

$$dS = \frac{|\vec{dr}|}{2} |\vec{r}| \sin(\pi - \alpha) = \frac{|\vec{r}|}{2} |\vec{dr}| \sin(\alpha) \\ = \frac{\sin \alpha}{2} |\vec{v}| dt |\vec{r}| = \frac{dt}{2} |[\vec{r}, \vec{v}]|. \quad (1.4.20)$$

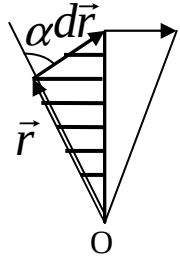


Рис. 1.4.6

Векторний добуток радіус-вектора та вектора швидкості входить до визначення моменту імпульсу. Скористаємося цим виразом та перепишемо формулу для площі цього трикутника:

$$dS = \frac{\mathcal{L}_z dt}{2m}. \quad (1.4.21)$$

(Величину $\frac{dS}{dt}$ називають секторіальною швидкістю.) Значить, для руху матеріальної точки у полі центральних сил $dS = \text{const} dt$. Таким чином, теоретично доведено **другий закон Кеплера**: «Радіус-вектор, що поєднує Сонце з будь-якою планетою, за рівні проміжки часу описує рівні площі».

Хоча Сонце також рухається через взаємодію з планетами, але маса його є дуже великою порівняно з масами планет Сонячної системи: $m_C / m_3 = 2 \cdot 10^{30} \text{ кг} / 6 \cdot 10^{24} \text{ кг} = 332 \cdot 10^3$, $m_C / m_{Ю} \cong 10^3$, тут m_C – маса Сонця, m_3 – маса Землі, $m_{Ю}$ – маса найважчої серед планет Сонячної системи Юпітера. А розміри радіусів орбіт руху планет навколо Сонця істотно перевищують діаметр Сонця, наведемо тут деякі з цих параметрів руху: $R_{C3} = 1,5 \times 10^8 \text{ км}$, $R_C = 7 \times 10^5 \text{ км}$, $R_{CЮ} = 7,8 \times 10^8 \text{ км}$, $R_{Ю} = 6,3 \times 10^3 \text{ км}$. Тому в задачах про рух планет навколо Сонця останнє можна вважати нерухомим.

1.4.8. Перший закон Кеплера

Перший закон Кеплера стверджує: «Всі планети рухаються за еліптичними орбітами навколо Сонця, яке знаходиться в одному з фокусів еліпса».

Всі свої закони Кеплер встановив експериментально, систематизувавши та усвідомивши результати багаторічних

спостережень (як власних, так і своїх попередників). Саме спираючись на закони Кеплера, Ньютон вивів свій закон всесвітнього тяжіння. Але теоретично можна, виходячи з законів Ньютона, розрахувати траєкторію рухів планет в Сонячній системі. Для цього скористаємося законом збереження моменту імпульсу:

$$\vec{\mathcal{L}} = \vec{e}_z m r v_\phi = \vec{e}_z m r^2 d\phi / dt = \text{const} \quad (1.4.22)$$

та законом збереження механічної енергії:

$$E = E_n + E_k = \frac{m v^2}{2} - G \frac{mM}{r} = \frac{m}{2} (v_r^2 + v_\phi^2) - G \frac{mM}{r} = \\ = m \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{r^2}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 - \gamma \frac{M}{r} \right] = \text{const}. \quad (1.4.23)$$

З цих двох законів (1.4.22) та (1.4.23) маємо два рівняння для двох невідомих функцій $|\vec{r}(t)|$ та $\phi(t)$. Цього досить, щоб математично описати рух планети в Сонячній системі. З (1.4.22) маємо:

$$d\phi / dt = \mathcal{L}_z / (m r^2). \quad (1.4.24)$$

Зробимо заміну змінної $r^{-1} = \rho[\phi(t)]$, тоді для похідної dr / dt маємо:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{1}{\rho} = \frac{-1}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = -r^2 \frac{d\rho}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = -\frac{\mathcal{L}_z}{m} \frac{d\rho}{d\phi}. \quad (1.4.25)$$

У виразі для повної механічної енергії E замінюємо dr / dt через (1.4.25) та $d\phi / dt$ через (1.4.24).

$$E = \frac{m}{2} \frac{\mathcal{L}_z^2}{m^2} \left(\frac{d\rho}{d\phi} \right)^2 + \frac{m r^2}{2} \left(\frac{\mathcal{L}_z}{m r^2} \right)^2 - G \frac{mM}{r} = \\ = \frac{\mathcal{L}_z^2}{2m} \left(\frac{d\rho}{d\phi} \right)^2 + \frac{\mathcal{L}_z^2}{2m r^2} - G m M \rho = \frac{\mathcal{L}_z^2}{2m} \left(\frac{d\rho}{d\phi} \right)^2$$

$$+ \frac{\mathcal{L}_z^2 \rho^2}{2m} - GmM \rho. \quad (1.4.26)$$

Повна механічна енергія не залежить від азимутального кута φ , тому візьмемо від неї похідну за φ та прирівняємо її до нуля:

$$\frac{dE}{d\varphi} = 0 = \frac{\mathcal{L}_z^2}{2m} 2 \frac{d\rho}{d\varphi} \frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \frac{\mathcal{L}_z^2 \rho}{m} \frac{d\rho}{d\varphi} - GmM \frac{d\rho}{d\varphi}. \quad (1.4.27)$$

Рівняння (1.4.27) є справедливим або якщо $d\rho/d\varphi = 0$ (що означає рух по колу), або якщо є справедливим наступне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку для величин ρ та φ :

$$\frac{\mathcal{L}_z^2}{m} \frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \frac{\mathcal{L}_z^2}{m} \rho - GmM = 0. \quad (1.4.28)$$

Перепишемо його у вигляді:

$$d^2\rho/d\varphi^2 + \rho = Gm^2M/\mathcal{L}_z^2. \quad (1.4.29)$$

Введемо заміну змінної, яка перетворить неоднорідне рівняння (1.4.29) на однорідне, що спростить пошуки його розв'язку. Це доволі проста, лінійна заміна: $\rho_1 = \rho - Gm^2M/\mathcal{L}_z^2$. Тоді з (1.4.29) отримаємо однорідне диференціальне рівняння другого порядку, яке використовують у теорії гармонічних коливань: $d^2\rho_1/d\varphi^2 = -\rho_1$. Загальним розв'язком такого диференціального рівняння є будь-яка гармонічна функція: нехай, для прикладу, це буде $\rho_1 = \rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0)$. В цьому розв'язку присутні дві константи інтегрування ρ_0 та φ_0 , як і має бути при здобутті розв'язку диференціального рівняння другого порядку. Вони мають простий фізичний зміст: це амплітуда та початкова фаза коливань, відповідно.

Введемо наступні позначки: $\mathcal{P} = \mathcal{L}_z^2/(Gm^2M)$ – параметр орбіти планети. Тоді амплітуду коливань зручно записати через $\mathcal{P}$: $\rho_0 = \mathcal{E}/\mathcal{P}$, де $\mathcal{E}$ – це ексцентриситет орбіти, вираз для якого буде знайдено нижче. В цих термінах розв'язок рівняння (1.4.29) має

вигляд:

$$\rho = \frac{1}{\mathcal{P}} + \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{P}} \cos(\varphi - \varphi_0), \text{ або } r = \mathcal{P}/(1 + \mathcal{E} \cos \varphi). \quad (1.4.30)$$

Друге рівняння (1.4.30) і є рівнянням еліпса. Вибір значення початкової фази визначається початком часу спостереження, тобто φ_0 не впливає на тип розв'язку, тому нехай $\varphi_0 = 0$.

Знайдемо тепер другу константу $\mathcal{E}$, ексцентриситет орбіти. Для цього зручно повернутися від змінної ρ до радіуса орбіти: $r = \mathcal{P}/(1 + \mathcal{E} \cos \varphi)$. Беручи до уваги властивості косинуса, можна порахувати екстремальні значення радіуса r орбіти:

$$r_{\max} = \mathcal{P}/(1 - \mathcal{E}), r_{\min} = \mathcal{P}/(1 + \mathcal{E}). \quad (1.4.31)$$

З закону збереження повної механічної енергії зрозуміло, що екстремальним значенням радіуса орбіти відповідають нулі швидкості радіального руху: $dr/dt|_{r_{\min, \max}} = 0$. Підставимо екстремальні значення радіуса орбіти до виразу для E :

$$\frac{\mathcal{L}_z^2}{2m} \left(\frac{1}{r_{\min}} \right)^2 - G \frac{mM}{r_{\min}} = E, \quad (1.4.32)$$

$$\frac{\mathcal{L}_z^2}{2m} \left(\frac{1}{r_{\max}} \right)^2 - G \frac{mM}{r_{\max}} = E. \quad (1.4.33)$$

Тобто для екстремальних значень радіуса орбіти $r_m = r_{\max, \min}$ маємо квадратне алгебраїчне рівняння:

$$r_m^2 + r_m GmM/E - \mathcal{L}_z^2/2mE = 0. \quad (1.4.34)$$

Воно має однаковий вигляд як для максимального, так і для мінімального радіуса, тому не будемо конкретизувати, яке це значення радіуса. Розв'язки (1.4.34) для екстремальних значень радіуса мають наступний вигляд:

$$r_m = \frac{p}{1 \pm \varepsilon} = -\frac{GmM}{2E} \pm \sqrt{\frac{G^2 m^2 M^2}{4E^2} + \frac{L_z^2}{2mE}}. \quad (1.4.35)$$

Знайдемо з (1.4.35) аналітичний вираз для ексцентриситету ε , для цього виконаємо наступні перетворення. Поділимо (1.4.35) на p :

$$\frac{1}{1 \pm \varepsilon} = \frac{-GmM}{2Ep} \left[1 \mp \sqrt{1 + \frac{2EL_z^2}{G^2 m^3 M^2}} \right]. \quad (1.4.36)$$

Зробимо позначку $\psi = \sqrt{1 + \frac{2EL_z^2}{G^2 m^3 M^2}}$, помножимо та поділимо праву частину (1.4.36) на $1 \pm \psi$:

$$\frac{1}{1 \pm \varepsilon} = \frac{-GmM}{2Ep} (1 \mp \psi)(1 \pm \psi)/(1 \pm \psi). \quad (1.4.37)$$

Скористаємося тотожністю $(1 \pm x)(1 \mp x) = 1 - x^2$, яка дозволить здобути в чисельнику правої частини (1.4.37) наступне:

$$(1 \pm \psi)(1 \mp \psi) = -\frac{2EL_z^2}{G^2 m^3 M^2}. \quad (1.4.38)$$

Тоді

$$\frac{1}{1 \pm \varepsilon} = \frac{GmM}{2Ep} \frac{2EL_z^2}{G^2 m^3 M^2} \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{2EL_z^2}{G^2 m^3 M^2}} \right]^{-1}, \quad (1.4.39)$$

або

$$1 \pm \psi = (1 \pm \varepsilon) L_z^2 / (p m^2 MG). \quad (1.4.40)$$

Скористаємося явним виразом для параметра орбіти p :

$$1 \pm \psi = 1 \pm \varepsilon. \quad (1.4.41)$$

Звідси знаходимо аналітичний вираз для ексцентриситету:

$$\varepsilon = \sqrt{1 + 2EL_z^2 / (G^2 m^3 M^2)}. \quad (1.4.42)$$

Аналізуючи вираз для радіуса орбіти (1.4.30), можна дійти висновку, що в залежності від величини ε – це різні криві другого порядку. Отже, для різних значень ексцентриситету маємо різні типи руху. Інфінітний рух реалізується при $\varepsilon > 1$ (це гіпербола) та $\varepsilon = 1$ (це парабола). Фінітний рух реалізується при $\varepsilon < 1$ (це еліпс) та $\varepsilon = 0$ (це коло).

Якщо $E = -G^2 m^3 M^2 / (2L_z^2)$, тоді $\varepsilon = 0$, значить, маємо рух по колу. Для планет Сонячної системи $1 > \varepsilon > 0$, тому $-G^2 m^3 M^2 / (2L_z^2) < E < 0$. Тобто траєкторія руху будь-якої планети в Сонячній системі є еліптичною, але дуже близькою до кола: $E = \delta - G^2 m^3 M^2 / (2L_z^2)$, де $\delta > 0$ – це мала стала величина.

1.4.9. Третій закон Кеплера

Зміст цього закону: «Квадрати періоду часу обертання планет навколо Сонця відносяться один до одного так, як куби великих півосей їхніх еліптичних орбіт».

Для спрощення математичних записів доведемо це на прикладі руху по колу з радіусом R . З другого закону Ньютона для планети, що рівномірно обертається навколо Сонця по колу, маємо:

$F = ma = mV^2 / R$, а з закону всесвітнього тяжіння сила: $F = GmM / R^2$. Звідси дістаємо рівняння, до якого вже не входить маса планети:

$$V^2 / R = GM / R^2. \quad (1.4.43)$$

Якщо переписати лінійну швидкість обертального руху через кутову в (1.4.43): $V = \omega R$, де $\omega = 2\pi / T$, то знайдемо зв'язок між періодом обертання та радіусом орбіти для планет Сонячної системи:

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM}, \quad (1.4.44)$$

де $4\pi^2 / (GM) = \text{const}$ – це стала величина для Сонячної системи, яка не залежить від характеристик планети.

1.4.10. Космічні швидкості

Першим кроком у міжпланетних перельотах є запуск супутника Землі, який рухатиметься поблизу поверхні Землі. Для підрахунку космічних швидкостей припустимо, що орбіта Землі це є коло. Тоді за другим законом Ньютона для матеріальної точки маси m , що обертається навколо Землі (маса M_3) по орбіті, яка є відносно близькою до поверхні Землі, маємо таке співвідношення:

$$ma = mV^2 / R = F_{\text{тяж}} = GmM_3 / R^2. \quad (1.4.45)$$

Для навколоземних орбіт відстань між матеріальною точкою маси m та центром Землі можна вважати приблизно рівною радіусу Землі R_3 , тоді для першої космічної швидкості здобудемо вираз:

$$V_I \cong \sqrt{GM_3 / R_3} \approx \sqrt{gR_3} \approx 8 \cdot 10^3 \text{ м/с}. \quad (1.4.46)$$

Другим кроком у міжпланетних перельотах слід розглядати такі польоти, коли ракета залишає навколоземний простір. Значення найменшої повної механічної енергії, яка потрібна для цього, дорівнює: $E = 0$. При цьому ракета рухатиметься за параболическою орбітою (параболі відповідає ексцентриситет $\varepsilon = 1$). Скористаємося законом збереження енергії:

$$mV^2 / 2 - GmM_3 / r = 0. \quad (1.4.47)$$

Звідси знайдемо другу космічну швидкість, яку слід надати ракеті на поверхні Землі, аби ракета змогла перебороти земне тяжіння:

$$V_{II} \cong \sqrt{2GM_3 / R_3} \approx \sqrt{2}V_I \approx 11.2 \text{ км/с}. \quad (1.4.48)$$

Ракета зі швидкістю V_{II} ніколи не повернеться на Землю, якщо не

буде впливу інших планет, дисипації енергії і таке інше.

Третім кроком у міжпланетних перельотах слід розглядати такі польоти, коли ракета залишає Сонячну систему, стартувавши з орбіти Землі. Оскільки потенціальна енергія гравітаційної взаємодії ракети на поверхні Землі з Землею за абсолютною величиною набагато менша від потенціальної енергії гравітаційної взаємодії ракети з Сонцем, то для простої оцінки третьої космічної швидкості можна скористатися рівнянням (1.4.47), лише замінивши в ньому масу Землі та її радіус, відповідно, на масу Сонця M_C та радіус орбіти руху Землі навколо Сонця R_{3C} :

$$V_{III} = \sqrt{2GM_C / R_{3C}} \approx 42 \text{ км/с}. \quad (1.4.49)$$

Насправді, ця величина швидкості є завищеною. Якщо скористатися тим, що ракета на поверхні Землі вже має початкову швидкість відносно Сонця внаслідок річного обертання Землі навколо Сонця, а також внаслідок добового обертання Землі навколо власної осі, тоді мінімальне значення швидкості, яку слід надати ракеті для того, щоб вона могла полишити Сонячну систему, може бути значно меншою: $V_{\min} \approx 42 - 25 \approx 17 \text{ км/с}$.

1.4.11. Проблема двох тіл

Для космічних об'єктів нашої Галактики масу розподілено поміж приблизно 10^{10} зірок, діаметр нашої Галактики становить близько 10^5 світових років, час її обертання навколо власної осі складає величину приблизно 200 млн. років. Серед цих об'єктів зустрічаються різні. І не завжди для вивчення їхньої взаємодії можна покласти $m_1 \gg m_2$. Наприклад, це не можна зробити у випадку вивчення взаємного руху Місяця та Землі або такого об'єкта, як подвійні зірки, і таке інше. Дослідимо взаємодію саме таких об'єктів.

Запишемо систему двох рівнянь, що описують динаміку руху матеріальної точки під дією сил гравітації з боку іншої матеріальної точки за умови, що до цієї замкнутої системи входить тільки ці два об'єкти:

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}, \quad m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}. \quad (1.4.50)$$

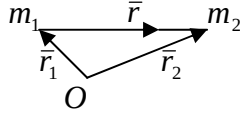


Рис. 1.4.7. Взаємний рух двох тіл

Поділивши перше рівняння (1.4.50) на m_1 , а друге – на m_2 та віднявши перше рівняння системи (1.4.50) від другого рівняння, здобудемо для відносного радіуса-вектора $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ цих об'єктів таке співвідношення:

$$\frac{d^2 (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{dt^2} = G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right). \quad (1.4.51)$$

Введемо наступні позначки: μ – це зведена маса даної системи (цю величину введено у підрозділі 1.3, див. (1.3.23)), $\vec{V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1 = d\vec{r} / dt$ – швидкість другого тіла відносно першого. Тоді з (1.4.51) маємо:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -G \frac{m_1 + m_2}{r^3} \vec{r}. \quad (1.4.52)$$

Перепишемо (1.4.52) в інший спосіб:

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -G \mu \frac{(m_1 + m_2)}{r^3} \vec{r}. \quad (1.4.53)$$

Таке рівняння відоме з теорії руху одного тіла зведеної маси μ у центральному полі, утвореному масою $m_1 + m_2$. Отже, нам вдалося звести проблему руху двох тіл до вже відомої теорії.

Оскільки зведена маса μ виникла в переході від (1.4.52) до (1.4.53) недостатньо обґрунтовано, покажемо тепер більш детально, що саме вона входить до розв'язку проблеми двох тіл. Для цього обчислимо повну механічну енергію E_0 системи двох тіл:

$$E_0 = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} - G \frac{m_1 m_2}{r}. \quad (1.4.54)$$

Скористаємося системою центра мас: $\vec{V}_{\text{цм}} = \frac{m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2}{m_1 + m_2}$. В ній

швидкість j -го об'єкта визначається так: $\vec{V}_{Cj} = \vec{V}_j - \vec{V}_{\text{цм}}$. Отже, для швидкостей першого та другого об'єктів у системі відліку центра мас маємо такі вирази:

$$\begin{aligned} \vec{V}_{C1} &= \vec{V}_1 - \vec{V}_{\text{цм}} = \mu (\vec{V}_1 - \vec{V}_2) / m_1, \\ \vec{V}_{C2} &= \vec{V}_2 - \vec{V}_{\text{цм}} = -\mu (\vec{V}_1 - \vec{V}_2) / m_2. \end{aligned} \quad (1.4.55)$$

Використання цих значень швидкостей дозволяє переписати вираз (1.4.54) в наступний спосіб:

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{m_1 (\vec{V}_{\text{цм}} + \vec{V}_{C1})^2}{2} + \frac{m_2 (\vec{V}_{\text{цм}} + \vec{V}_{C2})^2}{2} - G \frac{m_1 m_2}{r} \\ &= V_{\text{цм}}^2 \frac{m_1 + m_2}{2} + \frac{m_1 V_{C1}^2 + m_2 V_{C2}^2}{2} \\ &\quad + \vec{V}_{\text{цм}} (m_1 \vec{V}_{C1} + m_2 \vec{V}_{C2}) - G \frac{m_1 m_2}{r}. \end{aligned} \quad (1.4.56)$$

Тепер скористаємося тим, що сума $m_1 \vec{V}_{C1} + m_2 \vec{V}_{C2} = 0$, та формулами (1.4.55). Це дозволяє спростити вираз для повної механічної енергії:

$$E_0 = V_{\text{цм}}^2 \frac{m_1 + m_2}{2} + \frac{\mu V^2}{2} - G \frac{\mu (m_1 + m_2)}{r}. \quad (1.4.57)$$

З (1.4.57) видно, що кінетична енергія системи двох матеріальних точок складається зі сталої кінетичної енергії центра мас (ця величина пропорційна $V_{\text{цм}}^2$), кінетичної енергії відносного руху зведеної маси (її величина пропорційна V^2) та потенціальної

енергії зведеної маси в полі тяжіння, яке створює вся система $m_1 + m_2$.

1.4.12. Еквівалентність гравітаційної та інертної мас

Термін маса було введено до числа характеристик руху механічних об'єктів, спираючись на закон збереження імпульсу. В основі цього терміна лежать інерціальні властивості механічних об'єктів, тому таку масу називають інертною, m_{in} . Але механічні об'єкти здатні також збуджувати навколо себе гравітаційні поля. Сила гравітаційного тяжіння визначається гравітаційною масою тіл. Від самого початку дослідження цього питання немає підстав вважати маси, що фігурують у цих законах, однакови.

Закон всесвітнього тяжіння, що його встановив Ньютон, вказує на те, що сила гравітаційної взаємодії тіл є пропорційною m_{in} . Тому інертна маса пропорційна до гравітаційної маси $m_{in} \propto m_g$. Одиниці цих мас (або константу гравітаційної взаємодії G) можна вибрати так, щоб вони були не тільки пропорційні, але й дорівнювали одна одній за числовим значенням. Цей фундаментальний закон механіки зветься законом еквівалентності інертної та гравітаційної мас.

Для доведення цього закону розглянемо вільне падіння тіл різної природи у полі тяжіння Землі. З одного боку, $\vec{F} = m_{in}\vec{a}$, з іншого боку $\vec{F} = m_g\vec{g}$, отже, $\vec{a} = \vec{g}m_g/m_{in}$. Оскільки з експериментів відомо, що всі тіла (за умов вільного падіння) падають з однаковим прискоренням, то виходить, що $m_{in} = m_g$. Першим це довів експериментально Галілей (з невисокою точністю).

Далі висновок про еквівалентність гравітаційної та інертної мас підтвердили Ньютон та Бессель, які експериментально встановили для коливань математичного маятника незалежність періоду вільних коливань від матеріалу, з якого виготовлено маятник.

Рекордно точними були вимірювання (відносна похибка

5×10^{-9}) угорського фізика Етвеша, який взяв до уваги, що вага тіла на поверхні Землі складається з двох різних доданків: сили гравітаційного тяжіння $m_g\vec{g}$ та відцентрової сили інерції

$m_{in}\Omega^2 r_{\perp}$. Якби маси були різними, то орієнтація плечей його крутильних терезів залежала б від матеріалу, з якого виготовлено підвішені до них важки.

Зазначимо, що принцип еквівалентності інертної та гравітаційної мас прислужився при закладанні засад теорії гравітації (загальної теорії відносності).

Питання для самоконтролю до розділу § 1.4. Силowe поле

1. Що таке силowe поле?
2. Які сили називають потенціальними?
3. Які сили називають центральними?
4. Які сили називають гіроскопічними?
5. Дайте визначення потенціальної енергії.
6. Дайте визначення повної механічної енергії.
7. Сформулюйте закон збереження повної механічної енергії.
8. Як за відомим просторовим розподілом потенціальної енергії знайти розподіл потенціальної сили?
9. Який рух матеріальної точки називають фінітним?
10. Який рух матеріальної точки називають інфінітним?
11. Що таке момент імпульсу?
12. Що таке момент сили?
13. Сформулюйте закон збереження моменту імпульсу.
14. Чому момент імпульсу зберігається в центральному полі?
15. Що таке секторіальна швидкість?
16. Сформулюйте перший закон Кеплера.
17. Сформулюйте другий закон Кеплера.
18. Сформулюйте третій закон Кеплера.
19. Що таке перша космічна швидкість?
20. Що таке друга космічна швидкість?
21. Що таке третя космічна швидкість?
22. Що таке зведена маса?
23. Що таке інертна маса?
24. Що таке гравітаційна маса?

§ 1.5. Механічний рух матеріальної точки у неінерціальних системах відліку

Досі ми вивчали рух в інерціальних системах відліку, де основним законом динаміки був другий закон Ньютона:

$m\vec{a}_{in} = \sum \vec{F}_{зовн}$. Знайдемо тепер рівняння руху в неінерціальних системах відліку, які рухаються з прискоренням відносно інерціальних. При цьому залишатимемося в межах нерелятивістського наближення: $v \ll c$. Тут скористаємося звичайним для фізики методом. Спочатку розглянемо простий випадок, тоді побудуємо точну теорію, після чого перевіримо її на простому випадку, з якого починали.

Розглянемо наступний простий випадок: неінерціальну систему відліку пов'яжемо з диском, який рівномірно обертається відносно нерухомої інерціальної системи відліку зі сталою кутовою швидкістю $\vec{\Omega} = const$. Нехай матеріальна точка рівномірно рухається по краю диска. Відносно диска швидкість матеріальної точки є сталою за модулем: $|\vec{v}_n| = const$, а відносно інерціальної системи відліку швидкість матеріальної точки $\vec{v}_{in} = \vec{v}_n + \vec{\Omega} \times \vec{r}_n$, де $\vec{r}_n$ – це радіус-вектор матеріальної точки. Оскільки матеріальна точка рівномірно рухається по колу радіуса $|\vec{r}|$, то в інерціальній системі відліку цей рух характеризується доцентровим прискоренням:

$$a_{in} = v_{in}^2 / r = (v_n + \Omega r)^2 / r = \frac{v_n^2}{r} + 2\Omega v_n + \Omega^2 r = \sum_j F_j^{(зовн)} / m. \quad (1.5.1)$$

Отже, в інерціальній системі відліку матеріальна точка рухається з прискоренням (1.5.1).

Розглянемо питання, як цей рух виглядатиме в неінерціальній системі відліку? В ній матеріальна точка також рухається по колу, але з іншою швидкістю, тому прискорення матеріальної точки в неінерціальній системі відліку: $a_n = v_n^2 / r$. Вважаючи диск нерухомим, спостерігач, що знаходиться в неінерціальній системі відліку, яка пов'язана з цим диском, може

знайти силу, яка діє на матеріальну точку в неінерціальній системі відліку:

$$m a_n = m v_n^2 / r. \quad (1.5.2)$$

Скориставшись (1.5.1) та (1.5.2), отримаємо:

$$m a_n = F_{зовн} - 2\Omega v_n m - \Omega^2 r m. \quad (1.5.3)$$

Висновок: в неінерціальних системах відліку на додаток до справжньої сили $F_{зовн}$, дія якої зумовлена взаємодією тіла з фізичними об'єктами, з'являються дві «додаткові сили»: $(-2\Omega v_n m)$ та $(-\Omega^2 r m)$. Перша з них називається силою Коріоліса, друга – це відцентрова сила інерції. Обидві у нашому випадку орієнтовані від осі обертання диска. Але відцентрова сила інерції завжди орієнтована вздовж найкоротшої лінії, що з'єднує вісь обертання та положення матеріальної точки, а сила Коріоліса в загальному випадку залежить від взаємної орієнтації векторів швидкості руху об'єкта відносно неінерціальної системи відліку та кутової швидкості обертання неінерціальної системи відліку.

1.5.1. Теорема Коріоліса

Нехай положення рухомої неінерціальної системи відліку відносно нерухомої інерціальної системи відліку задається радіус-вектором $\vec{R}_0$. Положення матеріальної точки в неінерціальній системі відліку задається радіус-вектором $\vec{r}$, а в інерціальній системі відліку, відповідно, $\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{r}$. У загальному випадку рух неінерціальної системи можна описати в наступний спосіб. Центр неінерціальної системи відліку рухається з прискоренням відносно інерціальної системи відліку, і неінерціальна система відліку обертається з кутовою швидкістю $\vec{\Omega}$, яка змінюється як за абсолютною величиною, так і напрямком.

Оберемо в неінерціальній системі відліку орти $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ для опису положення матеріальної точки, тоді її радіус-вектор задається в такий спосіб: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Звернемо увагу на те,

що хоча орти $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ й лишаються незмінними за довжиною, однак через обертання неінерціальної системи відліку ці вектори змінюються за напрямком відносно інерціальної системи відліку:

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{i}, \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{j}, \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{k}. \quad (1.5.4)$$

Тому похідна від радіус-вектора $\vec{r}$ за часом не дорівнює швидкості матеріальної точки відносно неінерціальної системи відліку $\vec{v}_n$, а визначається так:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{dx}{dt} \vec{i} + x \frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + y \frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt} \vec{k} + z \frac{d\vec{k}}{dt} \\ &= (\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}) + \left(x\dot{\vec{i}} + y\dot{\vec{j}} + z\dot{\vec{k}} \right). \end{aligned} \quad (1.5.5)$$

Спостерігач у неінерціальній системі відліку вважає орти $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ незмінними за довжиною і напрямком, тому $(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}) = \vec{v}_n$,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \vec{v}_n + x[\vec{\Omega}, \vec{i}] + y[\vec{\Omega}, \vec{j}] + z[\vec{\Omega}, \vec{k}] \\ &= \vec{v}_n + [\vec{\Omega}, (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})] = \vec{v}_n + [\vec{\Omega}, \vec{r}]. \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

Швидкість матеріальної точки в інерціальній системі відліку визначається наступним чином: $\vec{v}_{in} = d\vec{R}/dt$. Позначимо швидкість руху неінерціальної системи відліку відносно інерціальної системи відліку: $d\vec{R}_0/dt \equiv \vec{V}_0$. Таким чином, швидкість матеріальної точки в інерціальній системі відліку визначається таким співвідношенням:

$$\vec{v}_{in} = d\vec{R}_0/dt + d\vec{r}/dt = \vec{V}_0 + \vec{v}_n + [\vec{\Omega} \times \vec{r}]. \quad (1.5.7)$$

Переносною швидкістю називають суму:

$$\vec{v}_{пер} = \vec{V}_0 + [\vec{\Omega} \times \vec{r}]. \quad (1.5.8)$$

Знайдемо тепер прискорення $\vec{a}_{in}$ матеріальної точки відносно інерціальної системи відліку, воно за визначенням дорівнює:

$$\begin{aligned} \vec{a}_{in} &= d\vec{v}_{in}/dt = d\vec{V}_0/dt + d\vec{v}_n/dt + [d\vec{\Omega}/dt, \vec{r}] + [\vec{\Omega}, d\vec{r}/dt] \\ &= d\vec{V}_0/dt + \vec{a}_n + [\vec{\Omega}, \vec{v}_n] + [d\vec{\Omega}/dt, \vec{r}] + [\vec{\Omega}, \vec{v}_n] + [\vec{\Omega}, [\vec{\Omega}, \vec{r}]]. \end{aligned} \quad (1.5.9)$$

Після зведення подібних отримуємо остаточно:

$$\vec{a}_{in} = d\vec{V}_0/dt + \vec{a}_n + 2[\vec{\Omega}, \vec{v}_n] + [d\vec{\Omega}/dt, \vec{r}] + [\vec{\Omega}, [\vec{\Omega}, \vec{r}]]. \quad (1.5.10)$$

Таким чином, ми довели теорему Коріоліса. Сформулюємо її: «При переході від інерціальної системи відліку до неінерціальної системи відліку матеріальна точка набуває додатково ще прискорення $\vec{a}_{кор}$ (прискорення Коріоліса) та $\vec{a}_{перен}$ (переносне прискорення)». Або в формі математичного виразу **теорема Коріоліса** має вигляд:

$$\vec{a}_{in} = \vec{a}_n + \vec{a}_{кор} + \vec{a}_{перен}. \quad (1.5.11)$$

Знаючи прискорення тіла відносно неінерціальної системи відліку $\vec{a}_n$, можна здобути його прискорення відносно інерціальної системи відліку $\vec{a}_{in}$, якщо додати до $\vec{a}_n$ ще переносне прискорення $\vec{a}_{перен}$ (воно нібито переносить спостерігача з неінерціальної системи відліку до інерціальної):

$$\vec{a}_{перен} = d\vec{V}_0/dt + [d\vec{\Omega}/dt, \vec{r}] + [\vec{\Omega}, [\vec{\Omega}, \vec{r}]], \quad (1.5.12)$$

та прискорення Коріоліса $\vec{a}_{кор}$:

$$\vec{a}_{кор} = 2[\vec{\Omega}, \vec{v}_n]. \quad (1.5.13)$$

Прискорення Коріоліса виділено окремо, бо воно виникає лише в разі, коли тіло рухається відносно неінерціальної системи відліку, $\vec{v}_n \neq 0$. Зазначимо також, що переносне прискорення не дорівнює похідній від переносної швидкості за часом: $\vec{a}_{перен} \neq d\vec{v}_{пер}/dt$.

До переносного прискорення входить подвійний векторний

добуток, який можна переписати в простіший спосіб. Цей доданок називають доцентровим прискоренням, бо його орієнтовано перпендикулярно до осі, навколо якої обертається матеріальна точка:

$$\vec{a}_{доц} = [\vec{\Omega}, [\vec{\Omega}, \vec{r}]] = \vec{\Omega} (\vec{\Omega}, \vec{r}) - \vec{r} \Omega^2 = -\vec{r}_{\perp} \Omega^2. \quad (1.5.14)$$

Отже, динаміку руху матеріальної точки в неінерціальних системах відліку визначають не тільки реальні (фізичні) сили, але й додаткові, тобто такі, що пов'язані з неінерціальністю системи відліку: $m \vec{a}_n = \sum \vec{F}_{зовн} + \vec{F}_{пер} + \vec{F}_{кор}$. А саме, виникають сила Коріоліса

$$\vec{F}_{кор} = -m \vec{a}_{кор} = 2m [\vec{v}_n, \vec{\Omega}] \quad (1.5.15)$$

та переносна сила $\vec{F}_{пер}$ інерції, що складається з трьох доданків:

$$\vec{F}_{пер} = -m d\vec{V}_0 / dt - m [d\vec{\Omega} / dt, \vec{r}] + \vec{r}_{\perp} m \Omega^2. \quad (1.5.16)$$

До складу переносної сили інерції входять дві сили інерції, які найчастіше зустрічаються в нашому побуті. Вони мають окремі назви: поступальна сила інерції

$$\vec{F}_{пост} = -m d\vec{V}_0 / dt \quad (1.5.17)$$

та відцентрова сила інерції

$$\vec{F}_{відц} = \vec{r}_{\perp} m \Omega^2. \quad (1.5.18)$$

Намалюємо для ілюстрації приклади орієнтації сил інерції: відцентрової сили (див. рис. 1.5.1) та сили Коріоліса (див. рис. 1.5.2). Застосуємо тепер теорему Коріоліса (1.5.11) для опису того простого випадку, що його розглядали на початку підрозділу 1.5. Оскільки центр диска (тобто центр неінерціальної системи відліку) є нерухомим і диск обертається зі сталою швидкістю, то $\vec{a}_{перен} = \vec{a}_{доц} = -\vec{r}_{\perp} \Omega^2$. Отже, рівняння (1.5.11) набуває наступного вигляду: $\vec{a}_{ін} = \vec{a}_n + 2[\vec{\Omega}, \vec{v}_n] - \vec{r}_{\perp} \Omega^2$, який повністю узгоджується з (1.5.1).

§ 1.5.2. Прояви сил інерції на Землі

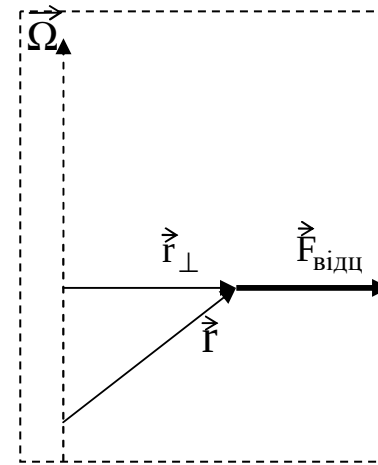


Рис. 1.5.1. В неінерціальній системі відліку, яка обертається із кутовою швидкістю $\vec{\Omega}$ відносно інерціальної системи відліку, на матеріальну точку, яка міститься в точці $\vec{r}$, відцентрова сила $\vec{F}_{відц} = \vec{r}_{\perp} m \Omega^2$ діє в напрямку від осі обертання, тобто в напрямку вектора $\vec{r}_{\perp}$

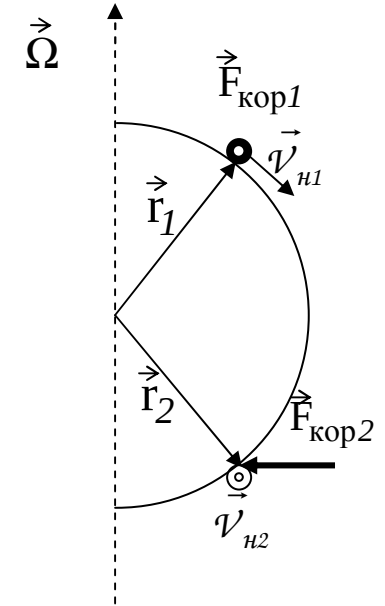


Рис. 1.5.2. Розглянемо неінерціальну систему відліку, яка пов'язана з Землею, тобто яка обертається із кутовою швидкістю $\vec{\Omega}$ відносно інерціальної системи відліку. В цій неінерціальній системі відліку на матеріальну точку 1, яка рухається у північній півкулі зі швидкістю $\vec{v}_{n1}$ вздовж меридіана на південь, сила Коріоліса $\vec{F}_{кор1}$ діє вздовж паралелі на захід, тобто перпендикулярно до площини рисунка у напрямку до читача. Якщо ж матеріальна точка 2 рухається зі швидкістю $\vec{v}_{n2}$ вздовж паралелі на захід, то сила Коріоліса $\vec{F}_{кор2}$ діє на цю точку у напрямку до осі обертання

Коли авто мчить з Харкова на південь (до Криму), то $\vec{F}_{кор1}$ орієнтована на захід. Коли авто мчить з Харкова на захід (до Києва), то $\vec{F}_{кор2}$ притискає авто до осі обертання Землі. Куди б та з якою швидкістю не їхало авто, але $\vec{F}_{відц}$ завжди зменшує його вагу, $\vec{F}_{відц} \parallel \vec{r}_\perp$ (ця сила інерції направлена від осі обертання Землі).

Якщо ви сидите, як гноми зі сказки Толкієна, на височенному дереві та кидаєте камінці у вовка, що чатує на вас під деревом, то слід брати до уваги, що сила Коріоліса відхиляє «снаряд» на схід (при цьому напрям відхилення є однаковим у будь-якій півкулі Землі).

Інший приклад: у Дніпра, що тече в північній півкулі на південь, правий (західний) берег є крутим. І у Рейна, що тече також у північній півкулі, але на північ, також правий берег є крутим, але тепер це вже – східний берег.

Цікавим проявом дії сили Коріоліса є маятник Фуко. Обертання площини, в якій відбуваються коливання маятника Фуко, навколо вертикальної осі є прямим підтвердженням добового обертання Землі.

Питання для самоконтролю до розділу § 1.5. Механічний рух матеріальної точки у неінерціальних системах відліку

1. Дайте визначення сили Коріоліса.
2. Дайте визначення відцентрової сили.
3. В який бік спрямовано силу Коріоліса, що діє на автівку, яка їде на північ у північній півкулі?
4. В який бік спрямовано відцентрову силу, що діє на автівку, яка їде на північ у північній півкулі?
5. В який бік спрямовано силу Коріоліса, що діє на автівку, яка їде на схід у північній півкулі?
6. В який бік спрямовано відцентрову силу, що діє на автівку, яка їде на схід у північній півкулі?
7. Чи залежить напрямок сили Коріоліса від напрямку вектора кутової швидкості обертання неінерціальної системи відліку?
8. Чи залежить напрямок відцентрової сили від напрямку вектора кутової швидкості обертання неінерціальної системи відліку?

§ 1.6. Обертальний рух абсолютно твердого тіла

Розглянемо обертальний рух абсолютно твердого тіла навколо нерухомої осі обертання. Застосуємо для опису цього руху рівняння моментів.

Якщо навколо осі обертається одна матеріальна точка, то траєкторія її руху – це коло радіуса $r_\perp$. Запишемо момент її імпульсу відносно осі обертання:

$$\vec{L} = [\vec{r} \times m\vec{v}]. \quad (1.6.1)$$

Беручи до уваги те, що $\vec{v} = \vec{e}_\tau r_\perp \omega$, модуль моменту імпульсу з виразу (1.6.1) можна переписати так: $L = m\omega r_\perp^2$.

Якщо навколо осі обертається система матеріальних точок з однаковою кутовою швидкістю ω , тобто абсолютно тверде тіло, то замість виразу (1.6.1) маємо:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{\omega} r_{\perp i}^2 = \vec{\omega} \sum_{i=1}^N m_i r_{\perp i}^2 = \vec{\omega} I, \quad (1.6.2)$$

де $I = \sum_{i=1}^N m_i r_{\perp i}^2$ – це момент інерції абсолютно твердого тіла

відносно даної осі обертання, m_i – це елементарна маса i -ї складової частини абсолютно твердого тіла, $r_{\perp i}$ – це найкоротша відстань від i -ї елементарної частинки абсолютно твердого тіла до осі обертання.

Отже, **рівняння моментів** для абсолютно твердого тіла, що обертається навколо закріпленої осі, має вигляд:

$$M_z = I \frac{d\omega}{dt}, \quad (1.6.3)$$

де M_z – проекція результуючого моменту зовнішніх сил на дану вісь обертання, що її позначено як вісь $\vec{z}$,

$$m_z = \vec{e}_z \cdot \sum [\vec{r}, \vec{F}_{зовн}].$$

Робота, яку виконують зовнішні сили при обертальному русі навколо нерухомої осі, дорівнює:

$$\delta A = F dS = Fr d\gamma = m d\gamma, \quad (1.6.4)$$

де γ – це кут обертання.

Кінетична енергія обертального руху абсолютно твердого тіла навколо закріпленої осі:

$$E_k = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i \omega^2 r_{\perp i}^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i r_{\perp i}^2 = \frac{\omega^2 I}{2} = \frac{\mathcal{L}^2}{2I}. \quad (1.6.5)$$

Проаналізувавши (1.6.5), можна дійти висновку, що форма запису для роботи та кінетичної енергії в даному випадку є аналогічною до випадку прямолінійного руху: момент інерції I є аналогом маси m , а момент імпульсу $\mathcal{L}$ – аналогом імпульсу p .

1.6.1. Теорема Гюйгенса–Штейнера

Знайдемо зв'язок між моментами інерції абсолютно твердого тіла відносно двох різних паралельних осей. Нехай ці осі проходять крізь точки O та A , тоді за теоремою косинусів квадрат відстані між точкою A та i -ю складовою абсолютно твердого тіла дорівнює: $r_i^2 = r_2^2 + a^2 - 2(\vec{a} \cdot \vec{r}_2)$. Це дозволить обчислити момент

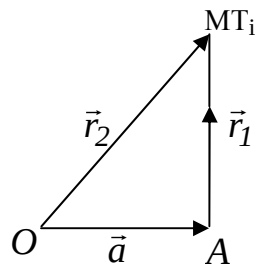


Рис. 1.6.1

інерції даного абсолютно твердого тіла відносно осі, що проходить крізь точку

$$A: \sum_i m_i r_{1i}^2 = \sum_i m_i (r_{2i}^2 + a^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{r}_{2i}).$$

Перепишемо це так:

$$I_A = I_O + ma^2 - 2m\vec{a} \cdot \vec{R}_C, \quad (1.6.6)$$

де $\vec{R}_C = \sum \vec{r}_{2i} m_i / m$ – це радіус-вектор центра мас відносно точки O . Якщо вісь

« O » проходить крізь центр мас $\vec{R}_C$, то попередня формула (1.6.6) спрощується:

$$I_A = I_O + ma^2. \quad (1.6.7)$$

За цих умов теорема Гюйгенса–Штейнера формулюється в наступний спосіб:

«Момент інерції даного абсолютно твердого тіла відносно осі « A » дорівнює його моменту інерції відносно осі, що є паралельною до « A » та проходить крізь центр мас абсолютно твердого тіла, плюс добуток маси даного абсолютно твердого тіла на квадрат відстані між зазначеними осями обертання».

1.6.2. Моменти інерції симетричних абсолютно твердих тіл

1) Порахуємо момент інерції циліндра відносно його осі симетрії у випадку однорідної густини матеріалу (див. рис. 1.6.2). Розіб'ємо умовно циліндр на циліндричні шари радіуса $0 \leq r \leq R$ і елементарної товщини dr , елементарна маса такого елементарного циліндричного шару $dm = \rho \cdot dV$, $dV = h 2\pi r dr$, h – висота циліндра. Елементарний момент інерції $dI = r^2 dm$. Момент інерції циліндра складається з елементарних моментів інерції циліндричних шарів:

Рис. 1.6.2

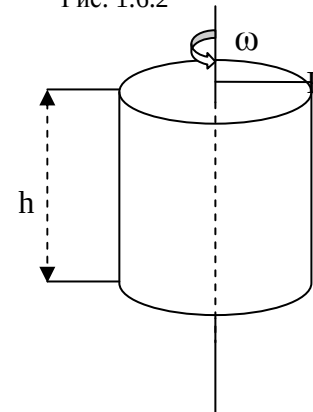
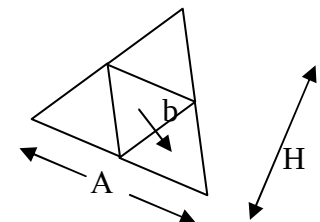


Рис. 1.6.3



$$I = \int dI = \int_0^R \rho h 2\pi r^3 dr = 2\pi \rho h \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^R = \left. \rho = \frac{m}{\pi R^2 h} \right| = \frac{m R^2}{2}. \quad (1.6.8)$$

2) Розглянемо випадок порожнистого циліндра, який має внутрішній радіус R_1 та зовнішній радіус R_2 . Тоді його маса $m = \rho \pi h (R_2^2 - R_1^2)$. Аналогічно до попереднього прикладу, з (1.6.8) маємо:

$$I = \int_{R_1}^{R_2} \rho h 2\pi r^3 dr = \frac{\pi}{2} \frac{m}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} (R_2^4 - R_1^4) = \frac{m}{2} (R_2^2 + R_1^2). \quad (1.6.9)$$

Цікаво, що цей момент інерції пропорційний до суми (а не різниці!) квадратів внутрішнього та зовнішнього радіусів. У випадку $R_1 = 0$ вираз (1.6.9) переходить в (1.6.8), а у випадку $R_1 = R_2$ дістаємо вираз для моменту інерції тонкого кільця відносно осі, що проходить крізь центр симетрії і є перпендикулярною до площини, в якій лежить кільце.

3) Розглянемо випадок тонкого порожнистого циліндра (наприклад, труби). За цих умов: $R_1^2 \approx R_2^2 \approx \langle R \rangle^2$. Тоді з виразу (1.6.9) дістанемо:

$$I \approx \frac{m}{2} [\langle R \rangle^2 + \langle R \rangle^2] = m \langle R \rangle^2. \quad (1.6.10)$$

4) Знайдемо момент інерції трикутника, усі сторони якого мають однакову довжину A з масою M , товщина якого є нехтовно малою, відносно осі, що є перпендикулярною до площини трикутника та проходить крізь його центр мас (див. рис. 1.6.3).

Розв'яжемо цю задачу, уникаючи процедури інтегрування,

за допомогою теореми Гюйгенса–Штейнера. Обчислимо висоту трикутника: $H = A \sin 60^\circ = \sqrt{3}A/2$. Відстань b між центрами сусідніх трикутників, на які умовно поділено весь трикутник (див. рис. 1.6.3), дорівнює: $b = (A/2) \operatorname{ctg} 60^\circ \approx A/(2\sqrt{3})$. За теоремою Гюйгенса–Штейнера моменти інерції трьох допоміжних трикутників дорівнюють сумі: $I_j = I_{oj} + b^2 M/4$. Згідно з визначенням момент інерції є пропорційним до маси і є квадратичною формою лінійних розмірів твердого тіла, тому момент інерції усього трикутника можна записати у наступному вигляді: $I = \alpha A^2 M$, де α – це певна константа, яку потрібно визначити.

Оскільки момент інерції є адитивною величиною, то момент інерції усього трикутника дорівнює сумі моментів інерції чотирьох маленьких трикутників зі сторонами $a = A/2$. Запишемо це: $I = \alpha a^2 M/4 + 3I_j = \alpha a^2 M/4 + 3[\alpha a^2 M/4 + Mb^2/4]$.

Враховуючи геометричне співвідношення між b і A , можна переписати вираз для моменту інерції I в такий спосіб:

$$I = \alpha a^2 M + \frac{MA^2}{16} = \alpha \cdot \frac{MA^2}{4} + \frac{MA^2}{16} = MA^2 \left(\frac{1}{16} + \frac{\alpha}{4} \right). \quad (1.6.11)$$

Але на початку цього дослідження було сказано, що з загальних міркувань момент інерції трикутника дорівнює: $I = \alpha MA^2$. Значить, $\alpha \cdot MA^2 = MA^2 (1/16 + \alpha/4)$, звідки можна знайти значення константи: $\alpha = 1/12$. Отже, момент інерції рівнобічного трикутника, товщина якого є нехтовно малою, відносно осі, що є перпендикулярною до площини трикутника та проходить крізь його центр мас, дорівнює:

$$I = A^2 M / 12. \quad (1.6.12)$$

5) Знайдемо момент інерції суцільної кулі радіуса R відносно осі, що проходить крізь її центр мас. За визначенням $I = \int r_\perp^2 dm$, де $dm = \rho dV = \rho dr d\varphi r^2 \sin \theta d\theta$ – це елементарна маса, яка записана через однорідну густину та елементарний об'єм прямокутного паралелепіпеда у сферичній системі координат, де φ