С.Н. Зиненко

Математический анализ

Дифференцирование функций нескольких переменных

(теория к задачам)

2015

26. Частные производные и дифференциал функции

Частная производная функции $u = f(x, y, z, \dots)$ *нескольких переменных* $x, y, z, \dots$ *по переменной* x *- это обычная производная функции* $u = f(x, \dots)$ *одной переменной* x, *если остальные* $y, z, \dots$ *временно воспринимать как фиксированные параметры*

$$u = f(x, \dots) \quad \Rightarrow \quad u'_x = \frac{\partial f(x, \dots)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, \dots) - f(x, \dots)}{\Delta x}$$

Функция называется дифференцируемой в точке $(x, y, z, \dots)$, *если ее приращение*

$$\Delta u = \Delta f(x, y, z, \dots) = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z, \dots) - f(x, y, z, \dots) = \ \rightarrow$$

допускает выделение линейной главной части, называемой дифференциалом функции

$$\rightarrow = \underbrace{A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + \dots}_{\parallel \atop du \,=\, df(x, y, z, \dots)} + o(\Delta\rho), \qquad \Delta\rho = \sqrt{\underset{dx}{\underset{\parallel}{\Delta x}}^2 + \underset{dy}{\underset{\parallel}{\Delta y}}^2 + \underset{dz}{\underset{\parallel}{\Delta z}}^2 + \dots}$$

Если $\exists$ *дифференциал* du, *то* $\exists$ *частные производные* $u'_x,\ u'_y,\ u'_z,\ \dots$, *причем*

$$\boxed{du = u'_x\,dx + u'_y\,dy + u'_z\,dz + \dots}$$

Из определения вытекают правила дифференцирования функций нескольких переменных полностью аналогичные соответствующим правилам для функций одной переменной

Теорема *(правила дифференцирования)*

Пусть

1) $u = f(x, \dots), \quad v = g(x, \dots)$

$\Rightarrow$

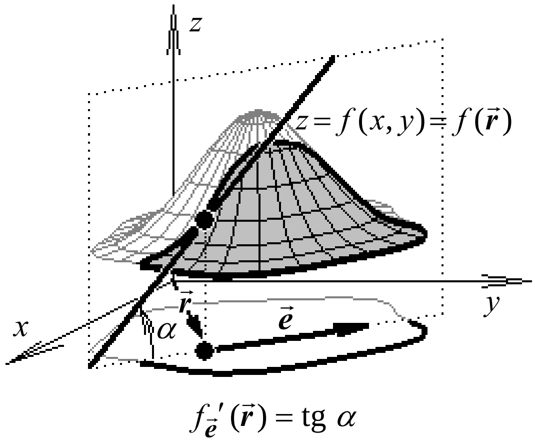
1) $(u + v)'_x = u'_x + v'_x \quad , \dots \qquad d(u + v) = du + dv$

2) $(u - v)'_x = u'_x - v'_x \quad , \dots \qquad d(u - v) = du - dv$

3) $(u \cdot v)'_x = u'_x \cdot v + u \cdot v'_x \quad , \dots \qquad d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv$

4) $\left(\frac{u}{v}\right)'_x = \frac{u'_x \cdot v - u \cdot v'_x}{v^2} \quad , \dots \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du \cdot v - u \cdot dv}{v^2}$

27. Производная по направлению. Градиент



Удобно рассматривать функцию нескольких переменных $z = f(x, y)$, *как функцию векторного аргумента* $z = f(\vec{r})$

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Придадим приращение $\Delta\vec{r} = \Delta t \cdot \vec{e}$ *радиус-вектору* $\vec{r}$ *точки* (x, y) *величины* Δt *по направлению единичного вектора*

$$\vec{e} = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \end{bmatrix}, \quad |\vec{e}| = \sqrt{e_x^2 + e_y^2} = 1$$

Производной *функции* $z = f(\vec{r})$ *в точке* $\vec{r}$ ***по направлению*** $\vec{e}$ *называется*

$$z'_{\vec{e}} = \frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(\vec{r}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(\vec{r} + \Delta t\,\vec{e}) - f(\vec{r})}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x + \Delta t\, e_x,\; y + \Delta t\, e_y) - f(x, y)}{\Delta t} = z'_x \cdot e_x + z'_y \cdot e_y$$

Геометрический *смысл производной по направлению (в случае функции двух переменных) – тангенс угла между касательной прямой к сечению поверхности* $z = f(\vec{r})$ *вертикальной плоскостью, параллельной направлению* $\vec{e}$, *и координатной плоскостью* xOy: $f'_{\vec{e}}(\vec{r}) = \mathrm{tg}\,\alpha$ *(крутизна подъема поверхности в точке* $\vec{r}$ *по направлению* $\vec{e}$*)*

Физический *смысл –* ***скорость*** *изменения функции в точке* $\vec{r}$ *по направлению* $\vec{e}$ *(перепад температур в данной точке* $\vec{r}$ *в выбранном направлении* $\vec{e}$*)*

Градиентом *скалярной функции* $z = f(x, y)$ *называется вектор*

$$\mathrm{grad}\, z = \begin{bmatrix} z'_x \\ z'_y \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{z'_{\vec{e}} = \left(\mathrm{grad}\, z,\; \vec{e}\right)}$$

Из связи $\mathrm{grad}\, z$ *с производной по направлению вытекает*

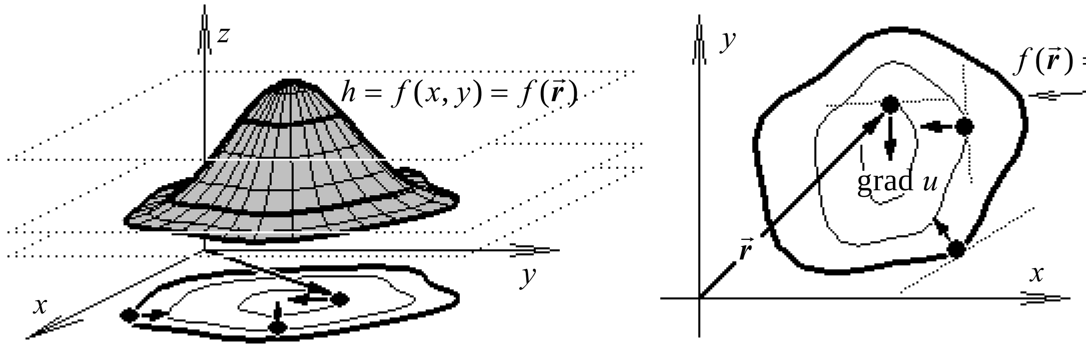
Теорема *(геометрический и физический смысл градиента)*

1) *направление* $\mathrm{grad}\, z$ *- направление* $\vec{e}_{\max}$ ⎤ *наибольшего роста функции* $z = f(\vec{r})$
2) *длина* $|\mathrm{grad}\, z|$ *- величина* $z'_{\vec{e}_{\max}} = \max\limits_{\vec{e}} z'_{\vec{e}}$ ⎦

$$\boxed{\mathrm{grad}\; z = z'_{\vec{e}_{\max}} \cdot \vec{e}_{\max}}$$

3) $\mathrm{grad}\; z \perp$ *линии (поверхности) уровня* $z = const$

Если $h = f(x,\ y)$ *высота поверхности над точкой* $(x,\ y)$, *то величина и направление* $\mathrm{grad}\, h$ *- это величина и направление наибольшей крутизны поверхности в данной точке.*



Если $u = f(x,\ y)$ *температура пластины в точке* $(x,\ y)$, *то величина и направление* $\mathrm{grad}\, u$ *- это величина и направление наибольшего перепада температуры в точке.*

28. Дифференцирование сложной функции

Правило дифференцирования сложной функции нескольких переменных

$$f = f(x,\ y,\ z,\ \dots) = f(x(u,\ v,\ w,\ \dots),\ y(u,\ v,\ w,\ \dots),\ z(u,\ v,\ w,\ \dots),\ \dots) = f(u,\ v,\ w,\ \dots)$$

является обобщением соответствующего правила для функции одной переменной

$$\boxed{f_u' = f_x' \cdot x_u' + f_y' \cdot y_u' + f_z' \cdot z_u' + \dots} \qquad f_v' = \dots \qquad f_w' = \dots$$

29. Производные и дифференциалы высшего порядка. Формула Тейлора

Частные производные высшего порядка

$$u \;\begin{cases} u'_x \;\begin{cases} (u'_x)'_x = u''_{xx} \;\begin{cases} (u''_{xx})'_x = u'''_{xxx} \; \nearrow \dots \; \searrow \dots \\ (u''_{xx})'_y = \underline{u'''_{xxy}} \; \nearrow \dots \; \searrow \dots \end{cases} \\ (u'_x)'_y = \underbrace{u''_{xy}} \;\begin{cases} (u''_{xy})'_x = \underline{u'''_{xyx}} \; \nearrow \dots \; \searrow \dots \\ (u''_{xy})'_y = \underline{\underline{u'''_{xyy}}} \; \nearrow \dots \; \searrow \dots \end{cases} \end{cases} \\ u'_y \;\begin{cases} (u'_y)'_x = \underbrace{u''_{yx}} \;\begin{cases} (u''_{yx})'_x = \underline{u'''_{yxx}} \; \nearrow \dots \; \searrow \dots \\ (u''_{yx})'_y = \underline{\underline{u'''_{yxy}}} \; \nearrow \dots \; \searrow \dots \end{cases} \\ (u'_y)'_y = u''_{yy} \;\begin{cases} (u''_{yy})'_x = \underline{\underline{u'''_{yyx}}} \; \nearrow \dots \; \searrow \dots \\ (u''_{yy})'_y = u'''_{yyy} \; \nearrow \dots \; \searrow \dots \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Теорема *(о смешанных производных)*

Если смешанные производные непрерывны, то частное дифференцирование функции нескольких переменных ***не зависит*** *от порядка дифференцирования*

$$\underbrace{u''_{xy}} = \underbrace{u''_{yx}}\,; \qquad \underline{u'''_{xxy}} = \underline{u'''_{xyx}} = \underline{u'''_{yxx}}\,, \qquad \underline{\underline{u'''_{xyy}}} = \underline{\underline{u'''_{yxy}}} = \underline{\underline{u'''_{yyx}}}\,; \qquad \dots$$

*При выполнении этого условия для дифференциалов высшего порядка имеем (**сравнить!**)*

$$u \to du = u'_x\,dx + u'_y\,dy \qquad\qquad x + y = (x+y)^1$$

$$\to d^2u = u''_{xx}\,dx^2 + 2u''_{xy}\,dx\,dy + u''_{yy}\,dy^2 \qquad\qquad x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$$

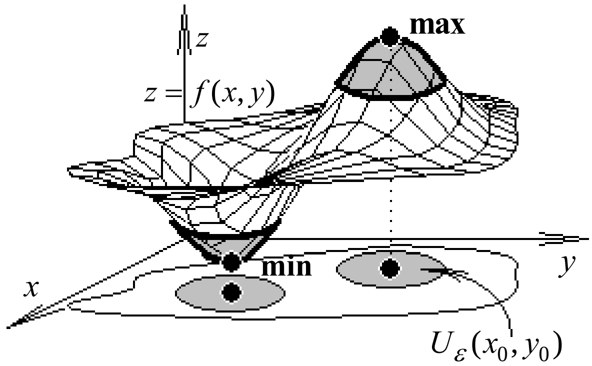
$$\to d^3u = u'''_{xxx}\,dx^3 + 3u'''_{xxy}\,dx^2dy + 3u'''_{xyy}\,dx\,dy^2 + u'''_{yyy}\,dy^3 \qquad\qquad x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = (x+y)^3$$

$$\to \dots \qquad\qquad \dots$$

Формула ***Тейлора*** *для функций нескольких переменных наиболее простой вид имеет в “дифференциальной” форме, инвариантной относительно числа переменных*

$$\boxed{\Delta u = \frac{1}{1!}du + \frac{1}{2!}d^2u + \dots + \frac{1}{n!}d^nu + o(\Delta\rho^n)}$$

30. Экстремум функции



В точке $(x_0, \dots)$ *достигается локальный* **min** *(***max***) функции* $u = f(x, \dots)$*, если для “соседних” точек из некоторой окрестности* $(x, \dots) \in U_\varepsilon(x_0, \dots)$ *выполнено*

$$\left[\begin{array}{l} \textbf{min} \\ \textbf{max} \end{array}\right. \Leftrightarrow \; f(x, \dots) \underset{\le}{\ge} f(x_0, \dots) \;\Leftrightarrow\; \Delta u \underset{\le}{\ge} 0$$

Если функция $u = f(x, \dots)$ *достаточное число раз дифференцируема, то в точке экстремума первый дифференциал равен нулю (необходимое условие)*

$$du = 0$$

При этом характер экстремума, как это вытекает из формулы Тейлора,

$$\Delta u = \frac{1}{1!}\underset{0}{\underset{\parallel}{du}} + \frac{1}{2!}d^2u + o(\Delta\rho^2) \approx \frac{1}{2}d^2u$$

можно определить, исследуя знак второго дифференциала (достаточное условие)

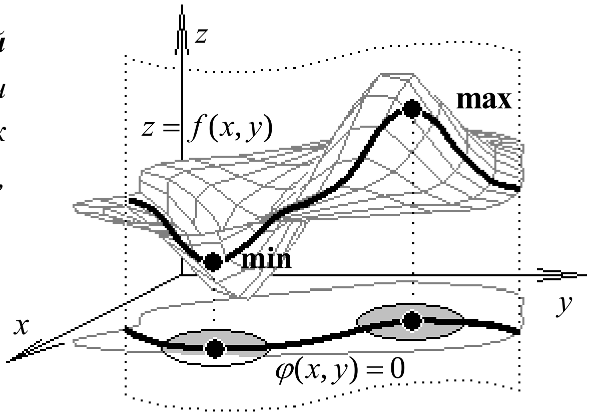
$$d^2u = \left[\begin{array}{lll} > 0 & & \textbf{min} \\ \gtrless 0 & \Rightarrow & \cancel{\text{min max}} \\ < 0 & & \textbf{max} \end{array}\right.$$

В случае функции двух переменных $z = f(x, y)$ *подозрительные на экстремум точки* (x_0, y_0) *(стационарные) находятся как решения системы уравнений*

$$\left[\begin{array}{l} f_x'(x, y) = 0 \\ f_y'(x, y) = 0 \end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x = x_0 \\ y = y_0 \end{array}\right.$$

Полагая, $\begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}_{(x_0, y_0)} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$, *получим* $\boldsymbol{AC - B^2} = \left[\begin{array}{l} > 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A > 0 \Rightarrow \textbf{min} \\ A < 0 \Rightarrow \textbf{max} \end{array}\right. \\ < 0 \Rightarrow \cancel{\text{min max}} \end{array}\right.$

В точке (x_0, y_0) *достигается* ***условный*** *локальный* **min** *(***max***) функции* $z = f(x, y)$ *при условии* $\varphi(x, y) = 0$*, если для "соседних" точек из некоторой окрестности* $(x, y) \in U_\varepsilon(x_0, y_0)$*, лежащих на кривой связи, выполнено*



$$\left[\begin{array}{l}\mathbf{min}\\ \mathbf{max}\end{array}\right. \Leftrightarrow f(x,\ y) \underset{\le}{\ge} f(x_0,\ y_0)$$

при условии

$$\varphi(x,\ y) = \varphi(x_0,\ y_0) = 0$$

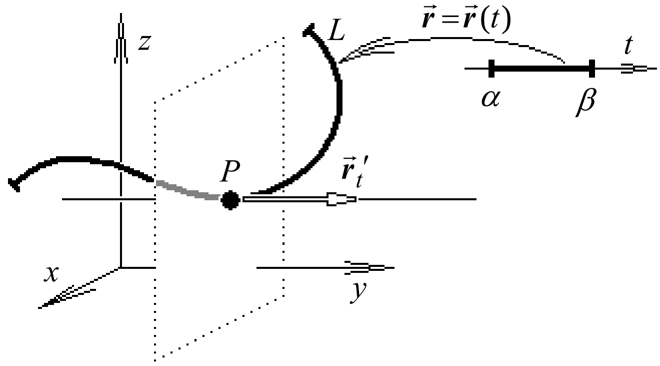
Если функции $f(x, y)$*,* $\varphi(x, y)$ *достаточное число раз дифференцируемы, то в точке экстремума* (x_0, y_0) *равен нулю первый дифференциал функции Лагранжа при некотором значении вспомогательного параметра* λ_0 *(необходимое условие)*

$$F(x, y; \lambda) = f(x, y) - \lambda\varphi(x, y) \quad \Rightarrow \quad dF = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} F_x' = f_x' - \lambda\varphi_x' = 0 \\ F_y' = f_y' - \lambda\varphi_y' = 0 \\ F_\lambda' = \quad\ \ -\varphi \quad\ = 0 \end{array}\right.$$

31. Элементы дифференциальной геометрии

Простой кривой *называется образ* L *непрерывного взаимно однозначного отображения* $\vec{r}=\vec{r}(t)$ *отрезка* $[\alpha,\beta]\subset R_1$ *в пространство* R_3

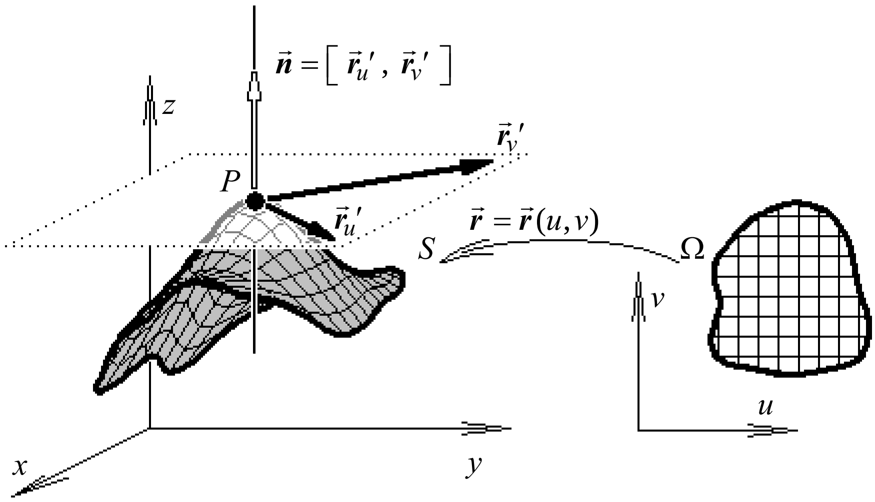
$$L=\left\{\vec{r}=\vec{r}(t)=\left[\begin{array}{l} x=x(t)\\ y=y(t),\ t\in[\alpha,\beta]\\ z=z(t)\end{array}\right.\right\}$$



Кривая называется ***гладкой****, если* $\exists$ *непрерывная* $\vec{r}_t'(t)\neq 0\quad \forall t$.
В этом случае в каждой точке P $\exists$ ***касательная*** *прямая к кривой, с направляющим вектором* $\vec{r}_t'(t)$ *(кривая без изломов, гладкая).*
Плоскость, проходящая через точку P *ортогонально к касательной прямой, называется* ***нормальной*** *плоскостью к кривой.*

Простой поверхностью *называется образ* S *непрерывного взаимно однозначного отображения* $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ *замкнутой области* $\Omega\subset R_2$ *в пространство* R_3

$$S=\left\{\vec{r}=\vec{r}(u,v)=\left[\begin{array}{l} x=x(u,v)\\ y=y(u,v),\ \ (u,v)\in\Omega\\ z=z(u,v)\end{array}\right.\right\}$$



Поверхность называется ***гладкой****, если* $\exists$ *непрерывные* $\vec{r}_u',\vec{r}_v'$, *причем* $[\vec{r}_u',\vec{r}_v']\neq\vec{0}$.
В этом случае в каждой точке P $\exists$ ***касательная*** *плоскость, направляющими векторами которой являются* $\vec{r}_u',\vec{r}_v'$ *(т.е. с нормальным вектором* $\vec{n}=[\vec{r}_u',\vec{r}_v']$*), а значит, поверхность не имеет изломов.*

Прямая, проходящая через точку P *ортогонально касательной плоскости, т.е. параллельно вектору* $\vec{n}=[\vec{r}_u',\vec{r}_v']$, *называется* ***нормальной*** *прямой к поверхности.*