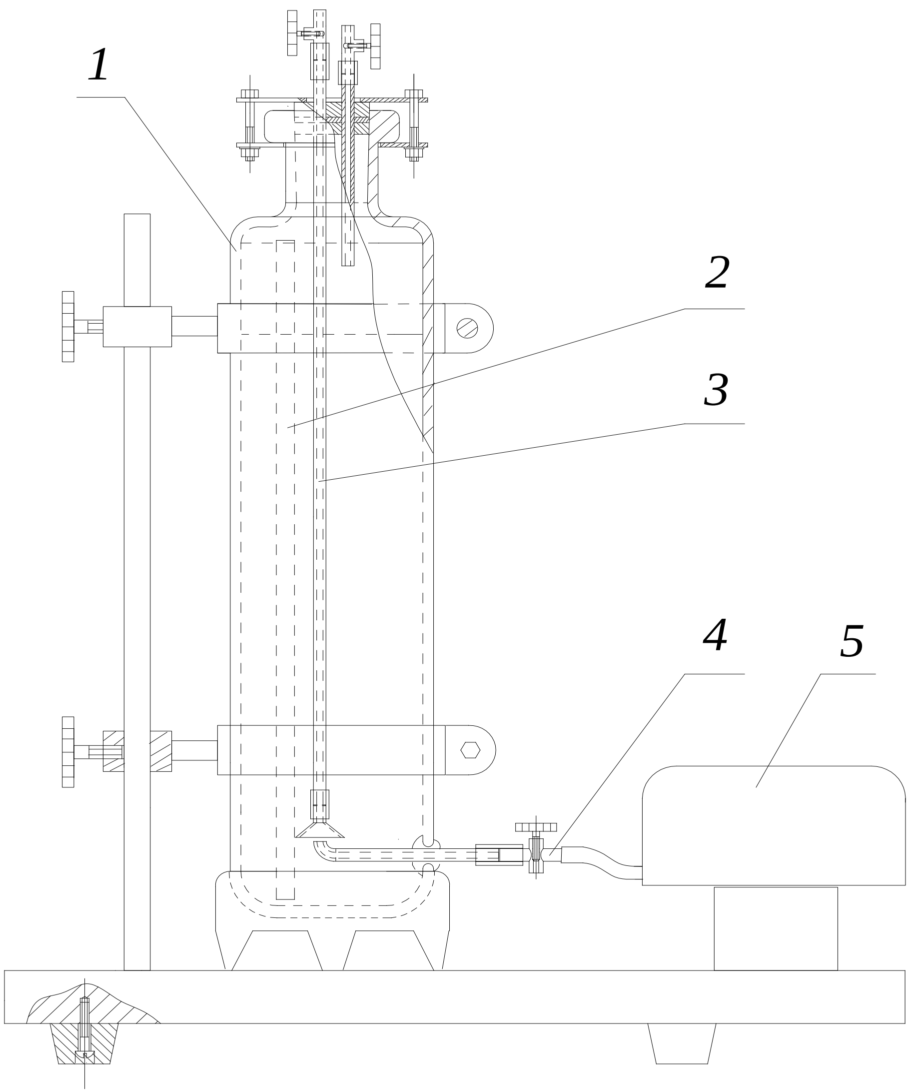
# Фазовые переходы в газонасыщенной жидкости

# Схема установки по моделированию газлифта воды




1 – емкость из стекла;
2 – линейка;
3 – капилляр;
4 – тройник;
5 – помпа.

# Основное уравнение динамики газовых пузырьков в жидкости

Функция распределения

$$f\left(\vec{r}(t), \vec{\mathrm{v}}(t), V(t), N(t), t\right)$$

$\vec{r}(t)$ Координата пузырька

$\vec{\mathrm{v}}(t)$ Скорость пузырька

$V(t)$ Объем пузырька

$N(t)$ Плотность атомов газа пузырька

Пространственные переменные $\left[\vec{r}(t), \vec{\mathrm{v}}(t), V(t), N(t)\right]$

и время $t$

Вводим безразмерное число $N_1(t) = V(t)/V_0$

изменение объема пузырька $V_0$

за время $\delta t$

За это время $\vec{r}(t)$ меняется на $\delta\vec{r}_0$

с модулем $\frac{3}{4\pi}\sqrt[3]{V_0}$ со скоростью $\vec{\mathrm{v}}(t) = \dfrac{\delta\vec{r}_0}{\delta t}$

Для функции распределения газовых пузырьков справедливо преобразование подобия

$$f(\vec{r}(t),\vec{\mathrm{v}}(t),V(t),N(t),t)dV=\overline{f}(\vec{r}(t),\vec{\mathrm{v}}(t),N_1(t),N(t),t)dN_1$$

или

$$V_0\cdot f(\vec{r}(t),\vec{\mathrm{v}}(t),V(t),N(t),t)=\overline{f}(\vec{r}(t),\vec{\mathrm{v}}(t),N_1(t),N(t),t)$$

С учетом этого, изменение во времени функции распределения

$$\overline{f}(\vec{r}(t),\vec{\mathrm{v}}(t),N_1(t),N(t),t)\equiv\overline{f}(\vec{Q}_i,N_1(t),N(t),t)$$

где: $\vec{Q}_i$ набор векторов , который обозначает координату ($i$=1) и скорость ($i$=2 ) центра пузырька

Представим в виде

$$\frac{d\overline{f}}{dt} = -\left(I_N - I_{N-1}\right) - \left(I_{N_1} - I_{N_1-1}\right) = -\frac{\partial I_N}{\partial N} - \frac{\partial I_{N_1}}{\partial N_1}$$

где: $I_N$ - поток в пространстве $N$

$I_{N_1}$ - поток в пространстве $N_1$

$$I_N = \nu_{N,N+1}\overline{f}(\vec{Q}_i, N_1, N, t) - \nu_{N+1,N}\overline{f}(\vec{Q}_i, N_1, N+1, t)$$

$$I_{N_1} = \nu_{N_1,N_1+1}\overline{f}(\vec{Q}_i, N_1, N, t) - \nu_{N_1+1,N_1}\overline{f}(\vec{Q}_i, N_1+1, N, t)$$

Где $\nu_{K,K+1}$ - частота перехода из состояния $K$

в состояние $K$+1, где $\hat{E} = \{N, N_1\}$ $\nu_{K+1,K}$ - частота

обратного перехода из состояния $K$+1 в состояние $K$.

Далее считаем, что $\overline{f}(\vec{Q}_i, N_1+1, N, t) \to f$

Уравнение изменения во времени функции распределения можно преобразуется к уравнению диффузии в пространстве $[N,V]$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\Gamma(N,V)\cdot f + \frac{\partial}{\partial N}\left( D(N)\frac{\partial f}{\partial N} \right) + \frac{\partial}{\partial V}\left( D(V)\frac{\partial f}{\partial V} \right)$$

где

$$\Gamma(N,V) = \frac{\partial}{\partial N}\left( sign\left(\frac{dN}{dt}\right)\left(\frac{dN}{dt}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial V}\left( sign\left(\frac{dV}{dt}\right)\left(\frac{dV}{dt}\right)\right) \equiv$$

$$\equiv \frac{d}{dt}\ln\left( \left(\frac{dN}{dt}\frac{dV}{dt}\right)^{sign\left(\frac{dN}{dt}\frac{dV}{dt}\right)} \right)$$

$$I_N = \frac{dN}{dt} \cdot f(\vec{Q}_i, N_1 + 1, N, t) - D(N) \cdot \frac{df(\vec{Q}_i, N_1 + 1, N, t)}{dN}$$

$$I_V = \frac{dV}{dt} \cdot f(\vec{Q}_i, N_1 + 1, N, t) - D(V) \cdot \frac{df(\vec{Q}_i, N_1 + 1, N, t)}{dV}$$

$$\frac{dN}{dt} = -D(N) \cdot \frac{1}{T} \cdot \frac{\delta F(V, N)}{\delta N},$$

$$D(N) = \nu_{N,N+1} = 4\pi\alpha R^2 \frac{D}{2l} n^L$$

$$\frac{\delta F(V,N)}{\delta N} = -T \cdot \ln \frac{p}{p^V}$$

$$\frac{dV}{dt} = -D(V) \cdot \frac{1}{T} \cdot \frac{\delta F(V,N)}{\delta V},$$

$$D(V) = \nu_{N_1,N_1+1} \cdot V_0^2 = \frac{3VT}{4\eta}$$

$$\frac{\delta F(V,N)}{\delta V} = p^L - p^V + \frac{2\sigma\left(R\right)}{R}$$

$$F(V,N)=V\left(p^{L}-p^{V}\right)+N\left(\mu^{V}-\mu^{L}\right)+\int_{0}^{V}\frac{2\sigma\left(R^{'}\right)}{R^{'}}dV^{'}$$

$F(V,N)$ - разность свободной энергий среды с пузырьком объема $V=\dfrac{4\pi}{3}R^{3}$ и числом атомов $N$ и свободной энергий среды с растворенным газом без пузырька; $T$ - температура среды; $n^{L}$ - плотность газа в жидкости; $\mu^{V}$- химический потенциал атома газа в пузырьке; $\mu^{L}$- химический потенциал атомов газа в жидкости;

$p$ насыщающее давление газа; $p^V$ - давление газа в пузырьке; $p^V$ - давление в вязкой жидкости; $\sigma(R)$ - коэффициент поверхностного натяжения на границе жидкость-вакуум; $\eta$ - динамическая вязкость жидкости; $0 \le \alpha \le 1$ - коэффициент, учитывающий дополнительный барьер, для последнего скачка атома газа в пузырек; $D$ - коэффициент диффузии атомов газа в среде; $l$ - длина элементарного перемещения атома газа в среде.

Уравнение должно быть дополнено уравнением, описывающим сохранение числа атомов газа в единичном объеме, включающем атомы газа в пузырьках и атомы газа, растворенные в жидкости:

$$n^L(0)\left(1-\int_0^\infty\int_0^\infty Vf(V,N,t)\,dVdN\right)=$$

$$n^L(t)\left(1-\int_0^\infty\int_0^\infty Vf(V,N,t)\,dVdN\right)+\int_0^\infty\int_0^\infty Nf(V,N,t)\,dVdN$$

Или в таком виде:

$$1\cdot n^L(t)+\int_0^\infty\int_0^\infty f(V,N,t)\,dVdN\left(\int_0^\infty\int_0^\infty Nf(V,N,t)\,dVdN\right)=$$

$$=1\cdot n^L(0)$$

При переходе к этому выражению использована пропорциональность количества газовых пузырьков и изменение объема жидкости в единичном объеме:

$$1=\int_0^\infty\int_0^\infty f\left(V,N,t\right)dVdN\left(1-\int_0^\infty\int_0^\infty Vf\left(V,N,t\right)dVdN\right)$$

Для решения уравнения динамики пузырьков газа в среде систему уравнений необходимо дополнить начальными и граничными условиями.

Однако, в некоторых случаях, удается получить автомодельные решения уравнения, которые характеризуют его внутренние свойства безотносительно от вида начальных и граничных условий

# Условия существования и параметры стационарных пузырьков в жидкости при

$$\frac{dN}{dt}\cdot\frac{dV}{dt}<0$$

Условие, при котором реализуется стационарное распределение газовых пузырьков

$$p,\, p^{i},\, n^{L} = const, \qquad i = V, L$$

или $\Gamma(N,V)=0$

Количество газовых пузырьков $N_b = \iint\limits_{\Omega} f\left(V,N\right) dNdV$

постоянно, но параметры их могут изменяться во времени.

Рассмотрим случай, когда $\frac{dN}{dt} \cdot \frac{dV}{dt} < 0$

Из условия стационарности процесса следует

$$V(t) = C_{1,2}\left(N(t) - D_{1,2}\right)$$

$C_{1,2}$ , $D_{1,2}$ - константы интегрирования,

$C_1 \equiv W_0 = \left(n^L(0)\right)^{-1}$ - элементарный объем.

Из условия $\Gamma(N,V) = 0$ , представления Толмена для коэффициента поверхностного натяжения $\sigma(R) = \frac{\sigma_\infty R}{\beta + R}$ ,

где $\sigma_\infty$ - поверхностное натяжение жидкости при $R \gg \beta$

Предполагая выполнение условия равновесия давления на поверхности пузырька $p(R,t) \approx p^L$ получим выражение для стационарного радиуса пузырька $R_b$

$$\frac{R_b^2 \sigma_\infty l}{\left(\beta + R_b\right)^2} = 2\alpha\eta W_0 D n^L \ln\left(1 + \frac{2\sigma_\infty}{p^L\left(\beta + R_b\right)}\right)$$

В водопроводной воде $30\mu \geq R_b \geq 2 \cdot R_0$, где $R_0 \square 3\mathring{A}$

– эффективный радиус “атома” воздуха. При $R_b \square \beta$

и $\alpha \approx 1$ получим $\beta \approx 1{,}6 \cdot 10^{-6}$ см.

С учетом этого $R_b \approx 6{,}6 \cdot 10^{-6}$ см, и в дальнейшем

параметр $\beta$ учитывать не будем.

# Условия существования и параметры стационарных пузырьков в жидкости при $\frac{dN}{dt} \cdot \frac{dV}{dt} > 0$

$$\frac{dV}{dN} = M_0 \left( \frac{dV}{dt} \right)^2 \equiv \pm M_0 \left\{ \frac{3V}{4\eta} \left( p^V - p^L - \frac{2\sigma_\infty}{R_T + R} \right) \right\}^2$$

$M_0$ - константа

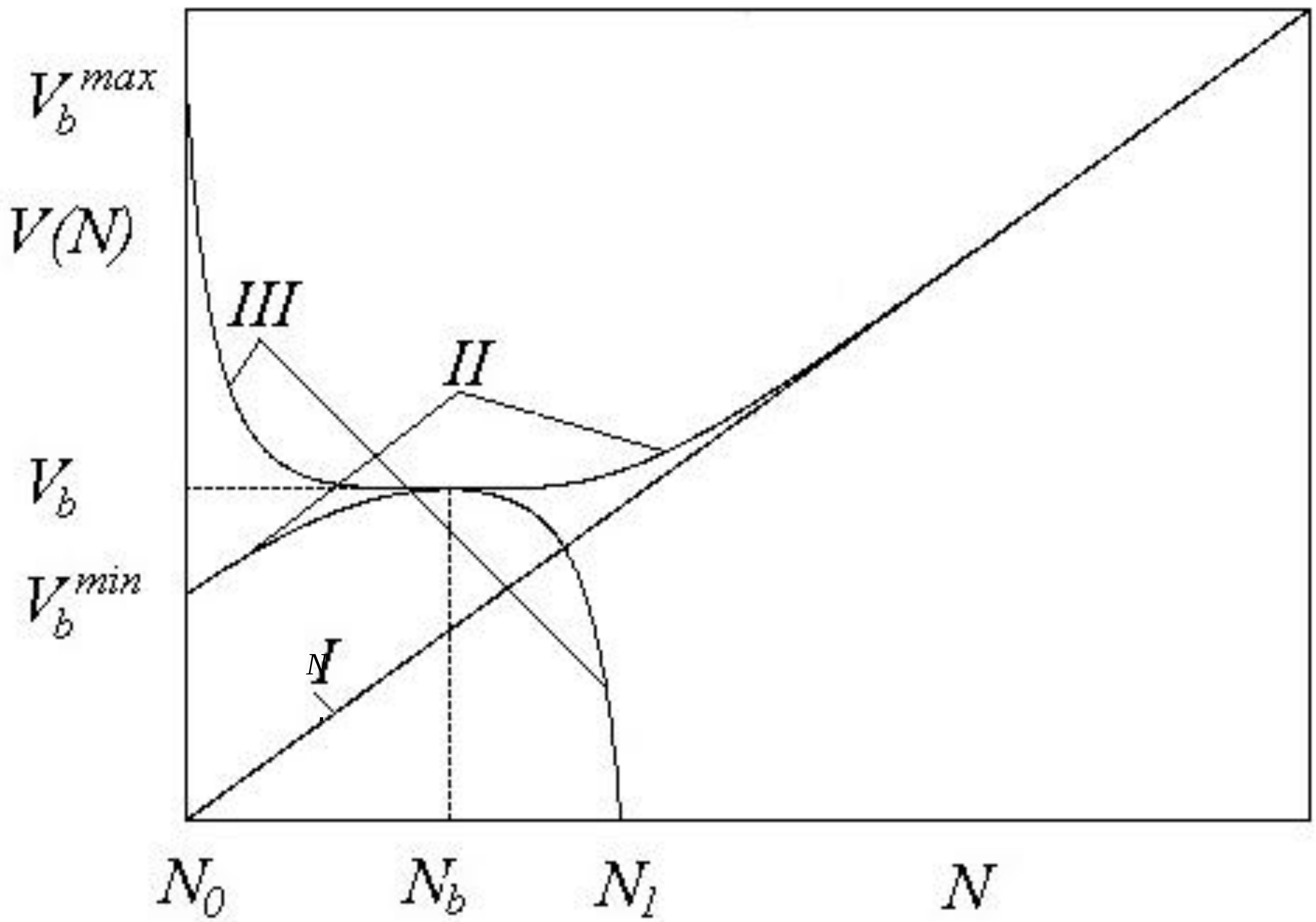



Рис. 1. Зависимости объема равновесного газового пузырька $V(N)$ от количества атомов газа в нем $N$

# Динамика газовых пузырьков в жидкости при уменьшении внешнего давления

$$\frac{dN}{dt} \cdot \frac{dV}{dt} < 0$$

Поиск автомодельных решений при $p(t) = p_0 \left( t + t_0 \right)^{\delta} \cdot t_0^{\delta}$

Пусть $p(t) \square \; p^L = p_0^L \left( t + t_0 \right)^{\delta} \cdot t_0^{-\delta}, \;\; p^V = p_0^V \left( t + t_0 \right)^{\delta} \cdot t_0^{-\delta}$

Введем автомодельную функцию $\Phi\left(\xi, \zeta\right)$

и автомодельные переменные $\xi$ и $\zeta$

$$\Phi(\xi,\zeta) = f(V,N,t)(t+t_0)^{\mu}\, t_0^{-\mu}$$

$$\zeta = \frac{3V}{4\pi}(t+t_0)^{3\delta}\cdot t_0^{-3\delta} \qquad\qquad \xi = N(t+t_0)^{\nu}\, t_0^{-\nu}$$

$\mu, \nu$ - показатели степени, определяемые из

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\Gamma(N,V)\cdot f + \frac{\partial}{\partial N}\left(D(N)\frac{\partial f}{\partial N}\right) + \frac{\partial}{\partial V}\left(D(V)\frac{\partial f}{\partial V}\right)$$

Условие стационарности: $\dfrac{\partial\Phi(\xi,\zeta)}{\partial\xi} = \dfrac{\partial\Phi(\xi,\zeta)}{\partial\zeta} = 0$

и $n^L(t) = const$ приводят исходное уравнение к виду

$$\mu = \frac{t_0 \sigma_\infty}{2\eta R_0}\left(1 - 2\eta\alpha W_0 \frac{D}{l\sigma_\infty} n^L \ln\frac{p_0^V}{p_0^L}\right)$$

Где $R_0$ - начальный радиус пузырька и справедливо

соотношение $p(R,t) \approx p^L$. Из полученного уравнения

следует:

$$R_0 = R_b \;\Rightarrow\; \mu = 0$$

$$R_0 < R_b \;\Rightarrow\; \mu < 0$$

$$R_0 > R_b \;\Rightarrow\; \mu > 0$$

# Динамика газовых пузырьков в воде при уменьшении внешнего давления

Среднее число пузырьков в жидкости

$$N_b(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(V, N, t)\,dV\,dN$$

Средний размер пузырьков в жидкости

$$\overline{V}(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty V f(V, N, t)\,dV\,dN$$

Среднее количество атомов газа в пузырьке

$$\overline{N}(t) = W_0^{-1} \cdot \overline{V}(t)$$

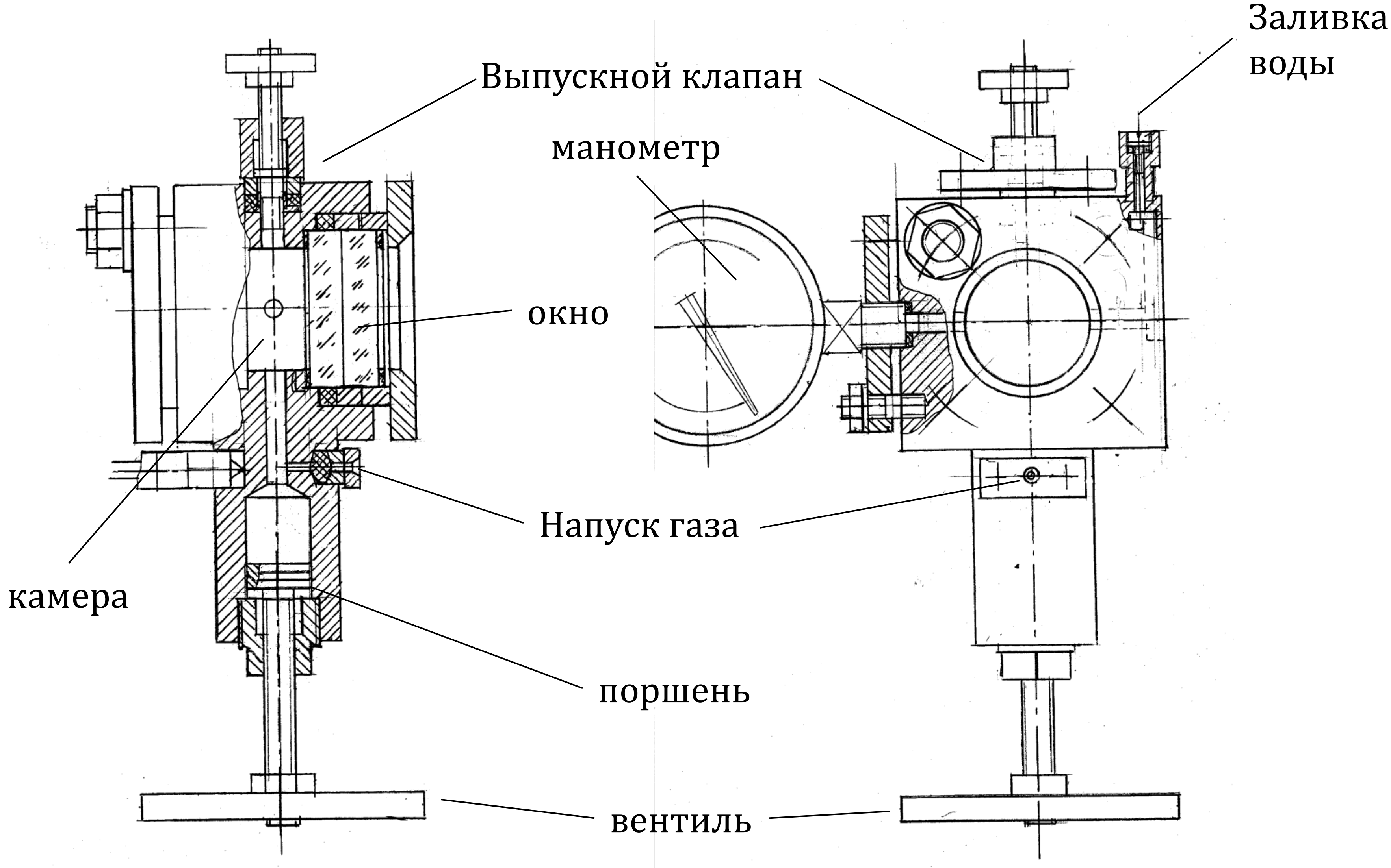
Из закона сохранения атомов газа в единичном объеме

жидкости $N_b \cdot \bar{N} + 1 \cdot n^L(t) = const$ и $n^L(t) = const$

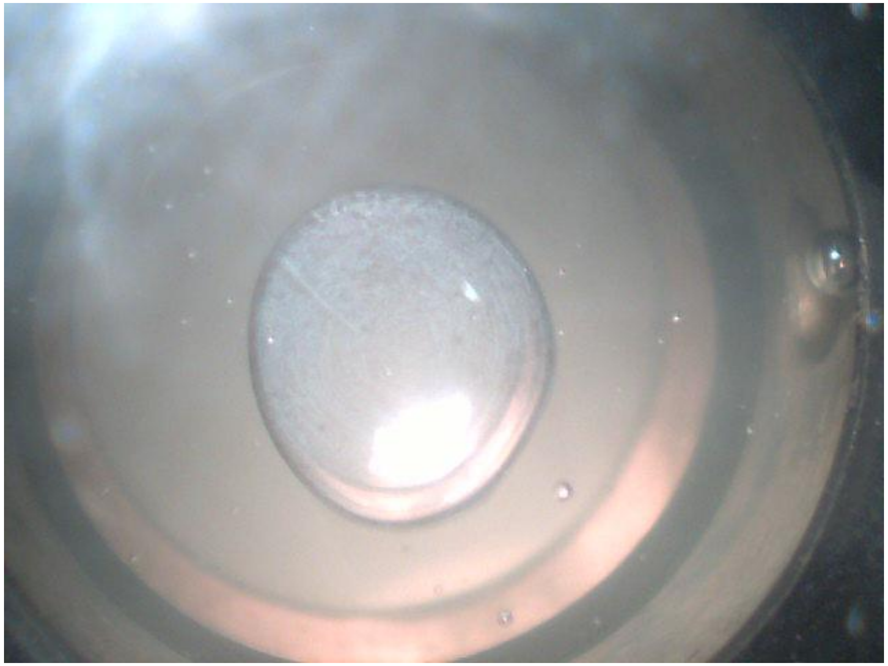
следует, что $\mu = 7,5$

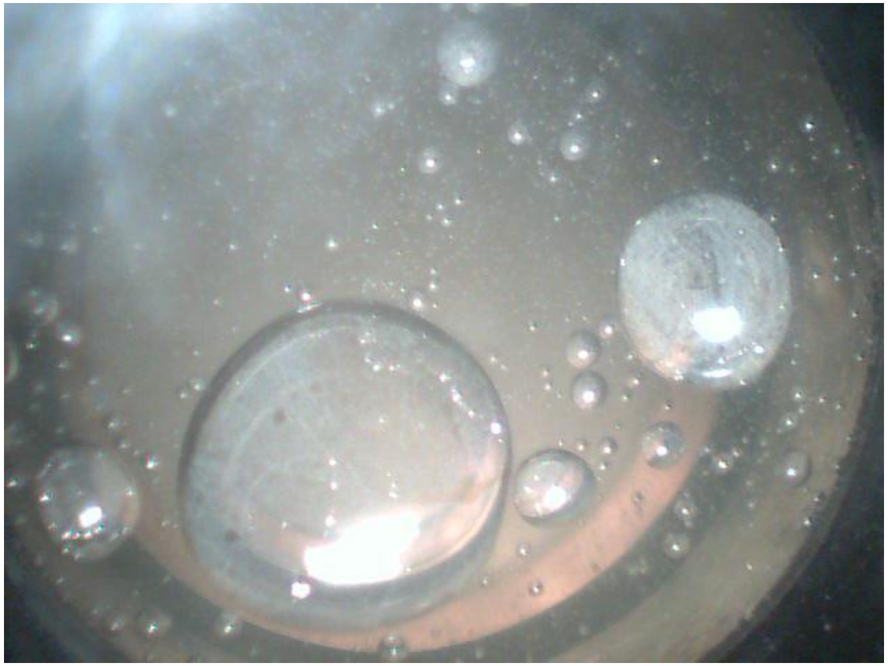
| № диапазона / $\mu$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| | $\mu < 6$ | $\mu = 6$ | $6 < \mu < 9$ | $\mu = 9$ | $\mu > 9$ |
| $N_b(t)$ | + | 0 | — | — | — |
| $\bar{V}(t), \bar{N}(t)$ | + | + | + | 0 | — |

# Ячейка высокого давления

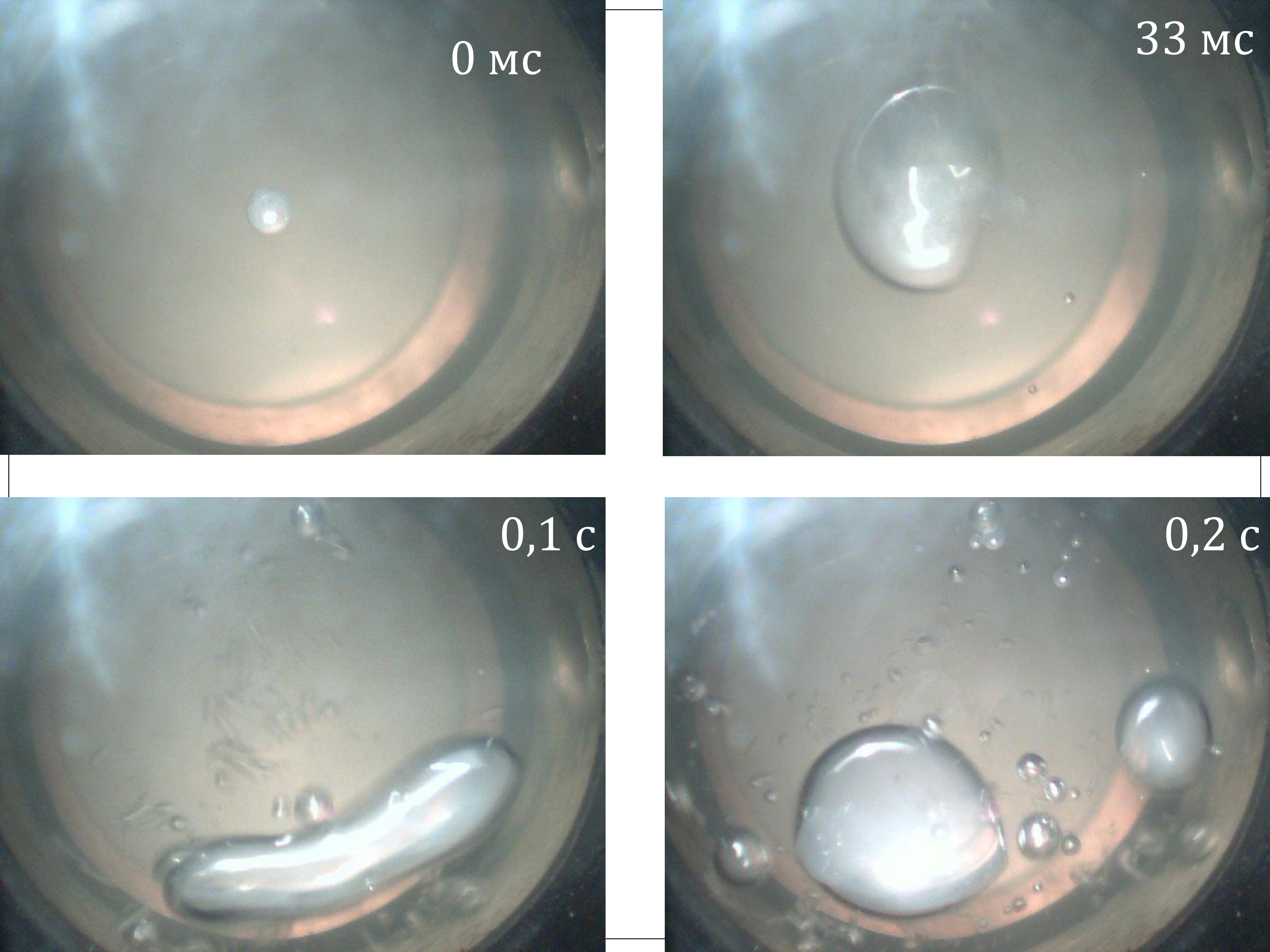


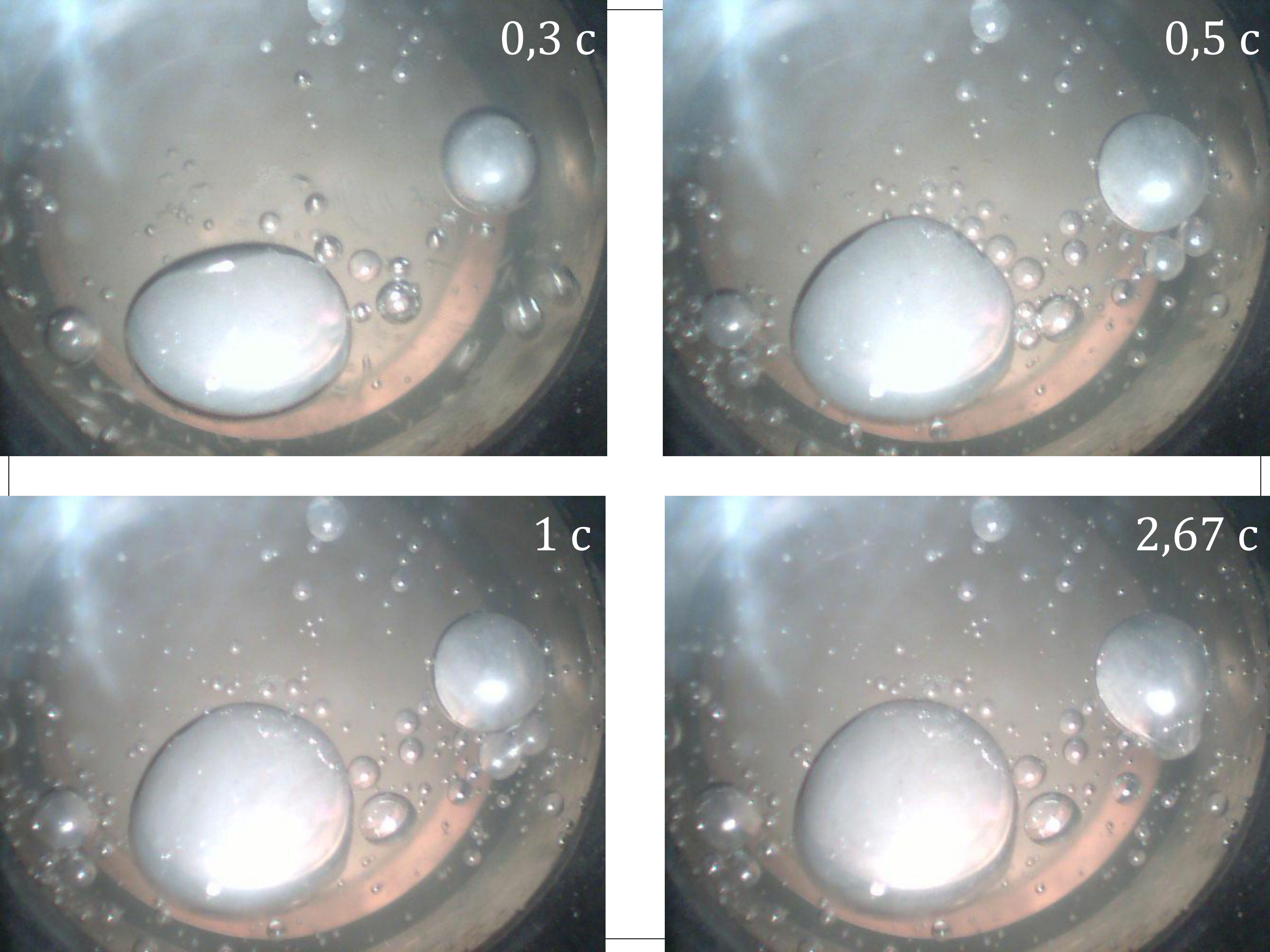
# Состояния «до» и «после»





# Динамика образования пузырьков


0 мс
33 мс
0,1 с
0,2 с


0,3 с
0,5 с
1 с
2,67 с