

PACS: 41.20. Cv

РАСЧЁТ НАВЕДЕННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ВБЛИЗИ ПРОВОДЯЩИХ СТРУКТУР

В.Н. Болотов, Р.А. Дружченко

*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина,
пл. Свободы, 4, Харьков, Украина, 61007.*

Email: bolotov@vl.kharkov.ua

Поступила в редакцию 29 марта 2007 г.

Расчитаны распределения наведенных электрических полей вблизи плоских поверхностей конечных размеров, включая фрактальные структуры типа «ковер Серпинского». Построение расчетной схемы основано на том факте, что односвязная проводящая поверхность произвольной геометрии является эквипотенциальной поверхностью. Это дало возможность составить и решить систему алгебраических уравнений для плотности наведенных зарядов, а затем определить электрические поля в любой точке пространства. Расчеты проводили для разных расположений внешнего заряда относительно проводящих ограниченных поверхностей различных геометрий.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: электростатика, наведенный заряд, фрактальные структуры, наведенные электрические поля

Для многих областей физики и техники актуальной является одна из задач электростатики, а именно, задача о вычислении распределения наведенных электрических полей. Для решения этой задачи необходимо сначала вычислить плотности наведенных зарядов (ПНЗ) на проводящих структурах. При этом заряд, который наводит это распределение, может быть как точечным, так и заряженным проводником конечных размеров. В настоящее время наведенные поля играют важную роль при решении задач в области нанотехнологий [1], при проведении исследований пьезоэлектрических и электрокинетических явлений [2, 3], при исследованиях свойств плазмы вблизи стенок термоядерных установок [4]. Знание распределения наведенных полей важно, например, при проведении научных исследований разрядных процессов и для получения реальных рекомендаций по защите от молний.

Для произвольных геометрий конечных электродинамических структур эта задача является достаточно сложной и, зачастую, ее не удастся решить аналитически. Поэтому необходимо для решения этой задачи привлекать численные методы. В данной работе приведен, разработанный нами, довольно простой алгоритм расчета плотности наведенных зарядов и полей для разного типа подобных задач.

Целью работы является разработка простого алгоритма численного расчёта плотности наведенных зарядов на плоских проводящих структурах конечной произвольной геометрии и исследование электрических полей, создаваемых этими зарядами.

АЛГОРИТМ РАСЧЁТА ПЛОТНОСТИ НАВЕДЕННЫХ ЗАРЯДОВ НА ПЛОСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

В основе расчетной схемы вычисления ПНЗ на проводящей структуре лежит основное положение электростатики – каждая точка проводящей поверхности имеет один и тот же потенциал. Другими словами проводящая поверхность является эквипотенциальной поверхностью. Если на некотором расстоянии от проводящей поверхности расположить заряд, то этот внешний заряд влияет на заряды проводника и создает на поверхности проводящей структуры наведенные (индуцированные) заряды противоположного знака [5 с. 13-33]. Если проводник представляет собой бесконечную плоскость, то несложно аналитически вычислить распределение поверхностной плотности наведенных зарядов σ [5 с. 13-33]:

$$\sigma(x, y) = -\frac{q}{2\pi} \frac{d}{(x^2 + y^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (1)$$

где d – минимальное расстояние внешнего заряда величины q до проводящей структуры, расположенной на плоскости (x, y) .

Нахождение аналитического решения задачи о наведенных зарядах, например, для проводящих структур произвольных геометрий, является очень сложной задачей. Для ее решения необходимо использовать численные методы. Основной особенностью численных методов является переход от непрерывного изменения аргументов рассматриваемых функций к их дискретным значениям. Чаще всего для этих целей используют метод сеток, т.е. разбивают исследуемую структуру на ячейки, координаты которых легко вычисляются. Сеточное разбиение может быть как однородным, так и неоднородным. Неоднородное разбиение применяется вблизи сложных границ объектов. В нашем случае мы использовали однородное разбиение.

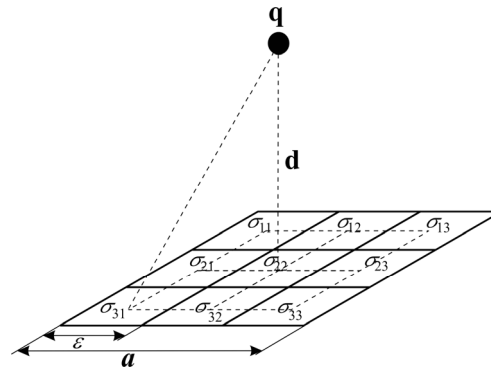


Рис.1. Разбиение проводящей структуры на ячейки.

Для нахождения численного решения задачи о распределении ПНЗ на объектах конечных размеров мы разбиваем проводящую структуру, в данном случае квадрат, на ячейки, площадью ε^2 (рис.1). Сторона ячейки равна $\varepsilon = a/n$, где a – сторона квадрата, n – число разбиений. В каждой ячейке поверхностная плотность наведенных зарядов σ_{ij} одинаковая и изменяется при переходе от одной ячейки к другой. Индексы i и j пробегуют значения от 1 до n . Считаем, что положение ячейки определяется координатами ее центра, т.е. ячейку с координатами (x_i, y_j) мы обозначаем (i, j) . Причем, $x_i = (2i-1) \cdot \varepsilon/2 - a/2$, а $y_j = (2j-1) \cdot \varepsilon/2 - a/2$.

Пусть в поле отрицательного заряда q в плоскости (x, y) находится проводящий квадрат и в каждой ячейке (k, l) квадрата ПНЗ равна σ_{kl} . Тогда каждая ячейка проводящего квадрата представляет собой наведенный заряд величины $\sigma_{kl}\varepsilon^2$. Эти заряды и внешний заряд q создают в каждой ячейке одинаковый потенциал для всех ячеек квадрата. Это связано с тем, что любая проводящая структура является эквипотенциальной поверхностью. Для заземленных проводящих поверхностей в каждой ячейке потенциал равен нулю.

В связи с вышесказанным, несложно записать n^2 уравнений для плотности поверхностных зарядов σ_{ij} :

$$\varphi_{ij} + \sum_{k,l} \frac{\sigma_{kl}\varepsilon^2}{|\vec{r}_{ij} - \vec{r}_{kl}|} - \frac{1}{|\vec{r}_{ij} + \vec{d}|} = 0, \quad (2)$$

где $\vec{r}_{ij}$, $\vec{r}_{kl}$ – векторы, определяющие центры ячеек (i, j) и (k, l) . Вектором $\vec{d} = (0, 0, d)$ определяются координаты внешнего заряда. Начало системы отсчета выбирается в центре проводящей структуры. Потенциал, создаваемый в центре ячейки, зарядами этой же ячейки, равен φ_{ij} . Второе слагаемое в уравнении (2) дает вклад в потенциал ячейки (i, j) от всех остальных ячеек проводящего квадрата. Суммирование производится по всем ячейкам, исключая ячейку (i, j) . Последнее слагаемое в уравнении (2) определяет вклад в потенциал ячейки (i, j) от внешнего заряда q . Следует отметить, что уравнение (2) записано в безразмерных переменных. Метрические переменные мы измеряем в единицах характерного размера проводящей структуры a , заряд измеряем в единицах внешнего заряда q , поверхностную плотность наведенных зарядов мы измеряем в единицах q/a^2 , а потенциал в единицах q/a .

Для вычисления величины φ_{ij} мы используем тот факт, что плотность поверхностных зарядов в выбранной ячейке постоянна и равна σ_{ij} . Таким образом, для произвольной ячейки мы получаем

$$\varphi_{ij} = \sigma_{ij} \int_{x_i-\varepsilon/2}^{x_i+\varepsilon/2} \int_{y_j-\varepsilon/2}^{y_j+\varepsilon/2} \frac{dxdy}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_j)^2}} = 4 \text{ArcSinh}(1) \sigma_{ij}\varepsilon \approx 3,5255 \sigma_{ij}\varepsilon. \quad (3)$$

Следует отметить, что подобные вычисления можно проводить в связи с тем, что потенциал простого слоя (3) определен и непрерывен всюду. Для точек, принадлежащих проводящей поверхности, интеграл (3) хотя и является несобственным, но в данном случае он абсолютно сходится [6].

Решив систему уравнений (2), мы определяем σ_{ij} в каждой ячейке проводящей структуры. На рис. 2 показан 3-х мерный график распределения ПНЗ на поверхности проводящего квадрата, находящегося в поле отрицательного единичного заряда.

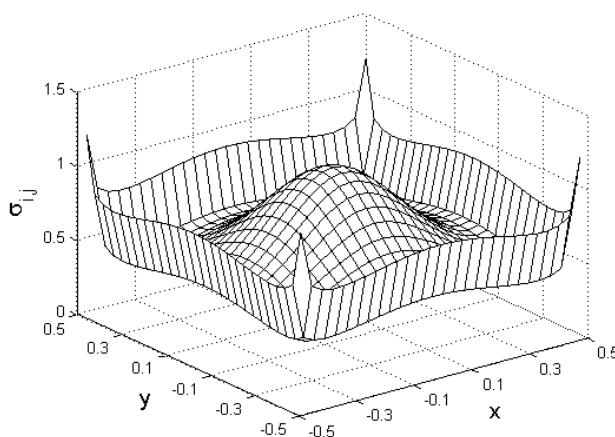


Рис.2. Распределение плотности наведенных поверхностных зарядов на квадрате.

Анализ полученных результатов говорит о том, что если отрицательный внешний заряд находится достаточно далеко от проводящего квадрата ($d > 0,5$), то в углах квадрата сосредотачивается достаточно большая плотность наведенных положительных зарядов по сравнению с центром квадрата. При приближении внешнего заряда к проводящей пластине, например на расстояние $d = 0,1$, кулоновские поля перераспределяются таким образом, чтобы эта пластина стала эквипотенциальной поверхностью. При этом возникают большие наведенные заряды в центре пластины по сравнению с наведенными зарядами на ее углах.

Для расчета ПНЗ на объектах конечных размеров с отверстиями произвольной формы мы используем тот факт, что в отверстиях наведенный заряд равен нулю, т.е. в соответствующих ячейках сеточного разбиения $\sigma_{kl} = 0$. При этом мы рассматриваем проводящие односвязные структуры, являющимися эквипотенциальными поверхностями. Число уравнений системы (2) уменьшается ровно на количество ячеек в отверстиях. Количество оставшихся уравнений в точности равно числу неизвестных σ_{ij} в проводящих ячейках (i, j) . Таким образом, мы получаем единственное решение системы уравнений (2).

При построении алгоритма расчета плотности наведенных зарядов на проводящих структурах произвольных геометрий мы вводим в рассмотрение матрицу соответствия, элементами которой являются нули и единицы. Множество элементов этой матрицы a_{ij} находится во взаимно однозначном соответствии с множеством ячеек сеточного разбиения. Причем элементам, для которых $a_{ij} = 1$, соответствует не равная нулю ПНЗ $\sigma_{ij} \neq 0$ для ячейки (i, j) , а элементам $a_{kl} = 0$, соответствует $\sigma_{ij} = 0$. Таким образом можно задать структуру произвольной геометрии, для которой наведенный заряд в отверстиях равен нулю.

С использованием матрицы соответствия строится система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Для каждой ячейки сеточного разбиения, в которой $a_{ij} = 1$, составляется уравнение для σ_{ij} . Зарядовые плотности ячеек, для которых $a_{kl} = 0$ в СЛАУ не входят. В результате получаем систему уравнений (2). Данную СЛАУ можно решить любым из известных методов решения СЛАУ [7]. Мы же в расчётах использовали метод триангуляции. Таким образом, решениями СЛАУ является набор значений σ_{ij} для ячеек, в которых $a_{ij} = 1$.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЁТОВ

Для примера нами рассчитана плотность наведенных зарядов на проводящей структуре типа «ковёр Серпинского» [8] при влиянии на него внешнего точечного заряда. Эта структура выбрана нами в связи с тем, что в настоящее время фрактальные электродинамические структуры широко используются в современных радиофизических системах, например, в качестве элементов фрактальной электроники (фрактальные антенны, фрактальные конденсаторы, фрактальные резисторы и т.д.). Аналитическое решение этой задачи представляет большую трудность, поэтому мы используем для ее решения описанный выше численный алгоритм.

На рис.3 приведены результаты вычислений распределения ПНЗ на фрактальной структуре типа «ковёр Серпинского». Ячейкам одинакового цвета соответствует плотность наведенного заряда равной величины. Причем более темный цвет соответствует меньшей плотности наведенных зарядов. При выполнении данных расчетов внешний заряд располагался на расстоянии $d = 0,4$. Плотность наведенных зарядов хорошо отображает структуру ковра Серпинского 3-й итерации. Четко видны темные квадратики, для которых $\sigma_{ij} = 0$ и соответствующие элементы матрицы соответствия также равны нулю $a_{kl} = 0$.

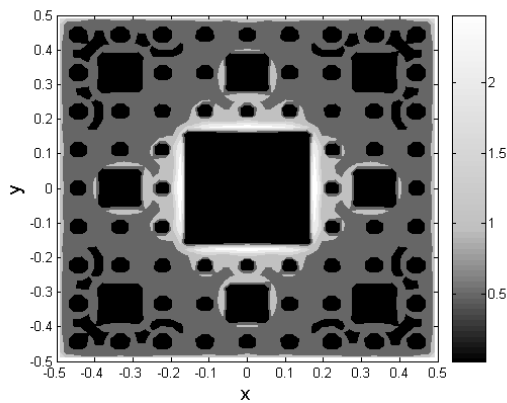


Рис.3. Распределение плотности наведенных поверхностных зарядов на фрактале типа «ковёр Серпинского».

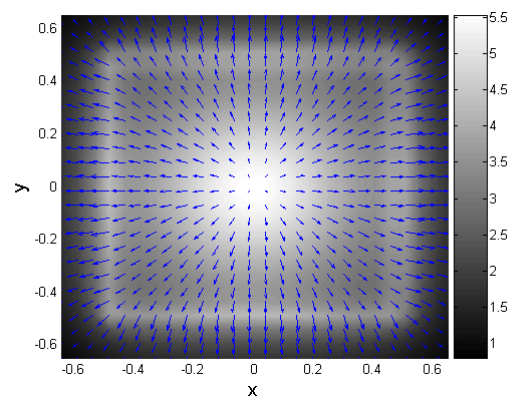


Рис. 4. Распределение электрического поля наведенных зарядов в плоскости, параллельной проводящему квадрату.

Зная распределение плотности наведенных поверхностных зарядов несложно рассчитать пространственное распределение наведенного электрического поля $\vec{E}$ по формуле:

$$\vec{E} = \sum_{i,k} \frac{\sigma_{ik} \varepsilon^2}{|\vec{R} - \vec{r}_{ij}|^3} (\vec{R} - \vec{r}_{ij}), \quad (4)$$

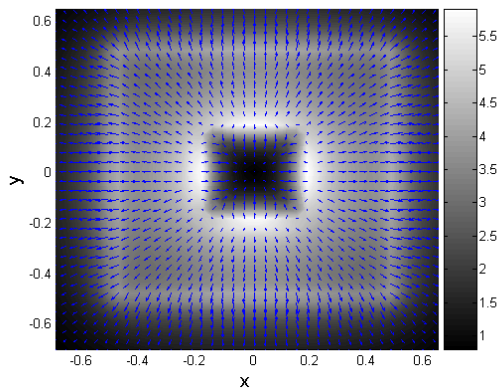


Рис. 5. Распределение электрического поля наведенных зарядов в плоскости, параллельной проводящей квадратной диафрагме.

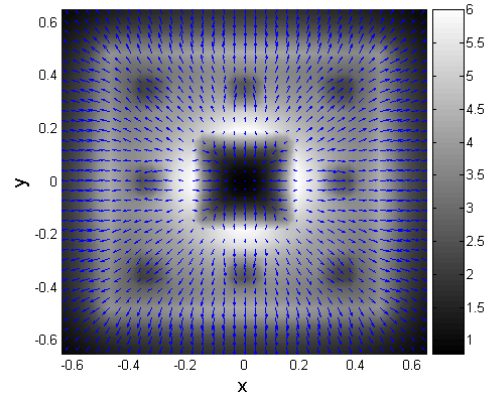


Рис. 6. Распределение электрического поля наведенных зарядов в плоскости, параллельной проводящей структуре типа «ковёр Серпинского» 3-й итерации.

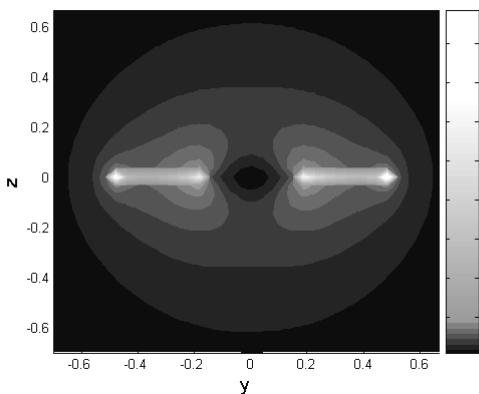


Рис. 7. Распределение электрического поля наведенных зарядов в плоскости, перпендикулярной проводящей квадратной диафрагме.

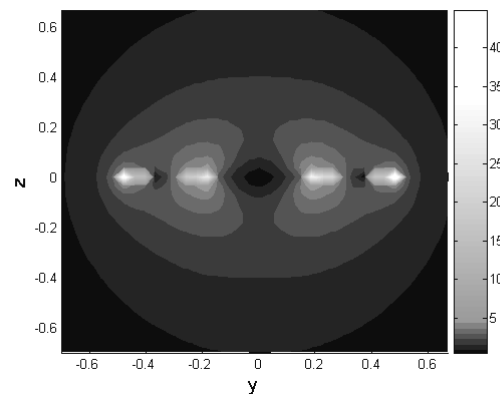


Рис. 8. Распределение электрического поля наведенных зарядов в плоскости, перпендикулярной проводящей структуре типа «ковёр Серпинского» 2-й итерации.

где $\vec{R}$ – это вектор точки пространства, в которой рассчитывается наведенное электрическое поле. Суммирование производится по всем ячейкам, в которых $\sigma_{ij} \neq 0$. Начало координат, как и ранее, располагаем в центре проводящей структуры.

На рис. 4 – рис. 6 представлены результаты численных расчётов электрического поля, создаваемого наведенными зарядами в плоскости параллельной проводящей структуре. Стрелками на рисунках обозначена проекция вектора электрического поля $\vec{E}$ на данную плоскость, а цветом определяется его модуль. Причём, чем больше значение модуля вектора, тем светлее соответствующая область. На рисунках видно, что поле достигает больших значений вблизи краёв проводящей структуры. Кроме того, на квадратной диафрагме (рис. 5) и «ковре Серпинского» 3-й итерации (рис. 6) видно, что вблизи краёв и углов внутренних отверстий в структуре поле претерпевает значительные искажения. Это связано с тем, что вблизи краёв и углов этих проводящих структур скапливается наведенный заряд (рис. 2, рис. 3). Из этого можно сделать вывод, что края проводника вносят наиболее существенный вклад в формирование электрического поля. Также стоит отметить, что модуль вектора электрического поля на «ковре Серпинского» имеет большее максимальное значение, чем на остальных структурах. Рис. 7 и рис. 8 отображают распределение электрического поля $\vec{E}$ в плоскости перпендикулярной проводящей структуре и проведённой через её центр. Цветом обозначены области электрического поля, причём большему значению модуля электрического поля в данной области соответствует более светлый цвет на изображении.

Проведенные в данной работе расчеты в основном касались сплошного проводящего квадрата, квадратной диафрагмы и 3-й итерации «ковра Серпинского». Использовать предложенный в работе алгоритм можно для расчетов ПНЗ любой плоской фигуры произвольной геометрии. В настоящее время разрабатывается программа расчета наведенных электрических полей для ограниченных поверхностей произвольной неплоской геометрии.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе предложен метод численного решения задачи электростатики – вычисление распределения ПНЗ на плоских проводящих структурах произвольной геометрии. Зная величину и распределение плотности наведенных зарядов несложно вычислить пространственное распределение наведенных электрических полей. Результаты расчетов показывают, что вблизи отверстий в проводящих электродинамических структурах наведенные поля сильно изменяются по направлению. Так, например, для проводящего квадрата без отверстий (рис. 4) поведение векторного поля достаточно гладко. Векторы напряженности направлены все от центра проводящего квадрата. Для квадратной диафрагмы (рис. 5) ситуация изменяется и вблизи отверстия векторы напряженности изменяют направление на 180 градусов. Это связано с тем, что наведенные заряды скапливаются у границ отверстия и, таким образом, существенно влияют на пространственное распределение векторного поля вблизи отверстия. Таким образом, отверстия в электродинамических структурах являются источниками сильных неоднородностей распределения наведенной напряженности электрического поля.

Разработанный алгоритм можно также применять для вычисления распределения зарядов на произвольной проводящей поверхности, находящейся под заданным потенциалом и вычислять пространственное распределение электрического поля.

С помощью предложенного алгоритма можно решать и более сложные электростатические задачи, например, задачи о нахождении пространственного распределения электрических полей многих ограниченных проводящих структур разных геометрий и находящихся под разными потенциалами.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта УНТЦ № 3473.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ouyang J., Chu C.W., Sieves D., and Yang Y. Electric-field-induced charge transfer between gold nanoparticle and capping 2-naphthalenethiol and organic memory cells // *Appl. Phys. Lett.* - 2005. - V.86. - P. 123507.
2. Yu E.T. et al. Measurement of piezoelectrically induced charge in GaN/AlGaIn heterostructure field-effect transistors // *Appl. Phys. Lett.* - 1997. - V.71, №19. - P. 2794–2796.
3. Bazant M.Z., Squires T.M. Induced-Charge Electrokinetic Phenomena: Theory and Microfluidic Applications // *Phys. Rev. Lett.* - 2004. - V.9, №6. - P. 066101.
4. Tjmita Y., Smirnov R., Sizheng Z. Induced Charge of Spherical Dust Particle on Plasma-Facing Wall in Non-Uniform Electric Field // *Plasma Science & Technology*. - 2006. - V.8, №1. - P. 122–124.
5. Смайт В. Электростатика и электродинамика. - М.: Иностранная литература, 1954. - 606 с.
6. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. - М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974. - 432 с.
7. Ильина В.А., Силаев П.К. Численные методы для физиков-теоретиков. - Москва - Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. - 132 с.
8. Федер Е. Фракталы. - М.: Мир, 1991. - 264 с.

CALCULATION OF INDUCED ELECTRIC FIELD NEAR CONDUCTIVE STRUCTURES

V.N. Bolotov, R.A. Druzhchenko

Kharkov V.N. Karazin National University, Svobody Sq. 4, Kharkov, Ukraine, 61007.

Distributions of induced electric fields near plane surface of finite size have been calculated, including fractal structures like Sierpinski carpet. Construction of the calculated scheme is based on the fact that connected conductive surface of arbitrary geometry is the equipotential surface. This enabled to compose and solve the system of algebraic equations for induced charges density and then to calculate electric fields at any point of the space. The calculations have been executed for different positions of external charge relatively conductive finite surfaces of different geometries.

KEY WORDS: electrostatics, induced charge, fractal structures, induced electric fields.