УДК 513.7

Л. Б. БИРБРАИР, Ю. И. САПРОНОВ

ЛИНЕЙНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ КВАДРАТИЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ C^3

1. Задача о линейной классификации квадратичных отображений имеет как самостоятельный интерес, так и прикладной. Последнее связано с тем, что квадратичные дифференциалы Портеуса дают первые нелинейные слагаемые в уравнениях разветвления Ляпунова—Шмидта. В некоторых задачах рассмотрение квадратичных дифференциалов дает полную качественную картину бифуркации стационарных решений нелинейного уравнения, включая информацию об устойчивости и первых асимптотиках по малому приращению параметра.

2. Квадратичным отображением $F: C^n \to C^n$ называется сужение симметрического билинейного отображения $\tilde{F}: C^n \times C^n \to C^n$ на диагональ $\Delta = \{(x, x) \in C^n \times C^n\}$.

Множество всех квадратичных отображений обозначим через $\tilde{L}(C^n)$. На $\tilde{L}(C^n)$ действует группа $\mathrm{Gl}(n, C) \times \mathrm{Gl}(n, C)$ по правилу $[(A, B); F] = A \circ F \circ B^{-1}$. Два отображения, лежащие на одной орбите этого действия, назовем линейно эквивалентными. Квадратичное отображение назовем регулярным, если $F^{-1}(0) = \{0\}$. Подмножество регулярных квадратичных отображений обозначим $L(C^n)$. Очевидно, что $L(C^n)$ открыто и всюду плотно в $\tilde{L}(C^n)$.

В случае $n = 2$ известен следующий результат (см. [1, 2]). Любое регулярное квадратичное отображение линейно эквивалентно следующему $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$. Это равносильно тому, что $L(C^2)$ состоит из одной (открытой) орбиты отображения $\begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$.

В случае $n \geqslant 3$ орбиты приобретают положительную коразмерность, и ситуация усложняется. Основным результатом этой заметки является следующее утверждение.

Теорема 1. *Любое квадратичное отображение $F \in Z(C^3)$ линейно эквивалентно одному из приведенных типов* П.

	Π_1	Π_2	Π_3
	x_1^2	$x_1^2 + x_2x_3$	$x_1^2 + x_2x_3$
Компоненты	x_2^2	x_2^2	$x_2^2 + x_1x_3$
	x_3^2	x_3^2	$x_3^2 + ax_1x_3$

(1)

Приведем основные этапы доказательства.

Лемма 1. *Любое квадратичное отображение $F \in L(C^3)$ некоторой левой заменой может быть приведено к виду*

$$x_k^2 + \sum_{i \neq j} a_{ij}^k x_i x_j; \quad i, j, k \in \{1, 2, 3\}. \tag{2}$$

Доказательство. Из условия регулярности вытекает условие собственности для F и для декартова произведения $F \times F \times F : C^3 \times C^3 \times C^3 \to C^3 \times C^3 \times C^3$. Следовательно, базис общего положения $\{e_1, e_2, e_3\}$ преобразованием F переводится в базис $\{F(e_1), F(e_2), F(e_3)\}$. Отсюда получается формула (2).

Лемма 2. *Существует базис $\{e_1, e_2, e_3\}$, такой, что выполняются следующие условия:*

$$\tilde{F}(e_1, e_2) = 0, \tag{3}$$

$$\tilde{F}(e_1, e_3) \in \mathrm{Lin}\{F(e_2), F(e_3)\}, \tag{4}$$

$$\tilde{F}(e_2, e_3) \in \mathrm{Lin}\{F(e_1), F(e_3)\}. \tag{5}$$

Доказательство. Рассмотрим отображение $\tilde{F} : C^3 \times C^3 \to C^3$. Оно собственно на диагонали $\Delta = \{(x, x) \in C^3 \times C^3\}$, а значит, собственно и на сдвинутой диагонали $\Delta_\delta = \{(x, x+\delta) \in C^3 \times C^3\}$. Как известно, собственное алгебраическое отображение $F|_{\Delta\delta}: \Delta_\delta \to C^3$ является сюръективным. В силу 8-кратности F существует независимая пара $\{e_1, e_2\}$, удовлетворяющая условию (3).

Для выполнения условий (4) и (5) введем замену вида $\tilde{e}_1 = e_1$, $\tilde{e}_2 = e_2$, $\tilde{e}_3 = e_3 + \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$, где e_1, e_2 — векторы, удовлетворяющие условию (3), а $e_3 \in C^3$, такой, что $e_3 \notin \mathrm{Lin}\{e_1, e_2\}$. Коэффициенты λ_1 и λ_2 находятся из уравнений

$$\begin{aligned} &\beta_3\lambda_2^2 + 2\alpha_3\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1(2\beta_2\alpha_2 - 2\alpha_2\beta_3) + \lambda_2 + \beta_2 = 0, \\ &\alpha_3\lambda_1^2 + 2\beta_3\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1 + \lambda_2(2\alpha_1\beta_3 - 2\alpha_3\beta_1) + \alpha_1 = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\text{где} \quad F(e_1, e_3) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}; \quad F(e_2, e_3) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}.$$

Разрешимость уравнений (6) следует из собственности квадратичной части.

Леммы 1 и 2 приводят к следующему списку квадратичных отображений, исчерпывающему все классы линейной эквивалентности:

Π_1	Π_2	Π_3	Π_*
x_1^2	$x_1^2 + x_2x_3$	$x_1^2 + x_2x_3$	$x_1^2 + x_2x_3$
x_2^2	x_2^2	$x_2^2 + x_1x_3$	$x_2^2 + x_1x_3$
x_3^2	x_3^2	$x_3^2 + ax_1x_3$	$x_3^2 + ax_1x_3 + bx_2x_3$

Лемма 3. Π_* *линейно эквивалентно* Π_3.

Доказательство. Коразмерность орбиты типа Π_* равна 1. Плоскость параметров (a, b) расслаивается на кривые, полученные пересечением с орбитами. Оказывается, что каждая из них пересекается с прямой $b = 0$.

Лемма 3 завершает доказательство теоремы 1.

3. Пусть Φ — отображение, которое ставит в соответствие элементу $F \in L(C^3)$ линейную оболочку компонент $F_1, F_2, F_3 \in S^2(C^3)$ отображения F. Из условия регулярности следует, что эта линей-

ная оболочка имеет размерность 3. Таким образом, получается отображение из $L(C^3)$ в грассманово многообразие $\mathrm{Gr}(6, 3, C)$. Обозначим через H образ $L(C^3)$ при отображении Ф. Действие группы $\mathrm{Gl}(3, C) \times \mathrm{Gl}(3, C)$ на $L(C^3)$ превращается в каноническое правое действие группы обратимых матриц на H. Нетрудно убедиться, что коразмерности орбит в $L(C^3)$ и их образов в H будут совпадать. Соотношения (2) задают локальные координаты грассманова многообразия. В этих координатах удается вычислить коразмерность орбит из списка (1).

Пусть μ_i — коразмерности орбит типа Π_i.

Теорема 2. *Справедливы следующие равенства*: $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 2$, $\mu_3 = 1$.

Таким образом, приведенные типы являются нормальными формами в соответствии с [1].

Список литературы: 1. *Арнольд В. И.* Особенности дифференцируемых отображений / В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде.— М., 1982.— 302 с. 2. *Голубицкий М., Гийемин В.* Устойчивые отображения и их особенности.— М., 1977.— 290 с.

Поступила в редколлегию 18.02.85