Министерство образования и науки Украины
Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
СБОРНИК ЗАДАЧ

Харьков – 2011

УДК 51-3:517.53(075.8)
ББК 22.161.5я73 + 32.973-018.2я73
П 18
Утверждено на заседании научно-методического совета Харьковского национального университета имени В.Н. Каразина (протокол № 1 от 28.01.2011).

Рецензенты:

кандитат физико-математических наук, доцент
Каткова Ольга Михайловна,
Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина,
кафедра теории функций и функционального анализа
механико-математического факультета,

кандитат физико-математических наук, доцент
Кондратьев Борис Викторович,
Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина,
заведующий кафедрой высшей математики
физического факультета

П 18 Линейная алгебра. Сборник задач: учебно-методическое пособие./ Составитель: Н.Д. Парфёнова. – Х.: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2011. – 40 с.

Данное пособие предназначено для студентов первого курса физического и радиофизического факультетов. Материал пособия разбит на темы, соответствующие темам практических занятий и даны задачи для аудиторной и домашней работы. Пособие является сборником дополнительных задач к учебному пособию С.Н. Зиненко "Линейная алгебра" [1]. В процессе изучения курса "Линейная алгебра" студенты должны выполнить два ИДЗ (индивидуальных домашних задания) [2]. В пособии приведен текст (без числовых данных) условий этих заданий.

УДК 51-3:517.53(075.8)
ББК 22.161.5я73 + 32.973-018.2я73

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Можно ли сказать, что негативное прошлое неизбежно определяет наше будущее? Неужели учеба в похой школе, не давшей блестящих знаний, обрекает молодых людей? Неужели в 17 лет ничего уже невозможно изменить? Конечно же нет. Люди наделены свободой воли. Мы сами выбираем какой будет наша жизнь. Все преподаватели желают своим ученикам и студентам самого лучшего, поэтому хотели бы объяснить, как сделать правильный выбор. Трудно ли изучить, все что требуется для того, что бы стать специолистом в выбранной профессии? Ничего невозможного никогда не требуется. Все предъявлямые к студентам в процессе учебы и на экзамнах требования просты, разумны и всем по силам их выполнить.

Данное пособие предназначено для студентов первого курса физического и радиофизического факультетов. Материал пособия разбит на темы, соответствующие темам практических занятий и даны задачи для аудиторной и домашней работы. Пособие является сборником дополнительных задач к учебному пособию С.Н. Зиненко "Линейная алгебра" [1] .

В процессе изучения курса "Линейная алгебра" студенты должны выполнить два ИДЗ (индивидуальных домашних задания) [2] . В пособии приведен текст (без числовых данных) условий этих заданий.

В процессе подготовки данного пособия был использован многолетний опыт преподавания этого курса на физическом и радиофизическом факультетах Харьковского национального университета имени В.Н. Каразина и учебную литературу из списка в конце пособия.

Автор выражает свою искреннюю благодарность С.Н. Зиненко, Н.И. Познахаревой, С.С. Апостолову и рецензентам Б.В. Кондратьеву и О.М. Катковой за критические замечания и ценные рекомендации.

1. Линейные пространства: определение, примеры. Линейно независимые системы векторов

Определение линейного пространства:

Множество L элементов любой природы называют *линейным пространством (ЛП) над полем* K, если

задано сложение элементов L, т.е. закон, по которому любым элементам $x, y \in L$ ставится в соответствие элемент из L, называемый суммой элементов x и y и обозначаемый $x \oplus y$;

задано умножение элемента на число (скаляр) $\alpha \in K$, т.е. закон, по которому любому элементу $x \in L$ и любому числу $\alpha \in K$ ставится в соответствие элемент из L, называемый произведением элемента x на число α и обозначаемый $\alpha \odot x$;

указанные законы (линейные операции) подчиняются следующим аксиомам линейного пространства:

1	$\forall x, y \in L$	$\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = \mathbf{y} \oplus \mathbf{x}$,	(коммутативность сложения)
2	$\forall x, y, z \in L$	$(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) \oplus \mathbf{z} = \mathbf{x} \oplus (\mathbf{y} \oplus \mathbf{z})$,	(ассоциативность сложения)
3	$\exists\, \theta \in L \ \ \forall x \in L$	$\mathbf{x} \oplus \theta = \mathbf{x}$,	(определение нейтрального элемента)
4	$\forall x \in L \ \ \exists (-x) \in L$	$\mathbf{x} \oplus (-\mathbf{x}) = \theta$,	(определение противоположного элемента)
5	$\forall \alpha \in K \ \ \forall x, y \in L$	$\alpha \odot (\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) = \alpha \odot \mathbf{x} \oplus \alpha \odot \mathbf{y}$,	(дистрибутивность сложения)
6	$\forall \alpha, \beta \in K \ \ \forall x \in L$	$(\alpha + \beta) \odot \mathbf{x} = \alpha \odot \mathbf{x} \oplus \beta \odot \mathbf{x}$,	(дистрибутивность сложения)
7	$\forall \alpha, \beta \in K \ \ \forall x \in L$	$(\alpha \cdot \beta) \odot \mathbf{x} = \alpha \odot (\beta \odot \mathbf{x})$,	(ассоциативность умножения на число)
8	$1 \in K, \ \ \forall x \in L$	$\mathbf{1} \odot \mathbf{x} = \mathbf{x}$.	(умножение на единицу поля)

Замечания:

1. Числовые поля: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

(На них определены сложение, вычитание, умножение и деление (кроме деления на 0) не выводящие из этого множества. Каждая операция над любыми двумя числами из этого множества даёт число из этого же множества.)

2. Линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ = *вещественное* линейное пространство.

Линейное пространство над полем $\mathbb{C}$ = *комплексное* линейное пространство.

Для краткости, часто употребляют термин *линейное пространство* не уточненяя поле.

3. Обозначать сложение, умножение, ноль и противотоложный элемент в поле и в ЛП одинаковыми значками не вполне хорошо, но очень удобно! Все формулы обычной школьной алгебры, которые осмысленны в данной ситуации, оказываются верными. Поэтому $\oplus$, $\odot$, $(-x)$ и θ будем использовать только на первых занятиях.

1.1. Образует ли линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ множество L с указанными операциями сложения и умножения на вещественное число ($n \in \mathbb{N}$)?

(a) $L = \mathcal{P}_n = \{$ множество многочленов с вещественными коэффициентами *степени не выше* n с обычными операциями сложения и умножения на число$\}$.

(b) $L = \{$ множество многочленов с вещественными коэффициентами *степени равной точно* n с обычными операциями сложения и умножения на число$\}$.

(c) $L = \{$ множество многочленов от x с вещественными коэффициентами степени не выше 5, у которых коэффициент при x^3 равен 0 с обычными операциями сложения и умножения на число$\}$.

(d) $L = \{$ множество столбцов с n вещественными различными элементами с поэлементными операциями сложения и умножения на число$\}$.

(e) $L = \mathbb{R}^* = \{$ множество положительных вещественных чисел, если сумму элементов x и y определить как их произведение $x \cdot y$, а произведение элемента x на вещественное число α — как степень $x^\alpha\}$.

(f) $L = \mathcal{C}_{[a,\, b]} = \{$ множество всех непрерывных функций на отрезке $[a,\, b]$ с поточечными операциями сложения и умножения на число$\}$.

1.2. Образует ли линейное пространство над полем $\mathbb{C}$ множество с указанными операциями сложения и умножения на комплексное число ($n, m \in \mathbb{N}$)?

(a) $L = \mathbb{C}^n = \{$ множество столбцов с n комплексными элементами с поэлементными операциями сложения и умножения на число$\}$.

(b) $L = \mathbb{C}_{m \times n} = \{$ множество $m \times n$ матриц с комплексными элементами с поэлементными операциями сложения и умножения на число$\}$.

1.3. Является ли система векторов линейно независимой в линейном пространстве L?

(a) $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}, \qquad L = \mathcal{P}_n.$

(b) $\{1, x - \alpha, (x - \alpha)^2, \ldots, (x - \alpha)^n\}, \qquad L = \mathcal{P}_n.$

(c) $\{1, x - \alpha, (x - \alpha)^2, x^2\}, \qquad L = \mathcal{P}_2.$

(d) $\{x, 2x\}, \qquad L = \mathcal{C}_{[a,\, b]}.$

(e) $\{\cos(x), \cos(2x), \cos(3x)\}, \qquad L = \mathcal{C}_{[0, \frac{\pi}{2}]}.$

Домашнее задание 1.

1.4. Образует ли линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ множество L с указанными операциями сложения и умножения на вещественное число?

(a) $L = \mathbb{R}^n = \{$ множество столбцов с n вещественными элементами с поэлементными операциями сложения и умножения на число$\}$.

(b) $L = \{$ множество столбцов с n вещественными элементами такими, что сумма всех элементов равна 1, с поэлементными операциями сложения и умножения на число$\}$.

(c) $L = \{$ множество столбцов с n вещественными элементами, равными друг другу с поэлементными операциями сложения и умножения на число$\}$.

(d) $L = \{$ множество многочленов от x с вещественными коэффициентами степени не выше 5, у которых коэффициент при x^3 равен 1 с обычными операциями сложения и умножения на число$\}$.

(e) $L = \{$ множество функций вида $A\cos(x+\alpha)$, где A и α — произвольные вещественные числа, с обычными операциями сложения и умножения на число$\}$.

(f) $L = \mathbb{C} = \{$ множество всех комплексных чисел с обычными операциями сложения и умножения на вещественное число$\}$.

1.5. Образует ли линейное пространство над полем $\mathbb{C}$ множество с указанными операциями сложения и умножения на комплексное число?

(a) $L = \{$ множество столбцов с n комплексными элементами, равными друг другу с поэлементными операциями сложения и умножения на число$\}$.

(b) $L = \{$ множество симметрических квадратных матриц n-го порядка с комплексными элементами с поэлементными операциями сложения и умножения на число (матрица $A = (a_{ij})_{n\times n}$ называется *симметричной*, если $A = A^T$, т.е. $a_{ij} = a_{j\,i},\ i,j = 1,\dots,n)\}$.

1.6. Является ли система векторов линейно независимой в линейном пространстве L?

(a) $\{x, x^2, 2x(x+3)\}, \qquad L = \mathcal{C}_{[a,\,b]}$.

(b) $\{\sin(x), \sin(2x), \sin(3x)\}, \qquad L = \mathcal{C}_{[0,\frac{\pi}{2}]}$.

(c) $\{\sin(x), \cos(x), \sin(x+2)\}$, L из задачи 1.4e.

(d) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}, \qquad L$ из задачи 1.5b, $n = 2$.

2. Полные системы векторов. Базис, размерность, координаты. Изоморфные пространства

2.1. Являются ли системы векторов из задачи 1.3 (a-e) полными в заданном линейном пространстве L?

2.2. Указать какой-либо базис в линейном пространстве L из задач 1.1 (a, c, e), 1.2 (a, b). Найти размерность L.

2.3. Найти координаты вектора f линейного пространства L в базисе $\triangle$.

(a) $f = 2\cos(x+3)$, L из задачи 1.4e, $\triangle = \{\cos x, \sin x\}$.

(b) $f = A\cos(x+\alpha)$, L из задачи 1.4e, $\triangle = \{\cos x, \sin x\}$.

(c) $f = 2 + 3x - 5x^2 + 4x^5$, $L = \mathcal{P}_n$, $\triangle = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$.

(d) $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, $L = \mathcal{P}_n$, $\triangle\{1, x-\alpha, (x-\alpha)^2, \ldots, (x-\alpha)^n\}$.

2.4. Являются ли одномерное пространство геометрических векторов и пространство из задачи 1.1e изоморфными.

Домашнее задание 2.

2.5. Являются ли системы векторов из задачи 1.6 (a-c) полными в заданном линейном пространстве L?

2.6. Указать какой-либо базис в линейном пространстве L из задач 1.4 (a, c, e, f), 1.5 (a, b). Найти размерность L.

2.7. Найти координаты вектора f линейного пространства L в базисе $\triangle$.

(a) $f = 2\sin(x+3)$, L из задачи 1.4e, $\triangle = \{\cos x, \sin x\}$.

(b) $f = A\sin(x+\alpha)$, L из задачи 1.4e, $\triangle = \{\cos x, \sin x\}$.

(c) $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, $L = \mathcal{P}_n$, $\triangle = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$.

(d) $f = -2 + 5x^2 + 4x^3$, $L = \mathcal{P}_n$, $\triangle = \{1, x-1, (x-1)^2, \ldots, (x-1)^n\}$.

2.8. Являются ли трехмерное пространство геометрических векторов и пространство строк, состоящих из 3 элементов, изоморфными.

3. Подпространства. Сумма и пересечение подпространств

3.1. Выяснить, является ли линейным подпространством данное множество M векторов в вещественном линейном пространстве L, и если является, то найти его размерность:

$\underline{L = \mathbb{R}^n}$ = { *вещественное координатное пространство — пространство столбцов высоты n с вещественными элементами*}.

(a) $M =$ { множество векторов, все координаты которых равны между собой}.

(b) $M =$ { множество векторов, сумма координат которых равна 1}.

$\underline{L = V_3}$ = { *геометрическое пространство — множество векторов пространства (направленных отрезков из общего начала)*}.

(c) $M =$ { множество векторов плоскости, параллельных данной прямой}.

(d) $M =$ { множество векторов x, для которых скалярное произведение с данным вектором $x_0 \neq 0$ равно a: $(x, x_0) = a$, где a – данное число}.

(e) $M =$ { множество векторов плоскости, образующих угол α с данной прямой $(0 \leq \alpha \leq \pi/2)$}.

$\underline{L = \mathbb{R}_{n\times n} = \mathcal{M}_{n,n}}$ = { *линейное пространство вещественных квадратных матриц n-го порядка*}.

(f) $M =$ { множество матриц с не нулевой первой строкой}.

(g) $M =$ { множество нижнетреугольных матриц}.

(h) $M =$ { множество кососимметрических матриц}.

(i) $M =$ { множество вырожденных матриц}.

$\underline{L = \mathcal{F}_{[a,b]}}$ = { *линейное пространство функций, определенных на* $[a, b]$}.

(j) $M =$ { множество функций, дифференцируемых на $[a, b]$}.

(k) $M =$ { множество функций таких, что $\sup\limits_{[a,b]} |f(x)| \leq 1$}.

(l) $M =$ { множество функций, неотрицательных на $[a, b]$}.

(m) $M =$ { множество функций таких, что $f(a) = 0$}.

(n) $M =$ { множество функций таких, что $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$}.

(o) $M =$ { множество функций, монотонных на $[a, b]$}.

3.2. Даны два подпространства $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$ линейного вещественного пространства $\mathbf{L}$. Найти базис и размерность суммы $\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$ и пересечения $\mathbf{L}_1 \bigcap \mathbf{L}_2$. Проверить справедливость формулы Грассмана.

$$\mathbf{L}_1 = \{x:\ x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \end{bmatrix}\}, \quad \mathbf{L}_2 = \{y:\ y = \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}, \quad \mathbf{L} = \mathbb{R}^6.$$

3.3. Является ли система векторов линейно зависимой в $\mathbb{R}^4$? Если да, то найти эту зависимость.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},\ a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix},\ a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

3.4. Найти базис и размерность линейной оболочки системы векторов в $\mathbb{R}^4$ или в $\mathbb{R}^5$, соответственно.

(a) $$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, a_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix};$$

(b) $$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, a_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -9 \\ -2 \\ 10 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

3.5. Найти базис и размерность суммы двух подпространств $\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$ в $\mathbb{R}^5$.

$$\mathbf{L}_1 = \mathrm{Lin}\{a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}\},\ \mathbf{L}_2 = \mathrm{Lin}\{b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -9 \\ -2 \\ 10 \\ -6 \end{bmatrix}\}.$$

Домашнее задание 3.

3.6. Выяснить, является ли линейным подпространством данное множество M векторов в вещественном линейном пространстве L, и если является, то найти его размерность:

$\underline{L = \mathbb{R}^n}$

(a) $M = \{$ множество векторов, первая координата которых равна $0\}$.

(b) $M = \{$ множество векторов, сумма координат которых равна $0\}$.

$\underline{L = V_3}$

(a) $M = \{$ множество векторов, перпендикулярных данной прямой$\}$.

(b) $M = \{$ множество векторов x, для которых векторное произведение с данным вектором $x_0 \neq 0$ равно a: $[x, x_0] = a$, где a — данный вектор$\}$.

(c) $M = \{$ множество векторов, по модулю не превосходящих $1\}$.

$\underline{L = \mathbb{R}_{n\times n} = \mathcal{M}_{n,n}}$

(a) $M = \{$ множество диагональных матриц$\}$.

(b) $M = \{$ множество верхне треугольных матриц$\}$.

(c) $M = \{$ множество симметрических матриц$\}$.

(d) $M = \{$ множество матриц X, удовлетворяющих условию $AX = XA$, где A – данная $n \times n$-матрица$\}$.

$\underline{L = \mathcal{F}_{[a,b]}}$

(a) $M = \{$ множество функций, интегрируемых по Риману на $[a, b]\}$.

(b) $M = \{$ множество функций, ограниченных на $[a, b]\}$.

(c) $M = \{$ множество функций, отрицательных на $[a, b]\}$.

(d) $M = \{$ множество функций таких, что $f(a) = 1\}$.

(e) $M = \{$ множество функций таких, что $f(a) = f(b)\}$.

(f) $M = \{$ множество функций, монотонно возрастающих на $[a, b]\}$.

3.7. (**№1.4.**) Даны два подпространства $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$ линейного вещественного пространства $\mathbf{L}$. Найти базис и размерность суммы $\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$ и пересечения $\mathbf{L}_1 \bigcap \mathbf{L}_2$. Проверить справедливость формулы Грассмана.

$$\mathbf{L}_1 = \{p(t) : p(t) = a_0 + a_1 t^1 + a_2 t^2 + a_3 t^3\},$$

$$\mathbf{L}_2 = \{q(t) : q(t) = b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4\},$$

$$\mathbf{L} = \mathcal{P}_4$$

3.8. (**№2.1.**) Является ли система векторов линейно зависимой в $\mathbb{R}^4$? Если да, то найти эту зависимость.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix}, a_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

3.9. (**№2.2.**) Найти базис и размерность линейной оболочки системы векторов в $\mathbb{R}^4$ или в $\mathbb{R}^5$, соответственно.

(a) $$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, a_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b) $$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -5 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}, a_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 4 \\ -8 \\ -14 \end{bmatrix}$$

3.10. (**№2.3.**)Найти базис и размерность суммы двух подпространств $\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$ в $\mathbb{R}^5$.

$$\mathbf{L}_1 = \mathrm{Lin}\{a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\}, \ \mathbf{L}_2 = \mathrm{Lin}\{b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}\}.$$

Теоретические вопросы к самостоятельным работам №1 и №2:

1. Определение линейно независимой системы векторов в линейном пространстве L над полем K.

2. Определение линейно зависимой системы векторов в линейном пространстве L над полем K.

3. Определение базиса в линейном пространстве L над полем K.

4. Определение размерности линейного пространства L над полем K.

5. Определение полной системы векторов в линейном пространстве L над полем K.

6. Определение нейтрального элемента линейного пространства L над полем K (аксиома 3).

7. Определение противоположного элемента в линейном пространстве L над полем K (аксиома 4).

4. Матрицы

4.1. Найти ранг матрицы. Указать базисные строки и столбцы.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 8 & 1 & -4 \\ -1 & 3 & 3 & -13 & -3 & 9 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -1 & 9 & 1 & -4 \\ -3 & -3 & -1 & 7 & 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

4.2. Умножить матрицу A на вектор $x : y = Ax$.

(a) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$

4.3. Выполнить действия над матрицами αA, $A + B$, AC, CA.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

4.4. Найти непосредственно явное выражение переменных $\{z_1, z_2, \ldots\}$ через переменные $\{x_1, x_2, \ldots\}$. Проверить, что матрица C результирующего отображения $z = Cx$ равна $C = AB$, если $z = Ay$, $y = Bx$.

$$\left[\begin{array}{rcrr} z_1 = & & y_1- & y_2 \\ z_2 = & & -2y_1+ & y_2 \\ z_3 = & & y_1+ & y_2 \end{array} \right., \left[\begin{array}{rrrrr} y_1 = & -x_1+ & 2x_2- & x_3+ & x_4 \\ y_2 = & x_1 & + & 2x_3- & x_4 \end{array} \right. .$$

Домашнее задание 4.

4.5. (**№2.4.**) Найти ранг матрицы. Указать базисные строки и столбцы.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 6 & -4 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & -4 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 8 & -6 & -3 & 5 \end{bmatrix};$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 6 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 5 & -1 & -3 & 4 \\ 3 & -6 & 8 & -2 & -3 & 5 \end{bmatrix}.$

4.6. (**№6.1.**) Умножить матрицу A на вектор $x : y = Ax$.

(a) $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$

4.7. (**№6.3.**) Выполнить действия над матрицами αA, $A+B$, AC, CA.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 4 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

4.8. (**№6.4.**) Найти непосредственно явное выражение переменных $\{z_1, z_2, \ldots\}$ через переменные $\{x_1, x_2, \ldots\}$. Проверить, что матрица C результирующего отображения $z = Cx$ равна $C = AB$, если $z = Ay$, $y = Bx$.

$$\left[\begin{array}{l} z_1 = y_1 - 3y_2 \\ z_2 = -2y_1 + y_2 \\ z_3 = y_1 + 2y_2 \end{array} \right., \left[\begin{array}{l} y_1 = -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \\ y_2 = 4x_1 + x_3 - 3x_4 \end{array} \right. .$$

5. Определители.

5.1. Определить число инверсий в перестановке $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

5.2. Подоборать j и k так, чтобы перестановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 7 & 4 & j & 5 & 6 & k & 9 \end{pmatrix}$ была четной.

5.3. Выяснить, какие из приведеных произведений входят в определитель соответствующего порядка и с каким знаком:

(a) $a_{43}a_{21}a_{35}a_{12}a_{54}$

(b) $a_{13}a_{24}a_{23}a_{41}a_{55}$

(c) $a_{61}a_{23}a_{45}a_{36}a_{12}a_{54}$

5.4. Найти определитель матрицы, раскрывая по элементам строки (столбца).

$$(a)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 0 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{bmatrix},(b)\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 7 & 0 \\ 9 & 2 & 1 & 9 & 0 \\ 8 & 0 & 7 & 14 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix},(c)\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.5. Найти определитель матрицы, применяя метод Гаусса.

$$(a)\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix},(b)\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix},(c)\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.6. Показать, что система векторов $\{a_1, a_2, \ldots\}$ образует базис и найти разложение вектора b по этому базису. (Ср. тема 5, задача 3)

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, a_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

5.7. Найти ранг матрицы и указать базисный минор. (Ср. тема 2, задача 4)

$$\text{(a)}\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix};\ \text{(b)}\ \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 8 & 1 & -4 \\ -1 & 3 & 3 & -13 & -3 & 9 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -1 & 9 & 1 & -4 \\ -3 & -3 & -1 & 7 & 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Домашнее задание 5.

5.8. Определить число инверсий в перестановке $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

5.9. Подоборать j и k так, чтобы перестановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & j & 2 & 5 & k & 4 & 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}$ была нечетной.

5.10. Выяснить, какие из приведеных произведений входят в определитель соответствующего порядка и с каким знаком:

(a) $a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$

(b) $a_{27}a_{36}a_{51}a_{75}a_{25}a_{43}a_{62}$

(c) $a_{33}a_{16}a_{72}a_{27}a_{55}a_{61}a_{44}$

5.11. (**№5.1.**) Найти определитель матрицы, раскрывая по элементам строки (столбца).

$$(a)\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 \end{bmatrix}, (b)\begin{bmatrix} 5 & 7 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 9 & 3 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 8 & 5 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, (c)\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

5.12. (**№5.2.**)Найти определитель матрицы, применяя метод Гаусса.

$$(a)\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & -8 & -13 \end{bmatrix}, (b)\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -6 & -14 & -12 \\ 1 & -2 & -2 & -8 & 1 \end{bmatrix}, (c)\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

5.13. (**№5.3.**) Показать, что система векторов $\{a_1, a_2, \ldots\}$ образует базис и найти разложение вектора b по этому базису.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, a_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5.14. (**№5.4.**) Найти ранг матрицы и указать базисный минор.

$$\text{(a)}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & -3 & 2 \\ 2 & 10 & 7 & -6 & 5 \\ 2 & 0 & 2 & -6 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}. \text{(b)}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 6 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 5 & -1 & -3 & 4 \\ 3 & -6 & 8 & -2 & -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

6. Системы линейных уравнений (метод Гаусса)

6.1. Найти

- общее решение однородной системы линейных уравнений с n неизвестными;
- ранг матрицы системы ($rang\, A$);
- базис и размерность подпространства решений $\mathbf{L}_0$;
- проверить справедливость равенства $rang\, A + dim\, \mathbf{L}_0 = n$.

(a) $$\left\{\begin{array}{rrrrrr} x_1+ & 2x_2+ & 3x_3+ & 4x_4 = & 0 \\ x_1+ & x_2+ & 2x_3+ & 3x_4 = & 0 \\ x_1+ & 5x_2+ & x_3+ & 2x_4 = & 0 \\ x_1+ & 5x_2+ & 5x_3+ & 2x_4 = & 0 \end{array}\right.$$

(b) $$\left\{\begin{array}{rrrrrr} -x_1+ & x_2- & 3x_3- & 4x_4+ & 4x_5 = & 0 \\ -3x_1- & 2x_2- & x_3+ & 3x_4+ & 2x_5 = & 0 \\ x_1+ & x_2- & x_3- & 2x_4 & = & 0 \\ -x_1+ & 2x_2- & 5x_3- & 5x_4+ & 6x_5 = & 0 \\ & x_2- & 2x_2- & x_4+ & 2x_5 = & 0 \end{array}\right.$$

6.2. Найти

- общее решение неоднородной системы m линейных уравнений с n неизвестными;
- ранги матрицы $rang\, A$ и расширенной матрицы $rang\, \overline{A}$ системы;
- базис и размерность подпространства решений $\mathbf{L}_0$ соответствующей однородной системы;
- общее решение соответствующей однородной системы линейных уравнений;
- частное решение данной неоднородной системы линейных уравнений.

(a) $$\left\{\begin{array}{rrrrr} 5x_1- & 3x_2+ & 3x_3+ & 4x_4 = & 3 \\ 4x_1- & 2x_2+ & 3x_3+ & 7x_4 = & 1 \\ 8x_1- & 6x_2- & x_3- & 5x_4 = & 9 \\ 7x_1- & 3x_2+ & 7x_3+ & 17x_4 = & -1 \end{array}\right.$$

(b) $$\left\{\begin{array}{rrrrrr} x_1- & 2x_2+ & 4x_3- & 6x_4+ & 3x_5 = & -3 \\ -x_1+ & 3x_2- & 7x_3+ & 8x_4- & 5x_5 = & 6 \\ -x_1+ & 2x_2- & 4x_3+ & 6x_4- & 3x_5 = & 3 \\ -x_1- & 2x_2+ & 8x_3- & 2x_4+ & 5x_5 = & -9 \end{array}\right.$$

(c) $$\left\{\begin{array}{rrrrrr} x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4+ & x_5 = & 1 \\ x_1+ & 2x_2+ & x_3+ & x_4+ & x_5 = & 0 \\ x_1+ & x_2+ & 3x_3+ & x_4+ & x_5 = & 3 \\ x_1+ & x_2+ & x_3+ & 4x_4+ & x_5 = & -2 \\ x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4+ & 5x_5 = & 5 \end{array}\right.$$

6.3. Найти решение систем с 2-мя неизвестными и дать геометрическую интерпретацию.

$(a)\ \left\{\begin{array}{rrr} 2x+ & y = & 4 \\ x- & y = & 8 \end{array}\right., (b)\ \left\{\begin{array}{rrr} 2x+ & y = & 4 \\ 2x+ & y = & 5 \end{array}\right., (c)\ \left\{\begin{array}{rrr} 2x+ & y = & 4 \\ -2x- & y = & -4 \end{array}\right..$

6.4. Найти решение систем с 3-мя неизвестными и дать геометрическую интерпретацию.

$(a)\ \left[\begin{array}{rrrr} x- & 2y+ & z = & 1 \\ 2x- & 3y+ & 4z = & 5 \\ -2x+ & y- & 7z = & -10 \end{array}\right., (b)\ \left[\begin{array}{rrrr} x- & 2y+ & z = & 1 \\ 2x- & 3y+ & 4z = & 5 \\ x- & y+ & 3z = & 4 \end{array}\right.,$

$(c)\ \left[\begin{array}{rrrr} x- & 2y+ & z = & 1 \\ 2x- & 4y+ & 2z = & 2 \\ -3x+ & 6y- & 3z = & -3 \end{array}\right., (d)\ \left[\begin{array}{rrrr} x- & 2y+ & z = & 1 \\ 2x- & 3y+ & 4z = & 5 \\ x- & y+ & 3z = & 0 \end{array}\right.,$

$(e)\ \left[\begin{array}{rrrr} x- & 2y+ & z = & 1 \\ 2x- & 4y+ & 2z = & 0 \\ -3x+ & 6y- & 3z = & -1 \end{array}\right..$

Домашнее задание 6.

6.5. (**№3.3.**) Найти
- общее решение однородной системы линейных уравнений с n неизвестными;
- ранг матрицы системы ($rang\,A$);
- базис и размерность подпространства решений $\mathbf{L}_0$;
- проверить справедливость равенства $rang\,A + dim\,\mathbf{L}_0 = n$.

(a) $\left\{\begin{array}{rrrrr} x_1- & 3x_2+ & 4x_3+ & 5x_4 = & 0 \\ 2x_1- & 5x_2+ & 7x_3+ & 8x_4 = & 0 \\ x_1- & x_2+ & 2x_3+ & x_4 = & 0 \end{array}\right.$

(b) $\left\{\begin{array}{rrrrrr} x_1- & 2x_2+ & 3x_3+ & 2x_4+ & 6x_5 = & 0 \\ 2x_1- & 3x_2+ & 6x_3+ & 4x_4+ & 10x_5 = & 0 \\ x_1- & x_2+ & 3x_3+ & 2x_4+ & 4x_5 = & 0 \end{array}\right.$

(c) $\left\{\begin{array}{rrrrrr} 2x_1- & x_2- & 2x_3+ & 2x_4- & 3x_5 = & 0 \\ x_1- & 2x_2- & 4x_3+ & 4x_4- & 3x_5 = & 0 \\ -3x_1- & 3x_2- & 6x_3+ & 6x_4 & = & 0 \\ x_1- & x_2- & 2x_3+ & 2x_4- & 2x_5 = & 0 \end{array}\right.$

6.6. (**№3.4.**) Найти
- общее решение неоднородной системы m линейных уравнений с n неизвестными;
- ранги матрицы $rang\,A$ и расширенной матрицы $rang\,\overline{A}$ системы;
- базис и размерность подпространства решений $\mathbf{L}_0$ соответствующей однородной системы;

- общее решение соответствующей однородной системы линейных уравнений;
- частное решение данной неоднородной системы линейных уравнений.

(a) $\left\{\begin{array}{rrrrrr} x_1- & x_2+ & 4x_3- & 4x_4 = & 2 \\ 2x_1- & x_2+ & 6x_3- & 7x_4 = & 4 \\ -x_1- & 2x_2+ & 2x_3+ & x_4 = & -2 \end{array}\right.$

(b) $\left\{\begin{array}{rrrrrrr} -2x_1+ & 3x_2+ & 7x_3+ & 3x_4- & 13x_5 = & -1 \\ x_1+ & 2x_2 & + & 9x_4- & 4x_5 = & -3 \\ -x_1- & x_2+ & x_3- & 6x_4+ & x_5 = & 2 \\ 3x_1+ & 2x_2- & 4x_3+ & 15x_4 & = & -5 \end{array}\right.$

(c) $\left\{\begin{array}{rrrrrr} x_1- & 3x_2+ & 3x_3+ & 8x_4 = & 7 \\ x_1- & 2x_2+ & 6x_3+ & 9x_4 = & 1 \\ -x_1+ & 2x_2- & 5x_3- & 8x_4 = & -2 \\ 2x_1+ & 2x_2+ & x_3- & 5x_4 = & -5 \end{array}\right.$

6.7. (**№3.1.**) Найти решение систем с 2-мя неизвестными и дать геометрическую интерпретацию.

$(a)\ \left[\begin{array}{rrr} x- & 3y = & -2 \\ 2x- & 5y = & -3 \end{array}\right.,(b)\ \left[\begin{array}{rrr} x- & 3y = & -2 \\ -2x+ & 6y = & 4 \end{array}\right.,(c)\ \left[\begin{array}{rrr} x- & 3y = & -2 \\ -2x+ & 6y = & 2 \end{array}\right..$

6.8. (**№3.2.**) Найти решение систем с 3-мя неизвестными и дать геометрическую интерпретацию.

$(a)\ \left[\begin{array}{rrrr} x+ & 3y- & z = & 4 \\ -2x- & 5y & = & -11 \\ 2x+ & 8y- & 5z = & 4 \end{array}\right.,(b)\ \left[\begin{array}{rrrr} x+ & 3y- & z = & 4 \\ -2x- & 5y & = & -11 \\ x+ & 2y+ & z = & 7 \end{array}\right.,$

$(c)\ \left[\begin{array}{rrrr} x+ & 3y- & z = & 4 \\ -x- & 3y+ & z = & -4 \\ 2x+ & 6y- & 2z = & 8 \end{array}\right.,(d)\ \left[\begin{array}{rrrr} x+ & 3y- & z = & 4 \\ -2x- & 5y & = & -11 \\ x+ & 2y+ & z = & 0 \end{array}\right.,$

$(e)\ \left[\begin{array}{rrrr} x+ & 3y- & z = & 4 \\ -x- & 3y+ & z = & 0 \\ 2x+ & 6y- & 2z = & 1 \end{array}\right..$

7. Приложения систем линейных уравнений

7.1. Является ли система векторов линейно зависимой в $\mathbb{R}^4$? Если да, то найти эту зависимость. (См. 3.3).

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, a_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

7.2. Выяснить, принадлежит ли вектор b линейной оболочке $Lin\{a_1, a_2, \ldots\}$. Найти все разложения вектора b по системе $\{a_1, a_2, \ldots\}$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \\ 0 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}, a_4 = \begin{bmatrix} -7 \\ -17 \\ 2 \\ -7 \\ -5 \end{bmatrix}, a_5 = \begin{bmatrix} 9 \\ 21 \\ 0 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ 0 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

7.3. Показать, что система векторов Δ образует базис в $\mathbb{R}^5$ и найти разложение вектора b по этому базису.

$$\Delta = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix} \}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

7.4. Найти базис и размерность пересечения двух подпространств $\mathbf{L}_1 \bigcap \mathbf{L}_2$ в $\mathbb{R}^5$. Проверить справедливость формулы Грассмана. (См. 3.5).

$$\mathbf{L}_1 = L\{a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}\},\ \mathbf{L}_2 = L\{b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}\}.$$

Домашнее задание 7.

7.5. (**№4.1.**) Является ли система векторов линейно зависимой в $\mathbb{R}^4$? Если да, то найти эту зависимость.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, a_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}$$

7.6. (**№4.2.**) Выяснить, принадлежит ли вектор b линейной оболочке векторов $L\{a_1, a_2, \ldots\}$. Найти все разложения вектора b по системе $\{a_1, a_2, \ldots\}$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix}, a_4 = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 5 \\ -9 \\ -8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

7.7. (**№4.3.**)Показать, что система векторов $\{a_1, a_2, \ldots\}$ образует базис и найти разложение вектора b по этому базису.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, a_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

7.8. (**№4.4.**) Найти базис и размерность пересечения двух подпространств $\mathbf{L}_1 \bigcap \mathbf{L}_2$ в $\mathbb{R}^5$. Проверить справедливость формулы Грассмана.

$$\mathbf{L}_1 = Lin\{a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\}, \; \mathbf{L}_2 = Lin\{b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}\}$$

8. ИДЗ I

8.1. Применяя метод Гаусса, найти

(a) базис и размерность линейной оболочки столбцов $Lin\{q_1, q_2, \ldots\}$ и строк $Lin\{p_1, p_2, \ldots\}$ матрицы A;

(b) $rang\ A$, базисные строки и столбцы.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & -2 & -6 & 5 \\ -3 & -2 & -3 & 1 & 0 & -9 \\ -3 & -3 & -3 & 0 & 0 & -6 \\ 2 & -3 & 2 & -5 & 0 & 19 \end{bmatrix}$$

8.2. Применяя метод Гаусса, найти

(a) общее решение x_{OH} системы линейных неоднородных уравнений $Ax = b$;

(b) ранги матрицы системы A и расширенной матрицы системы $\overline{A} = [A \,|\, b]$;

(c) общее решение x_{oo} соответствующей однородной системы $Ax = 0$, базис и размерность подпространства ее решений L_0 ;

(d) частное решение $x_{чн}$ данной неоднородной системы;

(e) проверить непосредственно справедливость равенств

$$Ax_{oo} = 0, \qquad Ax_{чн} = b$$

.

$$\left[\begin{array}{rrrrrrr} 1x_1+ & 1x_2- & 2x_3+ & 0x_4+ & 0x_5 = & -1 \\ 2x_1+ & 3x_2- & 5x_3+ & 0x_4+ & 1x_5 = & -4 \\ 1x_1+ & 2x_2- & 3x_3+ & 0x_4+ & 1x_5 = & -3 \\ -3x_1+ & 1x_2+ & 2x_3+ & 0x_4+ & 4x_5 = & -5 \end{array}\right.$$

8.3. Применяя метод Гаусса, найти $det\, A$:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

Домашнее задание 8.

8.4. Выполните свое индивидуальное задание.

8.5. Выучите вопросы "допуска":

(a) Дайте определение *линейно независимой системы* векторов в линейном пространстве L над полем K.

(b) Дайте определение *линейно зависимой системы* векторов в линейном пространстве L над полем K.

(c) Дайте определение *противоположного элемента* к элементу x в линейном пространстве L над полем K.

(d) Дайте определение *базиса* в линейном пространстве L над полем K.

(e) Дайте определение *размерности* линейного пространства L над полем K.

(f) Дайте определение *нейтрального элемента* в линейном пространстве L над полем K.

(g) Дайте определение *полной системы векторов* в линейном пространстве L над полем K.

(h) Дайте определение *ранга матрицы*.

(i) Сформулируйте *теорему о разложении определителя по i-й строке*.

(j) Сформулируйте *теорему о разложении определителя по j-му столбцу*.

(k) Сформулируйте *теорему Крамера*.

(l) Сформулируйте *теорему Кронекера-Капелли*.

9. Линейные операторы и их матрицы в данном базисе. Ядро и образ оператора. Обратный оператор

9.1. Проверить линейность оператора $\mathbf{A}$. Найти его матрицу $A = A_{\{e,f\}}$ в базисах $\{e, f\}$.

(a) $\mathbf{A} : \mathbb{V}_3 \to \mathbb{V}_3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}\vec{x} = [\vec{x}, \vec{a}], \qquad \{e\} = \{f\} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

(b) $\mathbf{D} : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n-1} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{D}P)(t) = \frac{d}{dt}P(t), \qquad \{e\} = \{f\} = \{1, t, t^2, \cdots\}$.

(c) $\mathbf{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}x = \begin{bmatrix} 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 \\ 2x_1 + 5x_3 \\ x_2 - x_4 \end{bmatrix}$,

$\{e\}, \{f\}$ – канонические базисы в $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$.

9.2. Найти базис и размерность образа Ran $\mathbf{A}$ и ядра Ker $\mathbf{A}$ оператора $\mathbf{A}$, задаваемого матрицей $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 4 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 6 & -5 & 0 \\ -3 & 3 & 5 & -14 & 9 & -4 \\ 2 & -3 & -4 & 12 & -8 & 4 \end{bmatrix}$.

9.3. Найти обратную матрицу $A^{-1} = \frac{1}{detA}\widetilde{A}^T$: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

9.4. Найти обратную матрицу A^{-1} по методу Гаусса: $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 9 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

9.5. Выразить явно переменные $\{x_1, x_2, \ldots\}$ через переменные $\{y_1, y_2, \ldots\}$ и выяснить связь между матрицами линейных преобразований $y = Ax$ и $x = By$.

$$\begin{cases} y_1 = -x_1 + x_2 + 2x_4 \\ y_2 = 2x_1 - x_2 - 6x_4 \\ y_3 = -3x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 \\ y_4 = 2x_1 - 5x_2 + x_3 + 2x_4 \end{cases}.$$

9.6. Решить матричные уравнения $AX = C$, $YB = C$, $AZB = C$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad Y \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} Z \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Домашнее задание 9.

9.7. (**№6.2.**) Проверить линейность оператора $\mathbf{A}$. Найти его матрицу A в базисах $\{e, f\}$.

$\mathbf{C} : \mathbb{V}_3 \to \mathbb{V}_3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C}\vec{x} = [[\vec{x}, \vec{a}], \vec{b}], \quad \{e\} = \{f\} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}.$

$\mathbf{J} : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n-1} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{J}P)(t) = \int\limits_0^t P(\tau)d\tau, \quad \{e\} = \{f\} = \{1, t, t^2, \cdots\}.$

$\mathbf{D} : \mathcal{P}_n^\lambda \to \mathcal{P}_n^\lambda \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{D}P^\lambda)(t) = \frac{d}{dt}P^\lambda(t), \quad \{e\} = \{f\} = \{e^{\lambda t}1, e^{\lambda t}\frac{t}{1!}, e^{\lambda t}\frac{t^2}{2!}, \cdots\}.$

Замечание. $\mathcal{P}_n^\lambda$ - пространство квазиполиномов $P^\lambda(t) = e^{\lambda t}(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots)$, где λ - некоторое фиксированное вещественное число.

9.8. (**№7.1.**) Найти базис и размерность образа $Ran\,\mathbf{A}$ и ядра $Ker\,\mathbf{A}$ оператора $\mathbf{A}$, задаваемого матрицей $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 6 & 4 & 10 & 1 \\ -3 & -3 & -9 & -6 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

9.9. (**№7.4.**) Найти обратную матрицу $A^{-1} = \frac{1}{detA}\widetilde{A}^T$: $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$.

9.10. (**№7.5.**) Найти обратную матрицу A^{-1} по методу Гаусса: $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & -4 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

9.11. (**№7.6.**) Выразить явно переменные $\{x_1, x_2, \ldots\}$ через переменные $\{y_1, y_2, \ldots\}$ и выяснить связь между матрицами линейных преобразований $y = Ax$ и $x = By$.

$$\left[\begin{array}{l} y_1 = x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \\ y_2 = 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 \\ y_3 = x_1 - x_2 + 3x_3 \\ y_4 = -x_1 + x_2 - 2x_4 \end{array}\right. .$$

9.12. (**№7.7.**) Решить матричные уравнения $AX = C$, $YB = C$, $AZB = C$.

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad X \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

10. Матрица перехода к новому базису. Обратный оператор

10.1. Построить матрицу перехода T от старого базиса $\{e\}$ к новому $\{f\}$ в пространстве $\mathcal{P}_3$ и матрицу перехода S от нового базиса к старому. Проверить, что $S = T^{-1}$.

$\{e\} = \{1, t, t^2, t^3\}; \qquad \{f\} = \{1, (t - t_0), (t - t_0)^2, (t - t_0)^3\}$

10.2. Найти непосредственно координаты x, $\widetilde{x}$ вектора $P(t)$ в старом и новом базисах (см. задачу 10.1). Проверить справедливость формул $x = T\widetilde{x}$, $\widetilde{x} = T^{-1}x$.

10.3. Найти непосредственно матрицы D, $\widetilde{D}$ оператора дифференцирования $\mathbf{D} = \frac{d}{dt}$ в старом и новом базисах (см. задачу 10.1). Проверить справедливость формулы $D = T\widetilde{D}T^{-1}$.

10.4. Показать, что система векторов $\{f_1, \ldots, f_4\} \in \mathbb{R}^4$ образует базис. Найти матрицу перехода T от старого (канонического) базиса $\{e\}$ к новому $\{f\}$. Показать, что матрица перехода S от нового базиса $\{f\}$ к старому $\{e\}$ равна $S = T^{-1}$.

$$f_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, f_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}, f_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}, f_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Домашнее задание 10.

10.5. (**№8.1.**) Построить матрицу перехода T от старого базиса $\{e\}$ к новому $\{f\}$ в пространстве $\mathcal{P}_3$ и матрицу перехода S от нового базиса к старому. Проверить, что $S = T^{-1}$: $\quad \{e\} = \{1, t, t^2, t^3\}; \qquad \{f\} = \{1, \frac{t}{1!}, \frac{t^2}{2!}, \frac{t^3}{3!}\}$

10.6. (**№8.2.**) Найти непосредственно координаты x, $\widetilde{x}$ вектора $P(t)$ в старом и новом базисах (см. задачу 10.5). Проверить справедливость формул $x = T\widetilde{x}$, $\widetilde{x} = T^{-1}x$.

10.7. (**№8.3.**) Найти непосредственно матрицы D, $\widetilde{D}$ оператора дифференцирования $\mathbf{D} = \frac{d}{dt}$ в старом и новом базисах (см. задачу 10.5). Проверить справедливость формулы $D = T\widetilde{D}T^{-1}$.

10.8. (**№8.4.**) Показать, что система векторов $\{f_1, \ldots, f_4\} \in \mathbb{R}^4$ образует базис. Найти матрицу перехода T от старого (канонического) базиса $\{e\}$ к новому $\{f\}$. Показать, что матрица перехода S от нового базиса $\{f\}$ к старому $\{e\}$ равна $S = T^{-1}$.

$$f_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, f_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}, f_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, f_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

11. Собственные векторы и собственные значения оператора

11.1. Найти собственные векторы $x_1, x_2, \dots$ и собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ оператора, заданного матрицей A. Проверить непосредственно справедливость равенства $Ax = \lambda x$. Проверить, что векторы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -4 \\ -1 & -3 & 2 \\ -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -6 & 3 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

Домашнее задание 11.

11.2. (**№9.2.**) Найти собственные векторы $x_1, x_2, \dots$ и собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ оператора, заданного матрицей A. Проверить непосредственно справедливость равенства $Ax = \lambda x$. Проверить, что векторы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.

(a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & -3 \\ -3 & -6 & 3 \\ -3 & -7 & 4 \end{bmatrix}$

12. Проекторы и спектральное разложение диагонализуемого оператора

12.1. Проверить, что оператор $\mathbf{P}$, задаваемый в $\mathbb{R}^n$ матрицей P, является оператором проектирования на некоторое подпространство F паралельно некоторому подпространству G и построить проектор $\mathbf{Q}$, на подпространство G параллельно подпространству F :

$$P \cdot P \equiv P^2 = P \implies Q = I - P \implies Q \cdot Q \equiv Q^2 = Q \implies P \cdot Q = Q \cdot P = \theta.$$

Проверить, что

(a) $F = Ran\, P,\ G = Ker\, P \iff G = Ran\, Q,\ F = Ker\, Q,$ найдя предварительно подпространства F и G;

(b) справедливость разложения пространства в прямую сумму $\mathbb{R}^n = F \oplus G$;

(c) $\forall\, h \in \mathbb{R}^n \implies h = f + g,\ f \in F,\ g \in G \implies Ph = f,\ Qh = g:$

$$P = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

12.2. Для диагонализуемого оператора $\mathbf{A}$, задаваемого матрицей A, найти

(a) собственные векторы $\{t_k\}$ и собственные значения $\{\lambda_k\}$ оператора $\mathbf{A}$;

(b) проверить непосредственно справедливость равенств $\mathbf{A}t_k = \lambda_k t_k$;

(c) матрицу перехода T к базису из собственных векторов и матрицу Λ оператора в нем;

(d) проверить непосредственно справедливость равенства $A = T\Lambda T^{-1}$;

(e) найти "косые" проекторы $\mathbf{P}_k$ на собственные подпространства параллельно сумме других и проверить, что $\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_j = \delta_i j \mathbf{P}_j$;

(f) проверить непосредственно "косое" разложение единицы $\mathbf{I} = \sum\limits_k \mathbf{P}_k$ и спектральное разложение диагонализуемого оператора $\mathbf{A}$: $\quad \mathbf{A} = \sum\limits_k \lambda_k \mathbf{P}_k.$

(g) вычислить значение характеристического полинома $p_A(\mathbf{A})$ непосредственно и используя спектральное разложение:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 6 & 4 & -2 \\ -6 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Домашнее задание 12.

12.3. (**№10.1.**) Проверить, что оператор $\mathbf{P}$, задаваемый в $\mathbb{R}^n$ матрицей P, является оператором проектирования на некоторое подпространство F паралельно некоторому подпространству G и построить проектор $\mathbf{Q}$, на подпространство G параллельно подпространству F :

$$P \cdot P \equiv P^2 = P \implies Q = I - P \implies Q \cdot Q \equiv Q^2 = Q \implies P \cdot Q = Q \cdot P = \theta.$$

Проверить, что

(a) $F = Ran\, P,\; G = Ker\, P \iff G = Ran\, Q,\; F = Ker\, Q,$
найдя предварительно подпространства F и G;

(b) справедливость разложения пространства в прямую сумму $\mathbb{R}^n = F \oplus G$;

(c) $\forall\, h \in \mathbb{R}^n \implies h = f + g,\; f \in F,\; g \in G \implies Ph = f,\; Qh = g$:

$$P = \begin{bmatrix} 4 & 7 & -3 \\ -3 & -6 & 3 \\ -3 & -7 & 4 \end{bmatrix}.$$

12.4. (**№10.2.**) Для диагонализуемого оператора $\mathbf{A}$, задаваемого матрицей A, найти

(a) собственные векторы $\{t_k\}$ и собственные значения $\{\lambda_k\}$ оператора $\mathbf{A}$;

(b) проверить непосредственно справедливость равенств $\mathbf{A}t_k = \lambda_k t_k$;

(c) матрицу перехода T к базису из собственных векторов и матрицу Λ оператора в нем;

(d) проверить непосредственно справедливость равенства $A = T\Lambda T^{-1}$;

(e) найти "косые" проекторы $\mathbf{P}_k$ на собственные подпространства параллельно сумме других и проверить, что $\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_j = \delta_i j \mathbf{P}_j$;

(f) проверить непосредственно "косое" разложение единицы $\mathbf{I} = \sum\limits_k \mathbf{P}_k$ и спектральное разложение диагонализуемого оператора $\mathbf{A}$: $\quad \mathbf{A} = \sum\limits_k \lambda_k \mathbf{P}_k$.

(g) вычислить значение характеристического полинома $p_A(\mathbf{A})$ непосредственно и используя спектральное разложение:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -7 & 3 \\ 3 & 9 & -3 \\ 3 & 7 & -1 \end{bmatrix}.$$

13. Унитарные и евклидовы пространства

13.1. Можно ли принять в данном пространстве E в качестве скалярного произведения функцию:

$\underline{E = \mathbb{R}^n}$ $\Longrightarrow$ **(a)** $(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$; **(b)** $(x,y) = \sum\limits_{k=2}^{m} x_k y_k$, $m < n$.

$\underline{E = \mathcal{P}_n}$ $\Longrightarrow$ **(a)** $(p,q) = \sum\limits_{k=1}^{n} p(x_k) q(y_k)$; **(b)** $(p,q) = \sum\limits_{k=2}^{n-1} p(x_k) q(y_k)$.

$\underline{E = \mathcal{P}_n[a,b]}$ $\Longrightarrow$ **(a)** $(p,q) = \int\limits_a^b \rho(t) p(t) q(t) dt$,

$(\rho(t) > 0,\ \rho(t)$ – непрерывна на $[a,b])$.

13.2. Записать неравенство треугольника и неравенство Коши-Буняковского для скалярных произведений из задачи 13.1.

13.3. Ортогонализовать базис $\{f\}$ в $\mathbb{R}^n$ со скалярным произведением $(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$.

(a) $f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, f_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, f_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $f_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, f_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, f_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}, f_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

13.4. Ортогонализовать базис $\{1, t, t^2\}$ в $\mathcal{P}_2[-1,1]$ со скалярным произведением

$$(p,q) = \int_{-1}^{1} p(t) q(t) dt.$$

13.5. пространстве тригонометрических полиномов $(a_k, b_k \in \mathbb{C},\ x \in [-\pi, \pi])$

$$\mathbf{T}_{2n+1} = \{T(x) = a_n \cos nx + \ldots + a_1 \cos x + a_0 + b_1 \sin x + \ldots + b_n \sin nx\}$$

со скалярным произведением $(T,S) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} T(x)\overline{S(x)} dx$ рассматривается система

функций $\{\cos nt, \ldots, \cos t, 1, \sin t, \ldots, \sin nt\}$.

Проверить, что указанная система функций образует ортогональный базис. Найти норму базисных векторов и построить ортонормированный базис.

Домашнее задание 13.

13.6. (**№11.1.**) Можно ли принять в данном пространстве E в качестве скалярного произведения функцию:

$\underline{E = \mathbb{C}^n} \quad \Longrightarrow \quad$ **(a)** $(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \overline{y}_k$; **(b)** $(x, y) = \sum\limits_{k=2}^{n} x_k y_k$.

$\underline{E = \mathcal{P}_n} \quad \Longrightarrow \quad$ **(a)** $(p, q) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k$; **(b)** $(p, q) = \sum\limits_{k=2}^{m} a_k b_k, m < n$.

$\underline{E = \mathcal{P}_n[a, b]} \quad \Longrightarrow \quad$ **(a)** $(p, q) = \int\limits_a^b e^{-t} p(t) q(t) dt$.

13.7. (**№11.2.**) Записать неравенство треугольника и неравенство Коши-Буняковского для скалярных произведений из задачи 13.6.

13.8. (**№11.3.**) Ортогонализовать базис $\{f\}$ в $\mathbb{R}^n$ со скалярным произведением $(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$.

(a) $f_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}, f_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, f_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

(b) $f_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, f_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, f_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, f_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

13.9. (**№11.4.**) Ортогонализовать базис $\{1, t, t^2\}$ в $\mathcal{P}_2[0, \infty)$ со скалярным произведением

$$(p, q) = \int\limits_0^\infty e^{-t} p(t) q(t) dt.$$

13.10. (**№11.5.**) В пространстве тригонометрических полиномов ($a_k, b_k \in \mathbb{C},\ x \in [-\pi, \pi]$)

$$\mathbf{T}_{2n+1} = \{T(x) = a_n \cos nx + \ldots + a_1 \cos x + a_0 + b_1 \sin x + \ldots + b_n \sin nx\}$$

со скалярным произведением $(T, S) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} T(x) \overline{S(x)} dx$ рассматривается система

функций $\{e^{-inx}, \ldots, e^{-x}, 1, e^{ix}, \ldots, e^{inx}\}$.

Проверить, что указанная система функций образует ортогональный базис. Найти норму базисных векторов и построить ортонормированный базис.

14. Спектральное разложение самосопряженного и унитарного оператора

14.1. Дана матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & \sqrt{6} \\ -3 & 1 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{bmatrix}$:

(a) проверить самосопряженность матрицы A;

(b) показать, что оператор $\mathbf{A}$, действующий в унитарном пространстве $\mathbb{C}^n$ со скалярным произведением $(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y}_k$, задаваемый матрицей A, самосопряжен;

(c) найти собственные векторы $\{t_k\}$ и собственные значения $\{\lambda_k\}$ этого оператора;

(d) проверить, что его собственные значения вещественны;

(e) проверить, что его собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям $\lambda_i \neq \lambda_j$, ортогональны $t_i \perp t_j$;

(f) найти ортонормированный базис из собственных векторов $\{u_k\}$;

(g) построить матрицу перехода U к этому базису и проверить, что она унитарна;

(h) проверить непосредственно справедливость равенства $A = U \Lambda U^*$.

14.2. Дана матрица $V = \begin{bmatrix} 1/4 & -3/4 & \sqrt{6}/4 \\ -3/4 & 1/4 & \sqrt{6}/4 \\ \sqrt{6}/4 & \sqrt{6}/4 & 1/2 \end{bmatrix}$:

(a) проверить унитарность матрицы V;

(b) показать, что оператор $\mathbf{V}$, действующий в унитарном пространстве $\mathbb{C}^n$ со скалярным произведением $(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y}_k$, задаваемый матрицей V, унитарен;

(c) найти собственные векторы $\{t_k\}$ и собственные значения $\{\lambda_k\}$ этого оператора;

(d) проверить, что его собственные значения по модулю равны единице;

(e) проверить, что его собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям $\lambda_i \neq \lambda_j$, ортогональны $t_i \perp t_j$;

(f) найти ортонормированный базис из собственных векторов $\{u_k\}$;

(g) построить матрицу перехода U к этому базису и проверить, что она унитарна;

(h) проверить непосредственно справедливость равенства $V = U \Lambda U^*$.

14.3. Показать, что в унитарном пространстве $\mathbf{T}_{2n+1}$ тригонометрических полиномов (см. задачи 13.5, 13.10) дифференциальный оператор $\mathbf{D}\boldsymbol{T} = \frac{1}{i}\frac{d}{dx}T(x)$ самосопряжен. Найти ортонормированный базис из собственных векторов.

14.4. Дано подпространство $S \subset \mathbb{V}_3$ ("плоскость в пространстве")

$$S = \{\vec{f} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \in \mathbb{V}_3 \quad | \quad x - y + \sqrt{2}z = 0\}.$$

Найти

(a) ортонормированные базисы $\{\vec{p}, \vec{q}\}$,$\{\vec{n}\}$ в подпространстве S и его ортогональном дополнении $L = S^{\perp}$;

(b) матрицы $P,\ Q;\ \widetilde{P},\ \widetilde{Q}$ операторов $\mathbf{P},\ \mathbf{Q}$ ортогонального проектирования (ортопроекторов) на подпространства $S,\ L$ в старом базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ и новом базисе $\{\vec{p}, \vec{q}, \vec{n}\}$;

(c) проверить, что

$$P = P^*, P^2 = P, \qquad Q = Q^*, Q^2 = Q$$
$$I = P + Q, \qquad PQ = \theta$$

(d) ортогональные проекции $\vec{g} \in S,\ \vec{h} \in L$ произвольного вектора $\vec{f} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \in \mathbb{V}_3$.

14.5. Для самосопряженного оператора $\mathbf{A}$, заданного в унитарном пространстве $\mathbb{C}^n$ с каноническим скалярным произведением (см. задачу 13.6.**a**) самосопряженной матрицей A из задачи 14.8

(a) найти ортопроекторы $\mathbf{P}_k$ на собственные подпространства F_k и проверить их свойства

$$\mathbf{P}_k^* = \mathbf{P}_k, \quad \mathbf{P}_j \cdot \mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_j = \delta_i j \mathbf{P}_j;$$

(b) проверить непосредственно разложение единицы

$$\mathbf{I} = \sum_k \mathbf{P}_k;$$

(c) проверить спектральное разложение самосопряженного оператора

$$\mathbf{A} = \sum_k \lambda_k \mathbf{P}_k.$$

14.6. Для унитарного оператора $\mathbf{V}$, заданного в унитарном пространстве $\mathbb{C}^n$ с каноническим скалярным произведением (см. задачу 13.6.**a**) унитарной матрицей V из задачи 14.9,

(a) найти ортопроекторы $\mathbf{P}_k$ на собственные подпространства F_k и проверить их свойства

$$\mathbf{P}_k^* = \mathbf{P}_k, \quad \mathbf{P}_j \cdot \mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_j = \delta_i j \mathbf{P}_j;$$

(b) проверить непосредственно разложение единицы

$$\mathbf{I} = \sum_k \mathbf{P}_k;$$

(c) проверить спектральное разложение унитарного оператора

$$\mathbf{V} = \sum_k \lambda_k \mathbf{P}_k.$$

14.7. Построить спектральное разложение самосопряженногооператора (см. задачу 14.3)

$$\mathbf{D}\boldsymbol{T} = \frac{1}{i}\frac{d}{dx}T(x).$$

Домашнее задание 14.

14.8. (**№12.1.a**) Дана матрица $A = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{3} & -2 \\ \sqrt{3} & -1 & -2\sqrt{3} \\ -2 & -2\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$:

(a) проверить самосопряженность матрицы A;

(b) показать, что оператор $\mathbf{A}$, действующий в унитарном пространстве $\mathbb{C}^n$ со скалярным произведением $(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y}_k$, задаваемый матрицей A, самосопряжен;

(c) найти собственные векторы $\{t_k\}$ и собственные значения $\{\lambda_k\}$ этого оператора;

(d) проверить, что его собственные значения вещественны;

(e) проверить, что его собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям $\lambda_i \neq \lambda_j$, ортогональны $t_i \perp t_j$;

(f) найти ортонормированный базис из собственных векторов $\{u_k\}$;

(g) построить матрицу перехода U к этому базису и проверить, что она унитарна;

(h) проверить непосредственно справедливость равенства $A = U\Lambda U^*$.

14.9. (**№12.1.b**) Дана матрица $V = \begin{bmatrix} -3/4 & \sqrt{3}/4 & -1/2 \\ \sqrt{3}/4 & -1/4 & -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \end{bmatrix}$:

(a) проверить унитарность матрицы V;

(b) показать, что оператор $\mathbf{V}$, действующий в унитарном пространстве $\mathbb{C}^n$ со скалярным произведением $(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y}_k$, задаваемый матрицей V, унитарен;

(c) найти собственные векторы $\{t_k\}$ и собственные значения $\{\lambda_k\}$ этого оператора;

(d) проверить, что его собственные значения по модулю равны единице;

(e) проверить, что его собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям $\lambda_i \neq \lambda_j$, ортогональны $t_i \perp t_j$;

(f) найти ортонормированный базис из собственных векторов $\{u_k\}$;

(g) построить матрицу перехода U к этому базису и проверить, что она унитарна;

(h) проверить непосредственно справедливость равенства $V = U\Lambda U^*$.

14.10. (**№12.2.**) Показать, что в унитарном пространстве $\mathbf{T}_{2n+1}$ тригонометрических полиномов (см. задачи 13.5, 13.10) интегральный оператор $\mathbf{J}_k \boldsymbol{T} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ik(x-t)} T(t)dt$, $(k = 0, \pm 1, \dots \pm n)$ самосопряжен. Найти ортонормированный базис из собственных векторов.

14.11. (**№13.1.**) Дано подпространство $S \subset \mathbb{V}_3$ ("плоскость в пространстве")

$$S = \{\vec{f} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \in \mathbb{V}_3 \quad | \quad \sqrt{6}x + \sqrt{6}y + 2z = 0\}.$$

Найти

(a) ортонормированные базисы $\{\vec{p}, \vec{q}\}$,$\{\vec{n}\}$ в подпространстве S и его ортогональном дополнении $L = S^{\perp}$;

(b) матрицы $P,\ Q$; $\widetilde{P},\ \widetilde{Q}$ операторов $\mathbf{P},\ \mathbf{Q}$ ортогонального проектирования (ортопроекторов) на подпространства $S,\ L$ в старом базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ и новом базисе $\{\vec{p}, \vec{q}, \vec{n}\}$;

(c) проверить, что

$$P = P^*, P^2 = P, \qquad Q = Q^*, Q^2 = Q$$
$$I = P + Q, \qquad PQ = \theta$$

(d) ортогональные проекции $\vec{g} \in S,\ \vec{h} \in L$ произвольного вектора $\vec{f} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \in \mathbb{V}_3$.

14.12. (**№13.2.a**) Для самосопряженного оператора $\mathbf{A}$, заданного в унитарном пространстве $\mathbb{C}^n$ с каноническим скалярным произведением (см. задачу 13.6.**a**) самосопряженной матрицей A из задачи 14.8

(a) найти ортопроекторы $\mathbf{P}_k$ на собственные подпространства F_k и проверить их свойства

$$\mathbf{P}_k^* = \mathbf{P}_k, \quad \mathbf{P}_j \cdot \mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_j = \delta_{ij} \mathbf{P}_j;$$

(b) проверить непосредственно разложение единицы

$$\mathbf{I} = \sum_k \mathbf{P}_k;$$

(c) проверить спектральное разложение самосопряженного оператора

$$\mathbf{A} = \sum_k \lambda_k \mathbf{P}_k.$$

14.13. (**№13.2.b**) Для унитарного оператора $\mathbf{V}$, заданного в унитарном пространстве $\mathbb{C}^n$ с каноническим скалярным произведением (см. задачу 13.6.**a**) унитарной матрицей V из задачи 14.9,

(a) найти ортопроекторы $\mathbf{P}_k$ на собственные подпространства F_k и проверить их свойства

$$\mathbf{P}_k^* = \mathbf{P}_k, \quad \mathbf{P}_j \cdot \mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_j = \delta_{ij}\mathbf{P}_j;$$

(b) проверить непосредственно разложение единицы

$$\mathbf{I} = \sum_k \mathbf{P}_k;$$

(c) проверить спектральное разложение унитарного оператора

$$\mathbf{V} = \sum_k \lambda_k \mathbf{P}_k.$$

14.14. (**№13.3.**) Построить спектральное разложение самосопряженногооператора (см. задачу 14.10)

$$\mathbf{J}_k \boldsymbol{T} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik(x-t)} T(t)dt, \quad (k = 0, \pm 1, \ldots \pm n).$$

15. Квадратичные формы

15.1. Найти ортогональное преобразование $x = U\widetilde{x}$, приводящее квадратичную форму $K(x) = (Ax, x)$ к каноническому виду $(\Lambda\widetilde{x}, \widetilde{x})$:

(a) $K(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2\sqrt{2}x_1x_3 + 2\sqrt{2}x_2x_3$,

(b) $K(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2\sqrt{2}x_1x_3 + 2\sqrt{2}x_2x_3$.

15.2. Привести уравнения поверхностей второго порядка к каноническому виду и указать тип поверхностей.

(a) $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy + 2\sqrt{2}xz + 2\sqrt{2}yz = 1$,

(b) $3x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2xy + 2\sqrt{2}xz + 2\sqrt{2}yz = 0$.

15.3. Привести квадратичные формы из задачи 15.1 к каноническому виду методом Лагранжа. Найти соответствующее преобразование координат.

15.4. Выяснить с помощью критерия Сильвестра являются ли квадратичные формы из задачи 15.1 знакоопрелеленными.

15.5. Найти экстемумы функций трех переменных:

(a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy + 2\sqrt{2}xz + 2\sqrt{2}yz$,

(b) $f(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2xy + 2\sqrt{2}xz + 2\sqrt{2}yz$.

Домашнее задание 15.

15.6. (**№14.1.**) Найти ортогональное преобразование $x = U\widetilde{x}$, приводящее квадратичную форму $K(x) = (Ax, x)$ к каноническому виду $(\Lambda\widetilde{x}, \widetilde{x})$:

(a) $K(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + \sqrt{6}x_1x_3 + \sqrt{6}x_2x_3$,

(b) $K(x) = 3x_1^2 + x_2^2 - 2\sqrt{3}x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4\sqrt{3}x_2x_3$.

15.7. (**№14.2.**) Привести уравнения поверхностей второго порядка к каноническому виду и указать тип поверхностей:

(a) $2x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 2xy + \sqrt{6}xz + \sqrt{6}yz = 1$,

(b) $3x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}xy + 4xz + 4\sqrt{3}yz = 0$.

15.8. (**№14.3.**) Привести квадратичные формы из задачи 15.6 к каноническому виду методом Лагранжа. Найти соответствующее преобразование координат.

15.9. (**№14.4.**) Выяснить с помощью критерия Сильвестра являются ли квадратичные формы из задачи 15.6 знакоопрелеленными.

15.10. (**№14.5.**) Найти экстемумы функций трех переменных:

(a) $f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 2xy + \sqrt{6}xz + \sqrt{6}yz$,

(b) $f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}xy + 4xz + 4\sqrt{3}yz$.

16. ИДЗ II

Задачи вощедшие в ИДЗ I отмечены $^{\bullet}$, необязательные задачи отмечены *.

16.1. Применяя метод Гаусса, найти

(a)$^{\bullet}$ базис и размерность линейной оболочки столбцов $Lin\{q_1, q_2, \ldots\}$ и строк $Lin\{p_1, p_2, \ldots\}$ матрицы A;

(b)$^{\bullet}$ $rang\ A$, базисные строки и столбцы;

(c) базис и размерность образа $Ran\ A$ и ядра $Ker\ A$ оператора $\mathbf{A}$, задаваемого матрицей A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & -2 & -6 & 5 \\ -3 & -2 & -3 & 1 & 0 & -9 \\ -3 & -3 & -3 & 0 & 0 & -6 \\ 2 & -3 & 2 & -5 & 0 & 19 \end{bmatrix}.$$

16.2. Применяя метод Гаусса, найти

(a)$^{\bullet}$ общее решение $x_{он}$ системы линейных неоднородных уравнений $Ax = b$;

(b)$^{\bullet}$ ранги матрицы системы A и расширенной матрицы системы $\overline{A} = [A\,|\,b]$;

(c)$^{\bullet}$ общее решение x_{oo} соответствующей однородной системы $Ax = 0$, базис и размерность подпространства ее решений L_0 ;

(d)$^{\bullet}$ частное решение $x_{чн}$ данной неоднородной системы;

(e)$^{\bullet}$ проверить непосредственно справедливость равенств $Ax_{oo} = 0$, $Ax_{чн} = b$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrcr} 1x_1+ & 1x_2- & 2x_3+ & 0x_4+ & 0x_5 & = & -1 \\ 2x_1+ & 3x_2- & 5x_3+ & 0x_4+ & 1x_5 & = & -4 \\ 1x_1+ & 2x_2- & 3x_3+ & 0x_4+ & 1x_5 & = & -3 \\ -3x_1+ & 1x_2+ & 2x_3+ & 0x_4+ & 4x_5 & = & -5 \end{array} \right. .$$

16.3. Применяя метод Гаусса, найти

(a)$^{\bullet}$ определитель $det\,A$:

(b) обратную матрицу A^{-1};

(c) проверить непосредственно справедливость равенств $A{\cdot}A^{-1} = I$, $A^{-1}{\cdot}A = I$:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

16.4. Для диагонализуемого оператора $\mathbf{A}$, задаваемого матрицей A, найти

(a) собственные векторы $\{t_k\}$ и собственные значения $\{\lambda_k\}$ оператора $\mathbf{A}$;

(b) проверить непосредственно справедливость равенств $\mathbf{A}t_k = \lambda_k t_k$;

(c) матрицу перехода T к базису из собственных векторов и матрицу Λ оператора в нем;

(d) проверить непосредственно справедливость равенства $A = T\Lambda T^{-1}$;

(e)* найти "косые" проекторы $\mathbf{P}_k$ на собственные подпространства параллельно сумме других и проверить, что $\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_j = \delta_{ij}\mathbf{P}_j$;

(f)* проверить непосредственно "косое" разложение единицы $\mathbf{I} = \sum\limits_k \mathbf{P}_k$ и спектральное разложение диагонализуемого оператора $\mathbf{A}$: $\quad \mathbf{A} = \sum\limits_k \lambda_k \mathbf{P}_k$.

(g)* вычислить значение характеристического полинома $p_A(\mathbf{A})$ непосредственно и используя спектральное разложение:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -2 & 2 \\ 7 & -3 & 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

16.5. Для самосопряженного оператора $\mathbf{A}$, задаваемого матрицей A, найти

(a) собственные векторы $\{u_k\}$ и собственные значения $\{\lambda_k\}$ оператора $\mathbf{A}$;

(b) проверить непосредственно справедливость равенств $\mathbf{A}u_k = \lambda_k u_k$;

(c) матрицу перехода U к ортонормированному базису из собственных векторов и матрицу Λ оператора в нем, проверить, что $U \cdot U^* = U^* \cdot U = I$;

(d) проверить непосредственно справедливость равенства $A = U\Lambda U^*$;

(e)* построить ортопроекторы $\mathbf{P}_k$ на собственные подпространства и проверить, что $\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k^*, \quad \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_j = \delta_{ij}\,\mathbf{P}_j$;

(f)* проверить ортогональное разложение единицы $\mathbf{I} = \sum\limits_k \mathbf{P}_k$ и спектральное разложение самосопряженного оператора $\mathbf{A}$: $\quad \mathbf{A} = \sum\limits_k \lambda_k \mathbf{P}_k$.

(g) ортогональное преобразование $x = U\widetilde{x}$, приводящее квадратичную форму $K(x) = (Ax, x)$ к каноническому виду $K(\widetilde{x}) = (\Lambda\widetilde{x}, \widetilde{x})$;

(h)* выяснить характер стационарных точек квадратичной функции $K(x)$.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Список литературы

[1] Зиненко С.Н. Линейная алгебра: Учеб. пособие. - Харьков, ХНУ, 2007. - 92 с.

[2] Зиненко С.Н. Индивидуальные задания по линейной алгебре. - Харьков, ХНУ, 2007. - 60 с.

[3] Канатников А.Н., Крищенко А.П. Линейная алгебра: Учеб. для вузов. 3-е изд., стереотип. / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. - 336 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. IV).

[4] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра: Учеб. для вузов - 4-е изд. - М.: Наука. Физматлит, 1999 - 296 с.

[5] Бутузов В.Ф., Крутицкая Н. Ч., Шишкин А. А. Линейная алгебра в вопросах и задачах: Учеб. пособие/ Под ред. В. Ф. Бутузова. - 2-е изд., испр. - М.: Физматлит, 2002. - 248 с.

[6] Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. - М.: Наука, 2000. - 318 с.

[7] Беклемишев Д.В. Дополнительные главы линейной алгебры. - М.: Наука, 1983. - 337 с.

[8] Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. - М.: Наука, 1984. - 381 с.

[9] Сборник задач по алгебре / Под ред. А.И. Кострикина: Учеб. для вузов - 3-е изд., испр. и доп. - М.: Физматлит, 2001 - 464 с.

[10] Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. - М.: Наука, 1977. - 304 с.

[11] Глазман И.М., Любич Ю.И. Конечномерный линейный анализ. - М.: Наука, 1969. - 477 с.

[12] Кострикин А.И. Введение в алгебру. ч. 2. Линейная алгебра. - М.: Физматлит. 2000. - 468 с.

[13] Курош А. Г. Курс высшей алгебры. - М.: Наука, 1975. - 431 с.

Латинский алфавит

Написание	Произношение	Написание	Произношение
A a $A\ a$	а	N n $N\ n$	эн
B b $B\ b$	бэ	O o $O\ o$	о
C c $C\ c$	це	P p $P\ p$	пэ
D d $D\ d$	дэ	Q q $Q\ q$	ку
E e $E\ e$	е	R r $R\ r$	эр
F f $F\ f$	эф	S s $S\ s$	эс
G g $G\ g$	же	T t $T\ t$	тэ
H h $H\ h$	аш	U u $U\ u$	у
I i $I\ i$	и	V v $V\ v$	вэ
J j $J\ j$	йот	W w $W\ w$	дубль вэ
K k $K\ k$	ка	X x $X\ x$	икс
L l $L\ l$	эль	Y y $Y\ y$	игрек
M m $M\ m$	эм	Z z $Z\ z$	зэт

Греческий алфавит

Написание	Произношение	Написание	Произношение
$\mathrm{A}\ \alpha$	альфа	$\mathrm{N}\ \nu$	ню (ни)
$\mathrm{B}\ \beta$	бета	$\Xi\ \xi$	кси
$\Gamma\gamma$	гамма	$\mathrm{O}\ o$	омикрон
$\Delta\delta$	дельта	$\Pi\ \pi$	пи
$\mathrm{E}\ \varepsilon$	эпсилон	$\mathrm{P}\ \rho$	ро
$\mathrm{Z}\ \zeta$	дзета	$\Sigma\sigma$	сигма
$\mathrm{H}\ \eta$	эта	$\mathrm{T}\ \tau$	тау
$\Theta\ \theta\ (\vartheta)$	тэта	$\Upsilon\upsilon$	ипсилон
$\mathrm{I}\ \iota$	йота	$\Phi\ \varphi(\phi)$	фи
$\mathrm{K}\ \kappa$	каппа	$\mathrm{X}\ \chi$	хи
$\Lambda\lambda$	лямбда	$\Psi\psi$	пси
$\mathrm{M}\ \mu$	мю (ми)	$\Omega\omega$	омега

Навчальне видання

Парфьонова Наталія Дмитрівна

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА. ЗБІРНИК ЗАДАЧ

Навчально-методичний посібник
з лінійної алгебри для студентів 1-го курсу
фізичного та радіофізичного факультетів

Друкується в авторській редакції
Макет обкладинки І.М.Дончик

61077, Харків майдан Свободи, 4, Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, організаційно-видавничий відділ НМЦ

Підписано до друку 28.01.11. Формат 60×84/16.
Папір офсетний. Друк ризографічний.
Обл.-вид. арк. 4,3. Умов.-друк. арк. 3,7.
Наклад 50 прим. Ціна договірна.