Къ теоріи взаимныхъ опредѣлителей.

А. П. Грузинцева.

Взаимнымъ опредѣлителемъ *) даннаго опредѣлителя n-го порядка называютъ, какъ извѣстно, опредѣлитель, составленный изъ его первыхъ миноровъ; онъ будетъ, разумѣется, тоже опредѣлителемъ n-го порядка, такъ-какъ первыхъ миноровъ даннаго числомъ n^2.

Можно подобнымъ-же образомъ составить взаимный опредѣлитель по отношенію къ составленному уже взаимному даннаго и такъ поступать далѣе. Цѣлью настоящей замѣтки и будетъ служить выводъ основныхъ связей между этими взаимными опредѣлителями, а также и ихъ минорами, различныхъ порядковъ.

Пусть имѣемъ опредѣлитель n-го порядка

$$D = \sum \pm (a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}).$$

Назовемъ его первые миноры тѣми-же буквами, но со значкомъ (1) вверху, они, значитъ, будутъ:

$$a_{11}^{(1)}, \quad a_{12}^{(1)} \cdots a_{ik}^{(1)}, \cdots$$

такъ-что

$$a_{ik}^{(1)},$$

будетъ миноръ, соотвѣтствующій элементу a_{ik} въ первоначальномъ или основномъ опредѣлителѣ; онъ получается изъ него выкидываніемъ i-ой строки и k-го столбца и составленіемъ опредѣлителя $(n-1)$-го порядка изъ оставшихся $n-1$ строкъ и $n-1$ столбцовъ.

---

*) Нѣкоторые авторы называютъ взаимный опредѣлитель—*опредѣлителемъ присоединенной системы*, т. е. совокупности первыхъ миноровъ даннаго опредѣлителя.

Составимъ изъ $a_{ik}^{(1)}$, которыхъ n^2 числомъ, опредѣлитель и назовемъ его $D^{(1)}$, т. е.

$$D^{(1)} = \sum \pm (a_{11}^{(1)} a_{22}^{(1)} \ . \ . \ . \ a_{nn}^{(1)}).$$

это и есть опредѣлитель взаимный съ D; въ виду нашей цѣли мы будемъ называть его *взаимнымъ перваго ранга* *).

Затѣмъ, принимая $D^{(1)}$ за исходный опредѣлитель, составимъ его первые миноры и обозначимъ ихъ знаками:

$$a_{11}^{(2)}, \quad a_{12}^{(2)} \ . \ . \ . \ a_{ik}^{(2)} \ . \ . \ .$$

изъ этихъ миноровъ составляемъ опредѣлитель $D^{(2)}$, который будетъ взаимнымъ съ $D^{(1)}$; будемъ называть его *взаимнымъ опредѣлителемъ 2-го ранга* по отношенію къ первоначальному D.

Идя такимъ путемъ, мы образуемъ $D^{(q)}$ — *взаимный опредѣлитель* (q)*-го ранга* по отношенію къ первоначальному; онъ-же будетъ *просто взаимный* съ предыдущимъ опредѣлителемъ $(q-1)$-го *ранга*. Элементы этого опредѣлителя будутъ:

$$a_{11}^{(q)}, \qquad a_{12}^{(q)} \ . \ . \ . \ a_{ik}^{(q)} \ . \ . \ .$$

и самъ онъ будетъ:

$$D^{(q)} = \sum \pm a_{11}^{(q)} a_{22}^{(q)} \ . \ . \ . \ a_{nn}^{(q)}.$$

Всѣ эти опредѣлители суть, разумѣется, опредѣлители n-го *порядка*.

Прежде чѣмъ заняться соотношеніями между всѣми этими опредѣлителями, условимся въ одномъ обозначеніи, которое временно будемъ употреблять. Будемъ обозначать $(n-j)$-ый миноръ какого-нибудь опредѣлителя $\triangle$ n-го порядка символомъ:

$$\triangle_{j,\,p},$$

въ которомъ первый указатель j будетъ обозначать порядокъ того опредѣлителя, который самъ есть $(n-j)$-ый миноръ; а второй указатель p будетъ опредѣлять нумеръ минора **).

---

*) Можно было-бы его называть взаимнымъ 1-го порядка, но терминъ „порядокъ“ такъ часто употребляется въ *опредѣлителяхъ*, что во избѣжаніе недоразумѣній будемъ употреблять слово „*рангъ*“.

**) Извѣстно, что всѣхъ $(n-j)$-ыхъ миноровъ даннаго опредѣлителя n-го порядка можно составить

$$\left[\frac{n(n-1)\ . \ . \ . \ (n-j+1)}{1.2.3\ . \ . \ . \ j}\right]^2 \text{ числомъ.}$$

Теперь установимъ тѣ соотношенія, которыя имѣли въ виду. Они будутъ основаны на слѣдующихъ двухъ извѣстныхъ равенствахъ, связывающихъ взаимный опредѣлитель и его миноры съ первоначальнымъ опредѣлителемъ и его минорами:

$$\triangle' = \triangle^{n-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

$$\triangle'_{j\,,\,p} = \triangle^{j-1} \triangle_{n-j\,,\,p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (B)$$

здѣсь $\triangle'$ есть опредѣлитель взаимный съ $\triangle$, а $\triangle_{n-j\,,\,p}$ есть j-ый миноръ опредѣлителя $\triangle$ дополнительный минору $\triangle'_{j\,,\,p}$.

Примѣняя формулу (A) къ $D^{(1)}, D^{(2)} \ldots D^{(q)}$, найдемъ послѣдовательно:

$$D^{(1)} = D^{n-1}$$

$$D^{(2)} = (D^{(1)})^{(n-1)} = D^{(n-1)^2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$D^{(q)} = D^{(n-1)^q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{I})$$

Установимъ теперь соотношенія между минорами.

По формулѣ (B) имѣемъ:

$$D^{(1)}_{j\,,\,p} = D^{j-1} D_{n-j\,,\,p} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Полагая здѣсь $j = n-1$, найдемъ:

$$D^{(1)}_{n-1,p} = D^{n-2} D_{1,p}\,,$$

но по первымъ нашимъ обозначеніямъ должно положить

$$D^{(1)}_{n-1,p} = a^{(2)}_{ik}\,,$$

$$D_{1,p} = a_{ik}\,,$$

слѣдовательно:

$$a^{(2)}_{ik} = D^{n-2} a_{ik} = D^{(n-1)-1} a_{ik} \ldots\ldots\ldots \quad (1')$$

Далѣе, таже формула (B) вмѣстѣ съ (I) даетъ:

$$D^{(2)}_{j,p} = (D^{(1)})^{j-1} D^{(1)}_{n-j,p}\,,$$

но

$$D^{(1)} = D^{n-1}\,,$$

по формулѣ (A),

$$D_{n-j,p}^{(1)} = D^{n-j-1} D_{j,p},$$

по формулѣ (1),

слѣдовательно

$$D_{j,p}^{(2)} = D^{(n-1)(j-1)+(n-j-1)} D_{j,p},$$

или

$$D_{j,p}^{(2)} = D^{[(n-1)-1]j} D_{j,p}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Полагая здѣсь j равнымъ $(n-1)$ и замѣчая, что

$$D_{n-1,p}^{(2)} = a_{ik}^{(3)}, \quad D_{n-1,p} = a_{ik}^{(1)},$$

найдемъ:

$$a_{ik}^{(3)} = D^{(n-1)^2-(n-1)} a_{ik}^{(1)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2')$$

Далѣе составимъ:

$$D_{j,p}^{(3)} = (D^{(2)})^{j-1} D_{n-j,p}^{(2)},$$

но

$$(D^{(2)})^{j-1} = D^{(n-1)^2(j-1)}$$

и по формулѣ (2), полагая въ ней $n-j$ вмѣсто j,

$$D_{n-j,p}^{(2)} = D^{[(n-1)-1](n-j)} D_{n-j,p},$$

слѣдовательно:

$$D_{j,p}^{(3)} = D^{(n-1)^2(j-1)+[(n-1)-1](n-j)} D_{n-j,p}$$

но

$$(n-1)^2(j-1)+[(n-1)-1](n-j) = [(n-1)^2-(n-1)+1]j-1$$

слѣдовательно *):

$$D_{j,p}^{(3)} = D^{[(n-1)^2-(n-1)+1]j-1} D_{n-j,p}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Полагая здѣсь j равнымъ $n-1$ и зная, что:

$$D_{n-1,p}^{(3)} = a_{ik}^{(4)}, \quad D_{1,p} = a_{ik},$$

найдемъ:

$$a_{ik}^{(4)} = D^{(n-1)^3-(n-1)^2+(n-1)-1} a_{ik}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3')$$

*) Мы не преобразовываемъ показателей съ цѣлью видѣть способъ ихъ составленія.

Разсматривая выраженія (1), (2) и (3) и помня способъ ихъ полученія, не трудно подмѣтить общій законъ составленія ихъ для миноровъ взаимнаго опредѣлителя какого угодно ранга, а именно, для взаимнаго опредѣлителя четнаго ранга $2m$ имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} &D^{(2m)}_{j,p} = D^{[(n-1)^{2m-1}-(n-1)^{2m-2}+\ldots-1]j} D_{j,p}\,, \\ &\text{а для нечетнаго ранга} \\ &D^{(2m+1)}_{j,p} = D^{[(n-1)^{2m}-(n-1)^{2m-1}+\ldots+1]j-1} D_{n-j,p}\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (\mathrm{II})$$

Суммы въ скобкахъ пока оставляемъ въ этомъ видѣ, а потомъ ихъ упростимъ.

Чтобы убѣдиться въ справедливости этихъ формулъ стоитъ только составить изъ $D^{(2m)}_{j,p}$ формулу для $D^{(2m+1)}_{j,p}$, а изъ формулы $D^{(2m+1)}_{j,p}$ формулу для $D^{(2m+2)}_{j,p}$; онѣ будутъ того-же вида (II).

Выполнимъ это. По формулѣ (B) имѣемъ:

$$D^{(2m+1)}_{j,p} = \left(D^{(2m)}\right)^{j-1} D^{(2m)}_{n-j,p}\,,$$

но по формулѣ (I), полагая въ ней $q = 2m$, имѣемъ:

$$\left(D^{(2m)}\right)^{j-1} = D^{(n-1)^{2m}(j-1)}\,,$$

а по первой формулѣ группы (II), допускаемой на время, полагая въ ней $n-j$ вмѣсто j, имѣемъ:

$$D^{(2m)}_{n-j,p} = D^{[(n-1)^{2m-1}-(n-1)^{2m-2}+\ldots-1](n-j)} D_{n-j,p}\,,$$

но

$$(n-1)^{2m}(j-1) + [(n-1)^{2m-1} - (n-1)^{2m-2} + \ldots - 1](n-j) =$$
$$= [(n-1)^{2m} - (n-1)^{2m-1} + \ldots + 1]j + [-(n-1)^{2m} + n(n-1)^{2m-1} - \ldots$$
$$- n(n-1)^2 + n(n-1) - n]\,,$$

но многочленъ въ скобкахъ равенъ -1, ибо

$$n(n-1)^{2m-1} - n(n-1)^{2m-2} + \ldots + n(n-1) - n = (n-1)^{2m} - 1\,,$$

какъ сумма геометрической прогрессіи; и такъ имѣемъ:

$$D^{(2m+1)}_{j,p} = D^{[(n-1)^{2m}-(n-1)^{2m-1}+\ldots+1]j-1} D_{n-j,p}\,,$$

а это данная выше формула.

Если-бы мы допустили на время эту формулу, то получили бы изъ нея формулу для $D^{(2m+2)}_{j,p}$ вида (II) для $D^{(2m)}_{j,p}$.

Дѣйствительно, допуская справедливость ея, по формулѣ (B) имѣемъ:

$$D^{(2m+2)}_{j,p} = (D^{(2m+1)})^{j-1}\, D^{(2m+1)}_{n-j,p} \,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. (a)$$

но

$(D^{(2m+1)})^{j-1} = D^{(n-1)^{2m+1}(j-1)}$ по формулѣ (I), а по допускаемой формулѣ (второй въ группѣ (II)), полагая въ ней $n-j$ вмѣсто j, найдемъ:

$$D^{(2m+1)}_{n-j,p} = D^{[(n-1)^{2m} - (n-1)^{2m-1} + \ldots + 1](n-j)-1}\, D_{j,p} \,.$$

Подставляя все это въ (a), для показателя при D найдемъ выраженіе:

$$[(n-1)^{2m+1} - (n-1)^{2m} + \ldots - 1]j + [-(n-1)^{2m+1} +$$
$$+ n(n-1)^{2m} - n(n-1)^{2m-1} + \ldots + n] = [(n-1)^{2m+1} - (n-1)^{2m} + \ldots - 1]j,$$

ибо

$$n(n-1)^{2m} - n(n-1)^{2m-1} + \ldots + n = (n-1)^{2m+1} + 1 \,.$$

И такъ:

$$D^{(2m+2)}_{j,p} = D^{[(n-1)^{2m+1} - (n-1)^{2m} + \ldots - 1]j}\, D_{j,p} \,,$$

а это первая формула системы (II) для четнаго указателя $(2m+2)$.

И такъ формулы (II) доказаны.

Дадимъ имъ нѣсколько болѣе простой видъ.

Мы видимъ, что

$$(n-1)^{2m-1} - (n-1)^{2m-2} + \ldots - 1 = \frac{(n-1)^{2m} - 1}{n}$$

и

$$(n-1)^{2m} - (n-1)^{2m-1} + \ldots + 1 = \frac{(n-1)^{2m+1} + 1}{n} \,,$$

поэтому:

$$\left.\begin{aligned} D^{(2m)}_{j,p} &= D^{\frac{(n-1)^{2m}-1}{n} j}\, D_{j,p} \\ D^{(2m+1)}_{j,p} &= D^{\frac{(n-1)^{2m+1}+1}{n} j-1}\, D_{n-j,p} \end{aligned}\right\} \,.\;.\;.\;.\;. \text{(II bis)}$$

*

Примѣнимъ ихъ къ случаю $j = n - 1$; тогда по нашимъ обозначеніямъ

$$D_{n-1,p}^{(2m)} = a_{ik}^{(2m+1)}\,;\ D_{n-1,p} = a_{ik}^{(1)}$$

$$D_{n-1,p}^{(2m+1)} = a_{ik}^{(2m+2)};\ D_{1,p} = a_{ik}$$

и формулы (II bis) дадутъ

$$\left.\begin{aligned} a_{ik}^{(2m+1)} &= D^{\frac{(n-1)^{2m}-1}{n}(n-1)}\, a_{ik}^{(1)} \\ a_{ik}^{(2m+2)} &= D^{\frac{(n-1)^{2m+1}+1}{n}(n-1)-1}\, a_{ik} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (\mathrm{III})$$

или

$$\left.\begin{aligned} a_{ik}^{(2m+1)} &= a_{ik}^{(1)} \sqrt[n]{\frac{D^{(2m+1)}}{D^{(1)}}} \\ a_{ik}^{(2m+2)} &= a_{ik} \sqrt[n]{\frac{D^{(2m+2)}}{D}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (\mathrm{III\ bis})$$

т. е. *элементы взаимнаго опредѣлителя нечетнаго ранга пропорціональны первымъ минорамъ первоначальнаго опредѣлителя*, а *элементы взаимнаго опредѣлителя четнаго ранга пропорціональны элементамъ первоначальнаго* или *первые миноры взаимнаго опредѣлителя четнаго ранга пропорціональны первымъ минорамъ первоначальнаго опредѣлителя*, а *первые миноры взаимнаго опредѣлителя нечетнаго ранга пропорціональны элементамъ первоначальнаго опредѣлителя*.

Въ этихъ формулахъ (III bis):

$$D^{(2m+1)} = D^{(n-1)^{2m+1}}$$

$$D^{(2m+2)} = D^{(n-1)^{2m+2}}$$

$$D^{(1)} = D^{n-1}.$$

Слѣдствіе 1. Если $D = 1$, т. е. D будетъ опредѣлителемъ (модулемъ) нѣкоторой обратной линейной подстановки, то тогда

$$D^{(1)} = 1 \quad \text{и} \quad D^{(q)} = 1\,,$$

а поэтому

$$a_{ik}^{(2m+1)} = a_{ik}^{(1)}$$

$$a_{ik}^{(2m+2)} = a_{ik}.$$

Въ этомъ случаѣ *взаимные опредѣлители будутъ повторяться послѣдовательно.*

Слѣдствіе 2. Если первоначальный опредѣлитель D будетъ *симметрическимъ*, тогда по извѣстному свойству симметрическихъ опредѣлителей

$$a_{ik}^{(1)} = a_{ki}^{(1)} ,$$

слѣдовательно и

$$a_{ik}^{(2m+1)} = a_{ki}^{(2m+1)} ,$$

$$a_{ik}^{(2m+2)} = a_{ki}^{(2m+2)} ,$$

т. е. *всѣ взаимные будутъ симметрическими опредѣлителями.*

Слѣдствіе 3. Пусть первоначальный опредѣлитель будетъ *косой симметрическій:* a) *нечетнаго порядка, тогда взаимные нечетнаго ранга будутъ симметрическими,* а *четнаго — косыми симметрическими;* b) *четнаго порядка, тогда взаимные всякаго ранга будутъ косыми симметрическими.*

Примѣнимъ найденныя формулы къ случаю, когда нѣкоторый опредѣлитель n-го порядка C есть произведеніе двухъ другихъ опредѣлителей A и B тоже n-го порядка, т. е. пусть

$$C = A\ B .$$

По формулѣ (I) найдемъ, что

$$C^{(\mu)} = A^{(\mu)}\ B^{(\mu)}$$

т. е. *если опредѣлитель C есть произведеніе двухъ другихъ опредѣлителей A и B, то и его взаимный ранга μ будетъ произведеніемъ взаимныхъ A и B того же ранга.*

Въ заключеніе выведемъ еще одну формулу, связывающую миноры двухъ смежныхъ взаимныхъ опредѣлителей.

Въ формулахъ (II bis) первые множители вторыхъ частей можно преобразовать.

Дѣйствительно, имѣемъ:

$$D^{\frac{(n-1)^{2m}-1}{n}j} = \sqrt[n]{D^{[(n-1)^{2m}-1]j}} = \sqrt[n]{\frac{D^{(n-1)^{2m}j}}{D^{j}}} =$$

$$= D^{-\frac{j}{n}} \sqrt[n]{[D^{(2m)}]^{j}} ;$$

точно такъ-же найдемъ:

$$D^{\frac{(n-1)^{2m+1}+1}{n}j-1} = D^{\frac{j}{n}-1}\sqrt[n]{[D^{(2m+1)}]^j}.$$

Перемножая теперь формулы (II bis) и подставляя найденныя сейчасъ выраженія, получимъ:

$$D_{j,p}^{(2m)} D_{j,p}^{(2m+1)} = \frac{[D^{(2m)} D^{(2m+1)}]^{\frac{j}{n}}}{D} D_{j,p} D_{n-j,p}.$$

Полагая здѣсь p равнымъ

$$1,\ 2\ldots \frac{n(n-1)\ldots(n-j+1)}{1.2.3\ldots j}$$

и сложивъ всѣ равенства, найдемъ:

$$\sum_p D_{j,p}^{(2m)} D_{j,p}^{(2m+1)} = \frac{[D^{(2m)} D^{(2m+1)}]^{\frac{j}{n}}}{D} \sum_p D_{j,p} D_{n-j,p},$$

но по теоремѣ Лапласа

$$\sum_p D_{j,p}\ D_{n-j,p} = D,$$

слѣдовательно:

$$\sum_p D_{j,p}^{(2m)}\ D_{j,p}^{(2m+1)} = [D^{(2m)}\ D^{(2m+1)}]^{\frac{j}{n}}.$$