Многофазные модели растущих биологических сплошных сред

Н.Н. Кизилова, А.А. Штейн

Харьковский национальный университет

Институт механики МГУ

Объемный рост =

= Необратимое деформирование +

+ Приращение массы

МОДЕЛИ ОБЪЕМНО РАСТУЩИХ СРЕД

Однофазное приближение

$$x^i = x^i(t, \xi^k) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v},\ \mathbf{C},\ \mathbf{D},\ \ldots$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla_i(\rho v^i) = q$$

МОДЕЛИ ОБЪЕМНО РАСТУЩИХ СРЕД

Однофазное приближение

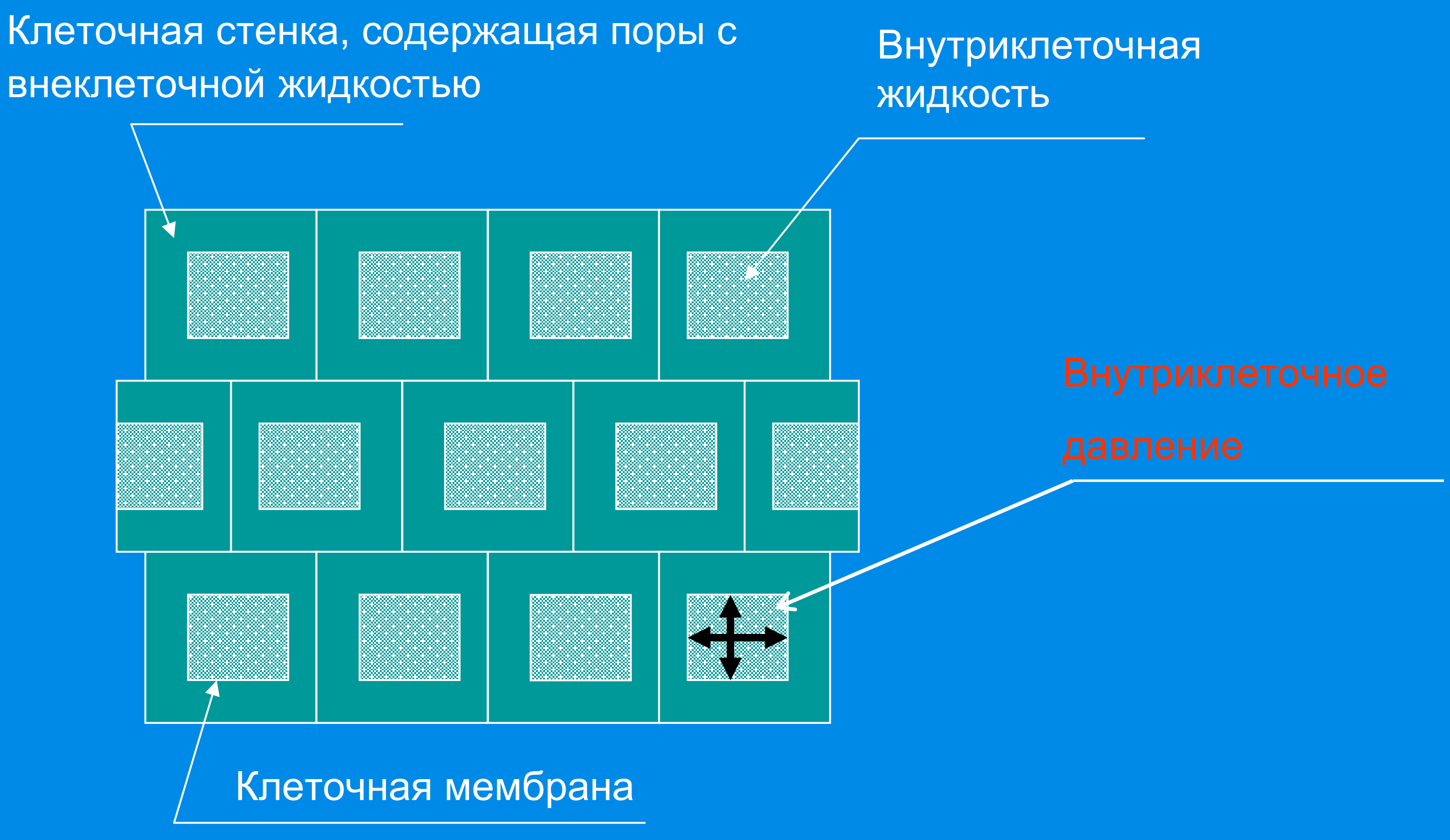
Модели вязкоупругого типа

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}^e + \mathbf{C}^i, \quad \mathbf{D}^i = \frac{d\mathbf{C}^i}{dt} = \mathbf{D}^i(\mathbf{T}), \quad \mathbf{C}^e = \mathbf{C}^e(\mathbf{T})$$

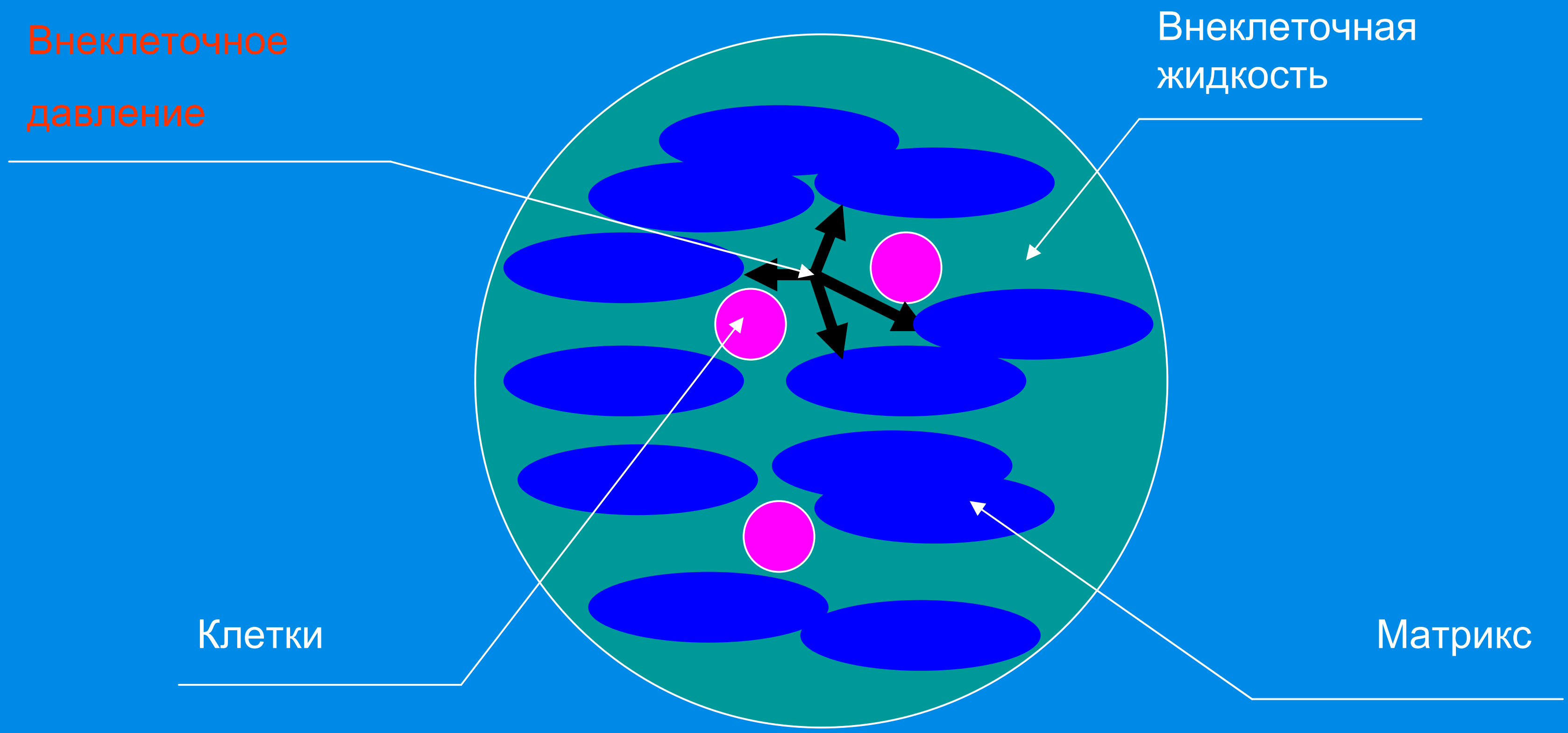
$$\mathbf{D}^i(\mathbf{T}) = \mathbf{D}_0^i + \mathbf{D}_T^i(\mathbf{T}), \qquad \mathbf{D}_T^i(0) = 0$$

$$q = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_i(\rho v^i), \qquad \rho \approx \mathrm{const} \;\Rightarrow\; q \approx \rho \nabla_i v^i$$

В растущих тканях всегда присутствуют напряжения на уровне фаз (обычно давления, возникающие с участием осмоса), создающие растягивающее напряженное состояние в собственно «растущей» (деформируемой) фазе



В растущих тканях всегда присутствуют напряжения на уровне фаз (обычно давления, возникающие с участием осмоса), создающие растягивающее напряженное состояние в собственно «растущей» (деформируемой) фазе



МОДЕЛИ ОБЪЕМНО РАСТУЩИХ СРЕД

Многофазное приближение с одной «растущей» фазой

$$x^i = x^i(t, \xi^k) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v},\ \mathbf{C},\ \mathbf{D},\ \ldots$$

Жидкие фазы

$$\mathbf{v}_N \quad (N = 2, \ldots)$$

Компоненты жидких фаз

$$c_{N\alpha},\ \mathbf{v}_{N\alpha}$$

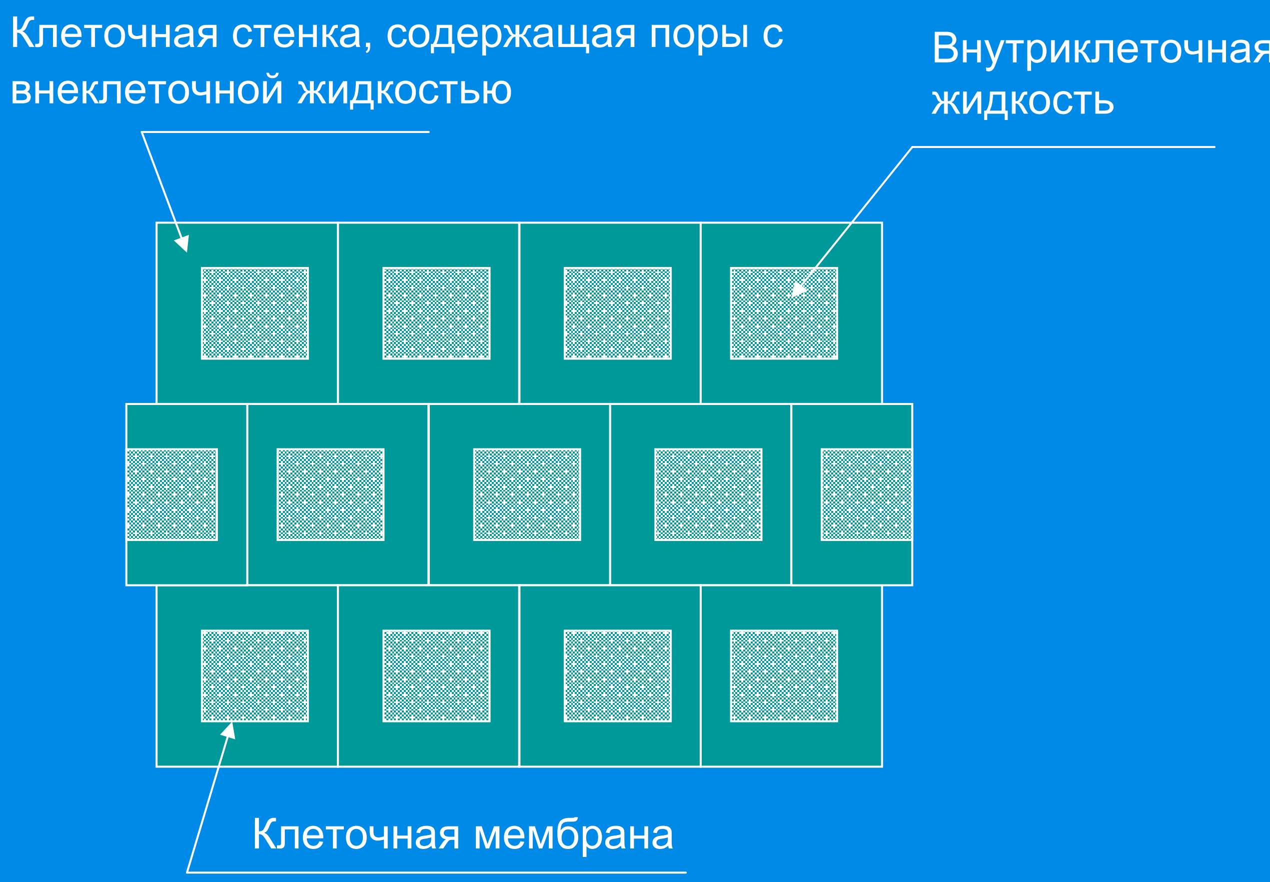
Компоненты растущей фазы

$$c_\beta$$

МОДЕЛИ ОБЪЕМНО РАСТУЩИХ СРЕД

Многофазное приближение с одной «растущей» фазой

Трехфазная модель растущей растительной ткани

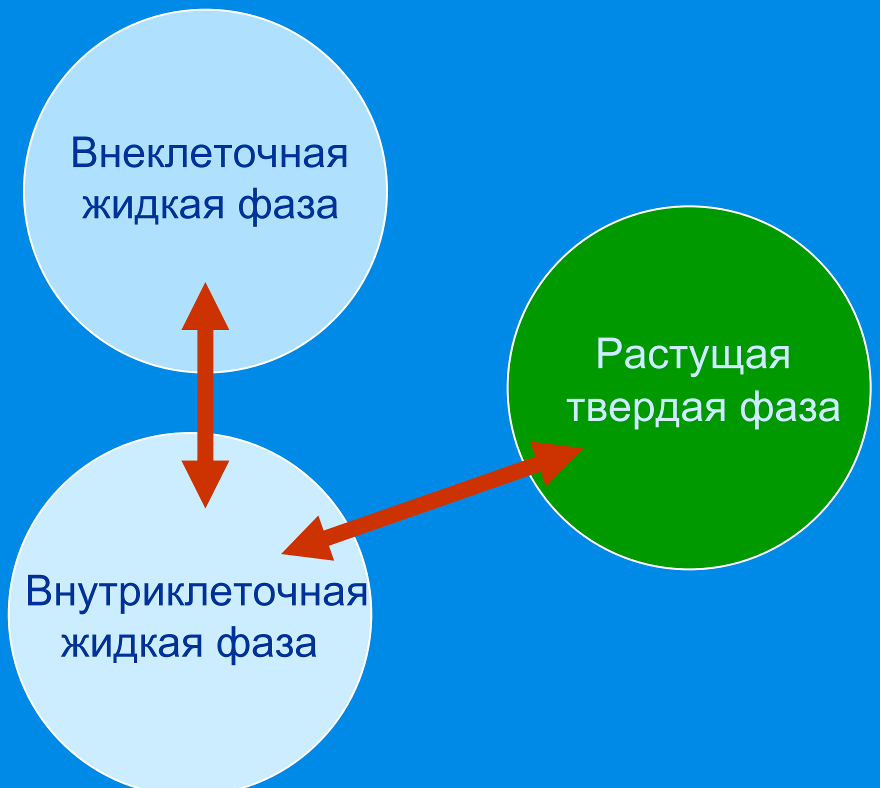


МОДЕЛИ ОБЪЕМНО РАСТУЩИХ СРЕД

Многофазное приближение с одной «растущей» фазой

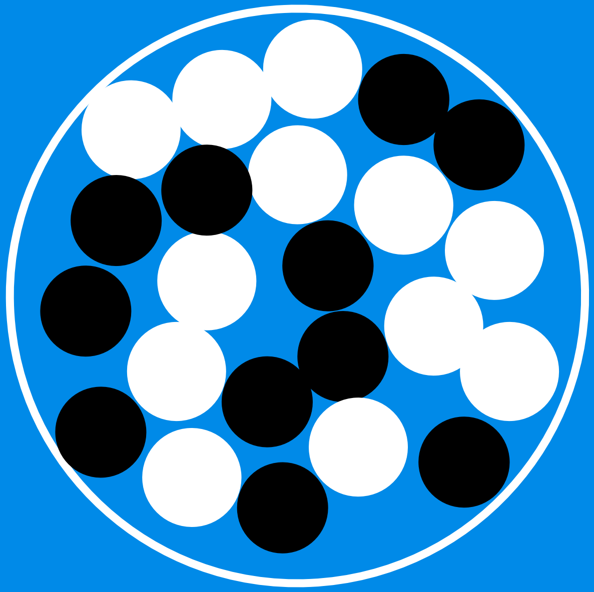
Трехфазная модель растущей растительной ткани

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}^e + \mathbf{C}^i, \quad \mathbf{D}^i = \frac{d\mathbf{C}^i}{dt} = \mathbf{D}^i(p, \mathbf{T}, c_k, \alpha_k), \quad \mathbf{C}^e = \mathbf{C}^e(p, \mathbf{T}, c_k, \alpha_k)$$



МОДЕЛИ ОБЪЕМНО РАСТУЩИХ СРЕД

Дифференциально растущие среды



$$x_N{}^i = x_N{}^i(t, \xi_N{}^k) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_N, \ \mathbf{C}_N, \ \mathbf{D}_N, \ \ldots$$

МОДЕЛИ ОБЪЕМНО РАСТУЩИХ СРЕД

Дифференциально растущие среды

Несколько твердых фаз с разными законами ростового деформирования

$$\nabla\,\boldsymbol{\sigma}_1 + \mathbf{f} + \mathbf{F}_1 = 0 \qquad \nabla\,\boldsymbol{\sigma}_2 - \mathbf{f} + \mathbf{F}_2 = 0$$

$$\mathbf{C}_N = \mathbf{C}_N{}^e + \mathbf{C}_N{}^i, \quad \mathbf{D}^i = \frac{d\mathbf{C}_N{}^i}{dt} = \mathbf{D}_N{}^i(\mathbf{T}_N), \quad \mathbf{C}_N{}^e = \mathbf{C}_N{}^e(\mathbf{T}_N)$$

$$N = 1, 2$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{L}\mathbf{w} \qquad \frac{d\mathbf{f}}{dt} + \mathbf{K}\mathbf{f} = \mathbf{L}\frac{d\mathbf{w}}{dt}$$

Модель среды, состоящей из двух клеточных популяций с разными законами деления

$$i = 1, 2 \qquad\qquad n_1 + n_2 = 1$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \mathrm{div}\,(n_i \mathbf{v}_i) = k_i n_i$$

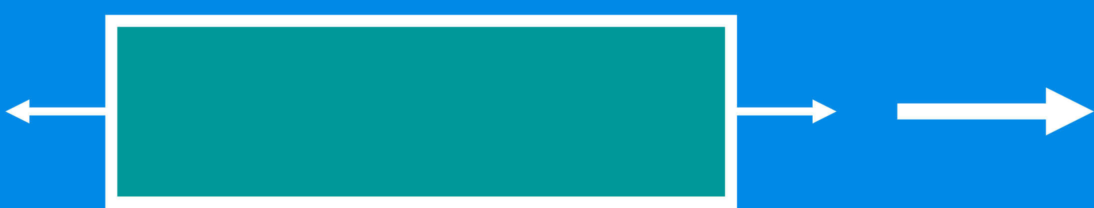
$$-\nabla(pn_1) + \mathbf{f}_{12} - b_1 \nabla n_1 = 0$$

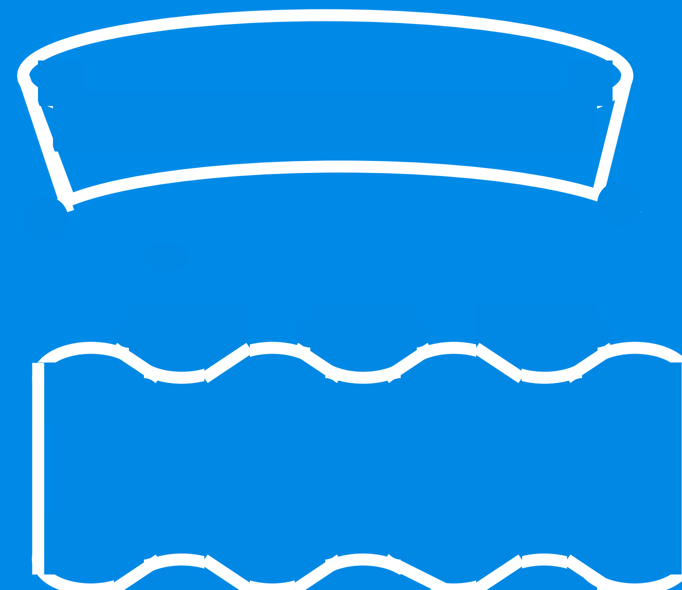
$$-\nabla(pn_2) + \mu\,\Delta\mathbf{v}_2 + \mathbf{f}_{21} - b_2 \nabla n_2 = 0$$

$$\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji} = p\nabla n_i + s(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i), \quad i \neq j$$

Несколько твердых фаз с разными законами ростового деформирования

Неустойчивость синхронного роста





$$\mathbf{f} = \mathbf{L}\mathbf{w}$$

$$w_1 \equiv w_2$$

$$w_1 \neq w_2$$

Модель среды, состоящей из двух клеточных популяций

Одномерная задача

$$i = 1, 2 \qquad\qquad n_1 + n_2 = 1$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial (n_i v_i)}{\partial x} = k_i n_i$$

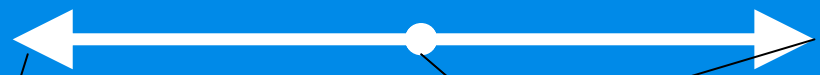
$$-n_1 \frac{\partial p}{\partial x} + s(v_2 - v_1) - b_1 \frac{\partial n_1}{\partial x} = 0$$

$$-n_2 \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + s(v_1 - v_2) - b_2 \frac{\partial n_2}{\partial x} = 0$$

Модель среды, состоящей из двух клеточных популяций

Задача о синхронном росте

$-R(t)$ 0 $R(t)$



$$v_1 = v_2$$

$$p = p_0$$

$$v_1 = v_2 = 0$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial x} = 0$$

$$v_1 \equiv v_2 \qquad n_i = n_i(t)$$

$$R(t) \to \infty \qquad n_1 \to 1 \qquad n_2 \to 0$$

Модель среды, состоящей из двух клеточных популяций

Задача об устойчивости синхронного роста

$-R(t) \qquad 0 \qquad R(t)$

$-1 \qquad 0 \qquad 1$

$$n_i = n_i(t), \quad \frac{\partial x}{\partial \xi} = x_\xi(t, x)$$

$$n_i = n_i(t), \quad \frac{\partial x}{\partial \xi} = x_\xi(t)$$

$$x, t \Rightarrow \xi, t$$

Модель среды, состоящей из двух клеточных популяций

Задача об устойчивости синхронного роста

Уравнения для малых возмущений

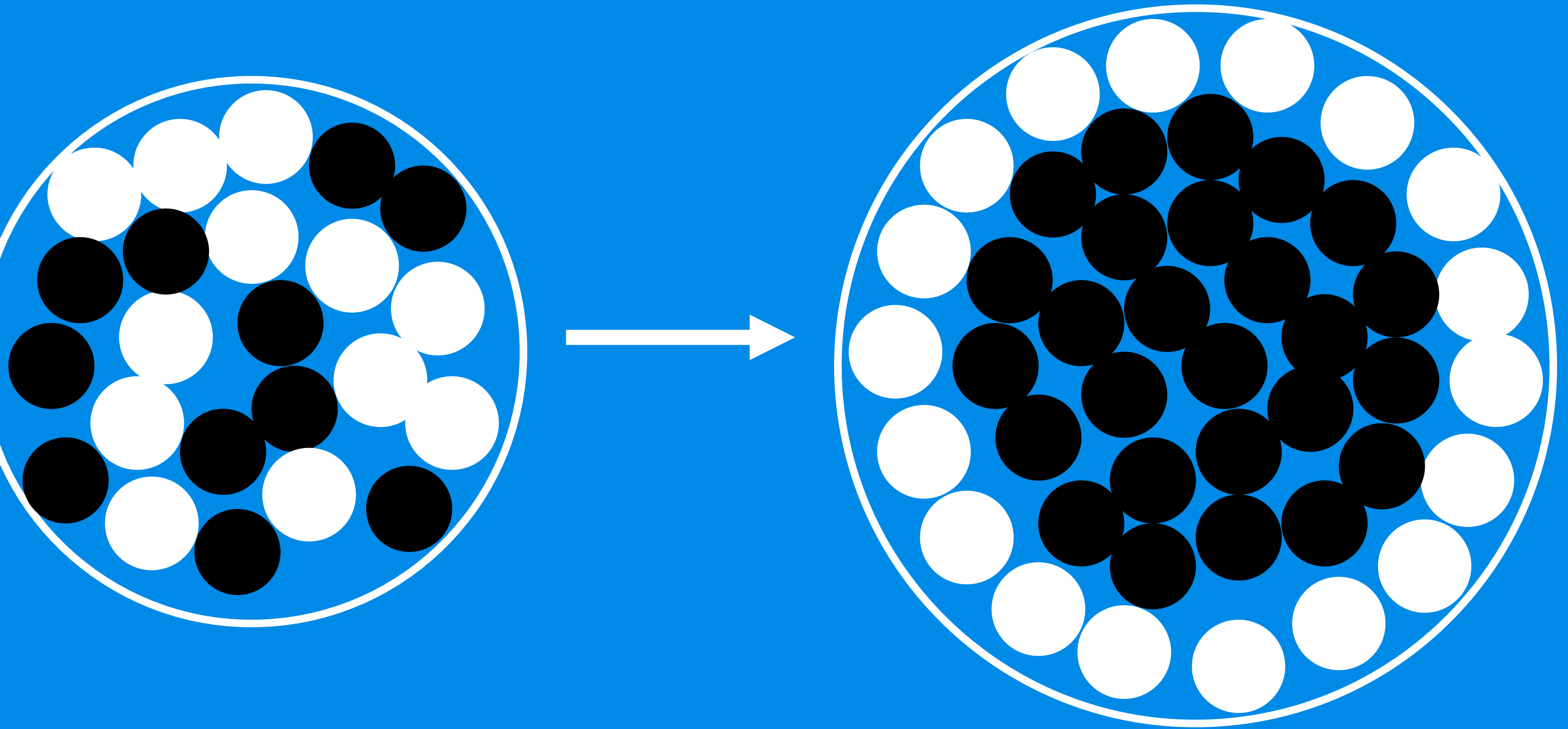
$$\sum_j \left(A_{ij}(t)\frac{\partial^2 Y_j}{\partial t\,\partial \xi} + B_{ij}(t)\frac{\partial^2 Y_j}{\partial \xi^2} + C_{ij}(t)\frac{\partial Y_j}{\partial \xi} + D_{ij}(t)\frac{\partial Y_j}{\partial t} + E_{ij}(t)Y_j \right) = 0$$

$$Y_i = \sum_{m=1}^{\infty} K_{im}(t)\sin/\cos(2\pi m\xi)$$

$$\frac{dK_{im}}{dt} = \sum_i L_{ism}(t)K_{sm}$$

Модель среды, состоящей из двух клеточных популяций

Неустойчивость синхронного роста



Выводы

1. Задачи механики биологического роста по существу требуют рассмотрения многофазных моделей. В однофазных моделях приходится вводить функции, не имеющие отчетливого физического и биологического смысла.
2. Для учета транспортных процессов и «внутренних движущих сил ростового деформирования» могут быть использованы многофазные модели с одной «растущей» фазой и несколькими жидкими.
3. Структурное взаимодействие сосуществующих в одном объеме растущих фаз описывается моделями дифференциально растущих сред.
4. В дифференциально растущих средах при определенных граничных условиях возможен режим синхронного роста, который может терять устойчивость, что приводит к относительному перемещению растущих фаз.