II.

КАНОНИЧЕСКІЯ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫЯ УРАВНЕНІЯ

гибкой, нерастяжимой нити и брахистохроны,

въ случаѣ потенціальныхъ силъ.

В. Г. Имшенецкаго.

Свое изслѣдованіе «О фигурѣ равновѣсія гибкой нити» *А. Клебшъ*[1] началъ слѣдующимъ замѣчаніемъ: «Общіе принципы, при помощи которыхъ *Якоби* привелъ интегрированіе уравненій движенія къ рѣшенію уравненія въ частныхъ производныхъ, какъ скоро существуетъ функція силъ, въ томъ-же самомъ случаѣ допускаютъ приложеніе и къ опредѣленію фигуры равновѣсія нити, которое равнымъ образомъ приводится къ задачѣ варіаціоннаго вычисленія». *Тэтъ* въ своей статьѣ «О приложеніи характеристической функціи Гамильтона къ спеціальнымъ случаямъ несвободнаго движенія»[2], напомнивъ о важномъ значеніи способа Гамильтона, для рѣшенія обыкновенныхъ вопросовъ динамики, въ-слѣдъ за тѣмъ выражается приблизительно такимъ

---

[1] Ueber die Gleichgewichtsfigur eines biegsamen Fadens. Von *A. Clebsch*. Crelle (Borcharat). 57 B. 93 S. 1860.

[2] On the Application of Hamilton's Characteristic Function to the Special Cases of Constraint. By Professor *Tait*, Transactions of the R. S. of Edinburgh. Vol. XXIV. Part I. 1864—65. p. 147.

образомъ: «сколько мнѣ извѣстно, этотъ способъ не былъ прилагаемъ къ обратнымъ задачамъ, въ родѣ брахистохроны, напримѣръ, гдѣ имѣется въ виду, какъ самый существенный предметъ, опредѣленіе требуемой связи (constraint), которая произвела бы данный результатъ. Между-тѣмъ-какъ въ обширномъ классѣ такихъ вопросовъ нетрудно замѣтить легкое примѣненіе процесса совершенно аналогичнаго гамильтонову; хотя въ этихъ случаяхъ характеристическая функція не та-же самая функція (количествъ, опредѣляющихъ движеніе) какъ въ *способѣ измѣняющагося дѣйствія* (Methode of Varying Action)».

Второму изъ упомянутыхъ авторовъ, по-видимому, не была извѣстна работа перваго; такъ-какъ она имъ не цитируется даже въ концѣ статьи, гдѣ указана возможность приложенія къ опредѣленію фигуры равновѣсія гибкой нити способа, даннаго для нахожденія брахистохронъ. Но оба эти автора пользуются варіаціоннымъ вычисленіемъ для полученія уравненія въ частныхъ производныхъ 1-го порядка и 2-й степени, изъ котораго выводится характеристическая функція, какъ полный его интегралъ. Если имѣется въ виду лишь выводъ этого уравненія, то, конечно, варіаціонное вычисленіе приводитъ къ нему кратко и непосредственно. Но, во-первыхъ, этотъ пріемъ не достаточно элементаренъ, по-крайней-мѣрѣ для статики, а во-вторыхъ, такимъ образомъ краткость изложенія можетъ быть достигнута только при пропускѣ нѣкоторыхъ предложеній, доказательство которыхъ необходимо въ систематическомъ развитіи теоріи. Такія сокращенія можно объяснить лишь тѣмъ, что опущенныя предложенія и ихъ доказательства имѣютъ много сходнаго съ аналогичными предложеніями въ теоріи рѣшенія по способу Гамильтона и Якоби обыкновенныхъ задачъ динамики. Но какъ бы то ни было, а въ этомъ, можетъ быть, заключается причина того, что прекрасное распространеніе теоріи Гамильтона и Якоби, сдѣланное Клебшемъ и Тэтомъ, на задачи о равновѣсіи гибкой нити и о брахистохронѣ, объясненное превосходными приложеніями, до сихъ поръ не вошло, сколько мнѣ извѣстно, въ курсы теоретической механики, за исключеніемъ «A Treatise on Dinamics of a Particle» самого Тэта.

Примѣняемость гамильтоно-якобіевской теоріи къ задачамъ о равновѣсіи гибкой нити и о брахистохронѣ можетъ быть доказана, по моему мнѣнію, болѣе простымъ образомъ. Для этого, предполагая извѣстною общую аналитическую теорію интегрированія дифференціальныхъ уравненій *каноническаго* вида, очевидно, необходимо и достаточно показать только, какъ къ этому виду приводятся, посредствомъ надлежащаго выбора перемѣнныхъ, обыкновенныя дифференціальныя уравненія, которыя даются въ большинствѣ курсовъ механики, той и другой изъ этихъ двухъ задачъ. Это преобразованіе должно различаться въ случаѣ нити или брахистохроны *свободной* или *несвободной;* въ первомъ случаѣ его можно объяснить въ нѣсколькихъ словахъ; во второмъ же, хотя оно нѣсколько и сложнѣе, однако исполняется при помощи обычныхъ пріемовъ для аналогичныхъ случаевъ обыкновенныхъ задачъ динамики.

§ I.

Равновѣсіе гибкой свободной нити.

1. Отнеся положеніе точекъ нити къ тремъ прямоугольнымъ осямъ, означимъ черезъ ds элементъ ея въ точкѣ xyz, черезъ $U.ds$ функцію или потенціалъ дѣйствующихъ на него силъ и, наконецъ, черезъ T натяженіе этого элемента.

Фигура равновѣсія нити опредѣляется, какъ извѣстно, слѣдующими уравненіями:

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right)+\frac{\partial U}{\partial x}=0$$

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right)+\frac{\partial U}{\partial y}=0$$

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right)+\frac{\partial U}{\partial z}=0 \qquad (1)$$

и

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1. \qquad (2)$$

Эти четыре уравненія, съ четырьмя неизвѣстными функціями x, y, z, T отъ s, можно преобразовать, исключивъ одну неизвѣстную T и приведя остальныя уравненія, посредствомъ введенія новыхъ перемѣнныхъ, вмѣсто $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, къ системѣ шести уравненій перваго порядка и канонической формы.

Для этого полагаемъ

$$T\frac{dx}{ds}=x_1,\quad T\frac{dy}{ds}=y_1,\quad T\frac{dz}{ds}=z_1, \qquad (3)$$

означая черезъ x_1 y_1 z_1 новыя зависимыя перемѣнныя, представляющія, очевидно, слагающія натяженія.

Изъ (3) на основаніи (2) имѣемъ

$$T=+\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}, \qquad (4)$$

гдѣ корень взятъ съ $+$, потому что натяженіе величина абсолютная.

Такимъ образомъ уравненія (3) и (1) обратятся въ слѣдующія

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx}{ds}=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z}},\quad \frac{dy}{ds}=\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}},\quad \frac{dz}{ds}=\frac{z_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}\\ &\frac{dx_1}{ds}=-\frac{\partial U}{\partial x_1},\quad \frac{dy_1}{ds}=-\frac{\partial U}{\partial y},\quad \frac{dz_1}{ds}=-\frac{\partial U}{\partial z}.\end{aligned}\right\} (5)$$

Можно допустить, что $\frac{\partial U}{\partial x_1}=\frac{\partial U}{\partial y_1}=\frac{\partial U}{\partial z_1}=0$, т. е. что U не зависитъ отъ $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, а слѣдовательно и отъ x_1, y_1, z_1.

Въ такомъ случаѣ полагая

$$H=U+\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$$

напишемъ уравненія (5) слѣдующимъ образомъ

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx}{ds}=\dfrac{dH}{dx_1},\ \dfrac{dy}{ds}=\dfrac{dH}{dy_1},\ \dfrac{dz}{ds}=\dfrac{dH}{dy_1} \\ \dfrac{dx_1}{ds}=-\dfrac{dH}{dx},\ \dfrac{dy_1}{ds}=-\dfrac{dH}{dy},\ \dfrac{dz_1}{ds}=-\dfrac{dH}{dz} \end{array}\right\} \qquad (6)$$

т. е. приводимъ ихъ къ канонической формѣ.

2. Если предположимъ, что U есть функціи только x, y, z; то, полагая

$$x_1=\frac{\partial V}{\partial x},\ y_1=\frac{\partial V}{\partial y},\ z_1=\frac{\partial V}{\partial z}, \qquad (7)$$

получимъ уравненіе въ частныхъ производныхъ

$$U+\sqrt{\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right\}}=h=\text{const}, \qquad (8)$$

какой-нибудь полный интегралъ котораго, содержащій произвольныя постоянныя a, b, h (не принимая во вниманіе просто приданнаго произвольнаго постояннаго), будетъ главной или характеристической функціей задачи.

Всѣ неизвѣстныя получатся слѣдующимъ образомъ помощію этой функціи.

Во-первыхъ, имѣемъ, на основаніи (3) и (7),

$$T\frac{dx}{ds}=\frac{\partial V}{\partial x},\ T\frac{dy}{ds}=\frac{\partial V}{\partial y},\ T\frac{dz}{ds}=\frac{\partial V}{\partial y},$$

откуда, на основаніи (2) и (8), находимъ натяженіе нити въ каждой точкѣ

$$T=\sqrt{\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right\}}=h-U$$

и замѣчаемъ, что нить въ каждой точкѣ натянута нормально къ поверхности $V=$ const., проходящей черезъ эту точку.

Во 2-хъ, фигуру равновѣсія нити опредѣлятъ два конечныя уравненія:

$$\frac{\partial V}{\partial a}=\alpha=\text{const. и } \frac{\partial V}{\partial b}=\beta=\text{const.};$$

и, въ 3-хъ, наконецъ, длина нити s найдется изъ уравненія

$$\frac{\partial V}{\partial h}-s=\gamma=\text{const.}$$

Понятно, какъ упрощаются эти результаты, если фигура равновѣсія будетъ плоская.

Для большей общности можно допустить, что U кромѣ координатъ x, y, z содержитъ еще s явно.

Тогда полагая

$$x_1=\frac{\partial S}{\partial x},\ y_1=\frac{\partial S}{\partial y},\ z_1=\frac{\partial S}{\partial z}$$

получимъ уравненіе въ частныхъ производныхъ

$$\frac{\partial S}{\partial s}+\sqrt{\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right\}}+U=0 \qquad (9)$$

и найдя какой-нибудь полный интегралъ его S, содержащій кромѣ просто приданнаго произвольныя постоянныя a, b, c, выразимъ полное рѣшеніе задачи уравненіями

$$T\frac{dx}{ds}=\frac{\partial S}{\partial x},\quad T\frac{dy}{ds}=\frac{\partial S}{\partial y},\quad T\frac{dz}{ds}=\frac{\partial S}{\partial z}$$

$$\frac{\partial S}{\partial a}=\alpha=\text{const},\quad \frac{\partial S}{\partial b}=\beta=\text{const.},\quad \frac{\partial S}{\partial c}=\gamma=\text{const.}$$

Дѣйствительно, изъ трехъ послѣднихъ уравненій можно выразить x, y, z какъ функціи s; потомъ изъ предпослѣднихъ трехъ уравненій также въ функціи s получится натяженіе

$$T=\sqrt{\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right\}}=-\left(V+\frac{\partial S}{\partial s}\right)$$

Предыдущій способъ рѣшенія нѣсколько видоизмѣняется, если положимъ

$$x = -\frac{\partial W}{\partial x_1}, \quad y = -\frac{\partial W}{\partial y_1}, \quad z = -\frac{\partial W}{\partial z_1} \qquad (10)$$

Тогда будемъ имѣть уравненіе въ частныхъ производныхъ

$$F\left(-\frac{\partial W}{\partial x_1}, -\frac{\partial W}{\partial y_1}, -\frac{\partial W}{\partial z_1}\right) + \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = h = \text{const} \ (11)$$

если $U = F(x, y, z)$. Найдя полный интегралъ этого уравненія W, содержащій кромѣ приданнаго произвольныя постоянныя a, b, h, получимъ полное рѣшеніе задачи изъ уравненій (10) и

$$\frac{\partial W}{\partial a} = \alpha = \text{const}, \frac{\partial W}{\partial b} = \beta = \text{const}, \frac{\partial W}{\partial h} - s = \gamma = \text{const}.$$

Дѣйствительно, изъ трехъ послѣднихъ уравненій x_1, y_1, z_1, а слѣдовательно и натяженіе T можно выразить функціями s; потомъ посредствомъ s выразятся также x, y, z, изъ уравненій (10). Исключивъ изъ нихъ s, получимъ фигуру равновѣсія.

Наконецъ уравненія

$$\frac{\partial W}{\partial a} = \alpha \quad \text{и} \quad \frac{\partial W}{\partial b} = \beta,$$

если x_1, y_1, z_1 разсматривать какъ прямоугольныя координаты, опредѣлятъ (подобно тому, какъ въ аналогичныхъ случаяхъ задачъ о движеніи точки) родъ *годографа* или указательницы — кривую линію такого свойства, что радіусы-векторы ея, проведенные изъ начала координатъ, представятъ величину натяженія нити въ тѣхъ точкахъ, гдѣ касательныя къ фигурѣ равновѣсія параллельны этимъ радіусамъ.

Функціи V, S, W можно получить посредствомъ вычисленія квадратуръ, если получена половина интеграловъ кононическихъ уравненій (6), интеграловъ выполняющихъ условія, выраженныя теоремой *Ліувилля*. Нахожденіе такихъ интеграловъ, при систематическомъ приложеніи теоремы *Пуассона*, обращается въ способъ *Якоби* интегрированія уравненій въ частныхъ производныхъ 1-го порядка (8), (9) и (11).

Замѣтимъ еще, что иногда U можетъ представляться суммой U_1+U_2 такого рода, что дѣлая $U_2=0$, т. е. принимая $U=U_1$ легко вполнѣ интегрировать уравненія (6). Произвольными постоянными, введенными этимъ интегрированіемъ, можно замѣнить зависимыя перемѣнныя первоначальной задачи, гдѣ $U=U_1+U_2$, и такимъ образомъ получится преобразованная система дифференціальныхъ уравненій также каноническаго вида, куда U_1 не войдетъ. Если притомъ U_2 весьма мало въ сравненіи съ U_1, то преобразованныя уравненія достаточно будетъ интегрировать лишь приближенно.

Задача этого рода, подобная вопросу о возмущенномъ движеніи планеты, по-видимому возможна при опредѣленіи фигуры равновѣсія нити. Напримѣръ — если главная сила, дѣйствующая на элементы нити, есть тяжесть и второстепенныя или возмущающія силы происходятъ отъ окружающей среды, которою можетъ быть вода или воздухъ.

§ II.

Равновѣсіе гибкой несвободной нити.

3. Если къ условіямъ, принятымъ въ началѣ § I, прибавимъ требованіе, чтобы уравновѣшенная данными силами нить находилась на данной поверхности

$$f(x,y,z)=0; \tag{1}$$

то фигура равновѣсія нити опредѣлится уравненіемъ (1) и слѣдующими:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right)+\frac{\partial V}{\partial x}+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right)+\frac{\partial V}{\partial y}+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}=0\\ \frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right)+\frac{\partial V}{\partial z}+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}=0\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1 \qquad (3)$$

гдѣ

$$\lambda=\frac{N}{\sqrt{\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right\}}},$$

а $N.ds$ означаетъ неизвѣстную нормальную реакцію поверхности (1) на элементъ ds нити. Посредствомъ пяти уравненій (1), (2) и (3) должно, слѣдовательно, опредѣлить пять неизвѣстныхъ x, y, z, T и λ функціей отъ s.

4. Сначала мы преобразуемъ эти уравненія такъ, чтобы исключалось λ, а вмѣсто x, y, z вошли бы двѣ новыхъ неизвѣстныхъ p и q.

Для этого представимъ, что x и y выражены какими-нибудь различными функціями отъ p и q и что эти выраженія подставлены въ (1), вмѣсто x и y, изъ котораго затѣмъ z выразится посредствомъ p и q. Пусть полученныя такимъ образомъ выраженія x, y, z, тождественно удовлетворяющія (1), будутъ

$$x=\varphi(p,q), \quad y=\psi(p,q), \quad z=\chi(p,q). \qquad (4)$$

Полагая для краткости

$$\frac{dx}{ds}=x', \quad \frac{dy}{ds}=y', \quad \frac{dz}{ds}=z'$$

и

$$W=\frac{1}{2}(x'^2+y'^2+z'^2)$$

можно уравненія (2) и (3) написать такимъ образомъ

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{ds}\left(T\frac{\partial W}{\partial x'}\right)+\frac{\partial U}{\partial x}+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ &\frac{d}{ds}\left(T\frac{\partial W}{\partial y'}\right)+\frac{\partial U}{\partial y}+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}=0\\ &\frac{d}{ds}\left(T\frac{\partial W}{\partial z'}\right)+\frac{\partial U}{\partial z}+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}=0 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

$$2W=1. \qquad (6)$$

Далѣе, дифференцируя въ отношеніи s уравненія (4) и положивъ

$$\frac{dp}{ds}=p', \quad \frac{dq}{ds}=q' \qquad (7)$$

получимъ

$$x'=\frac{\partial x}{\partial p}p'+\frac{\partial x}{\partial q}q', \; y'=\frac{\partial y}{\partial p}p'+\frac{\partial y}{\partial q}q', \; z'=\frac{\partial z}{\partial p}p'+\frac{\partial z}{\partial q}q'. \quad (8)$$

Слѣдовательно, вставивъ эти выраженія x', y', z' въ (6), получимъ

$$2W=Ep'^2+2Fp'q'+Gq'^2=1, \qquad (9)$$

гдѣ

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q}+\frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q}+\frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q},$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2.$$

Теперь, складывая уравненія (5), умноженныя соотвѣтственно на $\frac{\partial x}{\partial p}$, $\frac{\partial y}{\partial p}$, $\frac{\partial z}{\partial p}$, сначала найдемъ

$$\frac{dx}{dp}\frac{d}{ds}\left(T\frac{\partial W}{dx'}\right)+\frac{dy}{dp}\frac{d}{ds}\left(T\frac{\partial W}{dy'}\right)+\frac{dz}{dp}\frac{d}{ds}\left(T\frac{\partial W}{dz'}\right)$$

$$+\frac{\partial U}{dx}\frac{dx}{dp}+\frac{\partial U}{du}\frac{dy}{dp}+\frac{\partial U}{dz}\frac{dz}{dp}$$

$$+\lambda\left(\frac{\partial f}{dx}\frac{dx}{dp}+\frac{\partial f}{dy}\frac{dy}{dp}+\frac{\partial f}{dz}\frac{dz}{dp}\right)=0.$$

Но, во 1-хъ,

$$\frac{\partial V}{dx}\frac{dx}{dp}+\frac{\partial V}{dy}\frac{dy}{dp}+\frac{\partial V}{dz}\frac{dz}{dp}=\frac{\partial V}{dp};$$

во 2-хъ,

$$\frac{\partial f}{dx}\frac{dx}{dp}+\frac{\partial f}{dy}\frac{dy}{dp}+\frac{\partial f}{dz}\frac{dz}{dp}=0,$$

ибо выраженія x, y, z (4) тождественно удовлетворяютъ (1); и, въ 3-хъ,

$$\frac{dx}{dp}\frac{d}{ds}\left(T\frac{\partial W}{dx'}\right)=\frac{d}{ds}\left(T\frac{\partial W}{dx'}\frac{dx}{dp}\right)-T\frac{\partial W}{dx'}\frac{d.\frac{dx}{dp}}{ds},\ldots$$

слѣдовательно предыдущее уравненіе приметъ видъ

$$\frac{d}{ds}\left\{T\left(\frac{\partial W}{dx'}\frac{dx}{dp}+\frac{\partial W}{dy'}\frac{dy}{dp}+\frac{\partial W}{dz'}\frac{dz}{dp}\right)\right\}$$

$$-T\left(\frac{\partial W}{dy'}\frac{d.\frac{dx}{dp}}{ds}+\frac{\partial W}{dy'}\frac{d.\frac{dy}{dp}}{ds}+\frac{\partial W}{dz'}\frac{d.\frac{dz}{dp}}{ds}\right)+\frac{\partial U}{dp}=0.$$

Далѣе изъ (8) нетрудно получить слѣдующія равенства

$$\frac{dx'}{dp'}=\frac{dx}{dp},\ \frac{dy'}{dp'}=\frac{dy}{dp},\ \frac{dz'}{dp'}=\frac{dz}{dp},$$

$$\frac{dx'}{dp}=\frac{d^2x}{dp\,dp}p'+\frac{d^2x}{dq\,dp}q'=\frac{d.\frac{dx}{dp}}{ds},\ldots$$

а вслѣдствіе ихъ множители при T въ предыдущемъ уравненіи

$$\frac{\partial W}{\partial x'}\frac{\partial x}{\partial p}+\frac{\partial W}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial p}+\frac{\partial W}{\partial z'}\frac{\partial z}{\partial p}=\frac{\partial W}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial p'}+\frac{\partial W}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial p'}+\frac{\partial W}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial p'}=\frac{\partial W}{\partial p'},$$

$$\frac{\partial W}{\partial x'}\frac{d.\frac{\partial x}{\partial p}}{ds}+\frac{\partial W}{\partial y'}\frac{d.\frac{\partial y}{\partial p}}{ds}+\frac{\partial W}{\partial z'}\frac{d.\frac{\partial z}{\partial p}}{ds}=$$

$$=\frac{\partial W}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial p}+\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial y'}{\partial p}+\frac{\partial W}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial p}=\frac{\partial W}{\partial p}$$

Поэтому мы получимъ слѣдующія уравненія:

$$\left.\begin{aligned}\frac{ds}{d}\left(T\frac{\partial W}{\partial p'}\right)-T\frac{\partial W}{\partial p}+\frac{\partial U}{\partial p}=0,\\ \frac{d}{ds}\left(T\frac{\partial W}{\partial q'}\right)-T\frac{\partial W}{\partial q}+\frac{\partial U}{\partial q}=0,\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

изъ которыхъ послѣднее получено изъ предыдущаго черезъ замѣну p на q.

Такимъ образомъ первоначальная задача приведена къ опредѣленію функцій p, q, p', q', T изъ уравненій (7) (9) и (10).

Эти уравненія соотвѣтствуютъ уравненіямъ Лагранжа въ динамикѣ.

4. Полученныя уравненія преобразуемъ теперь въ уравненія каноническаго вида.

Для этого введемъ перемѣнныя p_1 и q_1 вмѣсто p' и q' посредствомъ положеній

$$T\frac{\partial W}{\partial p'}=p_1 \text{ и } T\frac{\partial W}{\partial q'}=q_1\,,\qquad(11)$$

гдѣ W получается изъ уравненія (9). А такъ-какъ выраженіе W однородное второй степени относительно p' и q', то

$$\frac{\partial W}{dp'}p'+\frac{\partial W}{\partial q'}q'=2\,W=1\,;$$

слѣдовательно, сложивъ уравненія (11), умноженныя соотвѣтственно на p' и q', получимъ

$$T = p_1 p' + q_1 q'. \qquad (12)$$

Теперь, чтобъ получить окончательное выраженіе T, напишемъ (11) слѣдующимъ образомъ

$$T(Ep' + Fq') = p_1 \text{ и } T(Fp' + Gq') = q_1$$

и выведемъ изъ нихъ

$$p' = \frac{Gp_1 - Fq_1}{T(EG - F^2)}, \qquad q' = \frac{Eq_1 - Fp_1}{F(EG - F^2)} \qquad (13)$$

Вставивъ эти значенія p' и q' въ (12), умноживъ его на T и извлекая корень, находимъ

$$T = +\sqrt{\left\{\frac{T}{D} p_1^2 - 2\frac{F}{D} p_1 q_1 + \frac{E}{D} q_1^2\right\}}, \qquad (14)$$

гдѣ

$$D = (EG - F^2),$$

а корень взятъ съ $+$, потому что T величипа абсолютная.

При помощи (13) и (14) уравненія (7) получатъ слѣдующій видъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq}{ds} &= \frac{\frac{G}{D} p_1 - \frac{F}{D} q_1}{\sqrt{\left\{\frac{G}{D} p_1^2 - 2\frac{F}{D} p_1 q_1 + \frac{E}{D} q_1^2\right\}}} = \frac{\partial T}{\partial q_1} \\ \frac{dq}{ds} &= \frac{\frac{E}{D} q_1 - \frac{F}{D} p_1}{\sqrt{\left\{\frac{G}{D} p_1^2 - 2\frac{F}{D} p_1 q_1 + \frac{E}{D} q_2^2\right\}}} = \frac{\partial T}{\partial q_1} \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Уравненія же (10) на основаніи положеній (11) напишутся слѣдующимъ образомъ

$$\left.\begin{aligned}\frac{dp_1}{ds}&=T\frac{\partial W}{\partial p}-\frac{\partial U}{\partial p}\\ \frac{dq_1}{ds}&=T\frac{\partial W}{\partial q}-\frac{\partial U}{\partial q}\end{aligned}\right\}\qquad(16)$$

Замѣтимъ теперь, что въ U, не содержавшее первоначально x', y', z', не могли войдти p' и q' послѣ перваго преобразованія, ни p_1 и q_1 послѣ втораго преобразованія. Поэтому для симметріи съ (16) къ вторымъ частямъ уравненій (15) можно соотвѣтственно придать $\frac{\partial V}{dp_1}$ и $\frac{\partial V}{dq_1}$, величины равныя нулю. Но вслѣдствіе этого, очевидно, уравненія (15) и (16) примутъ каноническую форму, если только будетъ доказано существованіе равенствъ:

$$T\frac{\partial W}{dp}=-\frac{\partial T}{dp}\text{ и }T\frac{\partial W}{dq}=-\frac{\partial T}{dp},\qquad(17)$$

при подстановкѣ въ первыя ихъ части значеній p' и q' (13).

Достаточно провѣрить первое изъ этихъ равенствъ, второе получится точно такъ-же.

Но помощію (9) находимъ

$$\frac{\partial W}{dp}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial E}{dp}p'^2+2\frac{\partial F}{dp}p'q'+\frac{\partial G}{dp}q'^2\right);$$

отсюда, вставивъ значенія p' и q' (13) и умноживъ на T, получимъ

$$T\frac{\partial W}{dp}=\frac{1}{2TD^2}\left(\frac{\partial E}{dq}(Gp_1-Fq_1)^2\right.$$

$$\left.+2\frac{\partial F}{dp}(Gp_1-Fq_1)(Gq_1-Fp_1)+\frac{\partial G}{dp}(Gq_1-Fp_1)^2\right).$$

Съ другой стороны, изъ (14) найдемъ

$$\frac{\partial T}{\partial d} = \frac{1}{2F}\left\{ \frac{\partial.\dfrac{G}{D}}{\partial p} p_1^{\,2} - 2\frac{\partial.\dfrac{F}{D}}{\partial p} p_1 q_1 + \frac{\partial.\dfrac{E}{D}}{\partial p} q_1^{\,2} \right\}$$

$$= \frac{1}{2TD^2}\left\{ \left(\frac{\partial G}{dp} p_1^{\,2} - 2\frac{\partial F}{dp} p_1 q_1 + \frac{\partial E}{dp} q_1^{\,2}\right)(EG-F^2)\right.$$

$$\left. -\left(G\frac{\partial E}{dp} + E\frac{\partial G}{dp} - 2F\frac{\partial F}{dp}\right)(Gp_1^{\,2} - 2Fp_1 q_1 + Eq_1^{\,2})\right\}$$

или, произведя умноженія и очевидныя сокращенія равныхъ членовъ,

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{-1}{2TD^2}\left(\frac{\partial E}{dp}(Gp_1 - Fq_1)^2 + 2\frac{\partial F}{dp}(Gp_1 - Fq_1)(Eq_1 - Fp_1)\right.$$

$$\left. + \frac{\partial F}{dp}(Eq_1 - Fp_1)^2\right).$$

И такъ, теперь доказано первое изъ равенствъ (17) и точно такъ-же докажется и второе.

Слѣдовательно, полагая

$$H = U + \sqrt{\left\{\frac{G}{D} p_1^{\,2} - 2\frac{F}{D} p_1 q_1 + \frac{E}{D} q_1^{\,2}\right\}} \quad (18)$$

мы приведемъ уравненія (15) и (16) къ канонической формѣ

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp}{ds} &= \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{dq}{ds} = \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \frac{dp_1}{ds} &= -\frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dq_1}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Что касается уравненія (9), то при подстановкѣ значеній p' и q' (13) оно очевидно обратится въ тождество.

Если функція U выражена только черезъ p и q, то

$$H = \text{const}.$$

есть интегралъ уравненій (19), для полнаго интегрированія которыхъ достаточно отыскать еще только одинъ интегралъ вида

$$G = \text{const.},$$

гдѣ G есть функція $p,\ q,\ p_1,\ q_1$. Остальные два интеграла найдутся, извѣстнымъ образомъ, посредствомъ главной функціи V, опредѣляемой помощію вычисленія квадратуры или вообще какъ какой - нибудь полный интегралъ уравненія въ частныхъ производныхъ

$$U + \sqrt{\left\{\frac{G}{D}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)^2 - 2\frac{T}{D}\frac{\partial V}{\partial p}\cdot\frac{\partial V}{\partial q} + \frac{E}{D}\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right)^2\right\}} = h.$$

Если линіи

$$p = \text{const.}, \text{ и } q = \text{const.},$$

на данной поверхности (1) образуютъ ортогональную систему; то $F = 0$ и предыдущее уравненіе, вмѣстѣ съ выраженіемъ H, принимаетъ упрощенный видъ.

(Будетъ окончаніе).