

було бачити частинки гумігуту в прошарках товщиною, яка складала величину $\sim 10^{-6}$ м. Тоді, вираховуючи їхню кількість на різних висотах z , можна записати розподіл Больцмана для їхньої концентрації: $n(z) = n_0 \exp[-gz(m - m_{pid})/(kT)]$, тут m_{pid} – це маса води, що її витіснила частинка гумігуту. Для того, аби цю масу визначити, потрібно було точно виміряти розміри частинок гумігуту. Ці розміри не можна визначити прямо, оскільки розміри частинок були надто малими – одного порядку з довжиною світлової хвилі. Внаслідок дифракції (зміни прямолінійного поширення світлового потоку при огинанні непрозорої перешкоди) розміри однієї частинки, коли її розглядати в мікроскоп, помітно збільшувалися. Аби розв'язати цю проблему, Перрен брав краплю емульсії та чекав, коли випаровування води майже закінчувалося. Тоді частинки під дією сил поверхневого натягу місцями збирались у досить рівні ланцюжки. Порахувавши кількість частинок на рівній лінії відомої довжини, можна розрахувати діаметр частинки. Оскільки ця кількість була великою, то похибка вимірювання її діаметра внаслідок дифракції світла значно зменшувалась.

Ми не наводимо перелік усіх експериментальних труднощів, що їх здолав Перрен, але з уже наведених видно усю складність проведення навіть такого класичного досліді.

Спираючись на вимірний розподіл частинок по висоті та справедливості формули Больцмана, було пораховано константу Больцмана:

$$k = (m - m_{pid})(z_2 - z_1)g / [T \ln(n_1 / n_2)], \quad (2.5.48)$$

де $n_j = n(z_j)$ – концентрація частинок на відповідній висоті. Після цього вже неважко було обчислити і число Авогадро $N_A = R/k$.

Питання для самоконтролю до розділу § 2.5. Вступ до статистичної фізики

1. Схематично зобразити графік функції розподілу молекул ідеального газу за компонентою швидкості для двох температур.
2. Схематично зобразити графік функції розподілу молекул ідеального газу за модулем швидкості для двох температур.
3. Схематично зобразити графік функції розподілу молекул ідеального газу за кінетичними енергіями для двох температур.
4. Який фізичний сенс того, що $\int_0^{\infty} f(V) dV = 1$ та $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(V_x) dV_x = 1$?
5. Чому функція розподілу Максвелла за модулем швидкості дорівнює нулю при $V=0$?
6. Як за допомогою функцій розподілу Максвелла визначається середнє значення довільної функції $F(V)$?
7. Як за допомогою функцій розподілу Максвелла визначається середнє значення певної функції $G(V_x)$?
8. Дайте визначення теплової швидкості, використовуючи функцію розподілу Максвелла.
9. Визначте середнє значення модуля швидкості, користуючись функцією розподілу Максвелла.
10. З якої умови визначається V_{im} – найімовірніше значення модуля швидкості?
11. Що підтвердили досліди Штерна та Ламерта?
12. Запишіть функцію розподілу Больцмана молекул ідеального газу за їхньою потенціальною енергією.
13. Запишіть барометричну формулу.
14. Що визначається в дослідах Перрена?
15. На що вказує температура виродження?

§ 2.6. Основні формули молекулярної фізики

Концентрація газу n , тобто кількість частинок в одиниці об'єму, залежить від загальної кількості молекул газу та об'єму, в якому цей газ міститься:

$$n = N / V . \quad (2.6.1)$$

Тиском P називають силу F , з якою газ діє на одиницю поверхні S об'єму, в якому він міститься, ця сила спрямована перпендикулярно до поверхні:

$$P = \frac{dF}{dS} . \quad (2.6.2)$$

Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеального газу пов'язує тиск газу P із концентрацією n та середньою кінетичною енергією поступального руху молекули газу W :

$$P = (2/3)nW, \quad (2.6.3)$$

що надає ще одного фізичного змісту тиску, а саме: тиск є мірою густини енергії.

Кількість речовини ν визначається за кількістю N частинок в системі або за масою m однокомпонентної речовини:

$$\nu = \frac{N}{N_A} = \frac{m}{\mu}, \quad (2.6.4)$$

тут $N_A = 6,028 \times 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ – це число Авогадро.

Молярна маса μ хімічно чистої речовини визначається за масою однієї молекули m_0 та числом Авогадро N_A :

$$\mu = m_0 N_A. \quad (2.6.5)$$

На практиці, для визначення μ зручно використовувати періодичну таблицю хімічних елементів: число під символом хімічного елемента вказує середнє значення молярної маси речовини цього

елемента в одиницях $г/моль$, якщо вона побудована з одноатомних молекул. Йдеться саме про середнє значення, бо при укладанні таблиці враховано наявність у природі різних ізотопів кожного елемента. У випадку складних хімічних сполук, коли молекула речовини складається з кількох атомів різних елементів, значення μ вираховується як сума молярних мас усіх складових.

Абсолютна температура T вимірюється в градусах Кельвіна $^{\circ}K$. Вона пов'язана із температурою t , що вимірюється в градусах Цельсія $^{\circ}C$, наступним співвідношенням:

$$T = (t + 273). \quad (2.6.6)$$

Рівняння стану ідеального газу (рівняння Клапейрона) пов'язує тиск P , об'єм V , масу газу m , молярну масу μ , температуру газу T за допомогою універсальної газової сталої $R = 8,31 \text{ Дж}/(^{\circ}K \text{ моль})$:

$$PV = \frac{m}{\mu} RT . \quad (2.6.7)$$

Його можна переписати у вигляді, що пов'язує тиск і температуру з концентрацією газу n за допомогою коефіцієнта Больцмана $k = 1,38 \times 10^{-23} \text{ Дж}/^{\circ}K$:

$$P = nkT. \quad (2.6.8)$$

Температура відома як фізична величина, що характеризує ступінь нагрітості тіла. Температура газів у числовий спосіб визначається як міра середньої кінетичної енергії W поступального руху молекули газу:

$$T = 2W/(3k). \quad (2.6.9)$$

Молярна теплоємність ідеального газу за сталого об'єму C_V пов'язана із кількістю ступенів вільності молекули i :

$$C_V = \left. \frac{\delta Q}{\nu dT} \right|_V = \frac{i}{2} R. \quad (2.6.10)$$

Молярна теплоємність ідеального газу за сталого тиску C_P є більшою за молярну теплоємність за сталого об'єму C_V , за законом Майєра:

$$C_P = \left. \frac{\delta Q}{\nu dT} \right|_P = C_V + R. \quad (2.6.11)$$

Показник адіабати (коефіцієнт Пуассона) дорівнює:

$$\gamma = C_P / C_V = (i+2)/i. \quad (2.6.12)$$

Тут i – це кількість ступенів вільності молекули газу. За допомогою формул (2.6.10) - (2.6.12) дістаємо зв'язок молярних теплоємностей з показником адіабати:

$$C_P = \gamma R / (\gamma - 1), \quad C_V = R / (\gamma - 1). \quad (2.6.13)$$

Перший закон термодинаміки встановлює зв'язок між кількістю теплоти δQ , що надійшла до термодинамічної системи, зміною внутрішньої енергії dU термодинамічної системи та роботою δA , що її виконала термодинамічна система над зовнішніми тілами:

$$\delta Q = dU + \delta A. \quad (2.6.14)$$

Кількість молекул ідеального газу ΔN з загальної кількості N молекул газу, який перебуває у стані термодинамічної рівноваги, що характеризується температурою T , чий модуль швидкості належить до інтервалу $[v; v+\Delta v]$, визначається за допомогою функції розподілу Максвелла:

$$\Delta N = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N e^{-u^2} u^2 \Delta u; \quad (2.6.15)$$

тут $u = v / v_{im}$, $\Delta u = \Delta v / v_{im}$, $v_{im} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$ – це найімовірніша

швидкість, тобто модуль швидкості, що відповідає максимуму функції розподілу Максвелла за модулем швидкості. Ця формула є справедливою за умови, що ширина інтервалу модуля швидкості

Δv є набагато меншою за характерний масштаб, на якому змінюється функція розподілу Максвелла, тобто $\Delta u \ll 1$.

Середня квадратична швидкість, або, що те ж саме, теплова швидкість хаотичного руху частинок

$$v_T \equiv v_{кв} \equiv \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}. \quad (2.6.16)$$

Середній модуль швидкості v_{cp} можна визначити як момент функції розподілу Максвелла за модулем швидкості:

$$v_{cp} = \int_0^{+\infty} v f(v) \cdot dv = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}. \quad (2.6.17)$$

Робота δA , що її виконує газ в елементарному квазі-рівноважному процесі, залежить від тиску газу P (як функції об'єму у даному процесу) та зміни dV його об'єму:

$$\delta A = PdV. \quad (2.6.18)$$

Довжина вільного пробігу λ , тобто відстань, яку в середньому молекули пролітають між двома послідовними зіткненнями, залежить від площі ефективного перерізу молекули σ та концентрації частинок газу n ,

$$\lambda = 1 / (\sqrt{2} n \sigma). \quad (2.6.19)$$

Частота f зіткнень молекул газу визначається середньо-квадратичною швидкістю v_T та довжиною вільного пробігу λ :

$$f = v_T / \lambda. \quad (2.6.20)$$

Коефіцієнт самодифузії ідеального газу D записується через теплову швидкість v_T та довжину вільного пробігу λ :

$$D = \lambda v_T / 3. \quad (2.6.21)$$

Вираз для коефіцієнта внутрішнього тертя ідеального газу є добутком густини газу ρ та коефіцієнта дифузії:

$$\eta = \nu_T \lambda \rho / 3. \quad (2.6.22)$$

Коефіцієнт теплопровідності ідеального газу можна здобути, помноживши коефіцієнт внутрішнього тертя на питому теплоємність газу за умов сталого об'єму $c_V = \left. \frac{\delta Q}{mdT} \right|_V$:

$$\kappa = \frac{1}{3} \lambda \nu_T \rho c_V. \quad (2.6.23)$$

Барометрична формула визначає тиск P на висоті h за відомим тиском P_0 на висоті h_0 , молярною масою газу μ , прискоренням вільного падіння g , температурою газу T :

$$P = P_0 \exp \left[- \frac{\mu g (h - h_0)}{RT} \right]. \quad (2.6.24)$$

Коефіцієнтом η корисної дії циклічного процесу теплової машини називають

$$\eta = \frac{A}{Q_H} = \frac{Q_H - Q_X}{Q_H} = 1 - \frac{Q_X}{Q_H}, \quad (2.6.25)$$

де A – це робота, яку робоче тіло (наприклад, газ) виконує за цикл, Q_H – це кількість теплоти, яку дістає робоче тіло за цикл від нагрівача, Q_X – це теплота, яку робоче тіло передає за цикл холодильнику. За визначенням, $Q_H > Q_X > 0$.

Коефіцієнт корисної дії прямого циклу Карно (теплової машини) не залежить від конструкції машини, а визначається тільки температурами нагрівача та холодильника:

$$\eta = 1 - T_{хол} / T_{нагр}. \quad (2.6.26)$$

Рівняння стану реального газу в моделі Ван-дер-Ваальса включає поправку b Ван-дер-Ваальса на силу відштовхування та поправку a на силу притягання:

$$P = \frac{\nu RT}{V - \nu b} - \frac{\nu^2 a}{V^2}. \quad (2.6.27)$$

Зміна ентропії газу Ван-дер-Ваальса:

$$\Delta S = \nu [R \ln \frac{V - \nu b}{V_0 - \nu b} + C_V \ln \frac{T}{T_0}]. \quad (2.6.28)$$

Критичні значення термодинамічних параметрів записуються через поправки Ван-дер-Ваальса a та b :

$$V_k = 3b\nu, \quad P_k = a / 27b^2, \quad T_k = 8a / 27Rb. \quad (2.6.29)$$

§ 2.7. Задачі для контрольних робіт з розділу „Молекулярна фізика”

Задачі, які увійшли до першого модулю, присвячено молекулярно-кінетичній теорії та термодинаміці ідеальних газів. Тут присутні як прості задачі, так і складні, до числа яких належать задачі про різні цикли теплових машин.

Наведемо у якості прикладу розв'язання двох задач за даною тематикою.

Задача 1

Дано: Густина газу, що складається із суміші гелію та аргону за тиску $P = 152 \text{ кПа}$ та температури $t = 27^\circ\text{C}$, дорівнює $\rho = 2,00 \text{ кг/м}^3$.

Знайти: Скільки атомів N_1 гелію міститься в $V = 1 \text{ см}^3$ газової суміші?

Розв'язання.

Переведемо всі величини до системи одиниць SI:

$$T = (273 + 27)^\circ\text{K} = 300^\circ\text{K}, \quad V = 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Позначимо кількість атомів аргону в об'ємі як N_2 . Тепер рівняння стану газу набуває вигляду:

$$P = \frac{N_1 + N_2}{V} kT. \quad (2.7.1)$$

Позначимо масу одного атома гелію $m_1 = \mu_1/N_A$, а аргону – $m_2 = \mu_2/N_A$, де μ_1 та μ_2 – молярні маси гелію і аргону, відповідно:

$$m_1 = \frac{4}{6.03 \cdot 10^{23}} = 6.64 \times 10^{-22} \text{ з};$$

$$m_2 = \frac{39.95}{6.03 \cdot 10^{23}} = 6.63 \times 10^{-23} \text{ з};$$

$$m_2 - m_1 = (6.63 - 0.66) \cdot 10^{-23} = 5.97 \times 10^{-23} \text{ з}.$$

Тоді густину суміші можна порахувати в наступний спосіб:

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 = \frac{N_1 m_1 + N_2 m_2}{V}. \quad (2.7.2)$$

Рівняння (2.7.1) та (2.7.2) складають систему двох рівнянь на дві невідомі N_1 та N_2 . Розв'язання цієї системи рівнянь дає:

$$N_1 = \frac{m_2 pV - \rho V kT}{kT(m_2 - m_1)}. \quad (2.7.3)$$

Підставимо числові значення:

$$N_1 = \frac{6.63 \cdot 10^{-26} \cdot 152 \cdot 10^{-6} - 2 \cdot 10^{-6} \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 (5.97 \cdot 10^{-26})} =$$

$$= \frac{1007.76 \cdot 10^{-29} - 828 \cdot 10^{-29}}{2469.97 \cdot 10^{-49}} = \frac{179.76}{246996.54 \cdot 10^{-22}} = 7.28 \times 10^{18}$$

Відповідь: $N_1 = 7.28 \times 10^{18}$.

Задача 2

Дано: 1 кмоль ідеального газу з показником адіабати $\gamma = 1.4$ виконує цикл Карно так, що найвищий тиск у циклі перевищує найнижчий тиск у $k = 20$ разів. Температура нагрівача становить $t_H = 327^\circ \text{C}$, температура холодильника $t_X = 27^\circ \text{C}$.

Знайти: к.к.д. циклу; тепло, що отримано від нагрівача; тепло, що передано холодильнику; роботу газу за цикл.

Розв'язання.

Зобразимо схематично цикл Карно на діаграмі PV . Позначимо послідовно процеси (див. рис. 2.7.1): ізоермічне розширення за максимальної температури – це крива 1-2; адіабатичне розширення – це крива 2-3; ізоермічне стискання за найнижчої температури – це крива 3-4; адіабатичне стискання – це крива 4-1.

При ізоермічному розширенні (1-2) внутрішня енергія ідеального газу лишається незмінною: $dU = \nu C_V dT = 0$. Робота, що її виконує газ, є додатною: $dV > 0$. Отже, $\delta A = PdV > 0$. Тому в процесі 1-2 газ набуває теплоти, $\delta Q = dU + \delta A > 0$, тобто цей процес належить до нагрівача.

В адіабатичних процесах 2-3 і 4-1, за визначенням адіабатного процесу, тепло ані отримується, ані віддається, тобто ці процеси не характеризують дію ані нагрівача, ані холодильника.

При ізоермічному стисканні (4-1) внутрішня енергія ідеального газу також лишається незмінною: $dU = \nu C_V dT = 0$. Робота, що її виконує газ, є від'ємною, бо зміна об'єму $dV < 0$. Отже,

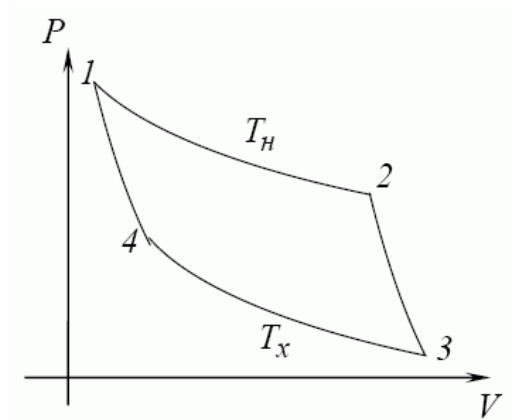


Рис. 2.7.1. Діаграма циклу

$\delta A = PdV < 0$. Тому в процесі 4-1 газ віддає тепло, $\delta Q < 0$, тобто цей процес належить до холодильника.

Коефіцієнт корисної дії циклу Карно залежить лише від температур нагрівача і холодильника: $T_H = 273 + 327 = 600$ °K, $T_X = 273 + 27 = 300$ °K. Обчислимо його величину:

$$\eta = 1 - T_X/T_H = 1 - 300/600 = 1/2. \quad (2.7.4)$$

Оскільки при ізотермічному розширенні (1-2) внутрішня енергія ідеального газу лишається незмінною: $dU = \nu C_V dT = 0$, то кількість теплоти, що надходить від нагрівача, тобто в процесі 1-2, дорівнює роботі, що її виконує газ:

$$Q_H = \delta Q_{12} = A_{12} = \nu RT_H \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (2.7.5)$$

Цю величину можна порахувати, якщо знати частку V_2/V_1 . Для визначення цієї частки скористаємось умовами задачі. З рівняння стану ідеального газу виходить, що за умов ізотермічного розширення добуток тиску на об'єм лишається незмінним:

$$P_1 V_1 = P_2 V_2 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{P_1}{P_2}. \quad (2.7.6)$$

Перепишемо частку V_2/V_1 , враховуючи, що за умовами задачі відома частка $P_1/P_3 = k$:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{P_1}{P_3} \frac{P_3}{P_2} = k \frac{P_3}{P_2}. \quad (2.7.7)$$

Лишилось знайти зв'язок P_3 з P_2 . Для цього скористаємось рівнянням адіабатичного процесу 2-3:

$$P_2 T_2^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = P_3 T_3^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \Rightarrow \frac{P_3}{P_2} = \left(\frac{T_2}{T_3} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = \left(\frac{T_H}{T_X} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}. \quad (2.7.8)$$

Отже, тепло, що отримано від нагрівача,

$$Q_H = \nu RT_H \ln \frac{V_2}{V_1} = \nu RT_H \ln \left[k \left(\frac{T_H}{T_X} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \right]. \quad (2.7.9)$$

Підставимо числові значення:

$$Q_H = 10^3 \times 8,31 \times 600 \times \ln \left[20 \left(\frac{600}{300} \right)^{\frac{1,4}{1-1,4}} \right] = 7,9 \times 10^6 \text{ Дж}.$$

Порахуємо тепер тепло, що передано холодильнику. З визначення к.к.д.

$$\eta = 1 - Q_X/Q_H \Rightarrow Q_X/Q_H = 1 - \eta \Rightarrow Q_X = (1 - \eta)Q_H. \quad (2.7.10)$$

Підставимо числові значення:

$$Q_X = \left(1 - \frac{1}{2} \right) 7,9 \times 10^6 = 3,95 \times 10^6 \text{ Дж}.$$

Роботу, що її виконує газ за цикл, легко дістаємо з визначення к.к.д.:

$$A = \eta Q_H = \frac{1}{2} \times 7,9 \times 10^6 = 3,95 \times 10^6 \text{ Дж}.$$

$$\text{Відповідь: } \eta = 1 - T_X/T_H = 1/2, \quad Q_H = \frac{\gamma R}{1 - \gamma} T_H \ln \left(\frac{k T_H}{T_X} \right) = 7,9 \times 10^6 \text{ Дж},$$

$$Q_X = (1 - \eta)Q_H = 3,95 \times 10^6 \text{ Дж}, \quad A = \eta Q_H = 3,95 \times 10^6 \text{ Дж}.$$

**Умови задач для першої модульної
контрольної роботи з молекулярної фізики:**

1. Порахувати питомі теплоємності c_V та c_P для газової суміші, що складається з 7 г азоту та 20 г аргону.
2. Порахувати кінетичну енергію газу, що складається з двоатомних молекул та міститься в об'ємі $V = 5$ л під тиском $P = 0,7$ атм.
3. Ідеальний газ з показником адіабати γ виконує прямий цикл, що складається з адіабати, ізобари та ізохори. Знайти η циклу, якщо при адіабатичному процесі об'єм газу зменшився в 4 рази.
4. Яка кількість газу міститься в об'ємі 5 л під тиском 10^3 Па за температури $t = 27^\circ\text{C}$?
5. Порахувати питомі теплоємності c_V та c_P для суміші, що складається на 15% (за масою) з озону O_3 та на 85% з кисню O_2 .
6. Знайти зміну ентропії ΔS одного моля ідеального газу в ізотермічному розширенні від V_1 до V_2 .
7. Знайти η для прямого циклу, що складається з двох ізобар та двох адіабат, для газу з показником γ , якщо $P_{\max}/P_{\min} = K$.
8. Порахувати середню кінетичну енергію жорсткої лінійної молекули CO_2 за $t = 177^\circ\text{C}$.
9. Газ з показником адіабати γ виконує прямий цикл, що складається з двох ізохор та двох ізобар. Знайти η , якщо температура газу зменшується утричі для ізохоричного охолодження та ізобаричного стискання.
10. Порахувати молярні теплоємності C_V та C_P газової суміші, що складається на 60% (за кількістю молекул) з аміаку NH_3 та на 40% з ксенону.
11. Порахувати зміну ентропії ΔS для $\nu = 2$ молі, $\gamma = 1,3$, якщо у цьому процесі об'єм збільшився $V_2 = 4V_1$, а тиск зменшився $P_2 = P_1/5$.
12. Який тиск створюють 7 молів газу в об'ємі 5 л за температури $t = 127^\circ\text{C}$?
13. Азот виконує прямий цикл, що складається з двох ізохор та двох адіабат. Знайти η , якщо в межах циклу $V_{\max}/V_{\min} = 20$.
14. Який об'єм займають 0,5 молів газу за температури $t = 177^\circ\text{C}$ під тиском $P = 3 \cdot 10^5$ Па?

15. Ідеальний газ з показником адіабати γ виконує прямий цикл, що складається з адіабати, ізобари та ізохори. Знайти η циклу, якщо при адіабатичному процесі об'єм газу зменшився в 10 разів.

16. Порахувати максимально можливу температуру ідеального газу в процесі зміни тиску $P = P_0 - \beta V^2$, де P_0 та β – це додатні константи, V – об'єм газу.

17. Ідеальний газ виконує прямий цикл, що складається з ізохори, адіабати та ізотерми. Ізотермічний процес відбувається за мінімальної температури. Знайти η циклу, якщо в межах циклу температура зростає в 5 разів.

18. Один моль ідеального газу з коефіцієнтом Пуассона 1,4 внаслідок політропічного процесу з показником 1,5 збільшив свій об'єм, при цьому його температура впала на 100°K . Знайти кількість тепла, яке отримав газ.

Другий модуль складено із задач про термодинаміку реальних газів та стаціонарні явища перенесення.

Наведемо у якості прикладу розв'язання двох задач за даною тематикою.

Задача 1

Дано: Два теплоізовані балони з'єднані краном. В одному балоні, об'єм якого V_1 , міститься ν молів газу, стала Ван-дер-Ваальса a та молярна теплоємність C_V якого відомі. Інший балон відкачано до високого вакууму. Кран відкручують, і газ адіабатично розширюється.

Знайти:

- а) приріст ΔU внутрішньої енергії газу;
- б) приріст температури газу ΔT ;
- в) роботу A_i , яку виконав газ проти міжмолекулярних сил притягання.

Розв'язання.

а) За умовою задачі, газ розширюється адіабатично, тобто без підведення чи відведення теплоти: $\Delta Q = 0$. Газ розширюється в балон, в якому був вакуум, тобто не виконує жодної роботи: $\Delta A = 0$. Тоді з першого закону термодинаміки виходить:

$$\Delta U = \Delta Q - \Delta A = 0. \quad (2.7.11)$$

б) Приріст внутрішньої енергії реального газу в моделі Ван-дер-Ваальса

$$dU = \nu C_V dT + \frac{\nu^2 a}{V^2} dV. \quad (2.7.12)$$

Оскільки в нашій задачі $dU=0$, то

$$\begin{aligned} \nu C_V dT &= -\frac{\nu^2 a}{V^2} dV \Rightarrow \Delta T = \frac{1}{\nu C_V} (-\nu^2 a) \int_{V_1}^{V_1+V_2} \frac{dV}{V^2} = -\frac{\nu a}{C_V} \frac{-1}{V} \Big|_{V_1}^{V_1+V_2} \\ &= \frac{\nu a}{C_V} \left(\frac{1}{V_1+V_2} - \frac{1}{V_1} \right) = -\frac{\nu a}{C_V} \frac{V_2}{V_1(V_1+V_2)}. \end{aligned} \quad (2.7.13)$$

Перевіримо здобуту відповідь на розмірність:

$$\begin{aligned} [a] &= \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^6}{\text{моль}^2}, [C_V] = \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \Rightarrow \\ [\Delta T] &= \text{моль} \cdot \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^6}{\text{моль}^2} \cdot \frac{\text{моль} \cdot \text{К}}{\text{Дж}} \cdot \frac{\text{м}^3}{\text{м}^6} = \text{Па} \cdot \frac{\text{К}}{\text{Дж}} \cdot \text{м}^3 = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \cdot \frac{\text{К}}{\text{Н} \cdot \text{м}} \cdot \text{м}^3 = \text{К}. \end{aligned}$$

в) Тиск міжмолекулярних сил притягання $P_i = -\frac{\nu^2 a}{V^2}$. Відповідна робота

$$A_i = \int_{V_1}^{V_1+V_2} P_i dV = -\frac{\nu^2 a V_2}{V_1(V_1+V_2)}. \quad (2.7.14)$$

Перевіримо здобуту відповідь на розмірність:

$$[A_i] = \text{моль}^2 \cdot \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^6}{\text{моль}^2} \cdot \frac{\text{м}^3}{\text{м}^6} = \text{Па} \cdot \text{м}^3 = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \cdot \text{м}^3 = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}.$$

$$\text{Відповідь: } \Delta U=0; \Delta T = -\frac{\nu a}{C_V} \frac{V_2}{V_1(V_1+V_2)}; A_i = -\frac{\nu^2 a V_2}{V_1(V_1+V_2)}.$$

Задача 2

Знайти: До якого значення слід знизити тиск у балоні термоса за кімнатної температури, аби повітря в ньому можна було вважати за вакуум? Відстань між стінками балона прийняти за 5 мм.

Розв'язання.

Газ вважається розрідженим, тобто вакуумом, якщо частинки стикаються здебільшого не між собою, а зі стінками камери, $\lambda \gg a$ (тут λ – це довжина вільного пробігу, a – це характерний розмір камери). Довжина вільного пробігу λ залежить від ефективного перерізу молекули σ та концентрації газу n , а отже, і від тиску (для спрощення розрахунків вважаємо, що $\lambda = 1/(n\sigma)$):

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma} = \frac{kT}{P\sigma} \gg a \Rightarrow P < P_{\text{vac}} = \frac{kT}{a\sigma}. \quad (2.7.15)$$

Переведемо всі одиниці до однієї системи:

$$k = 1,38 \times 10^{-23} \text{ Дж/К}, T = 273 + 22 = 295 \text{ К}, a = 5 \times 10^{-3} \text{ м}.$$

З таблиці № VI [10] відомо, що діаметр молекул повітря дорівнює $d = 0,3 \text{ нм} = 3 \times 10^{-10} \text{ м}$, отже, ефективний переріз молекули повітря

$$\sigma = \pi d^2 = 3,14 \times (3 \times 10^{-10})^2 = 2,8 \times 10^{-19} \text{ м}^2.$$

Підставимо числові значення до формули:

$$P_{\text{vac}} = \frac{1,38 \times 10^{-23} \cdot 295}{5 \times 10^{-3} \cdot 2,8 \times 10^{-19}} = 2,9 \text{ Па}.$$

Це є досить низький тиск, $P_{\text{vac}} = 2,9 \text{ Па} \approx 3 \times 10^{-5} \text{ атм} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ мм рт. ст.}$
Відповідь: $P < 2,9 \text{ Па}$.

Умови задач для другої модульної контрольної роботи з молекулярної фізики:

1. Знайти показник політропи у процесі, в якому не змінюється коефіцієнт теплопровідності.
2. Вивести рівняння адіабати для газу Ван-дер-Ваальса в параметрах температура, об'єм T, V .
3. Знайти показник політропи у процесі, в якому не змінюється коефіцієнт дифузії.
4. Знайти різницю молярних теплоємностей $C_p - C_v$ для газу Ван-дер-Ваальса в параметрах температура, об'єм T, V .
5. Як залежить від тиску середня довжина вільного пробігу та кількість зіткнень за 1 сек. молекул ідеального газу, якщо маса газу є сталою, а газ виконує процес: а) ізохоричний; б) ізотермічний; в) адіабатичний. Ефективний діаметр молекул вважати незмінним.
6. Знайти роботу, що її виконує 1 моль газу Ван-дер-Ваальса за ізотермічного розширення від V_1 до V_2 за температури T_1 .
7. Як залежать від T середня довжина вільного пробігу та кількість зіткнень молекул за 1 сек. в таких процесах: а) ізохоричний; б) ізобаричний.
8. Порахувати зміну ентропії одного моля газу Ван-дер-Ваальса з $\gamma = 1,3$, якщо у початковому стані газ мав об'єм V_1 , температуру T_1 , а в кінцевому стані – V_2 та T_2 , відповідно.
9. Ідеальний газ виконав процес, в якому тиск зріс в n разів. Як змінилася довжина вільного пробігу та кількість зіткнень молекули за 1 сек., якщо процес був: а) ізохоричний; б) ізотермічний.
10. Знайти зміну ентропії ΔS 1 моля реального газу (константи Ван-дер-Ваальса вважати відомими) за умов ізотермічного розширення від V_1 до V_2 .
11. Знайти показник політропи у процесі, в якому не змінюється коефіцієнт внутрішнього тертя.
12. За відомими значеннями T_k та P_k знайти критичний молярний об'єм азоту.
13. Два молі фтору з молярною масою 19 г/моль адіабатично розширилися у порожнечу. Об'єм газу зріс від 1 л до 10 л. За моделлю газу Ван-дер-Ваальса визначити приріст його температури.
14. Два молі водню розширюються у порожнечу, при цьому об'єм газу зростає від 2 л до 20 л. Визначити за моделлю газу Ван-дер-

Ваальса, яку кількість тепла слід надати газу, щоб його температура не змінилася?

15. Двоатомний ідеальний газ адіабатично збільшує свій об'єм удвічі порівняно з початковим. Як змінюються коефіцієнти дифузії та теплопровідності цього газу?

16. Тиск двоатомного ідеального газу за адіабатичного стискання зріс удвічі. Як змінилися при цьому довжина вільного пробігу частинок газу та коефіцієнт внутрішнього тертя?

17. Знайти показник політропи у процесі, в якому не змінюється коефіцієнт теплопровідності.

18. Теплопровідність гелію за нормальних умов дорівнює 0.14 Вт/(м К). Обчисліть за цих умов коефіцієнти внутрішнього тертя та дифузії.

До третього модуля увійшли задачі, які присвячено практичному засвоєнню матеріалу про засади статистичної фізики ідеальних термодинамічних систем.

Наведемо приклади розв'язання задач із зазначеної тематики.

Задача 1

Знайти: В якій частини молекул повітря модуль швидкості відрізняється від найбільш імовірної v_{im} швидкості молекул не більше, ніж на $\Delta v = \pm 0.5$ м/с? Температура повітря $t = 17$ °С.

Розв'язання.

Абсолютна температура повітря $T = (t + 273)$ °К = 290 К. Враховуючи, що середня молярна маса повітря становить $\mu = 29 \times 10^{-3}$ кг/моль, для найбільш імовірної v_{im} швидкості молекул дістаємо:

$$v_{im} = \sqrt{2RT / \mu} = \sqrt{2 \cdot 8.31 \cdot 290 / 29 \cdot 10^{-3}} \approx 408 \text{ м/с.}$$

Частка молекул ідеального газу, модуль швидкості яких належить до певного інтервалу, або, що те саме, імовірність Δw того, що молекула повітря має модуль швидкості з цього інтервалу, визначається функцією розподілу Максвелла за модулем швидкості:

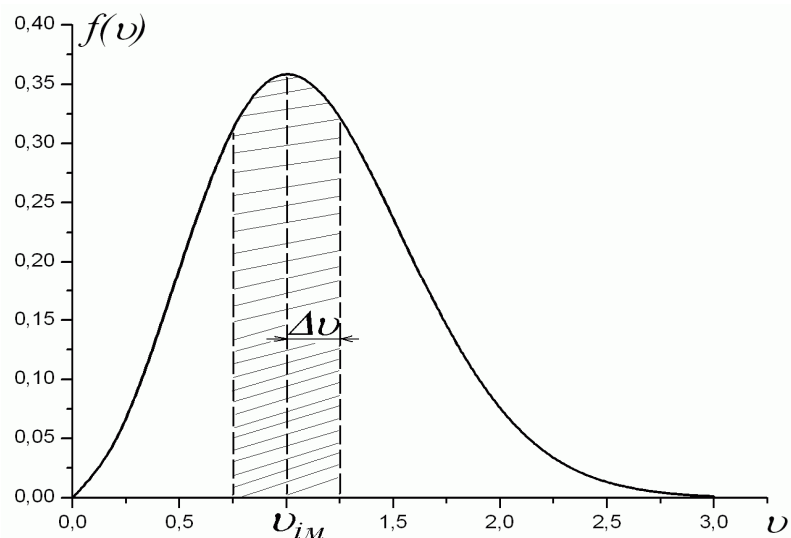


Рис. 2.7.2. Графік функції розподілу Максвелла за модулем швидкості

$$\Delta w = \Delta N / N = 4 e^{-u^2} u^2 \Delta u / \sqrt{\pi}. \quad (2.6.16)$$

За умовою задачі: $v = v_{im} \Rightarrow u = v / v_{im} = 1$, $\Delta v = (v_{im} + 0.5) - (v_{im} - 0.5) = 1$ м/с $\Rightarrow \Delta u = \Delta v / v_{im} = 1 / v_{im} \approx 1/408 < 1$, що свідчить про можливість застосування наближеної формули:

$$\Delta w \approx \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-1} 1^2}{408} \approx 2 \times 10^{-3}. \quad (2.7.17)$$

Зауважимо, що імовірність молекули газу мати модуль швидкості в

вказаному інтервалі $\Delta w \equiv \int_{v_{im}-\Delta v}^{v_{im}+\Delta v} f(v) dv$ за геометричним змістом

інтегралу – це площа (див. рис. 2.7.2) криволінійної трапеції (площа під кривою, яку описує на графіку функція $f(v)$).

Відповідь: $\Delta w \approx \frac{4e^{-1}1^2}{\sqrt{\pi}408} \approx 2 \times 10^{-3}$, тобто кожні дві з тисячі молекул повітря мають модуль швидкості у вказаному інтервалі.

Задача 2

Знайти: висоту, на якій перебуває центр мас повітряного стовпа безкінечної висоти. Вважати прискорення вільного падіння g та температуру повітря незалежними від висоти: $t = 22$ С.

Розв'язання.

Абсолютна температура повітря $T = (t + 273)^\circ \text{K} = 295$ К.

Розглянемо повітряний стовп з площею перерізу S .

Направимо вісь Oz вертикально вгору вздовж стовпа. Розіб'ємо стовп на безкінечно велику кількість безкінечно тонких шарів (див. рис. 2.7.3).

Об'єм елементарного шару $dV = S dz$, а його маса за визначенням дорівнює $dm = \rho dV$.

Тиск повітря за умов задачі у такому стовпі визначається за допомогою барометричної формули:

$$\rho(z) = \rho(0) \exp \left[-\frac{\mu g (z - z_0)}{RT} \right]. \quad (2.7.18)$$

За визначенням центра мас він міститься в точці Z_{cm} :

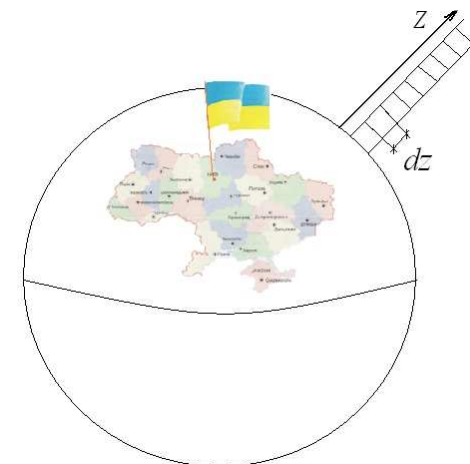


Рис. 2.7.3

$$Z_{цм} = \frac{\sum z_i m_i}{\sum m_i} = \frac{\int_0^{\infty} z \, dm}{\int_0^{\infty} dm} = \frac{\int_0^{\infty} z \rho(0) \exp\left[-\frac{\mu g z}{RT}\right] S dz}{\int_0^{\infty} \rho(0) \exp\left[-\frac{\mu g z}{RT}\right] S dz} = \frac{\int_0^{\infty} z \exp\left[-\frac{\mu g z}{RT}\right] dz}{\int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{\mu g z}{RT}\right] dz}. \quad (2.7.19)$$

Порахуємо інтеграл у чисельнику формули для висоти центра мас:

$$I_{чис} = \int_0^{\infty} z \exp\left[-\frac{\mu g z}{RT}\right] dz. \quad (2.7.20)$$

Проведемо заміну змінної, за якою обчислюється інтеграл:

$$I_{чис} = \left(\frac{RT}{\mu g}\right)^2 \int_0^{\infty} \left(-\frac{\mu g z}{RT}\right) \exp\left[-\frac{\mu g z}{RT}\right] d\left(-\frac{\mu g z}{RT}\right). \quad (2.7.21)$$

Далі застосовуємо метод взяття інтеграла частинами:

$$\begin{aligned} I_{чис} &= \left(\frac{RT}{\mu g}\right)^2 \int_0^{\infty} \left(-\frac{\mu g z}{RT}\right) d \exp\left(-\frac{\mu g z}{RT}\right) \\ &= \left(\frac{RT}{\mu g}\right)^2 \left(\left(-\frac{\mu g z}{RT}\right) \exp\left[-\frac{\mu g z}{RT}\right] \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{\mu g z}{RT}\right] d\left(-\frac{\mu g z}{RT}\right) \right) \\ &= -\left(\frac{RT}{\mu g}\right)^2 \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{\mu g z}{RT}\right] d\left(-\frac{\mu g z}{RT}\right) = \frac{RT}{\mu g} I_{зн}, \quad (2.7.22) \end{aligned}$$

де $I_{зн}$ – це інтеграл у знаменнику. Отже, $Z_{цм} = \frac{RT}{\mu g}$.

Перевірка відповіді на розмірність. Координата центра мас має вимірюватися у метрах:

$$\left[\frac{RT}{\mu g}\right] = \frac{\frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{моль}} \text{К}}{\frac{\text{кг}}{\text{моль}} \frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{Н}} = \text{м}.$$

Підставимо числові значення:

$$Z_{цм} = \frac{8.31 \cdot 295}{29 \cdot 10^{-3} \cdot 9.8} = 8626 \text{ м}.$$

Відповідь: $Z_{цм} = \frac{RT}{\mu g} = 8626 \text{ м}$.

Умови задач для третьої модульної контрольної роботи з молекулярної фізики:

1. Порахувати середню енергію поступального руху однієї молекули газу за температури $t = 77^\circ \text{C}$.
2. Знайти частку молекул газу, модуль швидкості яких відрізняється не більше, ніж на 3%, від середньої теплової швидкості v_T .
3. Знайти висоту, на якій густина повітря зменшується в два рази, припускаючи, що температура, молярна маса та прискорення вільного падіння не залежать від висоти: $T, \mu, g = \text{const} (h)$.
4. Знайти $\langle v_x \rangle$ та $\langle |v_x| \rangle$ для газу з молярною масою μ за температури T .
5. Порахувати зміну тиску повітря на висоті $h = 2 \text{ км}$ відносно тиску на поверхні Землі.
6. Знайти частку молекул газу, модуль швидкості яких відрізняється не більше, ніж на 2%, від $v_{\text{імов}}$.
7. Порахувати тиск повітря в шахті на глибині 1 км за нормальних умов на поверхні.

8. Знайти $\langle |u_z| \rangle$ та $\langle u_z^2 \rangle$ для газу з молярною масою μ за температури T .
9. Знайти теплоємність газу, що перебуває у вертикальному стовпі повітря з висотою h та поперечним перерізом S , тиск внизу стовпа P_0 . Вважати, що температура, молярна маса та прискорення вільного падіння не залежать від висоти.
10. Знайти частку молекул газу, модуль швидкості яких відрізняється не більше, ніж на 5%, від середнього значення модуля швидкості $\langle v \rangle$.
11. Порахувати масу повітря в безкінечному вертикальному стовпі з поперечним перерізом S , якщо тиск на поверхні Землі P_0 .
12. Знайти $\langle 1/v \rangle$ та $\langle v \rangle$ для газу з молярною масою μ за температури T .
13. Порахувати висоту, на якій концентрація зменшується в e разів.
14. Порахувати середнє значення кінетичної енергії поступального руху газу з молярною масою μ за температури T .
15. Знайти найімовірніше значення кінетичної енергії частинок газу, маса яких m_0 , а температура газу T_0 .
16. Трубу довжиною L закрито з одного кінця, але відкрито з другого. Знайти тиск повітря в ній поблизу закритого кінця, якщо її обертають навколо вертикальної осі, яка проходить перпендикулярно осі симетрії труби крізь її відкритий край. Тиск оточуючого повітря P_0 , температура T_0 , кутова швидкість обертання труби ω .
17. Знайти кількість молекул кисню, який заповнює циліндричну трубу, яку закрито з усіх боків, розташовану вертикально. Висота труби h , об'єм V , температура T , тиск газу поблизу нижнього краю труби P_0 .
18. Знайти середнє значення квадрата кінетичної енергії поступального руху газу з молярною масою μ за температури T .

§ 3. Додатки

3.1. Основні тригонометричні формули

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$	$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$
$\sec^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha = 1$	$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$
$\csc^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1$	$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$
$\sin \alpha \cdot \csc \alpha = 1$	$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$
$\cos \alpha \cdot \sec \alpha = 1$	$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$
$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$	$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
$\sin \alpha = (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)^{-1/2}$	$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
$\sin(\alpha/2) = \sqrt{(1 - \cos \alpha)/2}$	$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$
$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$	$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$
$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$	$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$
$\cos \alpha = (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^{-1/2}$	$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$
$\cos(\alpha/2) = \sqrt{(1 + \cos \alpha)/2}$	$\sin \alpha = [\exp(i\alpha) - \exp(-i\alpha)]/2i$
$\operatorname{sh} \alpha = (e^\alpha - e^{-\alpha})/2$	$\cos \alpha = [\exp(i\alpha) + \exp(-i\alpha)]/2$

$ch\alpha = (e^{\alpha} + e^{-\alpha}) / 2$	$ch^2\alpha - sh^2\alpha = 1$
$ctg \pm ctg\beta = \pm \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin\alpha \sin\beta}$	$ctg\alpha = i \frac{\exp(i\alpha) + \exp(-i\alpha)}{\exp(i\alpha) - \exp(-i\alpha)}$
$ctg(\alpha \pm \beta) = \frac{ctg\alpha ctg\beta \mp 1}{ctg\beta \pm ctg\alpha}$	$th\alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}$
$tg\alpha \pm tg\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \cos\beta}$	$cth\alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}$
$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha \cdot tg\beta}$	$tg\alpha = -i \frac{\exp(i\alpha) - \exp(-i\alpha)}{\exp(i\alpha) + \exp(-i\alpha)}$

3.2. Грецька абетка

A α альфа	I ι йота	P ρ ро
B β бета	K κ капа	Σ σ сигма
Γ γ гамма	Λ λ лямбда	T τ тау
Δ δ дельта	M μ мю	Y ν іпсилон
E ε епсилон	N ν ню	Φ ϕ (або φ) фі
Z ζ дзета	Ξ ξ ксі	X χ хі
H η ета	O o омікрон	Ψ ψ псі
Θ θ (або ϑ) тета	Π π пі	Ω ω омега

3.3. Деякі ірраціональні числа та наближені формули

Числа	Наближені формули (при $\alpha < 1$)
$\pi = 3,1416$	$(1 \pm \alpha)^n \approx 1 \pm n\alpha$
$\pi^2 = 9,8696$	$e^{\alpha} \approx 1 + \alpha$
$\sqrt{\pi} = 1,7725$	$\ln(1 + \alpha) \approx \alpha$
$e = 2,7183$	$\sin \alpha \approx \alpha$
$lg e = 0,4343$	$\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2 / 2$
$lg 10 = 2,3026$	$tg \alpha \approx \alpha$

3.4. Десятинні приставки до назв одиниць вимірювання

	г — гекто (10^2)	мк — мікро (10^{-6})
Е — екса (10^{18})	да — дека (10^1)	н — нано (10^{-9})
П — пета (10^{15})		
Т — тера (10^{12})	д — деци (10^{-1})	п — піко (10^{-12})
Г — гіга (10^9)		
М — мега (10^6)	с — санти (10^{-2})	ф — фемто (10^{-15})
к — кіло (10^3)	м — мілі (10^{-3})	а — атто (10^{-18})

3.5. Основні операції з векторами

Скалярний добуток: $\vec{a} \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ $\vec{a} \vec{b} = \vec{b} \vec{a}$ $\alpha(\vec{b} + \vec{c}) = \alpha \vec{b} + \alpha \vec{c}$	Векторний добуток: $[\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})] = [\vec{a} \times \vec{b}] + [\vec{a} \times \vec{c}]$ $[\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a} \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \vec{b})$ $[\vec{a} \times \vec{b}] = -[\vec{b} \times \vec{a}]$
---	---

$[\vec{a} \times \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}$	
$\frac{d}{dt}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{d\vec{b}}{dt}$	$\frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt}$
$\frac{d}{dt}(\alpha a) = \frac{d\alpha}{dt} a + \alpha \frac{da}{dt}$	$\frac{d}{dt}[\vec{a} \times \vec{b}] = \left[\frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} \right] + \left[\vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt} \right]$

3.6. Значення деяких невластних інтегралів

$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = \begin{cases} 1, & n=0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, & n=\frac{1}{2} \\ 1, & n=1 \\ 2, & n=2 \end{cases}$	$\int_0^{\infty} x^n e^{-x^2} dx = \begin{cases} \sqrt{\pi}/2, & n=0 \\ 1/2, & n=1 \\ \sqrt{\pi}/4, & n=2 \\ 1/2, & n=3 \end{cases}$
$\int_0^{\infty} \frac{x^n dx}{e^x - 1} = \begin{cases} 2,31, & n=1/2 \\ \pi^2/6, & n=1 \\ 2,405, & n=2 \\ \pi^4/15, & n=3 \\ 24,9, & n=4 \end{cases}$	$\int_0^{\alpha} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \begin{cases} 0,225, & \alpha=1 \\ 1,18, & \alpha=2 \\ 2,56, & \alpha=3 \\ 4,91, & \alpha=5 \\ 6,43, & \alpha=10 \end{cases}$

3.7. Таблиця основних похідних функцій

Функція	Її похідна	Функція	Її похідна
$x^n, n \geq 1$	$n x^{n-1}$	$\sin x$	$\cos x$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\cos x$	$-\sin x$
$x^{-n}, n \geq 1$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x})$	$\operatorname{ctg} x$	$-\sin^{-2} x$
e^x	e^x	$\sqrt{U(x)}$	$\frac{dU/dx}{2\sqrt{U(x)}}$
e^{nx}	ne^{nx}	$\ln U(x)$	$\frac{1}{U(x)} \frac{dU}{dx}$
a^x	$a^x \ln a$	$\frac{U(x)}{V(x)}$	$\frac{VU' - U'V}{V^2}$
$\ln x$	x^{-1}	$U(x)V(x)$	$U'V + UV'$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-(1+x^2)^{-1}$	$\operatorname{cth} x$	$-\operatorname{sh}^{-2} x$

3.8. Таблиця основних неозначених інтегралів

$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1)$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int (1+x^2)^{-1} dx = \operatorname{arctg} x + C$
$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + C$	$\int (1-x^2)^{-1/2} dx = \operatorname{arcsin} x + C$
$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} dx = \ln \left(x + \sqrt{x^2-1} \right) + C$

Інтегрування частинами: $\int U \cdot dV = U \cdot V - \int V \cdot dU$

3.9. Основні фізичні константи, що використовуються у механіці та молекулярній фізиці

Швидкість світла у вакуумі	$c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
Гравітаційна стала	$G = \begin{cases} 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2) \\ 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/(\text{г} \cdot \text{с}^2) \end{cases}$
Стандартне прискорення вільного падіння	$g = 9,807 \text{ м/с}^2$
Число Авогадро	$N_A = 6,023 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Стандартний об'єм газу	$V_0 = 22,4 \text{ л/моль}$

Число Лошмідта	$n_0 = \begin{cases} 2,69 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3} \\ 2,69 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3} \end{cases}$
Універсальна газова стала	$R = \begin{cases} 8,314 \text{ Дж}/(\text{К} \cdot \text{моль}) \\ 8,314 \cdot 10^7 \text{ ерг}/(\text{К} \cdot \text{моль}) \\ 0,082 \text{ л} \cdot \text{атм}/(\text{К} \cdot \text{моль}) \end{cases}$
Стала Больцмана	$k = \begin{cases} 1,380 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К} \\ 1,380 \cdot 10^{-16} \text{ ерг/К} \end{cases}$
Маса електрона	$m_e = \begin{cases} 0,911 \cdot 10^{-30} \text{ кг} \\ 0,911 \cdot 10^{-27} \text{ г} \\ 0,511 \text{ MeV} \end{cases}$
Маса протона	$m_p = \begin{cases} 1,672 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \\ 1,672 \cdot 10^{-24} \text{ г} \end{cases}$
Стала Планка	$\hbar = \begin{cases} 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} \\ 1,054 \cdot 10^{-27} \text{ ерг} \cdot \text{с} \\ 0,659 \cdot 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{с} \end{cases}$
Атомна одиниця маси	$1 \text{ а.о.м.} = \begin{cases} 1,660 \cdot 10^{-24} \text{ г} \\ 931,4 \text{ MeV} \end{cases}$

3.10. Астрономічні величини

Космічне тіло	Середній радіус, 10^6 м	Маса, кг	Середня густина, 10^3 кг/м ³	Період обертання навколо осі, доба
Сонце	695	$1,97 \times 10^{30}$	1,41	25,4
Земля	6,37	$5,96 \times 10^{24}$	5,52	1,00
Місяць	1,74	$7,30 \times 10^{22}$	3,30	27,3

3.11. Дані про планети Сонячної системи

Планети Сонячної системи	Середня відстань до Сонця, 10^6 км	Період обертання навколо Сонця, земні роки
Меркурій	57,87	0,241
Венера	108,14	0,615
Земля	149,50	1,000
Марс	227,79	1,881
Юпітер	777,8	11,862
Сатурн	1426,1	29,458
Уран	2867,7	84,013
Нептун	4494	164,79
Плутон	9508	248,43

3.12. Деякі позасистемні одиниці вимірювання

$1 \text{ рік} = 3,11 \cdot 10^7 \text{ с}$ $1 \text{ атм} = \begin{cases} 101,3 \text{ кПа} \\ 760 \text{ мм рт. ст.} \end{cases}$ $1 \text{ бар} = 100 \text{ кПа (точно)}$ $1 \text{ мм рт. ст.} = 133,3 \text{ Па}$ $1 \text{ л} \cdot \text{атм} = 101,3 \text{ Дж}$ $1 \text{ кал} = 4,18 \text{ Дж}$ $1 \text{ дюйм} = 25,40 \text{ мм}$	$1 \text{ Å} = 10^{-8} \text{ см}$ $1 \text{ б (бн)} = 10^{-24} \text{ см}^2$ $1 \text{ eV} = \begin{cases} 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} \\ 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ ерг} \end{cases}$ $1 \text{ а.о.м.} = \begin{cases} 1,660 \cdot 10^{-24} \text{ г} \\ 931,4 \text{ MeV} \end{cases}$
---	--

$1 \text{ фут} = 304,8 \text{ мм}$	$1 \text{ золотник} = 4,27 \text{ г}$
$1 \text{ аршин} = 710 \text{ мм}$	$1 \text{ фунт} = 409,51 \text{ г}$
$1 \text{ сажень} = 2130 \text{ мм}$	$1 \text{ пуд} = 16,38 \text{ кг}$

3.13. Густина речовини

3.13.1. Гази (за нормальних умов) (ρ , кг/м³)

Назва	ρ
Азот	1,250
Неон	0,900
Водень	0,09
Повітря	1,293
Кисень	1,43
Метан	0,72
Вуглекислий газ	1,98

3.13.2. Тверді тіла (ρ , г/см³)

Назва	ρ	Назва	ρ
Алмаз	3500	Срібло	10500
Алюміній	2700	Титан	4500
Вольфрам	19100	Уран	19000
Графіт	16000	Фарфор	2300
Залізо	7800	Цинк	7000
Золото	19300	Свинець	11300
Кадмій	8650	Нікель	8900
Кобальт	8900	Олово	7400
Крига	916	Чавун	6600÷7300
Мідь	8880÷8960	Латунь	8300÷8700
Сталь (литво)	7700÷8000	Платина	21500
Граніт	2500÷2800	Пробка	200
Молибден	10200	Натрій	970
Бамбук	400	Асфальт	1000÷2800
Береза	600÷800	Бетон	1800÷2400

Дуб	700÷1000	Графіт	2100÷2520
Клен	500÷800	Бурштин	1100
Чорне дерево	1200	Ніхром	8200÷8500

3.13.3. Рідини (ρ , кг/м³)

Назва	ρ	Назва	ρ
Бензол	880	Спирт етиловий	789
Вода	1000	Рицинова олія	950
Гліцерин	1260	Нафта	730÷940
Касторова олія	900	Мед	1345
Гас	800	Ефір	720
Ртуть	13600	Соняшникова олія	910÷970
Спирт метиловий	792	Толуол	870
Важка вода	1100	Скипидар	858

3.14. Сталі термодинамічні величини

3.14.1. Газові сталі (за нормальних умов)

Газ	Моляр- на маса	$\gamma = \frac{C_P}{C_V}$	Теплопровідність $\chi, \frac{мВт}{м \cdot К}$	Внутрішнє тертя $\eta, мкПа \cdot с$	Діаметр молекул $d, нм$
He	4	1,63	141,5	18,9	0,20
Ar	40	1,67	16,2	22,1	0,35
H ₂	2	1,41	168,4	8,4	0,27
N ₂	28	1,40	24,3	16,7	0,37
O ₂	32	1,40	24,4	19,2	0,35
CO ₂	44	1,30	23,2	14,0	0,40
H ₂ O	18	1,32	15,8	9,0	0,30
Пові- тря	29	1,40	24,1	17,2	0,35

3.14.2. Сталі Ван-дер-Ваальса

Газ	$a, 10^{-6} атм \cdot м^2 / моль^2$	$b, м / моль$
Ar	1,30	0,032
H ₂	0,24	0,027
N ₂	1,35	0,039
O ₂	1,35	0,032
CO ₂	3,62	0,043
H ₂ O	5,47	0,030

3.15. Тиск насиченої водяної пари

Температура, °С	Тиск, кПа	Температура, °С	Тиск, кПа	Температура, °С	Тиск, кПа
0	0,61	25	3,15	60	19,9
5	0,87	30	4,23	70	31,0
10	1,22	35	5,60	80	47,3
15	1,70	40	7,35	90	70,0
20	2,33	50	12,3	100	101

3.16. Сталі рідин (за нормальних умов)

Речовина	Питома теплоємність $c, \frac{Дж}{г \cdot К}$	Питома теплота утворення пари $q, \frac{Дж}{г}$	Поверхневий натяг $\alpha, \frac{мН}{м}$
Вода	4,18	2250	73
Гліцерин	2,42	-	66
Ртуть	0,14	284	490
Спирт	2,42	853	22

3.17. Коефіцієнт об'ємного розширення рідини,

$$\beta = \frac{1}{V} \frac{\delta V}{\delta T}$$

Рідина	Коефіцієнт об'ємного розширення $\beta, 10^{-4} \text{ }^{\circ}\text{K}$
Вода	2,1
Гліцерин	5,0
Гас	10,0
Ртуть	1,8
Спирт (етиловий)	11,0
Анілін	8,58
Ацетон	14,3
Бензол	12,37
Бром	11,13
Сірчана кислота	5,6
Скипидар	9,4
Трансформаторна олива	6
Хлороформ	12,73

3.18. Коефіцієнти лінійного розширення та питома теплоємність твердих тіл

Речовина	Коефіцієнт лінійного розширення $\alpha = \frac{1}{l} \frac{\delta l}{\delta T}, 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{K}^{-1}$	Питома теплоємність $c, \text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{K})$
Алюміній	22,9÷27,9	880
Латунь	17,8	380
Мідь	16,7÷20,3	380
Сталь	11,1	500
Вісмут	13,4	
Вольфрам	4,5÷5,8	130
Золото	14,5÷16,8	130
Іридій	6,8÷7,7	

Магній	27,0÷31,7	1050
Нікель	14,0÷16,1	460
Олово	31,6	200
Платина	9,2÷10,4	130
Свинець	31,3	130
Срібло	19,8÷22,4	200
Титан	8,5÷10,4	
Хром	7,3÷9,4	
Цинк	38,0	380
Бронза	18,2	380
Інвар	1,6	
Бетон	10,0÷14,0	920
Граніт	6,0÷9,0	
Дуб (уздовж та поперек волокна)	4,9÷54,4	240
Мармур	3÷15	840
Скло	9,5	670÷830
Алмаз	1,2	
Графіт	7,9	460÷710
Парафін	130,3	3200
Крига	51,1	2090

3.19. Коефіцієнти теплопровідності, температура та питома теплота плавлення твердих тіл

Речовина	Коефіцієнт теплопровідності $\lambda, \text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{K})$	Температура плавлення $t_{\text{пл}}, \text{ }^{\circ}\text{C}$	Питома теплота плавлення $r, 10^5 \text{ Дж}/\text{кг}$
Алюміній	200,6	660,4	3,9
Залізо	68,5	1535	2,77
Крига	2,5	0	3,35
Мідь	384,0	1084,5	1,8
Парафін	0,21	54	1,5
Свинець	34,7	327,5	0,25
Срібло	422,2	961,93	0,88

Ебоніт	0,17		3,8
Алмаз		3500	
Вісмут		271,44	
Вольфрам		3387	1,846
Золото	293	1064,43	0,662
Іридій		2447	
Кальцій		839	
Латунь		1000	
Магній		648,8	3,44
Нікель		1455	
Ртуть	7,9	-38,862	0,12
Ефір	0,17	-116,0	0,965
Титан		1660	
Хром		1857	
Молібден		2617	

3.20. Пружні сталі твердих тіл

Матеріал	Модуль Юнга, E , ГПа	Модуль зсуву, G , ГПа	Коефіцієнт Пуассона, μ
Алюміній	61÷74	22÷26	0,33
Мідь	100÷130	38÷47	0,31÷0,40
Свинець	15÷17	5,4	0,44
Сталь	200÷220	78÷81	0,28
Скло	600	300	0,25
Залізо (коване)	200÷220	69÷83	0,28
Чавун (сірий, білий)	74÷176	49	0,23÷0,27
Латунь	78÷98	26÷36	0,3÷0,4
Гетинакс	10÷17	–	–
Текстоліт	1,4÷2,8	–	–

3.21. Граничні коефіцієнти

Матеріал	Межа міцності на розрив, σ_m , ГПа	Коефіцієнт стискування $\beta = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P}$, ГПа ⁻¹
Алюміній	9,8÷39	0,014
Мідь	9,8÷49	0,007
Свинець	0,196	0,022
Сталь	49÷157	0,006
Скло	0,5	0,025
Залізо (коване)	39÷59	
Чавун (сірий, білий)	11,7÷12,7	
Латунь	9,8÷49	
Вода	–	0,49

3.22. Деякі фізичні параметри рідин за температури $t = 20^\circ \text{C}$

Коефіцієнт поверхневого натягу на межі рідина–повітря σ , Н/м; коефіцієнт внутрішнього тертя η , Па·с; коефіцієнт об'ємного розширення β , 10^{-4} K^{-1} ; температури кипіння рідин $t_{\text{кип}}$, $^\circ \text{C}$ при $P_0 = 101325$ Па; питома теплота утворення пари при температурах кипіння r , Дж/кг; коефіцієнт теплопровідності λ , Вт/(м·К).

Рідина	$\sigma \times 10^3$	$\eta \times 10^3$	$\beta \times 10^6$	$t_{\text{кип}}$	$r \times 10^5$	$\lambda \times 10^2$
Бензол	30	0,673	124	80,2	3,94	–
Вода	72,6	1,005	21	100,0	22,6	60
Гліцерин	66	1,480	50	290,0	–	29
Олія рицинова	36,4	970	–	–	–	–
Ртуть	500,0	1,590	18	356,7	2,85	908
Спирт етиловий	22,0	1,2	110	78,3	8,57	17

3.23. Коефіцієнти тертя ковзання

Матеріали	Статичний коефіцієнт		динамічний коефіцієнт	
	без мастила	із мастилом	без мастила	із мастилом
дерево по дереву	0.4÷0.6	0.1	0.2÷0.5	0.07÷0.15
дуб по дубу вздовж волокон; поперек волокон	0.62	0.11	0.48	0.075
	0.54	-	0.34	-
метал – по дереву по металу	0.5÷0.6	0.1÷0.2	0.3÷0.6	0.1÷0.2
	0.3÷0.5	0.15	0.6	0.5
сталь – по бронзі по кризі по сталі	-	0.1÷0.15	-	0.07÷0.15
	0.02÷0.03	-	0.015	-
	0.15÷0.25	0.11÷0.12	0.03÷0.09	0.05÷0.1
чавун по чавуну	-	0.16	0.15	0.08÷0.1

3.24. Коефіцієнти тертя кочення, δ , см

Ш. Кулон 1781 року експериментально здобув формулу для сили тертя кочення: $F_{тр} = \delta N / r$, де N – сила нормального тиску, r – радіус котка.

Матеріали	δ , см
сталеве колесо по дереву	0.15÷0.25
сталеве колесо по сталевих рейках	0.05
дерев'яний каток по дереву	0.05÷0.08
дерево по сталі	0.03÷0.04
кульковий підшипник кочення	0.001÷0.004
роликовий підшипник кочення	0.0025÷0.01
сталева кулька по сталі	0.0005÷0.001

Література

До числа основних підручників, які можуть стати в нагоді для студентів природничих факультетів при вивченні курсів „Механіка” та „Молекулярна фізика”, слід віднести чотири наступні книжки:

1. Ландау Л.Д., Ахиезер А.И., Лифшиц Е.М. Механика и молекулярная физика. – М.: Наука, 1965. – *Цей підручник написано засновниками сучасної харківської школи теоретичної фізики, він містить влучні фізичні тлумачення природних явищ, які вивчаються в механіці та молекулярній фізиці. Примірників цього підручника в університетських бібліотеках лишилося вкрай мало.*
2. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики: Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка. – К.: Техніка, 2006. – *Хоча й призначений для студентів, які навчаються за програмами педагогічних та технічних спеціальностей, але цілком стане в нагоді і студентам природничих факультетів класичних університетів.*
3. Кушнір Р.М. Загальна фізика: Механіка. Молекулярна фізика. – Львів: видав. центр ЛНУ, 2003. – *Автор цього навчального посібника, що рекомендовано для студентів нефізичних спеціальностей, виклав матеріал доступно і точно, забезпечивши розділи книги запитаннями та задачами для самостійної роботи студентів.*
4. Савельєв И.В. Курс общей физики. – СПб.: Лань, 2006. – т.1. – *Для цього підручника є характерним використання достатньо простих математичних викладок, порівняно з іншими підручниками московської фізичної школи.*

Наступні підручники та довідники корисні лише для вивчення окремих тем чи навіть параграфів, на які конкретно є посилання в програмі.

5. Біленко І.І. Фізичний словник. – К.: Вища шк., 1993. – *Можна знайти влучні короткі формулювання фізичних термінів.*
6. Телеснин Р.В. Молекулярная физика. – М.: Высш. школа, 1973. – *Тут дуже гарно описано та проілюстровано досліди та прилади.*
7. Яворский Б.М., Детлаф А.А. Справочник по физике для инженеров и студентов вузов. – М.: Наука, 1971. – *Містить*

лаконічні відомості та формулювання, може стати в нагоді при самостійній підготовці до іспитів.

Для розв'язання задач з механіки та молекулярної фізики ми рекомендуємо три наступні книжки:

8. Загальний курс фізики: Збірник задач / За ред. І.П. Гаркуші. – К.: Техніка, 2004. – *Це базова збірка для самостійного розв'язання задач студентами природничих факультетів з курсів механіки та молекулярної фізики.*

9. Савельев И.В. Сборник вопросов и задач по общей физике. – М.: Наука, 1982. – *Ця збірка вдало доповнює теоретичний матеріал, що представлено у підручнику цього ж автора.*

10. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. – М.: Наука, 1988. – *Серед даних трьох рекомендованих збірок задач тут представлено найбільш складні задачі, розв'язання яких гарантує високу оцінку на іспитах.*

Навчальне видання

Гірка Володимир Олександрович

Гірка Ігор Олександрович

ЛЕКЦІЇ З КУРСУ ФІЗИКИ «МЕХАНІКА ТА МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА» ДЛЯ СТУДЕНТІВ ПРИРОДНИЧИХ ФАКУЛЬТЕТІВ

Коректор С. В. Гончарук

Комп'ютерна верстка О. І. Гірка

Макет обкладинки І. М. Дончик

Підписано до друку Формат 60×84/16.

Папір офсетний. Друк ризографічний.

Обл.-вид. арк.. Умов.-друк. арк. . Наклад 200 прим.

Ціна договірна.

61077, Харків, майдан. Свободи, 4,
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна

Надруковано ХНУ імені В. Н. Каразіна

61077, Харків, майдан. Свободи, 4,

Тел.: 705-24-32

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 3364 від 13.01.09

Володимир Олександрович Гірка народився 1957 року в м. Харків. 1974 року закінчив СШ № 62 м. Харкова, а 1980 року – фізико-технічний факультет (ФТФ) Харківського державного університету (ХДУ) за спеціальністю «експериментальна ядерна фізика». Після завершення заочної аспірантури 1984 року захистив кандидатську дисертацію за спеціальністю «фізика та хімія плазми». Працював на посадах молодшого наукового та наукового співробітника у науково-дослідній частині університету. З 1989 року перейшов на викладацьку роботу, послідовно обіймаючи посади асистента, старшого викладача та доцента кафедри загальної та прикладної фізики (КЗПФ). Понад сімнадцять років викладає різні курси фізики (на підготовчому відділенні університету, на фізико-технічному факультеті та факультеті комп'ютерних наук). 1998 року здобув вчене звання «старший науковий співробітник». Співавтор 64 статей у реферованих наукових журналах. 2003 року захистив докторську дисертацію за спеціальністю «фізика плазми». 2006 року здобув вчене звання професора кафедри загальної та прикладної фізики.

Ігор Олександрович Гірка народився 1962 року в м. Харків. 1979 року закінчив СШ № 62 м. Харків з золотою медаллю. 1986 року закінчив з відзнакою ФТФ ХДУ імені О.М.Горького за спеціальністю «теоретична ядерна фізика». 1991 року захистив кандидатську дисертацію зі спеціальності «фізика плазми». З 1993 року працює доцентом КЗПФ ФТФ. Понад п'ятнадцять років викладає загальну фізику (курси «Механіка» та «Молекулярна фізика») на першому курсі ФТФ. З грудня 1996 по березень 2000 року, а також з вересня 2006 року дотепер завідує КЗПФ. 2004 року захистив докторську дисертацію зі спеціальності «фізика плазми». 2007 року здобув учене звання професора КЗПФ. Автор понад 120 наукових праць, включаючи 58 статей у реферованих журналах. Нагороджений Міністерством освіти і науки України знаками «Відмінник освіти України» (2004 рік) та «За наукові досягнення» (2009 рік). Лауреат премії НАНУ імені К.Д.Синельникова (2010 рік).