.

1.6. *Интерполяционный тригонометрический полином 2π – периодической функции* $y = f(\varphi)$ *с равноотстоящими узлами* $\varphi_k^n = \dfrac{2\pi k}{2n+1}$, $k = 0,1,...,2n$ (в дальнейшем – просто *интерполяционный тригонометрический полином) обозначим* $(P_n^{(1)} f)(\varphi)$:

$$(P_n^{(1)} f)(\varphi_k^n) = f(\varphi_k^n), \quad k = 0,1,...,2n \tag{1.12}$$

Результат предыдущего пункта в рассматриваемом случае для тригонометрического многочлена $f_n(\varphi)$ порядка n можно записать в виде тождества

$$\boxed{(P_n^{(1)} f_n)(\varphi) = f_n(\varphi), \varphi \in R} \tag{1.13}$$

Фундаментальные тригонометрические полиномы $S_{n,k}(\varphi)$, $k = 0,1,...,2n$, введённые в пункте 1.4, суть интерполяционные тригонометрические полиномы с «таблицами значений» (8).

Используя фундаментальные тригонометрические полиномы порядка n, построим интерполяционный тригонометрический полином 2π-периодической функции $y = f(\varphi)$:

$$\boxed{(P_n^{(1)} f)(\varphi) = \sum_{k=0}^{2n} f(\varphi_k^n) S_{n,k}(\varphi)}. \tag{1.14}$$

В самом деле, используя (8), находим

$$\sum_{k=0}^{2n} f(\varphi_k^n) S_{n,k}(\varphi_m^n) = \sum_{k=0}^{2n} f(\varphi_k^n)\,\delta_{km} = f(\varphi_m^n)$$

Оценки «скорости сходимости» $P_n^{(1)} f$ к f при n→∞ для «достаточно гладких» функций приведены в пункте 1.10.

1.7. *Квадратурная формула с равноотстоящими узлами* – это квадратурная формула для интеграла $\int_0^{2\pi} (P_n^{(1)} f)(\varphi) d\varphi$.

Используя определение интерполяционного тригонометрического полинома (14), имеем

$$\int_0^{2\pi} (P_n^{(1)} f)(\varphi) d\varphi = \sum_{k=0}^{2n} f(\varphi_k^n) \int_0^{2\pi} S_{n,k}(\varphi) d\varphi .$$

Вычислим интегралы в правой части этого равенства, используя представление (6):

$$\int_0^{2\pi} S_{n,k}(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} S_n(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2n+1} \sum_{p=-n}^{n} \int_0^{2\pi} e^{ip\varphi} d\varphi = \frac{2\pi}{2n+1}, \quad k = 0,1,...,2n$$

Окончательно получаем *интерполяционную тригонометрическую квадратурную формулу с 2n+1 равноотстоящими узлами*

$$\boxed{\int_0^{2\pi} (P_n^{(1)} f)(\varphi) d\varphi = \sum_{k=0}^{2n} f(\varphi_k^n) \frac{2\pi}{2n+1}} \tag{1.15}$$

Эту формулу можно переписать в таком виде:

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi = \sum_{k=0}^{2n} f(\varphi_k^n)\frac{2\pi}{2n+1} + R_n, \text{ где } R_n = \int_0^{2\pi}\left[f(\varphi) - (P_n^{(1)}f)(\varphi)\right]d\varphi.$$

Оценки *остаточного члена* R_n *при больших n* в предположении «достаточной гладкости» f приведены в заключительном пункте 1.10 настоящего раздела.

Особо отметим, что квадратурная формула (15) *точна* ($R_n = 0$) для тригонометрических полиномов $f_n(\varphi)$ порядка n, в силу (13), имеем

$$\boxed{\int_0^{2\pi} f_n(\varphi)d\varphi = \sum_{k=0}^{2n} f_n(\varphi_k^n)\frac{2\pi}{2n+1}} \tag{1.16}$$

1.8. *Интерполяционная квадратурная формула с 2n+1 равноотстоящими узлами точна и для произведения двух тригонометрических полиномов порядка n.*

Покажем, что для 2π-периодических функций $f(\varphi)$ и $g(\varphi)$ имеет место тождество

$$\boxed{\int_0^{2\pi}\left(P_n^{(1)}[fg]\right)(\varphi)d\varphi = \int_0^{2\pi}(P_n^{(1)}f)(\varphi)(P_n^{(1)}g)(\varphi)d\varphi} \tag{1.17}$$

для доказательства которого преобразуем правую часть:

$$\int_0^{2\pi}(P_n^{(1)}f)(\varphi)(P_n^{(1)}g)(\varphi)d\varphi = \sum_{p=0}^{2n}\sum_{q=0}^{2n} f(\varphi_p^n)g(\varphi_q^n)\int_0^{2\pi} S_{n,p}(\varphi)S_{n,q}(\varphi)d\varphi \overset{*)}{=}$$

$$= \sum_{p=0}^{2n}\sum_{q=0}^{2n} f(\varphi_p^n)g(\varphi_q^n)\frac{2\pi}{2n+1}\delta_{pq} \overset{**)}{=} \sum_{p=0}^{2n}\left[f(\varphi_p^n)g(\varphi_p^n)\right]\frac{2\pi}{2n+1} = \int_0^{2\pi}\left(P_n^{(1)}[fg]\right)(\varphi)d\varphi,$$

что и т.д.

Если $f_n(\varphi)$ и $g_n(\varphi)$ тригонометрические полиномы степени n, то, используя (13), имеем $(P_n^{(1)}f_n)(\varphi) \equiv f_n(\varphi)$, $(P_n^{(1)}g_n)(\varphi) \equiv g_n(\varphi)$ и из (17) получаем тождество

---

* Используется представление вида (14).

** Использованы соотношения ортогональности (9) и выражения для квадрата нормы (10).

$$\boxed{\int_0^{2\pi} f_n(\varphi)g_n(\varphi)d\varphi = \sum_{k=0}^{2n} f_n(\varphi_k^n)g_n(\varphi_k^n)\frac{2\pi}{2n+1}} \qquad (1.18)$$

Таким образом, утверждение, сформулированное в начале этого пункта, доказано.

1.9. Получим *явные выражения для коэффициентов* $a_0; a_k, b_k, k = 1,...,n$ *в стандартной форме (1) интерполяционного тригонометрического полинома* $(P_n^{(1)} f)(\varphi)$ 2π*-периодической функции* $f(\varphi), \varphi \in R$:

$$(P_n^{(1)} f)(\varphi) = \sum_{p=0}^{2n} f(\varphi_p^n) S_{n,p}(\varphi) = \sum_{p=0}^{2n} f(\varphi_p^n)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(\varphi - \varphi_p^n)\right]\frac{2}{2n+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{2n} f(\varphi_p^n)\frac{2}{2n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left\{\left[\frac{2}{2n+1}\sum_{p=0}^{2n} f(\varphi_p^n)\cos k\varphi_p^n\right]\cos k\varphi + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{2}{2n+1}\sum_{p=0}^{2n} f(\varphi_p^n)\sin k\varphi_p^n\right]\sin k\varphi\right\} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi,$$

где коэффициенты $a_0; a_k, b_k, k = 1,...,n$

$$a_k = \frac{2}{2n+1}\sum_{p=0}^{2n} f(\varphi_p^n)\cos k\varphi_p^n, k = 0,1,...,n,$$

$$b_k = \frac{2}{2n+1}\sum_{p=0}^{2n} f(\varphi_p^n)\sin k\varphi_p^n, k = 1,...,n$$

непосредственно выражаются через значения функции $f(\varphi)$ в узлах интерполирования.

Отметим, что поскольку $f(\varphi_p^n) = (P_n^{(1)} f)(\varphi_p^n)$, в силу (18) имеем

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\sum_{p=0}^{2n}\left[(P_n^{(1)} f)(\varphi_p^n)\cos k\varphi_p^n\right]\frac{2\pi}{2n+1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(P_n^{(1)} f)(\varphi)\cos k\varphi\, d\varphi, \quad k = 0,1,...,n, \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\sum_{p=0}^{2n}\left[(P_n^{(1)} f)(\varphi_p^n)\sin k\varphi_p^n\right]\frac{2\pi}{2n+1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(P_n^{(1)} f)(\varphi)\sin k\varphi\, d\varphi, \quad k = 1,...,n \end{aligned} \qquad (1.19)$$

Вообще, выражения для коэффициентов $a_0; a_k, b_k, k = 1,2...$ функции $f(\varphi)$ запишем в виде

$$a_k = \sum_{p=0}^{2n} \left[(P_n^{(1)} f)(\varphi_p^n)\cos k\varphi_p^n\right]\frac{2}{2n+1} + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[f(\varphi) - (P_n^{(1)} f)(\varphi)\right]\cos k\varphi d\varphi, k = 0,1,...,$$

$$b_k = \sum_{p=0}^{2n} \left[(P_n^{(1)} f)(\varphi_p^n)\sin k\varphi_p^n\right]\frac{2}{2n+1} + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[f(\varphi) - (P_n^{(1)} f)(\varphi)\right]\sin k\varphi d\varphi, k = 1,2,..., \quad (1.20)$$

В случае если $f = f_n$ – тригонометрический полином порядка n, формулы (19) *точны*, а именно коэффициенты $a_0; a_k, b_k, k = 1,...,n$ в представлении (1) имеют вид:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\sum_{p=0}^{2n}\left[f_n(\varphi_p^n)\cos k\varphi_p^n\right]\frac{2\pi}{2n+1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_n(\varphi)\cos k\varphi d\varphi, \quad k = 0,1,...,n,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\sum_{p=0}^{2n}\left[f_n(\varphi_p^n)\sin k\varphi_p^n\right]\frac{2\pi}{2n+1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_n(\varphi)\sin k\varphi d\varphi, \quad k = 1,...,n.$$

В общем случае, если f достаточно гладкая функция, оценки «остаточного члена» в формулах (20) при больших n приведены в следующем пункте.

1.10. В заключение получим оценку *«скорости сходимости»* интерполяционных тригонометрических полиномов $(P_n^{(1)} f)(\varphi)$ (при n→∞) периодической *«достаточно гладкой» функции* $f(\varphi)$ к этой функции и на этой базе дадим оценку остаточного члена в квадратурной формуле (15).

Речь идёт о *функциях класса* $C^{r,\alpha} = C^{r,\alpha}(R)$ *- r раз непрерывно дифференцируемых функций, r-ая производная которых удовлетворяет условию Гёльдера* $\left|f^{(r)}(\varphi') - f^{(r)}(\varphi'')\right| \le M_r\left|\varphi' - \varphi''\right|^{\alpha}$ *с показателем* $\alpha \in (0,1]$.

При r=0 $C^{o,\alpha}$ – это класс непрерывных функций, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем α.

Сначала приведём результаты, подробное доказательство которых читатель найдёт в книге:

Натансон И.П. Конструктивная теория функций. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1949.- 688с.

Пусть $f(\varphi), \varphi \in R$ 2π-периодическая непрерывная функция. *Наилучшим приближением к* $f(\varphi)$ *полиномами из* Π_n *(наименьшее отклонение полиномов из* Π_n *от* $f(\varphi)$*)* называется величина

$$\boxed{E_n \equiv E_n(f) \equiv \inf_{f_n \in \Pi_n} \max_{\varphi \in R} \left| f(\varphi) - f_n(\varphi) \right|} \tag{1.21}$$

Приведём *джексоновскую оценку* для E_n в предположении, что 2π-периодическая функция $f \in C^{r,\alpha}, 0 < \alpha \le 1$.

Имеет место неравенство

$$\boxed{E_n \le \frac{12^{r+1} M_r}{n^{r+\alpha}}} \tag{1.22}$$

Если $f(\varphi), \varphi \in R$ 2π-периодическая бесконечно дифференцируемая функция ($f \in C^\infty$), то для любого $p \in N$ имеет место оценка

$$E_n = \underline{O}\left(\frac{1}{n^p}\right), \qquad n \to \infty \tag{1.23}$$

С.Н. Бернштейн доказал, что для 2π-периодической аналитической функции имеет место оценка

$$E_n = \underline{O}\left(q^n\right), \quad 0 < q < 1, n \to \infty \tag{1.24}$$

Теперь оценим *среднеквадратичное отклонение* интерполяционного тригонометрического полинома $(P_n^{(1)} f)(\varphi)$ 2π-периодической функции $f(\varphi)$ класса $C^{r,\alpha}(R)$ от этой функции.

Пусть $\tilde{f}_n(\varphi) \in \Pi_n$ – *тригонометрический полином порядка n, наименее отклоняющийся от* $f(\varphi)$ *), тогда

$$\max_{\varphi \in [0,2\pi]} \left| f(\varphi) - \tilde{f}_n(\varphi) \right| = E_n \tag{1.25}$$

Поэтому имеем $\left\| f - \tilde{f}_n \right\| \equiv \left(\int_0^{2\pi} \left| f(\varphi) - \tilde{f}_n(\varphi) \right|^2 d\varphi \right)^{1/2} \le \sqrt{2\pi} E_n$.

С другой стороны, поскольку $\tilde{f}_n(\varphi) \equiv (P_n^{(1)} \tilde{f}_n)$, находим

$$\left\| \tilde{f}_n - P_n^{(1)} f \right\|^2 \equiv \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{2n} \left[\tilde{f}_n(\varphi_k^n) - f(\varphi_k^n) \right] S_{n,k}(\varphi) \right|^2 d\varphi =$$

---

* Доказательство существования такого тригонометрического полинома для 2π-периодической непрерывной функции см. в уже цитированной книге
Натансон И.П. Конструктивная теория функций. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1949.- 688с

$$
=\sum_{k=0}^{2n}\sum_{l=0}^{2n}[\widetilde{f}_n(\varphi_k^n)-f(\varphi_k^n)]\overline{[\widetilde{f}_n(\varphi_l^n)-f(\varphi_l^n)]}\int_0^{2\pi}S_{n,k}(\varphi)S_{n,l}(\varphi)d\varphi=
$$

$$
=\sum_{k=0}^{2n}\left|\widetilde{f}_n(\varphi_k^n)-f(\varphi_k^n)\right|^2\frac{2\pi}{2n+1}
$$

а учитывая, что для всех значений k

$$
\left|\widetilde{f}_n(\varphi_k^n)-f(\varphi_k^n)\right|\le\max\left|\widetilde{f}_n(\varphi)-f(\varphi)\right|\equiv E_n,
$$

имеем

$$
\left\|\widetilde{f}_n-P_n^{(1)}f\right\|\le\sqrt{2\pi}E_n \tag{1.26}
$$

и используя неравенство $\|f-P_nf\|\le\left\|f-\widetilde{f}_n\right\|+\left\|\widetilde{f}_n-P_nf\right\|$, получаем

$$
\boxed{\|f-P_nf\|\le 2\sqrt{2\pi}E_n} \tag{1.27}
$$

Поскольку для функций класса имеем *джексоновскую оценку* (22), окончательно находим

$$
\boxed{\|f-P_nf\|\le\frac{2\sqrt{2\pi}12^{r+1}M_r}{n^{r+\alpha}}} \tag{1.28}
$$

И, наконец, теперь у нас есть возможность оценить остаточный член в квадратурной формуле интерполяционного типа, полученной в пункте 1.7.

Используя неравенство Буняковского, получаем

$$
|R_n|\equiv\left|\int_0^{2\pi}\left[f(\varphi)-(P_n^{(1)}f)(\varphi)\right]d\varphi\right|\le\sqrt{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\left|f(\varphi)-(P_n^{(1)}f)(\varphi)\right|^2d\varphi\right)^{1/2}
$$

И, с учётом (27), имеем

$$
\boxed{\left|\int_0^{2\pi}\left[f(\varphi)-(P_n^{(1)}f)(\varphi)\right]d\varphi\right|\le 4\pi E_n} \tag{1.29}
$$

а в предположении, что $f\in C^{r,\alpha}$, используя джексоновскую оценку, получаем

$$
\boxed{\left|\int_0^{2\pi}\left[f(\varphi)-(P_n^{(1)}f)(\varphi)\right]d\varphi\right|\le\frac{4\pi 12^{r+1}M_r}{n^{r+\alpha}}} \tag{1.30}
$$

В заключение, приведём *лебеговскую оценку разности между* 2π*-периодической непрерывной функцией* $f(\varphi)$ *и конечной суммой* $f_n(\varphi)$ *порядка n её ряда Фурье:*

$$\left|f(\varphi)-f_n(\varphi)\right| \le (3+\ln n)E_n \tag{1.31}$$

Если $f \in C^{r,\alpha}$, то с учётом джексоновской оценки (22) для E_n, имеем

$$\left|f(\varphi)-f_n(\varphi)\right| \le \frac{(3+\ln n)12^{r+1}M_r}{n^{r+\alpha}} \tag{1.32}$$