Въ виду этого

$$V=e^{\int Pdx}$$

и, по умноженіи даннаго уравненія на V, мы получимъ:

$$e^{\int Pdx}[Py-Q]+e^{\int Pdx}dy=0.$$

Послѣ этого, пользуясь формулою (δ) нумера 40, находи...

$$e^{\int Pdx}y-\int[e^{\int Pdx}Q]\,dx=c$$

или

$$y=e^{-\int Pdx}[c+\int e^{\int Pdx}Qdx].$$

Этотъ интегралъ сходенъ съ тѣмъ, который былъ най... нами въ нумерѣ 31 иными пріемами.

46. Случай, когда интегрирующій множитель пред-ставляетъ функцію произведенія xy перемѣнныхъ.— Обозначивъ xy черезъ v, положимъ, что $V=\varphi(v)$; въ так... случаѣ уравненіе (3) нумера 40 приметъ видъ

$$N\varphi'(v)\frac{dv}{dx}-M\varphi'(v)\frac{dv}{dy}-\left(\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}\right)\varphi(v)=0.$$

Отсюда, такъ-какъ $\frac{dv}{dx}=y$, $\frac{dv}{dy}=x$, находимъ:

$$\frac{\varphi'(v)}{\varphi(v)}=\frac{\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}}{Ny-Mx}.$$

Для того, чтобы эта формула могла быть проинтегриров... необходимо, чтобы правая часть приводилась къ функціи одн... v, т. е. xy. Въ такомъ случаѣ

$$V=e^{\int\frac{\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}}{Ny-Mx}dv}$$

И такъ, *интегрирующій множитель уравненія* $Mdx + Ndy = 0$ *опредѣляется формулою*

$$V = e^{\int \frac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{Ny - Mx} dv}$$

когда выраженіе

$$\frac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{Ny - Mx}$$

приводится къ виду функціи отъ xy.

Примѣромъ класса уравненій, удовлетворяющихъ этому условію, служатъ уравненія вида

$$F_1(xy)\,ydx + F_2(xy)\,xdy = 0.$$

Здѣсь $M = F_1(v)\,y, \quad N = F_2(v)\,x$, а потому

$$\frac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{Ny - Mx} = \frac{F_1(v) + vF_1'(v) - F_2(v) - vF_2'(v)}{v\,[F_2(v) - F_1(v)]}$$

$$= \frac{F_1(v) - F_2(v) + v\,[F_1'(v) - F_2'(v)]}{v\,[F_1(v) - F_2(v)]}$$

$$= -\frac{1}{v} - \frac{F_1'(v) - F_2'(v)}{F_1(v) - F_2(v)},$$

такъ-что

$$\int \frac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{Ny - Mx} dv = -\log v - \log\,[F_1(v) - F_2(v)]$$

и слѣдовательно

$$V = \frac{1}{v\,[F_1(v) - F_2(v)]} = \frac{1}{xy\,[F_1(xy) - F_2(xy)]}.$$

Пояснимъ высказанное примѣрами.

1) Дано дифференціальное уравненіе

$$(x^2y^2+1)\,ydx+(x^2y^2-1)\,xdy=0.$$

Здѣсь

$$M=(x^2y^2+1)\,y,\ N=(x^2y^2-1)\,x;$$

поэтому

$$\frac{\dfrac{dM}{dy}-\dfrac{dN}{dx}}{Ny-Mx}=\frac{2y^2x^2+x^2y^2-2x^2y^2-x^2y^2+2}{x^3y^3-xy-x^3y^3-xy}=\frac{-2}{xy}$$

и слѣдовательно

$$V=e^{-2\int\frac{dv}{v}}=\frac{1}{2v}=\frac{1}{2xy}.$$

Умноживъ данное уравненіе на этотъ множитель, получимъ:

$$\frac{x^2y^2+1}{2x}dx+\frac{x^2y^2-1}{2y}dy=0.$$

Здѣсь лѣвая часть уже точный дифференціалъ, а потому полный интегралъ выразится (форм. 8 нумера 40) чрезъ

$$\int\frac{x^2y^2+1}{x}dx+\int\left(\frac{x^2y^2-1}{y}-\frac{d\int\frac{x^2y^2+1}{x}dx}{dy}\right)dy=c,$$

или чрезъ

$$\frac{y^2x^2}{2}+\log\frac{x}{y}=c.$$

2) Дано уравненіе

$$(2x^3y^2-y)\,dx+(2x^2y^3-x)\,dy=0.$$

Въ настоящемъ случаѣ

$$\frac{\dfrac{dM}{dy}-\dfrac{dN}{dx}}{Ny-Mx}=\frac{4x^3y-1-(4y^3x-1)}{2x^2y^4-xy-(2x^4y^2-xy)}=-\frac{2}{xy},$$

а потому

$$V = e^{-2\int\frac{d(xy)}{xy}} = e^{-2\log(xy)} = \frac{1}{(xy)^2}.$$

Введя этотъ множитель въ лѣвую часть даннаго уравненія и проинтегрировавъ, въ окончательномъ результатѣ найдемъ выраженіе

$$x^2 + \frac{1}{xy} + y^2 = c.$$

47. Случай, когда интегрирующій множитель дифференціальнаго уравненія представляетъ однородную функцію нулевой степени отъ x и y, т. е. функцію отъ $\frac{y}{x}$. Пусть $V = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \varphi(v)$. Въ такомъ случаѣ уравненіе (3) нумера 44 приметъ видъ:

$$-N\varphi'(v)\frac{y}{x^2} - M\varphi'(v)\frac{1}{x} = \left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right)\varphi(v),$$

а потому получимъ:

$$\frac{d\varphi(v)}{\varphi(v)} = \frac{x^2\left(\frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy}\right)}{Mx + Ny}dv.$$

Если теперь правая часть представляетъ функцію отъ $v = \frac{y}{x}$, то интеграція непосредственно доставитъ:

$$\log\varphi(v) = \int\frac{x^2\left(\frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy}\right)dv}{Mx + Ny},$$

откуда

$$\varphi(v) = e^{\int\frac{x^2\left(\frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy}\right)dv}{Mx + Ny}}.$$

И такъ, *интегрирующій множитель уравненія вида*

$$Mdx + Ndy = 0$$

представляетъ однородную функцію нулевой степени отн. x, y и выражается формулою

$$V = e^{\int \frac{x^2\left(\frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy}\right)dv}{Mx+Ny}},$$

когда выраженіе

$$\frac{x^2\left(\frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy}\right)}{Mx+Ny}$$

сводится на функцію количества $v = \frac{y}{x}$.

Условіе это удовлетворяется для всякаго однороднаго диф-ференціальнаго уравненія перваго порядка и первой степени, потому что, положивъ M и N однородными функціями n-ой степени, мы найдемъ, что выраженіе

$$\frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy}$$

будетъ однородною функціею $(n-1)$-ой степени, такъ-что можно будетъ написать

$$\frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy} = x^{n-1}\vartheta\left(\frac{y}{x}\right) = x^{n-1}\vartheta(v).$$

Въ то-же время получимъ, что

$$Mx + Ny = x^{n+1}\psi(v),$$

такъ-какъ $Mx + Ny$ однородное выраженіе $(n+1)$-ой степени, а потому

$$\frac{\left(\frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy}\right)x^2}{Mx+Ny} = \frac{\vartheta(v)x^{n+1}}{\psi(v)x^{n+1}} = \frac{\vartheta(v)}{\psi(v)} = \Phi(v).$$

Возьмемъ примѣры.

1) Дано уравненіе

$$y\,dx+(2y-x)\,dy=0. \qquad (1)$$

Въ настоящемъ случаѣ

$$\frac{\left(\dfrac{dN}{dx}-\dfrac{dM}{dy}\right)x^2}{Mx+Ny}=-\frac{x^2}{y^2}=\frac{-1}{\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\cdot}}=\frac{-1}{v^2},$$

а потому будетъ

$$V=e^{-\int\frac{dv}{v^2}}=e^{\frac{1}{v}}=e^{\frac{x}{y}}.$$

Умноживъ данное уравненіе на этотъ интегрирующій множитель, приведемъ его къ виду

$$y.\,e^{\frac{x}{y}}\,dx+(2y-x)\,e^{\frac{x}{y}}\,dy=0.$$

Теперь лѣвая часть точный дифференціалъ, а потому полный интегралъ даннаго уравненія опредѣлится по формулѣ 8 нумера 40; мы именно получимъ:

$$y\int e^{\frac{y}{x}}\,dx+\int\left(2ye^{\frac{x}{y}}-xe^{\frac{x}{y}}-\frac{d\int ye^{\frac{x}{y}}\,dx}{dy}\right)dy=c,$$

или

$$y^2e^{\frac{x}{y}}=c.$$

2) Беремъ уравненіе

$$\left(\frac{1}{y}+\sec\frac{y}{x}\right)dx-\frac{x}{y^2}\,dy=0.$$

Въ этомъ случаѣ

$$\frac{\left(\frac{dN}{dx}-\frac{dM}{dy}\right)x^2}{Mx+Ny}=-\frac{\sin\frac{y}{x}}{\cos\frac{y}{x}}=-\frac{\sin v}{\cos v},$$

а потому

$$V=e^{-\int\frac{\sin v.dv}{\cos v}}=e^{\log\cos v}=\cos v=\cos\frac{y}{x}.$$

По умноженіи даннаго уравненія на $\cos\frac{x}{y}$ получимъ:

$$\left(\frac{1}{y}\cos\frac{y}{x}+1\right)dx-\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}dy=0,$$

послѣ чего формула 8 нумера 40 доставитъ его полный интегралъ въ формѣ

$$\int\left(\frac{1}{y}\cos\frac{y}{x}+1\right)dx+\int\left(-\frac{x}{y^2}\cos\frac{y}{x}-\frac{d\int\left(\frac{1}{y}\cos\frac{y}{x}+1\right)dx}{dy}\right)dy=c.$$

48. Случай, когда интегрирующій множитель дифференціальнаго уравненія представляетъ однородную функцію n-ой степени перемѣнныхъ. Въ случаѣ, когда V представляетъ однородную функцію n-ой степени перемѣнныхъ x, y, такъ-что имѣемъ

$$V=x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right)=x^n\varphi(v),$$

уравненіе 3 нумера 44 приводится къ виду

$$N\left[nx^{n-1}\varphi(v)-x^{n-2}y\varphi'(v)\right]-Mx^{n-1}\varphi'(v)$$
$$=\left(\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}\right)x^n\varphi(v),$$

а потому находимъ:

$$\frac{d\varphi(v)}{\varphi(v)} = \frac{x^2\left[\frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy}\right] + nNx}{Mx + Ny} dv.$$

Для того, чтобы формула эта могла быть проинтегрирована, нужно только, чтобы правая часть ея представляла функцію отъ одного v. Коль-скоро условіе это удовлетворяется, мы имѣемъ:

$$\log\varphi(v) = \int \frac{x^2\left[\frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy}\right] + nNx}{Mx + Ny} dv = \int f(v)dv;$$

слѣдовательно

$$\varphi(v) = e^{\int f(v)dx}$$

и наконецъ

$$V = x^n . e^{\int f(v)dx}.$$

И такъ, *для того, чтобы уравненіе $Mdx + Ndy = 0$ имѣло интегрирующимъ множителемъ однородную функцію n-ой степени отъ x, y, необходимо и достаточно, чтобы выраженіе*

$$\frac{x^2\left[\frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy}\right] + nNx}{Mx + Ny}$$

сводилось на функцію одного количества $v = \frac{y}{x}$; самый интегрирующій множитель опредѣлится въ этомъ случаѣ формулою

$$V = x^n . e^{\int \frac{x^2\left[\frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy}\right] + nNx}{Mx + Ny} dv}$$

Выраженіе

$$\frac{x^2\left[\frac{dN}{dx}-\frac{dM}{dy}\right]+nNx}{Mx+Ny}$$

можетъ приводиться къ функціи v или независимо отъ значенія n, или только для извѣстныхъ значеній этого показателя степени интегрирующаго множителя. Въ первомъ случаѣ уравненіе $Mdx+Ndy=0$ допускаетъ интегрирующіе однородные множители какой угодно степени, а во второмъ оно имѣетъ только однородный интегрирующій множитель извѣстной степени.

Выраженіе (1) приводится къ виду функціи одного v каково бы ни было n, когда M и N однородныя функціи одной и той же степени m. Въ самомъ дѣлѣ, пусть

$$M=x^m\varphi\left(\frac{y}{x}\right),\ N=x^m\psi\left(\frac{y}{x}\right);$$

въ такомъ случаѣ будетъ

$$\frac{dM}{dy}=x^{m-1}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{dN}{dx}=mx^{m-1}\psi\left(\frac{y}{x}\right)-x^{m-2}y\psi'\left(\frac{y}{x}\right),$$

а потому

$$\frac{x^2\left[\frac{dN}{dx}-\frac{dM}{dy}\right]+nNx}{Mx+Ny}=\frac{x^2[\,mx^{m-1}\psi(v)-x^{m-2}vx\psi'(v)]}{x^{m+1}\varphi(v)+x^{m+1}v\psi(v)}$$

$$+\frac{-x^{m+1}\varphi'(v)+nx^{m+1}\psi(v)}{x^{m+1}\varphi(v)+x^{m+1}v\psi(x)}$$

$$=\frac{(m+n)\psi(v)-v\psi'(v)-\varphi'(v)}{\varphi(v)+v\psi(v)}.$$

Въ виду этого интегрирующій однородный множитель n-й степени однороднаго уравненія $Mdx+Ndy=0$ опредѣляется, вообще, формулою

$$V = x^n e^{\int \frac{(n+n)\psi(v) - v\psi'(v) - \varphi'(v)}{\varphi(v) + v\psi(v)} dv};$$

но

$$\frac{(m+n)\psi(v) - v\psi'(v) - \varphi'(v)}{\varphi(v) + v\psi(v)} = \frac{(m+n+1)\psi(v) - [\psi(v) + v\psi'(v) + \varphi'(v)]}{\varphi(v) + v\psi(v)},$$

а потому

$$\int \frac{(m+n)\psi(v) - v\psi'(v) - \varphi'(v)}{\varphi(v) + v\psi(v)} dv = (m+n+1)\int \frac{\psi(v)dv}{\varphi(v) + v\psi(v)} - \log[\varphi(v) + v\psi(v)]$$

и слѣдовательно

$$V = \frac{x^{m+n+1} e^{(m+n+1)\int \frac{\psi(v)dv}{\varphi(v)+v\psi(v)}}}{x^m\varphi(v) + x^m v\psi(v)},$$

или

$$V = \frac{x^{m+n+1} e^{(m+n+1)\int \frac{\psi(v)dv}{\varphi(v)+v\psi(v)}}}{Mx + Ny}. \qquad (a)$$

Положивъ, въ частности, $n = -(m+1)$, послѣднюю формулу сведемъ на

$$V = \frac{1}{Mx + Ny}. \qquad (\alpha)$$

Эта формула доставляетъ весьма простое общее выраженіе для одного изъ интегрирующихъ множителей уравненія $Mdx + Ndy = 0$, въ которомъ M, N однородныя функціи одной и той же степени.

Возьмемъ частные примѣры.

1) Пусть дано уравненіе

$$(3x + 2y)dx + xdy = 0,$$

Въ виду формулы (α) однимъ изъ интегрирующихъ множителей даннаго уравненія будетъ выраженіе

$$V_0 = \frac{1}{3x^2+2xy+xy} = \frac{1}{3x(x+y)}.$$

Съ другой стороны, замѣтивъ, что въ настоящемъ примѣрѣ $m=1$, $\psi(v)=1$, $\phi(v)=2v+3$, изъ формулы (a), допустивъ въ ней $n=1$, найдемъ:

$$V = \frac{x^2 \cdot e^{\frac{2}{3}\int\frac{dv}{v+1}}}{3x(x+y)} = \frac{x^2(v+1)^{2/3}}{3x(x+y)},$$

т. е.

$$V = \frac{1}{3}\left[\frac{x}{x+y}\right]^{1/3}.$$

Мы имѣемъ теперь два интегрирующихъ множителя, а потому для полученія полнаго интеграла даннаго уравненія достаточно (см. нумеръ 43) раздѣлить одинъ изъ этихъ множителей на другой и слѣдствіе приравнять постоянному произвольному количеству. Такимъ образомъ находимъ:

$$\frac{V}{V_0} = \frac{(x+y)x^{4/3}}{(x+y)^{1/3}} = (x+y)^{2/3}x^{4/3} = \text{const},$$

т. е.

$$x^3 + x^2y = \text{const}.$$

Это и есть полный интегралъ даннаго уравненія.

2) Дано уравненіе

$$(2x^3+3x^2y+y^2-y^3)dx+(2y^3+3xy^2+x^2-x^3)dy=0.$$

Изслѣдуемъ — не имѣетъ ли оно однороднаго интегрирующаго множителя.

Въ настоящемъ случаѣ

$$\frac{x\left[\frac{dN}{dx}-\frac{dM}{dy}\right]+nNx}{Mx+Ny}$$

$$=\frac{-(n+6)x^4+(3n+6)x^2y^2+2nxy^3+(n+2)x^3-2x^2y}{2x^4+2x^3y+2xy^3+2y^4+x^2y+xy^2}$$

$$=\frac{-x}{x+y}\,\frac{(n+6)x^3-(3n+6)xy^2-2ny^3-(n+2)x^2+2xy}{2x^3+2y^3+xy}.$$

Это выраженіе при какомъ угодно n не приводится къ функціи отъ $\frac{y}{x}=v$; но если допустить $n=-2$, то оно приметъ видъ

$$\frac{-x}{x+y}\,\frac{4x^3+4y^3+2xy}{2x^3+2y^3+xy}=\frac{-2x}{x+y}=\frac{-2}{1+v}.$$

Въ слѣдствіе этого будетъ

$$V=x^{-2}e^{-2\int\frac{dv}{1+v}}=x^{-2}e^{-\log(1+v)^2}=\frac{1}{x^2(1+v)^2},$$

т. е.

$$V=\frac{1}{(x+y)^2}.$$

Введя этотъ множитель въ данное уравненіе и проинтегрировавъ слѣдствіе, найдемъ полный интегралъ въ формѣ

$$\frac{x^3+xy+y^3}{x+y}=c.$$

49. Пріемы разысканія интегрирующаго множителя уравненія

$$Mdx+Ndy=0,$$

изложенные въ двухъ предыдущихъ нумерахъ, оказываются непримѣнимыми въ томъ случаѣ, когда выраженіе $Mx+Ny$ тождественно равно нулю; но здѣсь интегрирующій множитель легко опредѣляется на основаніи слѣдующаго предложенія.

Если въ уравненіи

$$Mdx + Ndy = 0$$

M и N таковы, что имѣемъ тождественно

$$Mx + Ny = 0,$$

то выраженіе

$$\frac{1}{Mx - Ny}$$

непремѣнно будетъ интегрирующимъ множителемъ его, а если имѣемъ тождественно

$$Mx - Ny = 0,$$

то интегрирующимъ множителемъ будетъ выраженіе

$$\frac{1}{Mx + Ny}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, каковы бы ни были M, N, будемъ имѣть тождественно

$$Mdx + Ndy = \frac{1}{2}\left((Mx + Ny)\left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}\right)\right.$$

$$\left.+ (Mx - Ny)\left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right)\right).$$

Однако

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = d\log(xy), \quad \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = d\log\left(\frac{x}{y}\right),$$

а потому

$$Mdx + Ndy = \frac{1}{2}\left((Mx + Ny)\,d\log(xy)\right.$$

$$\left.+ (Mx - Ny)\,d\log\left(\frac{x}{y}\right)\right).$$

Отсюда, когда $Mx + Ny$ тождественно равно нулю, находимъ

$$Mdx+Ndx=\frac{1}{2}(Mx-Ny)d\log\left(\frac{x}{y}\right),$$

т. е.

$$\frac{Mdx+Ndy}{Mx-Ny}=\frac{1}{2}d\log\left(\frac{x}{y}\right),$$

результатъ, доказывающій, что въ настоящемъ случаѣ выраженіе

$$\frac{1}{Mx-Ny}$$

представляетъ дѣйствительно интегрирующій множитель даннаго дифференціальнаго уравненія.

Когда $Mx-Ny$ тождественно равно нулю, мы находимъ:

$$\frac{Mdx+Ndy}{Mx+Ny}=\frac{1}{2}d\log(xy).$$

Слѣдовательно въ этомъ случаѣ интегрирующимъ множителемъ представляется выраженіе

$$\frac{1}{Mx+Ny}.$$

50. Высказанное въ предыдущихъ нумерахъ достаточно выясняетъ характеръ тѣхъ частныхъ пріемовъ, къ которымъ приходится прибѣгать для разысканія интегрирующихъ множителей частныхъ видовъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка и первой степени. Мы, конечно, не исчерпали всѣхъ тѣхъ случаевъ, въ которыхъ ученымъ удалось найдти интегрирующій множитель уравненія; но изложеніе изслѣдованій, основанныхъ на совершенно частныхъ свойствахъ отдѣльныхъ формъ дифференціальныхъ уравненій, и не можетъ входить въ програму нашего сочиненія.

Способъ Миндинга.

51. Частнымъ рѣшеніемъ дифференціальнаго уравненія первваго порядка называется всякое отношеніе между перемѣнными, которое, удовлетворяя уравненію, не содержитъ произвольнаго постояннаго и выводится изъ полнаго интеграла сообщеніемъ въ немъ произвольному постоянному того или другаго опредѣленнаго значенія. Такихъ частныхъ рѣшеній каждое дифференціальное уравненіе имѣетъ, конечно, множество. Иногда найдти одно или нѣсколько частныхъ рѣшеній гораздо легче, чѣмъ разыскать полный интегралъ дифференціальнаго уравненія, а потому не лишено было практическаго значенія замѣчаніе, сдѣланное еще Эйлеромъ, что по данному какому-либо частному рѣшенію нѣкоторыхъ дифференціальныхъ уравненій оказывается возможнымъ найдти и полный интегралъ ихъ. Справедливость этого была имъ, между прочимъ, доказана по отношенію къ уравненію вида

$$dy+(y^2+X)dx=0,$$

гдѣ X нѣкоторая функція одного x. Дальнѣйшій шагъ въ примѣненіи мысли основывать пріемы разысканія полнаго интеграла дифференціальныхъ уравненій перваго порядка и первой степени на предварительномъ опредѣленіи нѣкотораго числа частныхъ изъ рѣшеній сдѣланъ былъ однако только въ 1845 году дерптскимъ профессоромъ Миндингомъ, обнародовавшимъ весьма любопытный способъ интеграціи дифференціальныхъ уравненій перваго порядка и первой степени, основанный именно на предварительномъ отысканіи нѣкотораго числа частныхъ рѣшеній. На изложеніи этого способа и остановимся теперь.

52. Сущность пріема Миндинга заключается въ слѣдующемъ. Если имѣемъ уравненіе вида

$$Mdx+Ndy=0, \qquad (1)$$

въ которомъ M, N нѣкоторыя функціи x, y, цѣлыя и раціональныя по отношенію къ y, и если мы найдемъ, такъ или иначе, нѣкоторое число μ частныхъ его рѣшеній вида

$$y_1 = \Phi(x)\,, y_2 = \Phi_2(x)\,, \ldots, y_\mu = \Phi_\mu(x), \tag{2}$$

то, составивъ выраженіе

$$\psi(y) = (y - y_1)(y - y_2) \ldots (y - y_\mu) \tag{3}$$

и пользуясь извѣстною формулой разложенія дробей на частныя дроби, найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{M}{\psi(y)} &= G + \frac{M_1}{\psi'(y_1)(y-y_1)} + \frac{M_1}{\psi'(y_2)(y-y_2)} + \ldots \\ &\quad \ldots + \frac{M_\mu}{\psi'(y_\mu)(y-y_\mu)}, \\ \frac{N}{\psi(y)} &= H + \frac{N_1}{\psi'(y_1)(y-y_1)} + \frac{N_1}{\psi'(y_2)(y-y_2)} + \ldots \\ &\quad \ldots + \frac{N_\mu}{\psi'(y_\mu)(y-y_\mu)}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

гдѣ G, H цѣлыя частныя, получающіяся при дѣленіи M и N на $\psi(y)$, а M_1, N_1, M_2, N_2,.... результаты подстановки въ M и N вмѣсто y частныхъ значеній его y_1, y_2,.... Эти выраженія M_1, N_1, M_2, N_2,.... не зависятъ поэтому отъ y. Такъ-какъ при этомъ y_1, y_2,.... y_μ представляютъ, по положенію, рѣшенія уравненія (1), то будетъ тождественно

$$M_1 dx + N_1 dy_1 = 0\,, M_2 dx + N_2 dy_1 = 0,$$

т. е.

$$M_1 dx = -N_1 dy_1\,, M_2 dx = -N_2 dy_2\,, \ldots.,$$

а потому, въ виду формулъ (4), получимъ

$$\frac{Mdx + Ndy}{\psi(y)} = Gdx + Hdy + \frac{N_1 d(y-y_1)}{\psi'(y)(y-y_1)} + \frac{N_2 d(y-y_2)}{\psi'(y)(y-y_2)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{N_\mu d(y-y_\mu)}{\psi'(y_\mu)(y-y_\mu)} = 0. \tag{5}$$

Приведенное къ такому виду, данное дифференціальное уравненіе оказывается во многихъ случаяхъ интегрирующимся, и способъ Миндинга заключается, собственно, въ приведеніи даннаго уравненія къ этому виду, для чего требуется только предварительное разысканіе нѣсколькихъ частныхъ рѣшеній.

Еслибы число извѣстныхъ частныхъ рѣшеній, т. е. μ, было единицею выше наивысшаго изъ показателей степени y въ многочленахъ M, N, то G и H свелись бы на нуль и мы имѣли бы:

$$\frac{Mdx+Ndy}{\psi(y)}=\frac{N_1 d(y-y_1)}{\psi'(y_1)(y-y_1)}+\frac{N_2 d(y-y_2)}{\psi'(y_2)(y-y_2)}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{N_\mu d(y-y_\mu)}{\psi'(y_\mu)(y-y_\mu)}=0 \qquad (6)$$

и въ случаѣ, еслибы

$$\frac{N_1}{\psi'(y_1)},\ \frac{N_2}{\psi'(y_2)},\ldots\ldots\frac{N_\mu}{\psi'(y_\mu)}$$

оказались независящими отъ x, слѣдовательно постоянными, интегрированіе непосредственно доставило бы

$$\frac{N_1}{\psi'(y_1)}\log(y-y_1)+\frac{N_2}{\psi'(y_2)}\log(y-y_2)+\ldots+\frac{N_\mu}{\psi'(y_\mu)}\log(y-y_\mu)=c,$$

или

$$(y-y_1)^{\frac{N_1}{\psi'(y_1)}}\times(y-y_2)^{\frac{N_2}{\psi'(y_2)}}\times\ldots(y-y^\mu)^{\frac{N_\mu}{\psi'(y_\mu)}}=0. \qquad (7)$$

Это уравненіе и представляло бы полный интегралъ даннаго.

53. Возьмемъ для перваго приложенія пріема Миндинга уравненіе

$$(X+X_1 y+X_2 y^2)\,dx+dy=0,$$

гдѣ X, X_1, X_2 какія бы то ни было функціи x. Еслибы мы имѣли два частныхъ рѣшенія этого уравненія, вида

$$y_1 = \varphi_1(x)\,,\; y_2 = \varphi_2(x),$$

то затѣмъ, пользуясь формулою (5) предыдущаго нумера и замѣчая, что въ настоящемъ случаѣ

$$N_1 = 0\,,\; \psi(y) = (y - y_1)(y - y_2)\,,\; H = 0\,,\; G = A = \text{пост. вел.},$$

мы представили бы данное уравненіе въ формѣ

$$Adx + \frac{d(y - y_1)}{(y_1 - y_2)(y - y_1)} + \frac{d(y - y_2)}{(y_2 - y_1)(y - y_2)} = 0,$$

или въ слѣдующей

$$A(y_1 - y_2)dx + \frac{d(y - y_1)}{y - y_1} - \frac{d(y - y_2)}{y - y_2} = 0.$$

Интегрированіе послѣ этого прямо доставитъ

$$\int A(y_1 - y_2)\,dx + \log\frac{y - y_1}{y - y_2} = c,$$

или

$$\frac{y - y_1}{y - y_2}\, e^{\int A(y_1 - y_2)\,dx} = c.$$

Значитъ, для уравненій разсматриваемаго вида достаточно найдти два частныхъ рѣшенія, чтобы по нимъ составить затѣмъ полный интегралъ.

54. Возьмемъ теперь уравненіе

$$[C + C'x + C''y - (A + A'x + A''y)y]\,dx +$$
$$[(A + A'x + A''y)x - (B + B'x + B''y)]\,dy = 0, \quad (1)$$

проинтегрированное впервые Якоби при помощи весьма остроумныхъ, хотя и совершенно частныхъ преобразованій, и приложимъ къ нему способъ Миндинга.

Не трудно убѣдиться простою провѣркою, что отношеніе

$$y = \alpha x + \beta \qquad (2)$$

будетъ представлять рѣшеніе уравненія (1), если только количества α, β подчинить условію удовлетворять слѣдующимъ двумъ уравненіямъ:

$$\left.\begin{aligned}(A+A''\beta)\beta+(B+B''\beta)\alpha=C+C''\beta,\\(A'+A''\alpha)\beta+(B'+B''\alpha)\alpha=C'+C''\alpha,\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

изъ которыхъ, путемъ исключенія β, получается для опредѣленія α одно уравненіе 3-ей степени. Рѣшивъ его, найдемъ три значенія α, которыя означимъ черезъ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Затѣмъ опредѣлятся и соотвѣтствующія имъ значенія β, которыя пусть будутъ $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. Вносся эти три системы значеній поочередно въ формулу (2), получимъ слѣдующія три частныхъ рѣшенія уравненія (1):

$$y_1=\alpha_1 x+\beta_1,\ y_2=\alpha_2 x+\beta_2,\ y_3=\alpha_3 x+\beta_3. \quad (4)$$

Итакъ, каковы бы ни были численныя значенія постоянныхъ коэффиціентовъ въ уравненіи (1), мы всегда находимъ три частныхъ рѣшенія его.

Въ виду доказаннаго къ уравненію (1) всегда оказывается возможнымъ приложить пріемъ преобразованія, изложенный въ нумерѣ 52. Въ настоящемъ случаѣ мы будемъ имѣть

$$\psi(y)=(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3) \quad (5)$$

и формула (6) помянутаго нумера сведется на

$$\frac{N_1 d(y-y_1)}{\psi'(y_1)(y-y_1)}+\frac{N_2 d(y-y_2)}{\psi'(y_2)(y-y_2)}+\frac{N_3 d(y-y_3)}{\psi'(y_3)(y-y_3)}=0. \quad (6)$$

Это и есть преобразованное по способу Миндинга уравненіе, которое остается проинтегрировать. Интегрированіе это всегда возможно, потому что выраженія

$$\frac{N_1}{\psi'(y_1)},\ \frac{N_2}{\psi'(y_2)},\ \frac{N_3}{\psi'(y_3)}$$

не зависятъ отъ x, а представляютъ постоянныя количества, каковы бы ни были значенія коэффиціентовъ въ данномъ уравненіи (1), какъ это сейчасъ и докажемъ.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ-какъ у насъ

$$N = (A + A'x + A''y)x - (B + B'x + B''y),$$

а

$$y_1 = \alpha_1 x + \beta_1,$$

то N_1 будетъ представлять цѣлую функцію второй степени отъ x, именно будемъ имѣть:

$$N_1 = (A' + A''\alpha_1)x^2 + (A + A''\beta - B' - B''\alpha_1)x - B - B''\beta.$$

Точно также, въ виду формулы (5) и того, что $y_1 = \alpha\, x + \beta_1$, найдемъ, что $\psi'(y_1) = (y_1 - y_2)(y_1 - y_2) =$ функціи 2-й степени отъ x.

Если однако черезъ x_3 означить то значеніе x, для котораго $y_1 = y_2$, а черезъ x_2 — значеніе x, для котораго $y_1 = y_3$, то выраженіе $\psi'(y_1)$ приведется къ виду

$$\psi'(y_1) = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)(x - x_3)(x - x_2). \qquad (7)$$

Съ другой стороны, такъ-какъ y_1, y_2 рѣшенія уравненія (1), то будемъ имѣть тождественно, т. е. для всякаго значенія x,

$$M + N_1 \frac{dy_1}{dx} = 0,\ M_2 + N_2 \frac{dy_2}{dx} = 0,$$

или

$$M_1 + N_1\alpha_1 = 0,\ M_2 + N_2\alpha_2 = 0.$$

Такъ-какъ для $x = x_3$, $y_1 = y_2$, то при $x = x_3$ мы будемъ имѣть $M_1 = M_2$, $N_1 = N_2$ и слѣдовательно

$$M_1 + N_1\alpha_1 = 0,\ M_1 + N_1\alpha_2 = 0.$$

Но α_1 и α_2 представляютъ количества, которыя, вообще, различны другъ отъ друга, а потому послѣднія два равенства непремѣнно требуютъ, чтобы было $M_1=0$ и $N_1=0$. Слѣдовательно уравненіе $N_1=0$ должно имѣть корень $x=x_3$. Точно также найдемъ, что оно удовлетворяется и для $x=x_2$. Поэтому многочленъ N_1 будетъ вида

$$N_1=(A'+A''\alpha_1)(x-x_2)(x-x_3) \qquad (8)$$

и раздѣливъ это выраженіе на выраженіе (7), мы найдемъ:

$$\frac{N_1}{\psi'(y_1)}=\frac{A'+A''\alpha_1}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)}=q_1,$$ т. е. постоянной величинѣ.

Точно такъ-же найдемъ, что

$$\frac{N_1}{\psi'(y_2)}=\frac{A'+A''\alpha_2}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)}=q_2,$$

$$\frac{N_2}{\psi'(y_3)}=\frac{A'+A''\alpha_3}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)}=q_3.$$

И такъ, формула (6) сведется на слѣдующую:

$$q_1\frac{d(y-y_1)}{y-y_1}+q_2\frac{d(y-y_2)}{y-y_2}+q_3\frac{d(y-y_3)}{y-y_3}=0$$

и, проинтегрировавъ ее, мы получимъ для полнаго интеграла даннаго уравненія формулу

$$(y-y_1)^{q_1}(y-y_2)^{q_2}(y-y_3)^{q_3}=c,$$

т. е.

$$(y-\alpha_1x-\beta_1)^{q_1}(y-\alpha_2x-\beta_2)^{q_2}(y-\alpha_3x-\beta_3)^{q_3}=c.$$

Не трудно замѣтить, что, въ виду самыхъ выраженій q_1, q_2, q_3, сумма этихъ трехъ количествъ всегда будетъ равна нулю.

55. Способъ Миндинга, какъ показалъ бывшій харьковскій профессоръ Е. И. Бейеръ въ прибавленіи къ своему изслѣдованію «Объ интегрированіи линейныхъ дифференціальныхъ уравній съ какимъ угодно числомъ измѣняемыхъ величинъ», напечатанному въ 1858 году, приводитъ къ опредѣленію полнаго интеграла дифференціальныхъ уравненій вида

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \qquad (1)$$

гдѣ вообще

$$\left.\begin{aligned} M(x, y) &= ay^2 + byx + cx^2 + ey + fx + g, \\ N(x, y) &= a'y^2 + b'yx + c'x^2 + e'y + f'x + g'. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Въ самомъ дѣлѣ, уравненію (1) можно удовлетворить формулою

$$y - \gamma = \beta(x - \alpha), \qquad (3)$$

если только количества α, β, γ будутъ опредѣляться слѣдующими тремя уравненіями:

$$\left.\begin{aligned} &(a\gamma^2 + b\gamma\alpha + c\alpha^2 + e\gamma + f\alpha + g) + (a'\gamma^2 + b'\gamma\alpha \\ &\qquad + c'\alpha^2 + e'\gamma + f'\alpha + g')\beta = 0, \\ &(b\gamma + 2c\alpha + f) + (2a\gamma + b\alpha + e + b'\gamma + 2c'\alpha + f')\beta \\ &\qquad + (2a\gamma' + b'\alpha + e')\beta^2 = 0, \\ &c + (b + c')\beta + (a + b')\beta^2 + a'\beta^3 = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

какъ въ этомъ не трудно убѣдиться внеся выраженіе y изъ (3) въ уравненіе (1).

Обращаясь къ формуламъ (4) замѣчаемъ, что первая изъ нихъ квадратная относительно α и γ, но линейная относительно β; вторая — линейная относительно α и γ и квадратная относительно β; наконецъ третья — кубическая относительно β. Рѣшивъ послѣднее изъ уравненій (4), найдемъ для β три значенія: β_1, β_2, β_3. Послѣ этого первыя два уравненія послужатъ для опредѣленія соотвѣтствующихъ значеній α и γ. При этомъ для каждаго значенія β найдемъ по одному значенію какъ α, такъ и γ. Пусть α_1, α_2, α_3 значенія α, а γ_1, γ_2, γ_3 — значенія γ. Подставляя эти три системы значеній α, β, γ въ формулу (3), получимъ три частныхъ рѣшенія уравненія (1), именно

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \gamma_1 + \beta_1(x-\alpha_1), \\ y_2 &= \gamma_2 + \beta_2(x-\alpha_2), \\ y_3 &= \gamma_3 + \beta_3(x-\alpha_3). \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Допустивъ теперь

$$\psi(y) = (y-y_1)(y-y_2)(y-y_3) \qquad (6)$$

и употребляя выше изложенный способъ Миндинга для преобразованія даннаго уравненія (1), мы найдемъ:

$$\frac{M(x,y)dx + N(x,y)dx}{\psi(y)} = \frac{N(x,y_1)d(y-y_1)}{\psi'(y_1)(y-y_1)} + \frac{N(x,y_2)d(y-y_2)}{\psi'(y_2)(y-y_2)}$$

$$+ \frac{N(x,y_3)d(y-y_3)}{\psi'(y_2)(y-y_3)} = 0, \qquad (7)$$

гдѣ y_1, y_2, y_3 опредѣляются формулами (5).

Теперь легко доказать, что множители

$$\frac{N(x,y_1)}{\psi'(y_1)},\ \frac{N(x,y_2)}{\psi'(y_2)},\ \frac{N(x,y_3)}{\psi'(y_3)}$$

не зависятъ отъ x. Въ самомъ дѣлѣ, формулы (6) и (5) даютъ

$$\psi'(y_1) = (y_1-y_2)(y_1-y_3) = (\beta_1-\beta_2)(\beta_1-\beta_3)x^2 + \ldots$$

и означивъ через x_1 и x_2 значенія x, при которыхъ y_1 переходитъ въ y_2 или въ y_3, найдемъ:

$$\psi'(y_1) = (\beta_1-\beta_2)(\beta_1-\beta_3)(x-x_1)(x-x_2). \qquad (8)$$

Вносл теперь въ данное уравненіе (1) вмѣсто y каждое изъ его трехъ значеній, доставляемыхъ формулами (5), получимъ

$$\left.\begin{aligned} M(x, y_1) + N(x, y_1)\beta_1 = 0, \\ M(x, y_2) + N(x, y_2)\beta_2 = 0, \\ M(x, y_3) + N(x, y_3)\beta_3 = 0, \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

изъ которыхъ первыя два для $x = x_1$, а первое и третье для $x = x_2$ доставляютъ:

$$N(x_1, y_1)(\beta_1 - \beta_2) = 0, \quad N(x_2, y_1)(\beta_1 - \beta_3) = 0.$$

Но β_1, β_2, β_3, по положенію, вообще различны между собою; слѣдовательно

$$N(x_1, y_1) = 0, \quad N(x_2, y_1) = 0, \quad (10)$$

а это указываетъ на то, что функція $N(x, y_1)$ должна дѣлиться на $(x - x_1)(x - x_2)$. Однако въ то-же время

$$N(x, y_1) = (a'\beta^2 + b'\beta + c')x^2 + \ldots$$

а потому, при разложеніи этой функціи x на множители, получимъ:

$$N(x, y_1) = (a'\beta_1^2 + b'\beta_1 + c')(x - x_1)(x - x_2). \quad (11)$$

Теперь, въ виду формулъ (11) и (8), уже ясно, что

$$\frac{N(x, y_1)}{\psi'(y_1)} = \frac{a'\beta_1^2 + b'\beta_1 + c'}{(\beta_1 - \beta_2)(\beta_1 - \beta_3)} = q_1, \text{ т. е. пост. вел.}$$

Точно такъ-же находимъ:

$$\frac{N(x, y_2)}{\psi'(y_2)} = \frac{a'\beta_2^2 + b'\beta_2 + c'}{(\beta_2 - \beta_1)(\beta_2 - \beta_3)} = q_2,$$

$$\frac{N(x, y_3)}{\psi'(y_3)} = \frac{a'\beta_3^2 + b'\beta_3 + c'}{(\beta_3 - \beta_1)(\beta_3 - \beta_2)} = q_3.$$

Теперь формула (7) приметъ видъ:

$$\frac{q_1 d(y - y_1)}{y - y_1} + \frac{q_2 d(y - y_2)}{y - y_2} + \frac{q_3 d(y - y_3)}{y - y_3} = 0$$

и интеграція ея непосредственно доставитъ:

$$(y-y_1)^{q_1}(y-y_2)^{q_2}(y-y_3)^{q_3}=c,$$

или

$$(y-\gamma_1-\beta_1(x-\alpha_1))^{q_1}\times(y-\gamma_2-\beta_2(x-\alpha_2))^{q_2}$$

$$\times(y-\gamma_3-\beta_3(x-\alpha_3))^{q_3}=c, \quad (12)$$

гдѣ, какъ легко это провѣрить,

$$q_1+q_2+q_3=a'.$$

Уравненіе (12) и представляетъ полный интегралъ уравненія (1).

О нѣкоторыхъ частныхъ пріемахъ интеграціи дифференціальныхъ уравненій 1-го порядка и 1-й степени.

56. Въ тѣхъ случаяхъ, когда намъ удается въ дифференціальномъ уравненіи

$$Mdx+Ndy=0$$

раздѣлить между собою перемѣнныя и привести это уравненіе къ виду

$$Xdx+Ydy=0,$$

гдѣ X функція одного x, а Y функція одного y, полный интегралъ его выражается вообще формулою

$$\int Xdx+\int Ydy=c,$$

гдѣ c произвольное постоянное. При этомъ однако функціи X и Y могутъ быть часто такого вида, что интегрированіе ихъ приводитъ къ трансцендентнымъ функціямъ или элементарнымъ, или такимъ, которыя нами еще мало изслѣдованы, или даже совсѣмъ не изслѣдованы. Обстоятельство это не исключаетъ однако воможности существованія для даннаго уравненія полнаго интеграла въ формѣ алгебраическаго уравненія между перемѣнными и произвольнымъ постояннымъ; получивъ полный интегралъ въ формѣ трансцендентнаго уравненія, можно бываетъ, во многихъ случаяхъ, привести его затѣмъ и къ формѣ алгебраическаго уравненія. Примѣры такихъ преобразованій были представлены въ нумерахъ 25 и 26; но весьма часто прямѣе и проще непосредственно искать полный интегралъ въ алгебраической формѣ. Подобнаго рода изслѣдованія находимъ въ трудахъ многихъ ученыхъ, и если пріемы, ими употреблявшіеся въ такихъ случаяхъ, и отличаются совершенно частнымъ характеромъ, то они, тѣмъ не менѣе, не лишены интереса и я не лишнимъ считаю представить образчики ихъ, извлеченные мною, по преимуществу, изъ мемуара Лагранжа «Sur l'intégration de quelques équations différentielles etc.»[1].

57. Возьмемъ прежде всего уравненіе

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=0. \tag{1}$$

Мы уже видѣли, что интегралъ его представляется въ формѣ трансцендентнаго уравненія

$$\arcsin x+\arcsin y=c, \tag{2}$$

но можетъ быть затѣмъ преобразованъ въ алгебраическое уравненіе

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=C^{*} \tag{3}$$

Теперь разсмотримъ—нельзя ли прямо придти къ этой послѣдней формѣ полнаго интеграла уравненія (1).

Уравненіе (1) можетъ быть представлено въ формѣ

[1] Oeuvres, T. II, p. 2 et suiv.

[*] См. прим. 3-й, нум. 25.

$$-dx\sqrt{1-y^2}=dy\sqrt{1-x^2}.$$

Если теперь обѣ части проинтегрировать по частямъ, разсматривая x, y какъ-бы функціями одного количества, то получимъ:

$$-\left(x\sqrt{1-y^2}+\int\frac{xydy}{\sqrt{1-y^2}}\right)=y\sqrt{1-x^2}+\int\frac{xydx}{\sqrt{1-x^2}}+c. \quad (4)$$

Но если уравненіе (1) умножить на xy и слѣдствіе проинтегрировать, то найдемъ:

$$\int\frac{xydx}{\sqrt{1-x^2}}=-\int\frac{xydy}{\sqrt{1-y^2}}+\text{const},$$

а потому формула (4) и сведется на

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=\text{const}.$$

Это и есть искомый полный интегралъ уравненія (1).

58. Аналогичный пріемъ доставляетъ и полный интегралъ уравненія

$$\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}+\frac{dy}{\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2}}=0. \quad (1)$$

Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе это легко приводится къ формѣ

$$dx\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2}=dy\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2},$$

такъ-что, проинтегрировавъ обѣ части по-частямъ, получаемъ

$$x\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2}-\int\frac{(\beta+2\gamma y)xdy}{2\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2}}$$

$$=y\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}-\int\frac{(\beta+2\gamma x)ydx}{2\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}+c. \quad (2)$$

Съ другой стороны однако, если уравненіе (1) умножить на xy и слѣдствіе проинтегрировать, то получимъ:

$$\int\frac{xydx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}=\int\frac{xydy}{\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2}}+\text{const.}$$

Далѣе, изъ того-же уравненія, находимъ:

$$\int\frac{ydx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}=\int\frac{ydy}{\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2}}+\text{const.}$$

$$=\frac{1}{\gamma}\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2}-\frac{\beta}{2\gamma}\int\frac{dy}{\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2}}+\text{const},$$

$$\int\frac{xdy}{\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2}}=\int\frac{xdx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}+\text{const.}$$

$$=\frac{1}{\gamma}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}-\frac{\beta}{2\gamma}\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}+\text{const.}$$

Принявъ эти три послѣднія формулы во вниманіе, уравненіе (2) приведемъ теперь къ виду

$$x\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2}-\frac{\beta}{2\gamma}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$$

$$=y\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}-\frac{\beta}{2\gamma}\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2}+\text{const},$$

откуда непосредственно

$$\left(x+\frac{\beta}{2\gamma}\right)\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2}-\left(y+\frac{\beta}{2\gamma}\right)\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}=\text{const.}$$

Это и есть искомый полный интегралъ.

59. Возьмемъ еще уравненіе

$$\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}}-\frac{dy}{\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\varepsilon y^4}}=0,\quad(1)$$

интегралъ котораго выражается уравненіемъ въ эллиптическихъ интегралахъ, и посмотримъ нельзя ли прямо найдти этотъ полный интегралъ въ формѣ алгебраической.

Докажемъ, что полный интегралъ этого уравненія можетъ быть представленъ въ формѣ алгебраическаго уравненія вида

$$A+B(x+y)+C(x^2+y^2)+Dxy$$
$$+E(x^2y+y^2x)+Fx^2y^2=0, \qquad (2)$$

гдѣ одинъ изъ коэффиціентовъ долженъ быть принятъ за произвольное постоянное количество.

Въ самомъ дѣлѣ, продифференцировавъ уравненіе (2), получимъ:

$$[B+2Cx+Dy+E(2xy+y^2)+2Fxy^2]\,dx$$
$$+[B+2Cy+Dx+E(2yx+x^2)+2Fyx^2]\,dy=0; \qquad (3)$$

но если уравненіе (2) разрѣшить относительно x, то будетъ:

$$2x(C+Ey+Fy^2)+B+Dy+Ey^2$$
$$=\sqrt{(B+Dy+Ey^2)^2-4(A+By+Cy^2)(C+Ey+Fy^2)},$$

а если разрѣшитъ его относительно y, то получится

$$2y(C+Ex+Fx^2)+B+Dx+Ex^2$$
$$=\sqrt{(B+Dx+Ex^2)^2-4(A+Bx+Cx^2)(C+Ex+Fx^2)},$$

такъ-что сдѣлавъ

$$\left.\begin{aligned}
\alpha&=B^2-4AC,\\
\beta&=2BD-4(AE+BC),\\
\gamma&=2BE+D^2-4(AF+C^2+BE),\\
\delta&=2DE-4(BF+CE),\\
\varepsilon&=E^2-4CF,
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

уравненіе (3) приведемъ непосредственно къ виду

$$dx\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\varepsilon y^4}=dy\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4},$$

т. е. къ данному уравненію (1). Значитъ, подъ условіемъ существованія равенствъ (4), уравненіе (2) представляетъ рѣшеніе дифференціальнаго уравненія (1). Равенствъ (4) однако пять, а число неопредѣленныхъ коэффиціентовъ A, B, C, D, E, F равно шести, такъ-что одинъ изъ нихъ остается произвольнымъ и поэтому уравненіе (2), какъ содержащее произвольное постоянное количество, будетъ представлять *полный интегралъ* уравненія (1).

60. Пріемы, употребленные нами въ послѣднихъ нумерахъ для опредѣленія полнаго интеграла, отличаются совершенно частнымъ характеромъ; поэтому гораздо болѣе значенія имѣетъ пріемъ, предложенный Лагранжемъ и дѣйствительно приводящій къ опредѣленію въ алгебраической формѣ полныхъ интеграловъ довольно значительнаго числа дифференціальныхъ уравненій.

Сущность этого пріема заключается въ томъ, что имѣя дифференціальное уравненіе, полный интегралъ котораго желаемъ опредѣлить, мы его дифференцируемъ и затѣмъ смотримъ — нельзя ли, сопоставляя полученное такимъ образомъ дифференціальное уравненіе втораго порядка съ даннымъ уравненіемъ, найдти уравненіе перваго порядка, отличное отъ даннаго, потому что въ этомъ случаѣ, исключивъ между этимъ послѣднимъ уравненіемъ и даннымъ производную зависимаго перемѣннаго, мы и получаемъ въ результатѣ алгебраическое уравненіе, представляющее искомый полный интегралъ даннаго.

Для уясненія себѣ дѣйствительной примѣнимости такого пріема приложимъ его къ нѣсколькимъ частнымъ случаямъ.

61. Возьмемъ на первый разъ уравненіе

$$\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}=\frac{dy}{\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2}} \tag{1}$$

и допустимъ въ немъ

$$dt=\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}.$$

Въ виду этого и даннаго уравненія будемъ имѣть совмѣстно:

$$\frac{dx^2}{dt^2}=\alpha+\beta x+\gamma x^2,$$

$$\frac{dy^2}{dt^2}=\alpha+\beta y+\gamma y^2.$$

Принявъ въ этихъ уравненіяхъ t за независимое перемѣнное и продифференцировавъ ихъ, получимъ:

$$2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}=\beta\frac{dx}{dt}+2\gamma x\frac{dx}{dt},$$

$$2\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}=\beta\frac{dy}{dt}+2\gamma y\frac{dy}{dt},$$

откуда

$$\left.\begin{aligned}2\frac{d^2x}{dt^2}&=\beta+2\gamma x,\\ 2\frac{d^2y}{dt^2}&=\beta+2\gamma y.\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

Сложивъ эти два уравненія и положивъ притомъ $x+y=p$, найдемъ уравненіе

$$2\frac{d^2p}{dt^2}=2\beta+2\gamma p,$$

которое, по умноженію на dp, дастъ:

$$2\,dp\frac{d^2p}{dt^2}=(2\beta+2\gamma p)dp. \qquad (3)$$

Выраженіе $2dpd^2p=d(dp^2)$, а потому, проинтегрировавъ уравненіе (3), непосредственно получимъ:

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)^2=k+2\beta p+\gamma p^2,$$

или

$$\frac{dp}{dt}=\sqrt{k+2\beta p+\gamma p^2}\,, \qquad (4)$$

гдѣ k произвольное постоянное.

Однако въ то-же время

$$\frac{dp}{dt}=\frac{dx+dy}{dt}=\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}+\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2},$$

а потому въ окончательномъ результатѣ получаемъ:

$$\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}+\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2}=\sqrt{k+2\beta(x+y)+\gamma(x+y)^2}.$$

Это и есть искомый интегралъ даннаго уравненія (1).

62. Возьмемъ еще уравненіе

$$\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}}=\frac{dy}{\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\varepsilon y^4}},\qquad (1)$$

которое уже было нами проинтегрировано. Положивъ

$$\frac{dt}{T}=\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}},\qquad (2)$$

гдѣ T нѣкоторая функція x, y, будемъ также имѣть:

$$\frac{dt}{T}=\frac{dy}{\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\varepsilon y^4}}.\qquad (3)$$

Отсюда

$$\frac{T^2dx^2}{dt^2}=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4,$$

$$\frac{T^2dy^2}{dt^2}=\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\varepsilon y^4,$$

такъ-что, продифференцировавъ эти выраженія въ предположеніи t перемѣннымъ независимымъ, мы получимъ:

$$\frac{2TdTdx+2T^2d^2x}{dt^2}=\beta+2\gamma x+3\delta x^2+4\varepsilon x^3,$$

$$\frac{2TdTdy+2T^2d^2y}{dt^2}=\beta+2\gamma y+3\delta y^2+4\varepsilon y^3.$$

Послѣдвія двѣ формулы складываемъ, сдѣлавъ при томъ

$$x+y=p,\ x-y=q,\ dT=Mdp+Ndq;$$

послѣ этого, раздѣливъ слѣдствія на 2, получаемъ:

$$\frac{TMdp^2+TNdpdq+T^2d^2p}{dt^2}$$

$$=\beta+\gamma p+\frac{3\delta}{4}(p^2+q^2)+\frac{\varepsilon}{2}(p^3+3pq^2),$$

но

$$\frac{dp.dq}{dt^2}=\frac{dx^2-dy^2}{dt^2}=\frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}{T^2}-\frac{\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\varepsilon y^4}{T^2}$$

$$=\frac{\beta q+\gamma pq+\frac{\delta}{4}(3p^2q+q^3)+\frac{\varepsilon}{2}(p^3q+pq^3)}{T^2},$$

а потому формула (4), по умноженіи на T и перестановкѣ членовъ, обратится въ слѣдующую:

$$\frac{T^2(Mdp^2+Td^2p)}{dt^2}=(\beta+\gamma p)(T-Nq)+\frac{\delta}{4}[3T(p^2+q^2)$$

$$-N(3p^2q+q^2)]+\frac{\varepsilon}{2}[T(p^3+3pq^2)-N(p^3q+pq^3)].$$

Такъ-какъ T неопредѣленная функція, то подчиняемъ ее условію

$$T-Nq=0,$$

такъ чтобы было

$$T=Pq,\ N=P,\ M=\frac{qdP}{dp},$$

гдѣ P зависитъ отъ p и не зависитъ отъ q; послѣ этого найдемъ:

$$\frac{P^2q^3(dPdp+Pd^2p)}{dt^2}=Pq^3\left(\frac{\delta}{2}+\varepsilon p\right),$$

или, по раздѣленіи на Pq^3,

$$\frac{PdPdp+P^2d^2p}{dt^2}=\frac{\delta}{2}+\varepsilon p.$$

Если уравненіе это умножить на $2dp$, то обѣ части его сдѣлаются точными дифференціалами, такъ-что проинтегрировавъ, получимъ:

$$\frac{P^2dp^2}{dt^2}=G+\delta p+\varepsilon p^2,$$

гдѣ G произвольное постоянное. Отсюда

$$\frac{Pdp}{dt}=\sqrt{G+\delta p+\varepsilon p^2};$$

но въ то-же время

$$\frac{dp}{dt}=\frac{dx+dy}{dt}=\frac{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}+\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\varepsilon y^4}}{T},$$

а потому, внеся это выраженіе въ предыдущую формулу и замѣнивъ p чрезъ $x+y$ и T чрезъ $Pq=P(x-y)$, найдемъ:

$$\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}+\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\varepsilon y^4}$$
$$=(x-y)\sqrt{G^2+\delta(x+y)+\varepsilon(x+y)^2}.$$

Это и есть полный интегралъ даннаго уравненія.

Точно такъ-же мы могли бы найдти и интегралъ уравненія

$$\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}}+\frac{dy}{\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\varepsilon y^4}}=0.$$

Интегрированіе дифференціальныхъ уравненій перваго порядка, но степени выше первой.

63. До сихъ поръ мы занимались только интегрированіемъ дифференціальныхъ уравненій 1-го порядка, приведенныхъ, чрезъ разрѣшеніе ихъ относительно $\frac{dy}{dx}$, къ виду

$$M+N\frac{dy}{dx}=0;$$

но общая форма дифференціальныхъ уравненій перваго поря

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0$$

предполагаетъ, что $\frac{dy}{dx}$ можетъ входить въ уравненіе не въ о

ной только первой степени и что, слѣдовательно, уравненіе бу

детъ таково:

$$\frac{dy^n}{dx^n}+P_1\frac{dy^{n-1}}{dx^{n-1}}+P_2\frac{dy^{n-2}}{dx^{n-2}}+\ldots+P_{n-1}\frac{dy}{dx}+P_n=0, \quad (1)$$

гдѣ $P_1, P_2, \ldots P_n$ функціи x, y. Какъ же интегрировать та

кія уравненія? — вотъ вопросъ, возникающій самъ собою.

Замѣтимъ прежде всего, что рѣшеніе уравненія (1) относи

тельно $\frac{dy}{dx}$ должно, въ силу извѣстнаго изъ алгебры, доставит

для $\frac{dy}{dx}$ n значеній, представляющихъ функціи количествъ x, y

означивъ ихъ черезъ $p_1, p_2, \ldots p_n$ и разбивъ лѣвую часть урав

ненія (1) на линейные множители, приведемъ его къ форм

$$\left(\frac{dy}{dx}-p_1\right)\left(\frac{dy}{dx}-p_2\right)\ldots\left(\frac{dy}{dx}-p_n\right)=0, \quad (2)$$

а потому видно, что значенія $\frac{dy}{dx}$, опредѣляемыя уравненіемъ (1)

будутъ соотвѣтственно рѣшеніями уравненій первой степен

$$\frac{dy}{dx}=p_1, \frac{dy}{dx}=p_2, \ldots \frac{dy}{dx}=p_n. \quad (3)$$

Интегралы этихъ послѣднихъ уравненій будутъ уравненія

$$\Phi_1(x, y, c_1)=0, \quad \Phi_2(x, y, c_2)=0 \ldots \quad \Phi_n(x, y, c_n)=0, \quad (4)$$

..дѣ $c_1, c_2, \ldots c_n$ произвольныя постоянныя, и понятно, что фор..улa

$$\varphi_1(x,y,c_1)\varphi_2(x,y,c_2)\ldots\varphi_n(x,y,c_n)=0, \qquad (5)$$

..лучающаяся чрезъ перемноженіе между собою уравненій (4), ..удетъ доставлять всѣ значенія y, тождественно удовлетворяю..щія данному уравненію (2). При этомъ мы нисколько не огра..ничимъ общности послѣдняго уравненія (5) замѣною въ немъ ..всѣхъ n произвольныхъ постоянныхъ количествъ однимъ произ..вольнымъ постояннымъ c, т. е. представивъ это уравненіе въ ..видѣ

$$\varphi(x,y,c)\varphi_n(x,y,c)\ldots\varphi_n(x,y,c)=0, \qquad (6)$$

..потому что, приравнивая поочередно нулю каждый изъ множи..телей первой части формулы (6) и сообщая c всевозможныя чи..сленныя значенія, естественно будемъ получать *всѣ* частныя рѣ..шенія, которыя можетъ достави..ь каждый изъ интеграловъ (4) ..уравненій (3). Мало этого, уравненіе (5) и можетъ быть при..нято за полный интегралъ уравненія 1-го порядка (2) *только* ..при замѣнѣ въ немъ всѣхъ произвольныхъ количествъ $c_1, c_2, \ldots c_n$ ..однимъ такимъ количествомъ, потому что иначе, при предположе..ніи количествъ $c_1, c_2 \ldots c_n$ различными между собою, исключе..ніе ихъ привело бы насъ вообще не къ уравненію перваго по..рядка, а къ уравненію n-аго порядка. Для того, чтобы это по..слѣднее могло свестись на уравненіе 1-го порядка, нужно было ..бы вообще допустить въ немъ равенство нулю коэффиціентовъ всѣхъ ..членовъ, содержащихъ высшія производныя зависимаго перемѣн..наго, а это доставило бы не менѣе $(n-1)$ уравненій, при по..мощи которыхъ изъ уравненія (5) исключились бы $(n-1)$ про..извольныхъ постоянныхъ и оно свелось бы на уравненіе между ..x, y и однимъ произвольнымъ постояннымъ.

Въ виду высказаннаго нами можемъ установить слѣдующее ..правило:

Для разысканія полнаго интеграла дифференціальнаго уравненія перваго порядка, но n-ой степени, достаточно проинтегрировать дифференціальныя уравненія первой степени, на которыя разбивается данное, и затѣмъ перемножить между собою всѣ полученныя такимъ образомъ полныя первообразныя уравненія, предполагая при томъ, что произвольное постоянное во всѣхъ этихъ уравненіяхъ одно и то-же.

64. Для бо́льшаго уясненія только-что выведеннаго правила приложимъ его къ примѣрамъ.

1. Пусть дано дифференціальное уравненіе

$$\frac{dy^2}{dx^2}-\frac{a}{x}=0. \tag{1}$$

Оно разбивается на слѣдующія два

$$\frac{dy}{dx}-\left(\frac{a}{x}\right)^{1/2}=0,\quad \frac{dy}{dx}+\left(\frac{a}{x}\right)^{1/2}=0,$$

имѣющія соотвѣтственно интегралами уравненія

$$y-c-2\sqrt{ax}=0,$$

$$y-c+2\sqrt{ax}=0,$$

перемноженіе которыхъ даетъ:

$$(y-c)^2-4ax=0. \tag{2}$$

Это и есть полный интегралъ уравненія (1).

2. Возьмемъ еще уравненіе

$$\frac{dy^2}{dx^2}-a^2y=0. \tag{3}$$

Оно разбивается на два слѣдующія:

$$\frac{dy}{dx} - ay = 0, \quad \frac{dy}{dx} + ay = 0.$$

Интегрированіе этихъ послѣднихъ доставляетъ:

$$\log y - ax - c = 0, \quad \log y + ax - c = 0,$$

а потому полный интегралъ даннаго уравненія представится чрезъ

$$(\log y - ax - c)\,(\log y + ax + c) = 0.$$

65. Изложенный нами пріемъ интеграціи дифференціальныхъ уравненій перваго порядка, но степени выше первой, требуетъ, прежде всего, алгебраическаго рѣшенія даннаго уравненія по отношенію къ производной зависимаго перемѣннаго; но алгебра не даетъ общихъ формулъ для рѣшенія уравненій степени выше четвертой, чѣмъ естественно и ограничивается примѣнимость указаннаго пріема интеграціи. Есть, впрочемъ, нѣкоторыя частныя формы дифференціальныхъ уравненій степени выше первой, которыя могутъ быть проинтегрированы иными пріемами. Этихъ формъ четыре и мы разсмотримъ ихъ послѣдовательно.

66. Уравненія, не содержащія явнымъ образомъ зависимаго перемѣннаго. Пусть имѣетъ уравненіе вида

$$f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) = 0. \qquad (1)$$

Положивъ въ немъ для краткости

$$\frac{dy}{dx} = p, \qquad (2)$$

получимъ:

$$f(x, p) = 0. \qquad (3)$$

Отсюда

$$x = \varphi(p); \qquad (4)$$

и изъ уравненія (2)

$$dy = p\,dx,$$

а потому, принимая въ разсчетъ уравненіе (4), имѣемъ:

$$dq = p.\varphi'(p)dp.$$

Такъ-какъ вторая часть зависитъ отъ одного количества р, то она всегда представляетъ точный дифференціалъ. Проинтегрировавъ, находимъ:

$$y = \int p.\varphi'(p)dp + c, \qquad (5)$$

т. е.

$$y = \psi(p) + c$$

Исключеніе p между этимъ уравненіемъ и даннымъ уравненіемъ (3) и доставитъ отношеніе между x, y и c, т. е. полный интегралъ даннаго уравненія.

Этотъ частный пріемъ, не требуя разрѣшенія даннаго уравненія относительно $\frac{dy}{dx}$, удобопримѣнимъ въ тѣхъ случаяхъ, когда степень уравненія относительно x не выше четвертой.

Возьмемъ примѣръ.

Пусть дано уравненіе:

$$x = 1 + \frac{dy^3}{dx^3}.$$

Положивъ

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

получаемъ

$$x = 1 + p^3, dx = 3p^2\,dp.$$

Но

$$dy = pdx = 3p^3\,dp,$$

а потому

$$y = 3\int p^3 dp + c,$$

т. е.

$$y = \frac{3}{4}p^4 + c,$$

или же, такъ-какъ $p=(x-1)^{\frac{1}{3}}$,

$$y=\frac{3}{4}(x-1)^{\frac{4}{3}}+c.$$

Это и есть полный интегралъ даннаго уравненія.

67. Уравненія, не содержащія явнымъ образомъ независимаго перемѣннаго. Когда данное уравненіе имѣетъ форму

$$f\left(y,\frac{dy}{dx}\right)=0, \tag{1}$$

тогда, положивъ

$$\frac{dy}{dx}=p, \tag{2}$$

получимъ

$$f(y,p)=0. \tag{3}$$

Отсюда

$$y=\Phi(p),$$

$$dy=\Phi'(p)\,dp.$$

Въ настоящемъ случаѣ однако изъ формулы (2)

$$dx=\frac{dy}{p},$$

а потому

$$dx=\Phi'(p)\,\frac{dp}{p}$$

и

$$x=\int\Phi'(p)\,\frac{dp}{p}+c.$$

Отсюда, для полученія полнаго интеграла, остается только исключить p при помощи даннаго уравненія.

Возьмемъ примѣръ.

Пусть дано уравненіе

$$y^2 = 3\frac{dy^3}{dx^3} + 1.$$

Сдѣлавъ

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

получаемъ:

$$y^2 = 3p^3 + 1,$$

$$2ydy = 6p^2.dp,$$

$$dy = \frac{3p^2dp}{\sqrt{p^3+1}};$$

въ то-же время

$$dx = \frac{dy}{p},$$

а потому

$$dx = \frac{3pdp}{\sqrt{p^3+1}}$$

и слѣдовательно

$$x = 3\int\frac{pdp}{\sqrt{p^3+1}} + c;$$

но изъ даннаго уравненія

$$p = \sqrt[3]{\frac{y^2-1}{3}},$$

$$dp = \frac{2}{9}\frac{ydy}{\sqrt[3]{\left(\frac{y^2-1}{3}\right)^2}},$$

а потому

$$x = \frac{2}{3}\int\frac{ydy}{\sqrt[3]{\frac{y^2-1}{3}}} + c.$$

Это и есть полный интегралъ даннаго уравненія.

68. Уравненія вида $x\varphi\left(\frac{dy}{dx}\right)+y\psi\left(\frac{dy}{dx}\right)=\chi\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

Каждое уравненіе этого вида можетъ быть сведено на линейное уравненіе между x и $p=\frac{dy}{dx}$, по разрѣшеніи котораго нужно будетъ исключить p. Для полученія преобразованнаго уравненія слѣдуетъ продифференцировать данное и затѣмъ, если понадобится, исключить y.

Пусть, напримѣръ, дано уравненіе

$$y=x\frac{dy}{dx}+f\left(\frac{dy}{dx}\right), \tag{1}$$

извѣстное подъ названіемъ уравненія Клэро. Продифференцировавъ его и сдѣлавъ $\frac{dy}{dx}=p$, получимъ:

$$p=p+x\frac{dp}{dx}+f'(p)\frac{dp}{dx},$$

т. е.

$$[x+f'(p)]\frac{dp}{dx}=0.$$

Послѣднее уравненіе разбивается на два слѣдующія:

$$x+f'(p)=0, \tag{2}$$

$$\frac{dp}{dx}=0. \tag{3}$$

Второе изъ нихъ, которое одно и содержитъ дифференціалы перемѣнныхъ x, p, и представляетъ собственно преобразованное уравненіе. Интегрируя его, находимъ

$$p=c,$$

почему

$$y=cx+f(c). \tag{4}$$

Это и есть полный интегралъ уравненія (1).

Если взять уравненіе

$$y = xp + \frac{m}{p},$$

то дифференцированіе его доставитъ:

$$0 = \left(x - \frac{m}{p^2}\right)\frac{dp}{dx}.$$

Это послѣднее уравненіе разобьется на два слѣдующія:

$$x - \frac{m}{p^2} = 0, \quad \frac{dp}{dx} = 0,$$

изъ которыхъ послѣднее и приведетъ къ полному интегралу даннаго уравненія. Интегралъ этотъ будетъ таковъ:

$$y = cx + \frac{m}{c}.$$

69. Однородныя уравненія. Общая форма всѣхъ такихъ уравненій слѣдующая:

$$x^n \Phi\left(\frac{y}{x}, p\right) = 0. \qquad (1)$$

Если допустить $\frac{y}{x} = v$, то, по раздѣленіи на x^n, получимъ

$$\Phi(v, p) = 0. \qquad (2)$$

Въ случаѣ, когда уравненіе это легче разрѣшается относительно p чѣмъ относительно v, мы находимъ

$$p = f(v);$$

но $y = xv$, $\frac{dy}{dx} = p = x\frac{dv}{dx} + v$, а потому

$$x\frac{dv}{dx} + v = f(v),$$

откуда

$$\frac{dv}{v-f(v)}+\frac{dx}{x}=0.$$

Интегралъ этого уравненія представится чрезъ

$$\int\frac{dv}{v-f(v)}+\log x=c.$$

Здѣсь только нужно на дѣлѣ произвести интегрированіе выраженія $\frac{dv}{v-f(v)}$ и въ результатѣ v замѣнить черезъ $\frac{y}{x}$.

Если-бы уравненіе (2) удобнѣе было разрѣшить относительно v, то получили бы

$$v=\psi(p),$$

откуда, принявъ во вниманіе, что $v=\frac{y}{x}$, нашли бы

$$y=x\psi(p).$$

Продифференцировавъ эту послѣднюю формулу, получаемъ:

$$p=\psi(p)+x\psi'(p)\frac{dp}{dx},$$

откуда

$$\frac{dx}{x}+\frac{\psi'(p)dp}{\psi(p)-p}=0.$$

Послѣ этого остается проинтегрировать и исключить p при помощи даннаго уравненія.

Для примѣра возьмемъ уравненіе

$$yp+nx=\sqrt{y^2+nx^2}\sqrt{1+p^2}.$$

Положивъ $y=vx$, найдемъ

$$vp+n=\sqrt{v^2+n}\sqrt{1+p^2}.$$

Отсюда

$$p = v \pm \sqrt{\frac{n-1}{n}}\sqrt{v^2+n};$$

но

$$p = x\frac{dv}{dx} + v,$$

а потому

$$x\frac{dv}{dx} = \pm\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sqrt{v^2+n},$$

$$\frac{dv}{\sqrt{v^2+n}} = \pm\sqrt{\frac{n-1}{n}}\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя теперь, получимъ:

$$\log[v+\sqrt{v^2+n}] = \pm\sqrt{\frac{n-1}{n}}.\log x + c$$

и слѣдовательно

$$v+\sqrt{v^2+n} = cx^{\pm\sqrt{\frac{n-1}{n}}}.$$

Замѣна v чрезъ $\frac{y}{x}$ дастъ затѣмъ окончательно:

$$y+\sqrt{y^2+nx^2} = cx^{1\pm\sqrt{\frac{n-1}{n}}}.$$

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

О дифференціальныхъ уравненіяхъ порядковъ выше перваго между двумя перемѣнными.

О различныхъ видахъ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій порядковъ выше перваго.

70. Мы уже видѣли, что дифференціальныя уравненія *n*-аго порядка, общій видъ которыхъ

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0, \tag{1}$$

получаются чрезъ исключеніе *n* произвольныхъ постоянныхъ количествъ изъ уравненій вида

$$F(x, y, c_1, c_2, \ldots c_n) = 0, \tag{2}$$

причемъ каждому уравненію вида (2) непремѣнно соотвѣтствуетъ одно опредѣленное дифференціальное уравненіе (1), по отношенію къ которому уравненіе (2) именуется *полнымъ первообразнымъ* уравненіемъ, или *полнымъ интеграломъ.*

Главный вопросъ теоріи дифференціальныхъ уравненій заключается, какъ было уже замѣчено нами, въ разысканіи методовъ для перехода отъ самыхъ дифференціальныхъ уравненій къ ихъ полнымъ интеграламъ, а потому, переходя въ настоящую минуту къ дифференціальнымъ уравненіямъ какого бы то ни было n-аго порядка, естественно спросить: дѣйствительно-ли каждому дифференціальному уравненію n-аго порядка всегда отвѣчаетъ полное первообразное уравненіе, содержащее n произвольныхъ постоянныхъ количествъ? Къ сожалѣнію, хотя въ дѣйствительномъ существованіи такого полнаго первообразнаго для каждаго дифференціальнаго уравненія нѣтъ ни малѣйшаго повода сомнѣваться, но строго доказать это *a priori* до сего времени геометрамъ не удалось.

Принявъ однако существованіе для каждаго дифференціальнаго уравненія какого бы то ни было n-аго порядка полнаго интеграла, заключающаго въ себѣ n произвольныхъ постоянныхъ, необходимо указать и на тѣ различныя промежуточныя уравненія, которыя получаются при переходѣ отъ полнаго первообразнаго уравненія къ самому дифференціальному уравненію, ему соотвѣтствующему.

71. Если изъ уравненія (2) исключить $(n-1)$ изъ входящихъ въ него произвольныхъ постоянныхъ, оставивъ неисключеннымъ только одно изъ нихъ, напримѣръ c_1, то получится опредѣленное отношеніе между x, y и $(n-1)$-ею послѣдовательными производными y, содержащее, сверхъ того, произвольное количество c_1; оно будетъ вида

$$\Phi_1\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, c_1\right)=0. \qquad (3)$$

Такихъ уравненій изъ полнаго первообразнаго (2) можно будетъ, очевидно, вывести не одно, а столько, сколько въ немъ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ. Именно, кромѣ уравненія (3), получимъ еще $(n-1)$ такихъ-же уравненій

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_2\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, c_2\right) &= 0 \\
\Phi_3\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, c_2\right) &= 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\Phi_n\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, c_n\right) &= 0
\end{aligned}\right\} \quad (3 \text{ bis})$$

Каждое изъ этихъ n уравненій будетъ, очевидно, приводить, чрезъ исключеніе изъ него содержащагося въ немъ произвольнаго постояннаго, къ дифференціальному уравненію (1); исключеніе же изъ совокупности этихъ n уравненій всѣхъ входящихъ въ нихъ $(n-1)$ производныхъ зависимаго перемѣннаго y доставитъ въ результатѣ исключенія самое полное первообразное (2).

Уравненія (3) по отношенію къ дифференціальному уравненію (1) именуются его *первыми интегралами.*

Исключеніе изъ полнаго интеграла (2) $(n-2)$-хъ произвольныхъ постоянныхъ приводитъ къ уравненію $(n-2)$-аго порядка, заключающему два произвольныхъ постоянныхъ количества. Различныхъ между собою уравненій такого вида можно, конечно, получить столько, сколько образуется различныхъ двойныхъ сочетаній изъ n количествъ, т. е. всего $\frac{n(n-1)}{1.2}$. Каждое изъ этихъ отношеній, чрезъ исключеніе входящихъ въ него двухъ произвольныхъ постоянныхъ, будетъ приводить къ тому-же самому дифференціальному уравненію (1) и будетъ составлять одинъ изъ его *вторыхъ интеграловъ.*

Понятно, послѣ этого, что слѣдуетъ разумѣть подъ *третьими, четвертыми* и т. д. интегралами дифференціальнаго уравненія n-аго порядка, а также каково именно число различныхъ такихъ интеграловъ.

Сообщенiе во всѣхъ этихъ интегральныхъ отношенiяхъ содержащимся въ нихъ произвольнымъ количествамъ частныхъ значенiй будетъ доставлять такъ называемыя первыя, вторыя и т. д. частныя рѣшенiя дифференцiальнаго уравненiя.

72. Относительно интегрированiя дифференцiальныхъ уравненiй порядковъ выше перваго общихъ выводовъ имѣемъ еще менѣе чѣмъ относительно интегрированiя уравненiй перваго порядка. Сравнительно болѣе разработанною представляется только теорiя такъ называемыхъ линейныхъ уравненiй высшихъ порядковъ, обратившихъ на себя особенное вниманiе ученыхъ по той роли, которую они играютъ въ вопросахъ прикладныхъ математическихъ наукъ.

На изслѣдованiи свойствъ этого класса дифференцiальныхъ уравненiй и на изложенiи прiемовъ ихъ интегрированiя мы теперь и остановимся прежде всего.

О линейныхъ дифференцiальныхъ уравненiяхъ n-аго порядка.

73. Общiй видъ линейныхъ дифференцiальныхъ уравненiй n-аго порядка слѣдующiй:

$$\frac{d^ny}{dx^n}+X_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+X_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots+X_{n-1}\frac{dy}{dx}+X_ny=X, \quad (1)$$

гдѣ коэффицiенты $X_1, X_2, \ldots X_n, X$ или функцiи одного x, или постоянныя количества. Собственно говоря, общаго способа интегрированiя всѣхъ такихъ уравненiй мы не имѣемъ, но существуетъ относительно ихъ нѣсколько общихъ предложенiй, обрисовывающихъ ихъ свойства и указывающихъ на тѣ случаи, въ которыхъ интеграцiя уравненiй этого класса становится для насъ возможною. Эти предложенiя мы прежде всего и докажемъ.

74. Предложенiе I. — *Уравненiе.*

$$\frac{d^ny}{dx^n}+X_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+X_{n-1}\frac{dy}{dx}+X_ny=X \quad (1)$$

всегда можетъ быть проинтегрировано, если мы будемъ въ состоянiи проинтегрировать уравненiе вида

$$\frac{d^n y}{dx^n}+X_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+X_{n-1}\frac{dy}{dx}+X_n y=0, \quad (2)$$

отличающееся отъ даннаго тѣмъ только, что вторая часть X замѣнена нулемъ и носящее названiе линейнаго диффеpенцiальнаго уравненiя безъ придаточнаго члена.

Для доказательства этого предложенiя положимъ вообще

$$y=u_1\int v_1 dx, \quad (3)$$

гдѣ u_1, v_1 два новыхъ количества, зависящихъ отъ x. Въ такомъ случаѣ, въ виду извѣстной формулы Лейбница

$$\frac{d^m[U.V]}{dx^m}=\frac{d^m U}{dxm}V+m\frac{d^{m-1}U}{dx^{m-1}}\cdot\frac{dV}{dx}+\ldots+U\frac{dV}{dx},$$

мы получимъ:

$$\frac{d^n y}{dx^n}=\frac{d^n u_1}{dx^n}\int v_1 dx+n.\frac{d^{n-1}u_1}{dx^{n-1}}.v_1$$

$$+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^{n-2}u_1}{dx^{n-2}}\frac{dv_1}{dx}+\ldots+u_1\frac{d^{n-1}v_1}{dx^{n-1}},$$

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=\frac{d^{n-1}u_1}{dx^{n-1}}\int v_1 dx+(n-1)\frac{d^{n-2}u_1}{dx^{n-1}}.v_1$$

$$+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\frac{d^{n-3}u_1}{dx^{n-3}}\frac{dv_1}{dx}+\ldots+u_1\frac{d^{n-2}v_1}{dx^{n-1}}$$

. . . .

и внеся эти выраженiя въ данное уравненiе (1), приведемъ его къ виду:

$$\int v_1 dx\left\{\frac{d^n u_1}{dx^n}+X_1\frac{d^{n-1}u_1}{dx^{n-1}}+\ldots+X_{n-1}\frac{du_1}{dx}+X_n u_1\right\}$$

$$+u_1\left\{\frac{d^{n-1}v_1}{dx^{n-1}}+P_1\frac{d^{n-2}v_1}{dx^{n-2}}+\ldots+P_{n-2}\frac{dv_1}{dx}+P_{n-1}v_1\right\}=X \quad (4)$$

гдѣ коэффиціенты $P_1, P_2, \ldots P_{n-2}, P_{n-1}$ опредѣленныя функціи и u. Такъ-какъ однако изъ двухъ количествъ u_1, v_1 одним мы можемъ вполнѣ располагать, то подчинимъ u_1 условію удовлетворять уравненію

$$\frac{d^n u_1}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1}u_1}{dx^{n-1}} + \ldots + X_{n-1}\frac{du_1}{dx} + X_n u_1 = 0, \qquad (5)$$

отличающемуся отъ даннаго только отсутствіемъ придаточн члена. Послѣ этого уравненіе (4) сведется на

$$\frac{d^{n-1}v_1}{dx^{n-1}} + P_1 \frac{d^{n-2}v_1}{dx^{n-2}} + \ldots + P_{n-2}\frac{dv_1}{dx} + P_{n-1}v_1 = X', \qquad (6)$$

гдѣ $X' = \frac{X}{u_1}$. Если мы въ состояніи будемъ проинтегрировать уравненіе (5), то затѣмъ для опредѣленія v_1, а слѣдовательно и для разысканія интеграла даннаго уравненія (1) при посредствѣ формулы (3), останется проинтегрировать уравненіе (6), которое такого-же вида какъ и данное, но только порядка на единицу низшаго.

Для интеграціи уравненія (6) можно будетъ положить

$$v_1 = u_2 \int v_2 dx$$

и подчинивъ u_2 условію удовлетворять уравненію

$$\frac{d^{n-1}u_2}{dx^{n-1}} + P_1 \frac{d^{n-2}u_2}{dx^{n-2}} + \ldots + P_{n-2}\frac{du_2}{dx} + P_{n-1}u_2 = 0,$$

свести вопросъ на интегрированіе уравненія вида

$$\frac{d^{n-2}v_2}{dx^{n-2}} + Q_1 \frac{d^{n-3}v_2}{dx^{n-3}} + \ldots + Q_{n-3}\frac{dv_2}{dx} + Q_{n-2}v_2 = X'',$$

которое по формѣ своей сходно съ даннымъ, но порядка на двѣ единицы низшаго. Интеграція этого послѣдняго уравненія въ свою очередь сведется точно такъ-же на интеграцію уравненія такого же вида, но уже $(n-3)$-аго порядка; точно такъ-же и далѣе. Ясно, слѣдовательно, что окончательно дѣло сведется на интеграцію линейнаго уравненія перваго порядка, которая, какъ мы уже знаемъ, всегда возможна. Значитъ, дѣйствительно, если только предположить, что мы умѣемъ интегрировать линейныя уравненія безъ придаточнаго члена, интегрированіе линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ придаточнымъ членомъ не представитъ затрудненій, какъ мы и хотѣли доказать.

75. Обращаясь въ виду этого къ линейнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ, не имѣющимъ придаточнаго члена, докажемъ относительно ихъ слѣдующее предложеніе.

Предложеніе II. — *Если* $y_1, y_2, \dots y_n$ *означаютъ* n *различныхъ между собою частныхъ значеній* y, *удовлетворяющихъ линейному дифференціальному уравненію безъ придаточнаго члена*

$$\frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + X_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + X_{n-1} \frac{dy}{dx} + X_n = 0, \qquad (1)$$

то выраженіе

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n, \qquad (2)$$

гдѣ $c_1, c_2, \dots c_n$ *произвольныя постоянныя количества, будетъ также удовлетворять уравненію (1) и представитъ его полный интегралъ.*

Дѣйствительно, подставивъ въ первую часть уравненія (1) вмѣсто y его выраженіе (2), мы получимъ:

$$c_1\left(\frac{d^n y_1}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + \dots + X_{n-1} \frac{dy_1}{dx} + X_n y_1\right)$$

$$+ c_2\left(\frac{d^n y_2}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y_2}{dx^{n-1}} + \dots + X_{n-1} \frac{dy_2}{dx} + X_n y_2\right)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+ c_n\left(\frac{d^n y_n}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} + \dots + X_{n-1} \frac{dy_n}{dx} + X_n y_n\right) = 0,$$

выраженіе, которое дѣйствительно будетъ тождественно равно нулю въ виду того, что всѣ выраженія, заключенныя въ скобки, здѣсь не что иное какъ результаты замѣны въ первой части уравненія (1) количества y его частными значеніями $y_1, y_2, \ldots y_n$ представляющими, по самому положенію, рѣшенія уравненія (1). Но коль-скоро формула (2) удовлетворяетъ уравненію (1), мы имѣемъ право признать ее за полный интегралъ этого уравненія, такъ-какъ она содержитъ въ себѣ n произвольныхъ постоянныхъ количествъ.

Въ виду этой теоремы оказывается, что, для разысканія полнаго интеграла линейнаго дифференціальнаго уравненія n-го порядка безъ придаточнаго члена, достаточно найдти n различныхъ частныхъ рѣшеній этого уравненія.

76. Предложеніе III. — *Если $y_1, y_2, \ldots y_n$ представляютъ n частныхъ рѣшеній уравненія*

$$\frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + X_{n-1} \frac{dy}{dx} + X_n y = 0, \qquad (1)$$

а Y_1 частное рѣшеніе уравненія

$$\frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + X_{n-1} \frac{dy}{dx} + X_n y = X, \qquad (2)$$

то уравненіе

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n + Y_1, \qquad (3)$$

въ которомъ $c_1, c_2, \ldots c_n$ произвольныя постоянныя количества, будетъ представлять полный интегралъ уравненія (2).

Дѣйствительно, внеся выраженіе y изъ (3) въ лѣвую часть уравненія (2), мы получимъ:

$$c_1 \left[\frac{d^n y_1}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + \ldots + X_{n-1} \frac{dy_1}{dx} + X_n y_1\right]$$

$$+c_2\left[\frac{d^ny_2}{dx^n}+X_1\frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}+\ldots+X_{n-1}\frac{dy_2}{dx}+X_ny_2\right]$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$+c_n\left[\frac{d^ny_n}{dx^n}+X_1\frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}+\ldots+X_{n-1}\frac{dy_n}{dx}+X_ny_n\right]$$

$$+\frac{d^nY_1}{dx^n}+X_1\frac{d^{n-1}Y_1}{dx^{n-1}}+\ldots+X_{n-1}\frac{dY_1}{dx}+X_nY_1=X,$$

результатъ, имѣющій мѣсто тождественно, такъ-какъ всѣ выраженія, въ скобкахъ стоящія, равны нулю въ слѣдствіе того, что $y_1, y_2, \ldots y_n$, по положенію, представляютъ рѣшенія уравненія (1), а сумма всѣхъ прочихъ членовъ лѣвой части равна X, такъ-какъ Y_1 есть частное рѣшеніе уравненія (2). Слѣдовательно, формула (3) дѣйствительно доставляетъ рѣшеніе уравненія (2), а такъ-какъ при этомъ въ нее входятъ n произвольныхъ постоянныхъ, то она и должна представлять полный интегралъ уравненія (2).

Интегрированіе линейныхъ дифференціальныхъ уравненій безъ придаточнаго члена въ случаѣ постоянныхъ коэффиціентовъ.

77. Мы уже доказали, что полный интегралъ линейнаго дифференціальнаго уравненія n-аго порядка безъ придаточнаго члена весьма просто выражается посредствомъ n различныхъ между собою частныхъ рѣшеній этого уравненія. Теперь покажемъ, что въ томъ случаѣ, когда коэффиціенты линейнаго дифференціальнаго уравненія безъ придаточнаго члена величины постоянныя, опредѣленіе n частныхъ рѣшеній этого уравненія не представляетъ затрудненій и что, слѣдовательно, можетъ быть всегда найденъ и полный интегралъ его.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть дано уравненіе

$$\frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n y = 0, \quad (1)$$

въ которомъ A_1, $A_2, \ldots A_n$ величины постоянныя. Положивъ вообще

$$y = e^{rx}, \quad (2)$$

мы найдемъ послѣдовательно

$$\frac{dy}{dx} = re^{rx},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = r^2 e^{rx}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = r^n e^{rx},$$

а внося эти выраженія въ уравненіе (1), получимъ

$$e^{rx}(r^n + A_1 r^{n-1} + A_2 r^{n-2} + \ldots + A_{n-1} r + A_n) = 0.$$

Ясно, слѣдовательно, что для того, чтобы выраженіе y изъ формулы (2) тождественно удовлетворяло уравненію (1), необходимо и достаточно только, чтобы показатель степени r былъ однимъ изъ корней уравненія

$$r^n + A_1 r^{n-1} + A_2 r^{n-2} + \ldots + A_{n-1} r + A_n = 0, \quad (3)$$

которое будемъ называть *вспомогательнымъ* по отношенію къ данному уравненію (1).

Означая корни уравненія (3) черезъ r_1, $r_2, \ldots r_n$ и подставляя ихъ по-очереди въ формулу (2), получимъ слѣдующія значенія y:

$$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}, \ldots y_n = e^{r_n x},$$

которыя всѣ будутъ частными рѣшеніями уравненія (1). Помноживъ каждое изъ нихъ на произвольное постоянное и сложивъ слѣдствія, мы получимъ выраженіе:

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \ldots + c_n e^{r_n x}, \tag{5}$$

опять тождественно удовлетворяющее уравненію (1).

Въ такомъ случаѣ, когда всѣ корни уравненія (3) между собою различны, формулы (4) доставляютъ n различныхъ между собою частныхъ рѣшеній уравненія (1), а уравненіе (5) содержитъ n произвольныхъ постоянныхъ и представляетъ полный интегралъ даннаго уравненія (1).

78. Дѣло становится нѣсколько сложнѣе, когда вспомогательное уравненіе (3) имѣетъ кратные корни. Допустивъ, напримѣръ, что $r_1 = r_2 = \ldots = r_m$, мы получили бы, что изъ числа n частныхъ рѣшеній уравненія (1), представляемыхъ формулами (4), m рѣшеній оказываются тождественными между собою. Формула (5) въ этомъ случаѣ сводится на

$$y = (c_1 + c_2 + \ldots + c_m) e^{r_1 x} + c_{m+1} e^{r_{m+1} x} + \ldots + c_n e^{r_n x},$$

или, при допущеніи $c_1 + c_2 + \ldots + c_m = C$, на слѣдующую:

$$y = Ce^{r_1 x} + c_{m+1} e^{r_{m+1} x} + \ldots + c_n e^{r_n x},$$

которая доставляетъ значеніе y хотя и удовлетворяющее данному уравненію (1), но содержащее уже менѣе n произвольныхъ постоянныхъ; поэтому формула эта и не можетъ быть принимаема уже за полный интегралъ даннаго уравненія (1).

Не трудно доказать однако, что и въ этомъ случаѣ формула (5) легко преобразовывается въ такую, которая заключаетъ въ себѣ опять n произвольныхъ количествъ и представляетъ, поэтому, полный интегралъ уравненія (1).

Въ самомъ дѣлѣ, если положить вообще

$$y = ue^{rx},$$

то уравненіе (1) приметъ видъ

$$e^{rx}\left(u f(r) + \frac{du}{dx}f'(r) + \frac{d^2u}{dx^2}f''(r) + \ldots\right.$$
$$\left. + \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}f^{(n-1)}(r) + \frac{d^nu}{dx^n}\right) = 0,$$

гдѣ для краткости мы допустили

$$f(r) = r^n + A_1 r^{n-1} + A_2 r^{n-2} + \ldots + A_{n-1} r + A_n.$$

Теперь, для того, чтобы формула (6) доставляла рѣше-
даннаго уравненія (1), необходимо, чтобы тождественно удов-
творялось и уравненіе (7). Если при этомъ допустить r рав-
нымъ простому корню уравненія $f(r) = 0$, то уравненіе (7) сво-
дется на

$$e^{rx}\left(\frac{du}{dx}f'(r) + \frac{d^2u}{dx^2}f''(r) + \ldots + \frac{d^nu}{dx^n}\right) = 0,$$

и въ немъ выраженія $f'(r)$, $f''(r)$,... будутъ отличны отъ нуля,
а потому для того, чтобы уравненіе это удовлетворялось тож-
дественно, необходимо, чтобы мы имѣли совмѣстно

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = 0, \ldots,$$

условія, требующія, чтобы u представляло постоянное количе-
ство. Слѣдовательно, при допущеніи r простымъ корнемъ вспо-
могательнаго уравненія, формула (6) доставляетъ только рѣше-
ніе уравненія (1) вида

$$y = ce^{rx}.$$

Если допустить однако, что r представляетъ корень m-ой крат-
сти вспомогательнаго уравненія, то будетъ совмѣстно $f(r) = 0$,
$f'(r) = 0, \ldots f^{(m-1)}(r) = 0$, а потому уравненіе (7) сведется
на

$$e^{rx}\left(\frac{d^m u}{dx^m} f^{(m)}(r) + \ldots + \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} f^{(n-1)}(r) + \frac{d^n u}{dx^n}\right) = 0$$

и для того, чтобы оно удовлетворялось тождественно, нужно только, чтобы имѣли мѣсто условія

$$\frac{d^m u}{dx^m} = 0, \quad \frac{d^{m+1} u}{dx^{m+1}} = 0, \ \ldots,$$

существованіе которыхъ требуетъ только, чтобы u представляло выраженіе вида

$$c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \ldots + c_m x^{m-1},$$

гдѣ $c_1, c_2, \ldots, c_{m-1}$ произвольныя постоянныя. Слѣдовательно, для корня m-ой кратности r вспомогательнаго уравненія, формула (6) доставляетъ рѣшеніе даннаго уравненія (1) вида

$$y = (c_1 + c_2 x + \ldots + c_m x^{m-1}) e^{rx},$$

содержащее въ себѣ m произвольныхъ постоянныхъ.

Такимъ образомъ оказывается, что въ то время какъ рѣшенія даннаго уравненія (1), соотвѣтствующія простымъ корнямъ вспомогательнаго уравненія, представляются вообще въ формѣ ce^{rx} и содержатъ каждое одно произвольное постоянное, рѣшенія этого уравненія, соотвѣтствующія кратнымъ корнямъ вспомогательнаго уравненія, представляются въ формѣ $(c + c_1 x + c_2 x + \ldots) e^{rx}$ и содержатъ каждое столько произвольныхъ постоянныхъ, сколько единицъ въ показателѣ кратности корня. Поэтому сумма рѣшеній даннаго уравненія (1), соотвѣтствующихъ всѣмъ между собою различнымъ корнямъ вспомогательнаго уравненія, *всегда* будетъ представлять выраженіе, заключающее въ себѣ n произвольныхъ постоянныхъ, такъ-что допустивъ

$$y = (c_1 + c_2 x + \ldots + c_i x^{i-1}) e^{r_i x} + (c'_1 + c'_2 x + \ldots$$

$$+ c'_k x^{k-1}) e^{r_k x} + C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots, \quad (8)$$

гдѣ r_i, r_k,... кратные, а r_1, r_2,... простые корни вспо-
тельнаго уравненія (3), мы будемъ имѣть уравненіе, не толь-
удовлетворяющее данному уравненію (1), но и содержащее вс
n произвольныхъ постоянныхъ и представляющее, слѣдователь
полный интегралъ этого уравненія.

79. Хотя все высказанное въ двухъ предыдущихъ нумера
одинаково относится какъ къ вещественнымъ, такъ и къ мни-
мымъ корнямъ вспомогательнаго уравненія, но въ случаѣ сущ-
ствованія мнимыхъ корней вспомогательнаго уравненія полно
интегралу даннаго линейнаго дифференціальнаго уравненія бе
придаточнаго члена выгодно давать иную форму, спеціаль
соотвѣтствующую этому случаю.

Пусть, напримѣръ, $r_1 = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ и $r_2 = \alpha - \beta\sqrt{-1}$
два сопряженныхъ мнимыхъ корня вспомогательнаго уравн
въ такомъ случаѣ въ выраженіи полнаго интеграла данн
уравненія, именно въ

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \ldots + c_n e^{r_n x},$$

первые два члена второй части перейдутъ соотвѣтственно в

$c_1 e^{\alpha x + \beta x\sqrt{-1}}$, $c_2 e^{\alpha x - \beta x\sqrt{-1}}$; но

$$e^{\alpha x + \beta x\sqrt{-1}} = e^{\alpha x} . e^{\beta x\sqrt{-1}} = e^{\alpha x} [\cos \beta x + \sqrt{-1} . \sin \beta x]$$

$$e^{\alpha x - \beta x\sqrt{-1}} = e^{\alpha x} . e^{-\beta x\sqrt{-1}} = e^{\alpha x} [\cos \beta x - \sqrt{-1} . \sin \beta x]$$

а потому мы получимъ:

$$y = [c_1 + c_2] \cos \beta x . e^{\alpha x} + [c_1 - c_2]\sqrt{-1} . \sin \beta x . e^{\alpha x} + \ldots$$

или же, положивъ $c_1 + c_2 = C_1$, $(c_1 - c_2)\sqrt{-1} = C_2$,

$$y = C_1 \cos\beta x . e^{\alpha x} + C_2 \sin\beta x . e^{\alpha x} + \ldots$$

Формула эта содержитъ по прежнему n произвольныхъ постоянныхъ и удовлетворяетъ данному уравненію (1), а потому и представляетъ его полный интегралъ.

Если-бы парные мнимые корни r_1, r_2 вспомогательнаго уравненія были i-ой кратности, то формула, выражающая полный интегралъ даннаго уравненія, приняла бы форму

$$y = (c_1 + c_2 x + \ldots + c_{i-1} x^{i-1}) e^{r_1 x}$$

$$+ (c'_1 + c'_2 x + \ldots + c'_i x^{i-1}) e^{r_2 x} + \ldots$$

и принявъ во вниманіе, что въ ней

$$e^{r_1 x} = e^{\alpha x + \beta x \sqrt{-1}} = e^{\alpha x} [\cos\beta x + \sqrt{-1} . \sin\beta x],$$

$$e^{r_2 x} = e^{\alpha x - \beta x \sqrt{-1}} = e^{\alpha x} [\cos\beta x - \sqrt{-1} . \sin\beta x],$$

мы окончательно получили бы

$$y = (C_1 + C_2 x + \ldots + C_i x^{i-1}) \cos\beta x . e^{\alpha x}$$

$$+ (C'_1 + C'_2 x + \ldots + C'_i x^{i-1}) \sin\beta x . e^{\alpha x} + \ldots, \qquad (9)$$

гдѣ $C_1 = c_1 + c'_1$, $C_2 = c_2 + c'_2$, … $C'_1 = (c_1 - c'_1)\sqrt{-1}$, $C'_2 = (c_2 - c'_2)\sqrt{-1}, \ldots$

80. Приложимъ высказанное въ предыдущихъ нумерахъ къ частнымъ примѣрамъ.

1) Пусть дано линейное уравненіе

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0.$$

Вспомогательное уравненіе въ этомъ случаѣ будетъ так

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

и рѣшеніе его дастъ два корня $r_1 = 1, r_2 = 2;$ поэтому, со-гласно формулѣ (5), для полнаго интеграла найдемъ выраж

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$$

2) Пусть имѣемъ линейное дифференціальное уравненіе

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 5\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 9y = 0.$$

Рѣшеніе вспомогательнаго уравненія

$$r^3 + 5r^2 + 3r - 9 = 0$$

доставляетъ одинъ корень равный 1 и два корня равныхъ — 3, почему полный интегралъ представится чрезъ

$$y = c_1 e^x + (c_2 + c_3 x)e^{-3x}.$$

3) Пусть, наконецъ, имѣемъ еще уравненіе

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 13y = 0;$$

въ этомъ случаѣ оба корня r_1, r_2 вспомогательнаго уравне

$$r^2 - 4r + 13 = 0$$

выразятся чрезъ

$$r_1 = 2 + 3\sqrt{-1},\ r_2 = 2 - 3\sqrt{-1},$$

а потому полный интегралъ даннаго уравненія представится чре

$$y = c_1 \cos 3x . e^{2x} + c_2 \sin 3x . e^{2x}.$$

Интегрированіе линейныхъ дифференціальныхъ уравненій вида $\frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n y = X$, *гдѣ* A_1, $A_2, \dots A_n$ *постоянныя количества, а X функція x.*

81. Одинъ изъ самыхъ употребительныхъ пріемовъ интеграціи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій вида

$$\frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n y = X, \tag{1}$$

гдѣ коэффиценты первой части постоянныя количества, а придаточный членъ X—функція независимаго перемѣннаго x, основывается на измѣненіи произвольныхъ постоянныхъ въ интегралѣ уравненія

$$\frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n y = 0, \tag{2}$$

получающагося изъ даннаго чрезъ сокращеніе въ немъ придаточнаго члена.

Пусть

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x}$$

представляетъ полный интегралъ уравненія (2). Замѣнимъ въ немъ произвольныя постоянныя $c_1, c_2, \dots c_n$ функціональными количествами $u_1, u_2, \dots u_n$ и постараемся эти послѣднія опредѣлить такимъ образомъ, чтобы формула

$$y = u_1 e^{r_1 x} + u_2 e^{r_2 x} + \dots + u_n e^{r_n x} \tag{3}$$

представила полный интегралъ уравненія (1).

Дифференцируя формулу (3) и допуская при этомъ существованіе условнаго уравненія

$$e^{r_1x}\frac{du_1}{dx}+e^{r_2x}\frac{du_2}{dx}+\ldots+e^{r_nx}\frac{du_n}{dx}=0. \qquad (\alpha)$$

мы найдемъ:

$$\frac{dy}{dx}=r_1e^{r_1x}u_1+r_2e^{r_2x}u_2+\ldots+r_ne^{r_nx}u_n. \qquad (4)$$

Продифференцировавъ, далѣе, этотъ результатъ, допуская при томъ, что

$$r_1e^{r_1x}\frac{du_1}{dx}+r_2e^{r_2x}\frac{du_2}{dx}+\ldots+r_ne^{r_nx}\frac{du_n}{dx}=0, \qquad (\beta)$$

мы получаемъ:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=r_1^2e^{r_1x}u_1+r_2^2e^{r_2x}u_2+\ldots+r_n^2e^{r_nx}u_n \qquad (5)$$

и т. д. Продолжая и далѣе поступать такимъ-же образомъ, найдемъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^3y}{dx^3}&=r_1^3e^{r_1x}u_1+r_2^3e^{r_2x}u_2+\ldots+r_n^3e^{r_nx}u_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{d^{n-1}y}{dx^n}&=r_1^{n-1}e^{r_1x}u_1+r_2^{n-1}e^{r_2x}u_2+\ldots\\ &\qquad+r_n^{n-1}e^{r_nx}u_n\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

и систему условныхъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned}&r_1^2e^{r_1x}\frac{du_1}{dx}+r_2^2e^{r_2x}\frac{du_2}{dx}+\ldots+r_n^2e^{r_nx}\frac{du_n}{dx}=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &r_1^{n-2}e^{r_1x}\frac{du_1}{dx}+r_2^{n-2}e^{r_2x}\frac{du_2}{dx}+\ldots\\ &\qquad+r_n^{n-2}e^{r_nx}\frac{du_n}{dx}=0.\end{aligned}\right\} \qquad (\gamma)$$

Наконецъ, продифференцировавъ послѣднюю изъ формулъ (6) и допуская при томъ, что

$$r_1^{n-1} e^{r_1 x} \frac{du_1}{dx} + r_2^{n-1} e^{r_2 x} \frac{du_2}{dx} + \ldots$$
$$+ r_n^{n-1} e^{r_n x} \frac{du_n}{dx} = X, \quad (\delta)$$

мы получимъ:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = r_1^n e^{r_1 x} u_1 + r_2^n e^{r_2 x} u_2 + \ldots + r_n^n e^{r_n x} u_n + X. \quad (7)$$

Внеся выраженія количества y и его n производныхъ, доставляемыя формулами (3), (4), (5), (6) и (7), въ уравненіе (1), мы сведемъ его на тождество, а потому и заключаемъ, что формула (3) будетъ представлять рѣшеніе уравненія (1), если функціональныя количества $u_1, u_2, \ldots u_n$ подчинить условію удовлетворять совмѣстно уравненіямъ (α), (β), (γ), (δ).

Допуская для простоты

$$\frac{du_1}{dx} = v_1 X, \quad \frac{du_2}{dx} = v_2 X, \ldots \frac{du_n}{dx} = v_n X, \quad (3)$$

мы только-что помянутыя условныя уравненія сведемъ на слѣдующія:

$$\left.\begin{array}{l}
e^{r_1 x} v_1 + e^{r_2 x} v_2 + \ldots e^{r_n x} v_n = 0, \\
r_1 e^{r_1 x} v_1 + v_2 e^{r_2 x} v_2 + \ldots + e^{r_n x} v_n = 0, \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
r_1^{n-1} e^{r_1 x} v_1 + r_2^{n-1} e^{r_2 x} v_2 + \ldots + r_n^{n-1} e^{r_n x} v_n = 1,
\end{array}\right\} \quad (9)$$

которыя и доставятъ намъ выраженія $v_1, v_2, \ldots v_n$. Опредѣливъ однако эти количества, изъ формулъ (8), найдемъ:

$$u_1 = C_1 + \int v_1 X dx\,,\ u_2 = C_2 + \int v_2 X dx, \ldots$$
$$\ldots u_n = C_n + \int v_n X dx. \qquad (10)$$

Таковы значенія количествъ $u_1, u_2, \ldots u_n$, которыя дѣлаютъ формулу (3) рѣшеніемъ уравненія (1); внеся ихъ въ эту формулу, мы получаемъ:

$$y = e^{r_1 x}(C_1 + \int v_1 X dx) + e^{r_2 x}(C_2 + \int v_2 X dx) + \ldots$$
$$\ldots + e^{r_n x}(C_n + \int v_n X dx). \qquad (11)$$

Такъ-какъ этотъ результатъ не только представляетъ формулу, удовлетворяющую уравненію (1), но и содержитъ въ себѣ n произвольныхъ постоянныхъ, то и можемъ принять его за полный интегралъ уравненія (1).

Если допустить, наконецъ, что

$$v_1 e^{r_1 x} = \lambda_1,\ v_2 e^{r_2 x} = \lambda_2, \ldots v_n e^{r_n x} = \lambda_n,$$

то уравненія (9) сведутся на

$$\left.\begin{array}{c} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_n = 0, \\ r_1\lambda_1 + r_2\lambda_2 + r_3\lambda_3 + \ldots + r_n\lambda_n = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ r_1^{n-1}\lambda_1 + r_2^{n-1}\lambda_2 \pm r_3^{n-1}\lambda_3 + \ldots + r_n^{n-1}\lambda_n = 1 \end{array}\right\} \qquad (13)$$

а формула (11), выражающая полный интегралъ даннаго уравненія, обратится въ

$$y = e^{r_1 x}(C_1 + \lambda_1 \int X e^{-r_1 x} dx) + e^{r_2 x}(C_2 + \lambda_2 \int X e^{-r_2 x} dx) + \ldots$$
$$\ldots + e^{r_n x}(C_n + \lambda_n \int X e^{-r_n x} dx) \qquad (14)$$

Здѣсь множители $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ выведены за знаки интеграловъ, такъ-какъ, опредѣляемые системой уравненій (13), они не зависятъ отъ x.

Формула (14) и выражаетъ полный интегралъ уравненія (1) въ наиболѣе употребительной формѣ.

82. Анализъ послѣдняго нумера относится собственно къ тому случаю, когда вспомогательное уравненіе

$$r^n + A_1 r^{n-1} + \ldots + A_{n-1} r + A_n = 0$$

не имѣетъ кратныхъ корней, но не трудно показать, что изложенный нами пріемъ интегрированія уравненія

$$\frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + A_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + A_n y = X \qquad (1)$$

распространяется и на тотъ случай, когда вспомогательное уравненіе имѣетъ кратные корни и, слѣдовательно, полный интегралъ уравненія

$$\frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + A_n y = 0 \qquad (2)$$

выражается формулою

$$y = (c_1 + c_2 x + \ldots + c_i x^{i-1}) e^{r_1 x} + (c_1' + c_2' x + \ldots$$

$$+ c_k' x^{k-1}) e^{r_2 x} + \ldots + c_{m-1} e^{r_{m-1} x} + c_m e^{r_m x} \qquad (3)$$

Въ самомъ дѣлѣ, допуская

$$e^{r_1 x} = z_1,\ x e^{r_1 x} = z_2, \ldots x^{i-1} e^{r_1 x} = z_i, \ldots e^{r_m x} = z_n,$$

формулу (3) приведемъ къ виду

$$y = c_1 z_1 + c_2 z_2 + \ldots + c_n z_n. \qquad (4)$$

Замѣнивъ въ ней $c_1, c_2, \ldots c_n$ функціональными количествами $u_1, u_2, \ldots u_n$, получимъ:

$$y = u_1 z_1 + u_2 z_2 + \ldots + u_n z_n \tag{5}$$

и, разсуждая подобно тому какъ въ предыдущемъ нумерѣ, мы найдемъ, что для того, чтобы формула эта удовлетворяла уравненію (1) достаточно, чтобы удовлетворялись условныя уравненія

$$\frac{du_1}{dx} z_1 + \frac{du_2}{dx} z_2 + \ldots + \frac{du_n}{dx} z_n = 0,$$

$$\frac{du_1}{dx}\frac{dz_1}{xx} + \frac{du_2}{dx}\frac{dz_2}{dx} + \ldots + \frac{du_n}{dx}\frac{dz_n}{dx} = 0$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{du_1}{dx}\frac{d^{n-2}z_1}{dx^{n-2}} + \frac{du_2}{dx}\frac{d^{n-2}z_2}{dx^{n-2}} + \ldots + \frac{du_n}{dx}\frac{d^{n-2}z_n}{dx^{n-2}} = 0,$$

$$\frac{du_1}{dx}\frac{d^{n-1}z_1}{dx^{n-1}} + \frac{du_2}{dx}\frac{d^{n-1}z_2}{dx^{n-2}} + \ldots + \frac{du_n}{dx}\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-2}} = X,$$

которыя и могутъ служить для опредѣленія всѣхъ искомыхъ количествъ $u_1, u_2, \ldots u_n$. Допуская при этомъ

$$\frac{du}{dx} = v_1 X, \quad \frac{du_2}{dx} = v_2 X, \ldots \frac{du_n}{dx} = v_n X, \tag{6}$$

предыдущія уравненія сведемъ на слѣдующія:

$$\left.\begin{array}{l}
z_1 v_1 + z_2 v_2 + \ldots + z_n v_n = 0, \\
\dfrac{dz_1}{dx} v_1 + \dfrac{dz_2}{dx} v_2 + \ldots + \dfrac{dz_n}{dx} v_n = 0, \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\dfrac{d^{n-2}z_1}{dx^{n-2}} v_1 + \dfrac{d^{n-2}z_2}{dx^{n-2}} v_2 + \ldots + \dfrac{d^{n-2}z_n}{dx^{n-3}} v_n = 0, \\
\dfrac{d^{n-1}z_1}{dx^{n-1}} v_1 + \dfrac{d^{n-1}z_2}{dx^{n-1}} v_2 + \ldots + \dfrac{d^{n-1}z_n}{dx^{n-1}} v_n = X,
\end{array}\right\} \tag{7}$$

изъ которыхъ опредѣлятся всѣ количества $v_1, v_2, \ldots v_n$. Послѣ этого, по прежнему, изъ уравненій (6) получимъ:

$$u_1 = C_1 + \int v_1 X dx, \ldots u_n = C_n + \int v_n X dx$$

и, внеся эти выраженія въ формулу (5), выразимъ полный интегралъ уравненія (1) въ формѣ

$$y = z_1(C_1 + \int v_1 X dx) + z_2(C_2 + \int v_2 X dx) + \ldots$$
$$\ldots + z_n(C_n + \int v_n X dx),$$

или, наконецъ, въ слѣдующей:

$$y = e^{r_1 x}[C_1 + \int v_1 X dx + x(C_2 + \int v_2 X dx) + \ldots$$

$$+ x^{i-1}(C_i + \int v_i X dx)] + \ldots + e^{r_m x}(C_n + \int v_n X dx) \quad (8)$$

83. Въ томъ случаѣ, когда вспомогательное уравненіе имѣетъ парные мнимые корни и полный интегралъ уравненія (2) выражается формулою

$$y = \left(c_1 + c_2 x + \ldots + c_i x^{i-1}\right)\cos\beta x e^{\alpha x} + \left(c'_1 + c'_2 x + \ldots\right.$$
$$\left. + c'_i x^{i-1}\right)\sin\beta x e^{\alpha x} + \ldots + c_m e^{r_m x},$$

для приложенія изложеннаго нами пріема интеграціи уравненія (1), нужно сдѣлать

$$\cos\beta x \,.\, e^{\alpha x} = z_1,\ x\cos\beta x \,.\, e^{\alpha x} = z_2, \ldots \sin\beta x \,.\, e^{\alpha x} = z_{i+1}, \ldots$$

и приведя такимъ образомъ полный интегралъ уравненія (2) къ виду

$$y = c_1 z_1 + c_2 z_2 + \ldots c_i z_i + c'_i z_{i+1} + \ldots$$

поступать за-тѣмъ точно такъ, какъ въ предыдущемъ нумерѣ.

84. Для поясненія изложеннаго нами пріема интеграціи приложимъ его къ нѣсколькимъ частнымъ примѣрамъ.

1) Пусть имѣемъ уравненіе

$$\frac{d^2y}{dx^2}-7\frac{dy}{dx}+12y=x.$$

Вспомогательное уравненіе

$$r^3-7r+12=0$$

имѣетъ корни $r_1=4$, $r_2=3$, а потому полный интегралъ уравненія

$$\frac{d^2y}{dx^2}-7\frac{dy}{dx}+12=0$$

выразится чрезъ

$$y=c_1e^{4x}+c_1e^{3x}.$$

Замѣнивъ въ немъ произвольныя постоянныя c_1, c_2 функціональными количествами u_1, u_2, получимъ

$$y=u_1e^{4x}+u_2e^{3x}.$$

Количества u_1, u_2 должны удовлетворять слѣдующимъ двумъ уравненіямъ:

$$e^{4x}\frac{du_1}{dx}+e^{3x}\frac{du_2}{dx}=0,$$

$$4e^{4x}\frac{du_1}{dx}+3e^{3x}\frac{du_2}{dx}=x.$$

Положивъ затѣмъ

$$\frac{du_1}{dx}+v_1x,\quad \frac{du_2}{dx}=v_2x,$$

предыдущія уравненія сведемъ на слѣдующія:

$$e^{4x}v_1+e^{3x}v_2=0,$$

$$4e^{4x}v_1 + 3e^{3x}v_2 = 1,$$

а допустивъ

$$v_1 e^{4x} = \lambda_1,\ v_2 e^{3x} = \lambda_2,$$

найдемъ

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0,\ 4\lambda_1 + 3\lambda_2 = 1,$$

откуда $\lambda_1 = +1$, $\lambda_2 = -2$. Въ виду этого полный интегралъ даннаго уравненія выразится чрезъ

$$y = e^{4x}[C_1 + \int xe^{-4x}dx] + e^{3x}[C_2 - \int xe^{-3x}dx].$$

2) Возьмемъ еще уравненіе

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx} + y = e^x.$$

Вспомогательное уравненіе

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

имѣетъ два корня равныхъ 1, а потому интегралъ уравненія

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0$$

представится чрезъ

$$y = (c_1 + c_2 x)e^x.$$

Замѣнивъ c_1, c_2 черезъ u_1, u_2 найдемъ:

$$y = u_1 e^x + u_2 x e^x. \qquad (\alpha)$$

Условныя уравненія, которымъ должны удовлетворять количества u_1, u_2, представятся чрезъ

$$e^x \cdot \frac{du_1}{dx} + xe^x\frac{du_2}{dx} = 0,$$

$$e^x \cdot \frac{du_1}{dx} + e^x(1+x)\frac{du_2}{dx} = e^x,$$

которыя, по сокращеніи на e^x, доставляютъ

$$\frac{du_1}{dx} = -x, \quad \frac{du_2}{dx} = 1.$$

Отсюда непосредственно

$$u_1 = C_1 - \frac{x^2}{2}, \quad u_2 = C_2 + x,$$

такъ-что формула (α) приводится къ виду

$$y = e^x \left(C_1 + C_2 x + \frac{x^2}{2} \right).$$

Это и есть искомый полный интегралъ даннаго уравненія.

3) Пусть еще имѣемъ уравненіе

$$\frac{d^2y}{dx^3} - 2\frac{dy}{dx} + 5y = \cos 2x.$$

Рѣшеніе вспомогательнаго уравненія доставляетъ два корня $r_1 = 1 + 2\sqrt{-1}$, $r_2 = 1 - 2\sqrt{-1}$, почему интегралъ даннаго уравненія выразится формулою

$$y = u_1 \cos 2x \,.\, e^x + u_2 \sin 2x \,.\, e^x,$$

гдѣ количества u_1, u_2 должны будутъ удовлетворять уравненіямъ

$$e^x \cos 2x \,.\, \frac{du_1}{dx} + e^x \sin 2x \,.\, \frac{du_2}{dx} = 0,$$

$$[\cos 2x - 2\sin 2x]\frac{du_1}{dx} + [\sin 2x + 2\cos 2x]\frac{du_2}{dx} = \cos 2x . e^{-x}.$$

Допустивъ теперь

$$\frac{du_1}{dx} = v_1 \cos 2x, \quad \frac{du_2}{dx} = v_1 \cos 2x, \qquad (\alpha)$$

сведемъ предыдущія уравненія на слѣдующія:

$$\cos 2x \,.\, v_1 + \sin 2x \,.\, v_2 = 0\,,$$

$$[\cos 2x - 2\sin 2x]\, v_1 + [\sin 2x + 2\cos 2x]\, v_2 = e^{-x},$$

изъ которыхъ находимъ:

$$v_1 = -\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\, v_2 = -\frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\,.\, e^{-x},$$

$$v_2 = \frac{1}{2} e^{-x}.$$

Послѣ этого изъ формулъ (α) найдемъ

$$u_1 = C_1 - \frac{1}{2}\int e^{-x}\sin 2x\,dx,$$

$$v_2 = C_2 + \frac{1}{2}\int e^{-x}\cos 2x\,dx.$$

Поэтому полный интегралъ даннаго уравненія будетъ такого вида:

$$y = e^x \cos 2x\left[\,C_1 - \frac{1}{2}\int e^{-x}\sin 2x\,dx\,\right]$$

$$+ e^x \sin 2x\left[\,C_2 + \frac{1}{2}\int e^{-x}\cos 2x\,dx\,\right].$$

О линейныхъ дифференціальныхъ уравненіяхъ порядка выше перваго, имѣющихъ перемѣнные коэффиціенты.

85. Уравненіями съ постоянными коэффиціентами почти исчерпывается тотъ классъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій n-аго порядка, интегрировать которыя до сихъ поръ умѣютъ. Изъ линейныхъ уравненій n-аго порядка съ перемѣнными коэффиціентами можно только указать на уравненіе вида

$$(a + bx)^n \frac{d^ny}{dx^n} + A(a + bx)^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots$$

$$\ldots + A_{n-1}(a + bx)\frac{dy}{dx} + A_n y = X, \quad (1)$$

какъ на такое, интеграція котораго всегда сводится на интеграцію линейнаго уравненія съ постоянными коэффиціентами.

Въ самомъ дѣлѣ, допустивъ

$$e^t = a + bx$$

и принявъ t за перемѣнное независимое, мы будемъ имѣть:

$$\frac{dy}{dx} = be^{-t}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = b^2e^{-2t}\left\{\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right\},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = b^3e^{-3t}\left\{\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt}\right\},$$

$$\ldots\ldots\ldots,\ldots\ldots$$

такъ-что данное уравненіе (1) преобразуется въ уравненіе

$$\frac{d^ny}{dt^n} + B_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + B_2\frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}} + \ldots + B_{n-1}\frac{dy}{dt} + A_ny = X, \quad (2)$$

которое линейное, подобно данному, но имѣетъ уже постоянные коэффиціенты.

Пусть, напримѣръ, дано уравненіе втораго порядка

$$(a+bx)^2\frac{d^2y}{dx^2} + b(a+bx)\frac{dy}{dx} + n^2y = 0.$$

Сдѣлавъ $a + bx = e^t$, получимъ въ результатѣ преобразованія

$$b^2\frac{d^2y}{dt^2} + n^2y = 0,$$

уравненіе, полный интегралъ котораго выразится чрезъ

$$y = c_1\cos\frac{nt}{b} + c_2\sin\frac{nt}{b};$$

но $t = \log(a+bx)$, а потому въ окончательномъ результатѣ для полнаго интеграла даннаго уравненія найдемъ формулу:

$$y = c_1\cos\frac{n\log(a+bx)}{b} + c_2\sin\frac{n\log(a+bx)}{b}.$$

86. Разсмотрѣнный въ предыдущемъ нумерѣ случай единственный, въ которомъ линейное дифференціальное уравненіе n-аго порядка съ перемѣнными коэффиціентами всегда можетъ быть проинтегрировано независимо отъ того, каково число n. Правда, отдѣльныя формы линейныхъ уравненій того или другаго порядка съ перемѣнными коэффиціентами, встрѣчавшіяся ученымъ при изслѣдованіи ими спеціальныхъ вопросовъ, были проинтегрированы ими при помощи частныхъ пріемовъ, обусловливавшихся, съ одной стороны, порядкомъ уравненія, а съ другой—значеніями его коэффиціентовъ; но совершенно частный характеръ такихъ пріемовъ интеграціи отдѣльныхъ линейныхъ уравненій дѣлаетъ изложеніе ихъ неумѣстнымъ въ нашемъ курсѣ. Мы остановимся, впрочемъ, на линейныхъ уравненіяхъ втораго порядка съ перемѣнными коэффиціентами, относительно которыхъ можно установить слѣдующее предложеніе, принадлежащее французскому ученому Штурму:

Всякое линейное дифференціальное уравненіе втораго порядка

$$X\frac{d^2y}{dx^2}+X_1\frac{dy}{dx}+X_2y=0, \tag{1}$$

въ которомъ коэффиціенты X, X_1, X_2 *тѣ или другія функціи перемѣннаго независимаго* x, *всегда приводится къ слѣдующей, канонической,* формѣ

$$\frac{d}{dx}\left[\varphi(x)\frac{dy}{dx}\right]+\psi(x)y=0, \tag{2}$$

гдѣ $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *выражаются опредѣленнымъ образомъ въ* X, X_1, X_2.

Въ самомъ дѣлѣ, для того, чтобы уравненіе (2) было равносильно данному уравненію (1), необходимо и достаточно, чтобы мы имѣли совмѣстно

$$\varphi(x)=\lambda X,\ \ \varphi'(x)=\lambda X_1,\ \ \psi(x)=\lambda X_2, \tag{3}$$

гдѣ λ неопредѣленный множитель. Раздѣливъ однако второе изъ этихъ уравненій на первое, получимъ:

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=\frac{X_1}{X},$$

откуда

$$\varphi(x)=e^{\int\frac{X_1}{X}dx}. \tag{4}$$

Затѣмъ найдемъ:

$$\lambda=\frac{e^{\int\frac{X_1}{X}dx}}{X}, \tag{5}$$

$$\psi(x)=\frac{X_2}{X}e^{\int\frac{X_1}{X}dx}. \tag{6}$$

Эти формулы и доказываютъ высказанное предложеніе, такъ-какъ устанавливаютъ ту опредѣленную зависимость между коэффиціентами уравненій (1) и (2), при допущеніи которой первое изъ этихъ уравненій переходитъ во второе.

87. Взявъ теперь линейное уравненіе втораго порядка въ канонической формѣ

$$\frac{d}{dx}\left[\varphi(x)\frac{dy}{dx}\right]+\psi(x)y=0, \tag{1}$$

докажемъ, что коль-скоро будетъ извѣстно какое-либо частное рѣшеніе его, полный интегралъ его всегда можно будетъ опредѣлить безъ труда.

Пусть y_1 частное, вамъ извѣстное, значеніе y, удовлетворяющее уравненію (1), такъ-что

$$\frac{d}{dx}\left[\varphi(x)\frac{dy_1}{dx}\right]+\psi(x)y_1=0. \qquad (2)$$

Умножимъ формулу (1) на y_1, а формулу (2) на y и составимъ разность слѣдствій; получимъ:

$$y_1\frac{d}{dx}\left[\varphi(x)\frac{dy}{dx}\right]-y\frac{d}{dx}\left[\varphi(x)\frac{dy_1}{dx}\right]=0. \qquad (3)$$

Формула интеграціи по частямъ доставляетъ однако

$$\int y_1\frac{d}{dx}\left[\varphi(x)\frac{dy}{dx}\right]dx=y_1\frac{dy}{dx}\varphi(x)-\int\frac{dy_1}{dx}\frac{dy}{dx}\varphi(x)\,dx,$$

$$\int y\frac{d}{dx}\left[\varphi(x)\frac{dy_1}{dx}\right]dx=y\frac{dy_1}{dx}\varphi(x)-\int\frac{dy_1}{dx}\frac{dy}{dx}\varphi(x)dx,$$

такъ-что будетъ:

$$\int y_1\frac{d}{dx}\left[\varphi(x)\frac{dy}{d_x}\right]dx-\int y\frac{d}{dx}\left[\varphi(x)\frac{dy_1}{dx}\right]dx=\varphi(x)\left[y_1\frac{dy}{dx}-y\frac{dy_1}{dx}\right];$$

но изъ формулы (3) слѣдуетъ, что

$$\int y_1\,dx\left[\varphi(x)\frac{dy}{dx}\right]dx-\int y\frac{d}{dx}\left[\varphi(x)\frac{dy}{dx}\right]dx=c,$$

а потому получаемъ:

$$y_1\frac{dy}{dx}-y\frac{dy_1}{dx}=\frac{c}{\varphi(x)},$$

или

$$\frac{y_1\dfrac{dy}{dx}-y\dfrac{dy_1}{dx}}{y_1^2}=\frac{c}{y_1^2\varphi(x)}.$$

Первая часть этой формулы представляетъ производную дроби $\dfrac{y}{y_1}$, почему

$$\frac{y}{y_1}=c\int\frac{dx}{y_1^2\varphi(x)}+c'$$

и слѣдовательно

$$y = cy_1 . \int \frac{dx}{y_1^2 \Phi(x)} + c' \tag{4}$$

Это выраженіе y содержитъ уже два произвольныхъ постоянныхъ количества, а потому формула (4) и представляетъ полный интегралъ уравненія (1).

88. Воспользуемся доказаннымъ въ двухъ послѣднихъ нумерахъ для разысканія полнаго интеграла уравненія

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2(m+1)}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0. \tag{1}$$

Прежде всего докажемъ, что уравненію этому, въ которомъ число m полагаемъ положительнымъ, всегда можно удовлетворить допущеніемъ

$$y = \int_0^1 (z^2-1)^m \cos zx . dz. \tag{2}$$

Такъ-какъ предѣлы интеграла въ формулѣ (2) независимы отъ x, то дифференцированіе ея доставитъ:

$$\frac{dy}{dx} = -\int_0^1 (z^2-1)^m . z . \sin zx dz, \tag{3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\int_0^1 (z^2-1)^m . z^2 . \cos zx . dz. \tag{4}$$

Первое изъ этихъ двухъ выраженій можно еще преобразовать. Умноживъ обѣ части формулы (3) на $2(m+1)$, получаемъ:

$$2(m+1)\frac{dy}{dx} = -\int_0^1 2(m+1) z (z^2-1)^m \sin zx . dz,$$

а проинтегрировавъ вторую часть по частямъ, найдемъ:

$$\int \frac{d}{dz}(z^2-1)^{m+1}\sin zx.dz = (z^2-1)^{m+1}\sin zx$$

$$-\int (z^2-1)^{m+1} x.\cos zx.dz,$$

такъ-что будетъ

$$2(m+1)\frac{dy}{dx} = \int_0^1 (z^2-1)^{m+1} x.\cos zx.dz,$$

или же, выведя x за знакъ интеграла,

$$\frac{2(m+1)}{x}\frac{dy}{dx} = \int_0^1 (z^2-1)^{m+1}\cos zx.dz. \qquad (5)$$

Съ другой стороны, складывая между собою формулы (2) (4), найдемъ:

$$y+\frac{d^2y}{dx^2} = \int_0^1 (z^2-1)^m \cos zx.dz - \int_0^1 (z^2-1)^m.z^2.\cos zx.dx,$$

т. е.

$$y+\frac{d^2y}{dx^2} = -\int_0^1 (z^2-1)^{m+1}\cos zx.dz. \qquad (6)$$

Внеся выраженія (5) и (6) въ данное уравненіе, удовлетворимъ ему тождественно, откуда и заключимъ уже, что значеніе y, удовлетворяющее формулѣ (2), представляетъ частное рѣшеніе даннаго уравненія. Обозначимъ его черезъ y_1 и напишемъ:

$$y_1 = \int_0^1 (z^2-1)^m \cos zx.dz. \qquad (7)$$

Интегралъ, составляющій правую часть этой формулы, называ[ютъ]
трансцендентною функціею Бесселя.

Чтобы найдти теперь полный интегралъ уравненія (1), нуж[но] привести его къ канонической формѣ. Въ настоящемъ случа[ѣ] будетъ

$$\lambda=\varphi(x),\ \ \lambda\frac{2m+2}{\lambda}=\varphi'(x),\ \ \lambda=\psi(x),$$

а потому получимъ

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=\frac{2m+2}{x},$$

откуда

$$\log\varphi(x)=(2m+2)\log x$$

и слѣдовательно

$$\varphi(x)=x^{2m+2},\ \ \psi(x)=x^{2m+2}.$$

Въ виду этого уравненіе (1), представленное въ канонической формѣ, выразится чрезъ

$$\frac{d}{dx}\left[x^{2m+2}\frac{dy}{dx}\right]+x^{2m+2}y=0. \tag{8}$$

Но частное рѣшеніе этого уравненія представляется формуло[ю] (7), а потому по формулѣ (4) предыдущаго нумера получим[ъ] и полный интегралъ въ формѣ уравненія

$$y=c\int_0^1(z^2-1)^m\cos zx\,.\,dz$$

$$\times\int\frac{dx}{x^{2m+2}\int_0^1(z^7-1)^m\cos zx\,.\,dz}+c'. \tag{9}$$

Это и есть искомый интегралъ даннаго уравненія (1).