ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХАРЬКОВСКОГО ГОСУНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXVII. Серия 4 1961

О НЕКОТОРЫХ ФОРМУЛАХ ОБРАЩЕНИЯ

Н. И. Ахиезер

1. Настоящая заметка посвящена некоторым общим формулам обращения, которые при надлежащих предположениях относительно входящих в них функций порождают разнообразные частные и в том числе многие классические формулы. Именно эта возможность получения большого числа различных формул обращения из одного простого источника представляется обстоятельством, заслуживающим некоторого внимания. Что касается условий применимости наших формул, то нахождение их в общем случае вряд ли возможно и поэтому должно производиться для каждого частного случая отдельно. На основании сказанного мы ограничиваемся формальной стороной дела.

Обозначим через $\varphi(t)$ $(t \geqslant 0)$ непрерывно дифференцируемую функцию, которая монотонно и неограниченно растет при $t \to \infty$. Затем введем пару функций $\omega_i(x, \mu)$ $(i = 1, 2)$ по формулам

$$\omega_1(x, \mu) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \cos(\mu t) \frac{\varphi'(x)\, dt}{[\varphi(x) - \varphi(t)]^{1-\alpha}},$$

$$\omega_2(x, \mu) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \sin(\mu t) \frac{\varphi'(x)\, dt}{[\varphi(x) - \varphi(t)]^{1-\alpha}},$$

и пару функций $\theta_i(x, \mu)$ $(i = 1, 2)$ по формулам

$$\theta_1(x, \mu) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_x^\infty \sin(\mu t) \frac{\mu\, dt}{[\varphi(t) - \varphi(x)]^{\alpha}},$$

$$\theta_2(x, \mu) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_x^\infty \cos(\mu t) \frac{\mu\, dt}{[\varphi(t) - \varphi(x)]^{\alpha}},$$

где константа α удовлетворяет неравенству $0 < \alpha < 1$.

В таком случае наши формулы обращения запишутся в виде

$$g(\mu) = \int_0^\infty f(x)\, \omega_i(x, \mu)\, dx \tag{1}$$

$$f(x) = \int_0^\infty g(\mu)\, \theta_i(x, \mu)\, d\mu, \tag{2}$$

где i имеет одно из значений 1,2.

Докажем, например, что равенство (2) представляет решение уравнения, выражаемого равенством (1). При этом примем, что $i=2$. С этой целью запишем равенство (1) в виде

$$g(\mu)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sin(\mu t)\,dt\int_t^\infty \frac{f(x)\varphi'(x)\,dx}{[\varphi(x)-\varphi(t)]^{1-\alpha}}.$$

С помощью интегральной теоремы Фурье находим отсюда, что

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^\infty \frac{f(x)\varphi'(x)\,dx}{[\varphi(x)-\varphi(t)]^{1-\alpha}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty g(\mu)\sin(\mu t)\,d\mu.$$

Теперь остается воспользоваться формулами обращения Абеля

$$G(\xi)=\frac{2}{\Gamma(\alpha)}\int_\xi^\infty \frac{F(\tau)}{(\tau^2-\xi^2)^{1-\alpha}}\,d\tau \qquad (0<\alpha<1),$$

$$F(\xi)=-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{d\xi}\int_\xi^\infty \frac{\tau G(\tau)}{(\tau^2-\xi^2)^{\alpha}}\,d\tau,$$

предварительно положив

$$\varphi(x)=\xi^2,\ \varphi(t)=\tau^2,\ f(x)=\frac{1}{\xi}F(\xi).$$

2. Чтобы получить первое применение общих формул, положим $\varphi(x)=x$. Будем иметь

$$\omega_1(x,\ \mu)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\mu^\alpha}C_\alpha(\mu x),$$

где

$$C_\alpha(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-z)^{\alpha-1}\cos z\,dz$$

есть так называемая функция Юнга порядка α. После несложных вычислений найдем, что

$$\theta_1(x,\ \mu)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mu^\alpha\cos\left(\mu x-\frac{\pi\alpha}{2}\right).$$

Таким образом, мы получим пару формул обращения

$$h(\mu)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\,C_\alpha(\mu x)\,dx, \tag{3}$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty h(\mu)\cos\left(\mu x-\frac{\pi\alpha}{2}\right)d\mu. \tag{4}$$

Так как $C_0(x)=\cos x$ и $C_1(x)=\sin x$, то эти формулы переходят в формулы Фурье при $\alpha=0$ и $\alpha=1$. Значит при $\alpha=0$ и $\alpha=1$ они не нуждаются в обосновании. Если бы мы сохранили предположение $\varphi(x)=x$ и построили формулы (1), (2) при $i=2$, то мы снова пришли бы к формулам (3), (4), но для $1 \leqslant \alpha < 2$. Таким образом, формулы (3), (4) получены для $0 \leqslant \alpha < 2$.

Заметим, что эти формулы не являются новыми, а вытекают из более общего результата Харди [2], относящегося к 1925 г., который мы ниже также получим. В том же 1925 г. Кук [3] рассмотрел вопрос о представимости функции $f(x)$ в виде

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(\mu x - \frac{\pi\alpha}{2}\right) d\mu \int_0^\infty f(t)\, C_\alpha(\mu t)\, dt.$$

Он показал, что это представление наверно справедливо, если функция $f(t)$ в окрестности точки x имеет ограниченную вариацию и если $f(t) \in L^1(0, \infty)$.

3. Мы придем к формулам обращения с цилиндрическими функциями, если примем $\varphi(x) = x^2$. Чтобы получить более привычные обозначения, положим $\alpha = p + \frac{1}{2}$, так что $-\frac{1}{2} < p < \frac{1}{2}$. В таком случае

$$\omega_1(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2x}{\mu}\right)^p J_p(\mu x), \quad \omega_2(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2x}{\mu}\right)^p \boldsymbol{H}_p(\mu x), \tag{5}$$

$$\theta_1(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2x}{\mu}\right)^p J_p(\mu x), \quad \theta_2(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2x}{\mu}\right)^p Y_p(\mu x), \tag{6}$$

где J_p, Y_p, $\boldsymbol{H}_p$ обозначают соответственно функции Бесселя, Неймана и Струве. Наши формулы (1), (2) при $i = 1$ переходят в формулы Ганкеля, которые справедливы при $p \geqslant -\frac{1}{2}$, а при $i = 2$ мы также получаем известные формулы.

4. Выведем теперь упомянутые выше формулы Харди, которые имеют вид

$$f(x) = \int_0^\infty g(\mu)\, G_p(x\mu)\, \mu d\mu, \tag{7}$$

$$g(\mu) = \int_0^\infty f(x)\, F_p(x\mu)\, x dx, \tag{8}$$

где

$$G_p(x) = \sin\frac{\pi\alpha}{2} J_p(x) - \cos\frac{\pi\alpha}{2} Y_p(x)$$

и

$$F_p(x) = \sum_{m=0}^\infty (-1)^m \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha+p+2m-1}}{\Gamma\left(m + \frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(m+p+\frac{\alpha+1}{2}\right)}.$$

(Заметим, что $F_p(x)$ выражается через функцию Ломмеля.) Воспользовавшись формулами (6), представим $G_p(x)$ в виде

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\mu}{2x}\right)^p G_p(\mu x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - p\right)} \int_x^\infty \frac{\cos\left(\mu t - \frac{\pi\alpha}{2}\right)}{(t^2 - x^2)^{p+\frac{1}{2}}} dt.$$

Поэтому из (7) следует, что

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - p\right)} \int\limits_x^\infty \frac{dt}{(t^2 - x^2)^{p+\frac{1}{2}}} \int\limits_0^\infty g_1(\mu) \cos\left(\mu t - \frac{\pi\alpha}{2}\right) d\mu,$$

где

$$f_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{(2x)^p} f(x), \quad g_1(\mu) = \mu^{1-p} g(\mu).$$

Применяя формулу Абеля, получим

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty g_1(\mu) \cos\left(\mu t - \frac{\pi\alpha}{2}\right) d\mu = -\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + p\right)} \frac{d}{dt} \int\limits_t^\infty \frac{x f_1(x)}{(x^2 - t^2)^{\frac{1}{2} - p}} dx.$$

Отсюда с помощью (3) находим, что

$$g_1(\mu) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + p\right)} \int\limits_0^\infty C_\alpha(\mu t)\, dt \frac{d}{dt} \left[\int\limits_t^\infty \frac{x f_1(x)\, dx}{(x^2 - t^2)^{\frac{1}{2} - p}} \right] =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + p\right)} \int\limits_0^\infty x f_1(x)\, dx \int\limits_0^x (x^2 - t^2)^{p - \frac{1}{2}} \mu \cdot C_{\alpha-1}(\mu t)\, dt.$$

Чтобы закончить доказательство, остается воспользоваться разложением

$$C_{\alpha-1}(z) = \sum_{m=0}^\infty (-1)^m \frac{z^{\alpha+2m-1}}{\Gamma(\alpha + 2m)}$$

и с его помощью установить, что

$$\int\limits_0^x (x^2 - t^2)^{p - \frac{1}{2}} C_{\alpha-1}(\mu t)\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{2x}{\mu}\right)^p F_p(\mu x).$$

5. В заключение выведем формулы обращения с обобщенными функциями Лежандра.

С этой целью воспользуемся следующими известными формулами теории обобщенных функций Лежандра

$$P_q^{-p}(\operatorname{ch} x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(\operatorname{sh} x)^{-p}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + p\right)} \int\limits_0^x \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2} + q\right) t}{(\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} t)^{\frac{1}{2} - p}} dt,$$

$$Q_q^p(\operatorname{ch} x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\pi p i}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - p\right)} (\operatorname{sh} x)^p \int\limits_x^\infty \frac{e^{-\left(q+\frac{1}{2}\right)t}}{(\operatorname{ch} t - \operatorname{ch} x)^{\frac{1}{2} + p}} dt,$$

$$Q^p_{-q-1}(z) - Q^p_q(z) = e^{\pi p i} \cos(\pi q) \cdot \Gamma(p+q+1)\,\Gamma(p-q)\,P_q^{-p}(z),$$

где $-\frac{1}{2} < p < \frac{1}{2}$, $x \geqslant 0$. Если мы положим $q = -\frac{1}{2} + i\mu$ и примем $\varphi(x) = \operatorname{ch} x$, $\alpha = p + \frac{1}{2}$, то найдем, в силу написанных формул, что

$$\omega_1(x, \mu) = (\operatorname{sh} x)^{p+1} P^{-p}_{-\frac{1}{2}+i\mu}(\operatorname{ch} x)$$

$$\theta_1(x, \mu) = \frac{\mu \operatorname{sh}(\pi\mu)}{\pi} \frac{\left|\Gamma\left(\frac{1}{2} + p + i\mu\right)\right|^2}{(\operatorname{sh} x)^p} P^{-p}_{-\frac{1}{2}+i\mu}(\operatorname{ch} x).$$

Таким образом получаются формулы обращения

$$\left\{\begin{aligned} g(\mu) &= \int_1^\infty f(\xi)\, P^{-p}_{-\frac{1}{2}+i\mu}(\xi)\, d\xi \\ f(\xi) &= \int_0^\infty g(\mu)\, P^{-p}_{-\frac{1}{2}+i\mu}(\xi) \frac{\mu \operatorname{sh}(\pi\mu) \left|\Gamma\left(\frac{1}{2} + p + i\mu\right)\right|^2}{\pi} d\mu. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Они справедливы при $p \geqslant -\frac{1}{2}$ и на них распространяется теория Планшереля. В частности, равенство Парсеваля имеет вид

$$\int_1^\infty |f(\xi)|^2 d\xi = \int_0^\infty |g(\mu)|^2 \frac{\mu \operatorname{sh}(\pi\mu) \left|\Gamma\left(\frac{1}{2} + p + i\mu\right)\right|^2}{\pi} d\mu. \tag{10}$$

Убедиться в этом можно с помощью общих методов спектральной теории дифференциальных операторов.

При $p = 0$ формулы (9) хорошо известны и называются формулами Мелера — Фока. При $p = \frac{1}{2}n - 1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ эти формулы, а также соотношение (10) были недавно получены Н. Я. Виленкиным [4] (в связи с некоторыми теоретико-групповыми рассмотрениями).

ЛИТЕРАТУРА*

[1]. Erdélyi, Magnus, Oberhettinger, Tricomi. Higher Transc Functions, Vol. II, New York, 1953.
[2]. Hardy. Proc. London Math. Soc., *23*.
[3]. Cooke. Proc. London Math. Soc., *24*.
[4]. Н. Я. Виленкин. «ДАН СССР», 118, № 2.

* С работами [2], [3] мне не удалось ознакомиться и ссылки на эти работы я делаю на основании справочника [1].