УДК 517.53

И. В. ОСТРОВСКИЙ

ОДНОРОДНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА С БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ НА КРИВОЛИНЕЙНОМ КОНТУРЕ. I

Краевая задача Римана с бесконечным индексом впервые встретилась, по-видимому, в работе Н. И. Ахиезера [1]. Общую теорию краевых задач Римана с бесконечным индексом степенного характера построил в 60- годах Н. В. Говоров; изложение дано в монографии [2]. Теория Н. В. Говорова обобщалась рядом авторов в различных направлениях (см. [3—5], где имеется подробная библиография). В этой теории и ее обобщениях, как правило, контур, на котором задано краевое условие, предполагается прямолинейным. Исключение составляют работа самого Н. В. Говорова [2, § 19] и работы А. Г. Алехно [6—8], в которых контур предполагается гладким и имеющим касательную на бесконечности, а также работа Е. А. Данилова [9], в которой контур является логарифмической спиралью. В этих исследованиях предполагалось также, что аргумент коэффициента задачи имеет степенную асимптотику на бесконечности. В настоящей работе мы рассмотрим однородную краевую задачу для контуров более общего характера и с менее правильным поведением аргумента коэффициента.

В качестве контуров будем рассматривать кривые вида $L = \{z = re^{i\varphi(r)},\ 2 \leqslant r_0 \leqslant r < \infty\}$, где φ — вещественная непрерывно дифференцируемая на $[r, \infty)$ функция, удовлетворяющая условиям

$$\lim_{r\to\infty}\left(r\varphi'(r) - \frac{\varphi(r)}{\ln r}\right) = 0, \qquad \varlimsup_{r\to\infty}\frac{|\varphi(r)|}{\ln r} < \infty. \tag{1}$$

Такие кривые будем называть *допустимыми*. Примерами допустимых кривых являются логарифмические спирали ($\varphi(r) = c\ln r$, $c = \mathrm{const}$), а также кривые, названные в [10] кривыми правильного вращения и определяемые условием: существует конечный $\lim\limits_{r\to\infty} r\varphi'(r)$.

Однако класс допустимых кривых этими примерами не исчерпывается. В частности, допустимыми являются кривые L, для которых

$$\varphi(r) = (a + b\sin(\ln\ln r)^{\alpha})\ln r, \qquad 2 \leqslant r < \infty, \tag{2}$$

где $0 < \alpha < 1$, a и b — положительные постоянные. Для любой допустимой кривой L введем величины

$$C(L) = \varlimsup_{r\to\infty}\frac{|\varphi(r)|}{\ln r}, \qquad c(L) = \varliminf_{r\to\infty}\frac{|\varphi(r)|}{\ln r}.$$

Пример (2) показывает, что для любой пары чисел (x, y), $0 \leqslant x \leqslant y < \infty$, существует допустимая кривая L такая, что $c(L) = x$, $C(L) = y$. Заметим, что все результаты настоящей статьи сохранят силу, если расширить класс допустимых кривых, присоединив к нему гладкие жордановы кривые L такие, что для некоторого $R(L) > 2$ допустимой является кривая $L \cap \{z : |z| \geqslant R(L)\}$.

Обозначим через D плоскость, разрезанную вдоль допустимой кривой L. Пусть (D) — множество получаемое присоединением к D обоих берегов разреза вдоль $L \setminus \{t_0\}$, $t_0 = r_0 e^{i\varphi(r_0)}$. *Однородной краевой задачей Римана на* L будем называть задачу о нахождении аналитической в D, непрерывной и ограниченной в (D) функции Φ, предельные значения которой $\Phi^{\pm}$ на берегах разреза удовлетворяют уравнению

$$\Phi^{+}(t) = G(t)\,\Phi^{-}(t), \qquad t \in L \setminus \{t_0\}, \tag{3}$$

где G — коэффициент задачи — заданная непрерывная и не обраща ющаяся в нуль на L функция.

Пусть ψ — комплекснозначная функция на L, удовлетворяющая условию Дини. Последнее означает, что для любых t_1, $t_2 \in L$ выполняется

$$|\psi(t_1) - \psi(t_2)| \leqslant \omega(|t_1^{-1} - t_2^{-1}|), \tag{4}$$

где ω — неубывающая функция на $[0, \infty)$, $\omega(0) = 0$, такая, что $\int\limits_0^1 \omega(\ )\,\delta^{-1}\,d\delta < \infty$. Очевидно, из выполнения условия Дини следует существование предела $\psi(\infty) = \lim\limits_{t \to \infty} \psi(t)$. Будем предполагать, что $\psi(\infty) > 0$.

Пусть $l = l(r)$ — уточненный порядок Бутру [11, с. 91], удовлетворяющий условию

$$p < \lambda := \varliminf_{r \to \infty} l(r) \leqslant \rho := \varlimsup_{r \to \infty} l(r) < p + 1, \tag{5}$$

где p — целое неотрицательное число. Потребуем, чтобы выполнялось условие

$$-2\pi < \operatorname{Re}\psi(t)\,|t|^{l(|t|)}\big|_{t=t_0} \leqslant 0. \tag{6}$$

Рассмотрим однородную краевую задачу Римана на L с коэффициентом

$$G(t) = \exp\{i\psi(t)\,|t|^{l(|t|)}\}, \qquad t \in L. \tag{7}$$

Очевидно, что $\arg G(t) = \operatorname{Re}\psi(t)\,|t|^{l(|t|)} \sim \psi(\infty)\,|t|^{l(|t|)} \to +\infty$, $t \to \infty$. По терминологии Н. В. Говорова это означает, что задача имеет плюс-бесконечный индекс. Заметим, что $\ln|G(t)| = -\operatorname{Im}\psi(t)\,|t|^{l(|t|)} = o(|t|^{l(|t|)})$, $t \to \infty$.

В настоящей первой части работы задача будет рассматриваться при условии

$$\rho < \frac{1}{2}(1 + c^2(L)). \tag{8}$$

Это условие является аналогом условия $\rho < \frac{1}{2}$ из [2, гл. IV] и сводится к последнему, если L имеет касательную на бесконечности, так как в этом случае $c(L) = 0$. Во второй части работы условие (8) будет отброшено, а предположение, что коэффициент G имеет вид (7), будет заменено менее ограничительными, близкими к тем, которые в случае, когда L — луч, использовались нами в [5]. Однако при этом нам придется сузить класс допустимых кривых и усложнить формулы для решения задачи.

Теорема 1. *Однородная краевая задача Римана на допустимой кривой L с коэффициентом G, задаваемым формулой* (7), *при выполнении условия* (8) *имеет решение*

$$\Phi(z) = \exp\left\{\frac{z^{p+1}}{2\pi}\int_L \frac{\psi(t)\,|t|^{l(|t|)}\,dt}{t^{p+1}(t-z)}\right\}, \qquad z \in D. \tag{9}$$

Если кривая L имеет касательную на бесконечности, $l(r) \equiv \rho$, ψ удовлетворяет условию Гельдера на L, получаем результат Н. В. Говорова [2, § 19]. Если L — логарифмическая спираль, $l(r) \equiv \rho$, ψ удовлетворяет условию Гельдера на L, получаем результат Ю. А. Данилова [9].

Для доказательства теоремы 1 понадобится следующая лемма об асимптотике интеграла типа Коши.

Лемма. *Пусть $L = \{z : z = re^{i\varphi(r)},\ 2 \leqslant r_0 \leqslant r < \infty\}$ — допустимая кривая, l — уточненный порядок Бутру, удовлетворяющий условию* (5). *Положим*

$$I(z) = \frac{z^{p+1}}{2\pi i}\int_L \frac{|t|^{l(|t|)}\,dt}{t^{p+1}(t-z)}, \quad z \in I. \tag{10}$$

При $\theta \in (\varphi(r), \varphi(r) + 2\pi)$ справедлива равномерная относительно θ асимптотика ($r \to \infty$):

$$(1 - e^{2\pi i\beta(r)})\, I(re^{i\theta}) = \exp\{\beta(r)(\ln r + i\theta)\} + o(r^{l(r)}), \tag{11}$$

где $\beta(r) = (l(r)\ln r)(\ln r + i\varphi(r))^{-1}$.

Заметим, что интеграл (10) абсолютно сходится. Это вытекает из условий (5) и того обстоятельства, что для элемента длины допустимой кривой справедлива оценка

$$|dt| = \sqrt{1 + (|t|\varphi'(|t|))^2}\, d|t| \leqslant C d|t|$$

(через C здесь и ниже обозначаются положительные не обязательно одинаковые постоянные).

В случае, когда L — логарифмическая спираль $\{z : z = re^{ic\ln r}\}$, а $l(r) \equiv \rho$, имеем $\beta(r) = \rho/(1 + ic)$, и асимптотику (11) можно усилить

$$\left(1 - \exp\left(\frac{2\pi i\rho}{1+ic}\right)\right) I(re^{i\theta}) = \exp\left(\frac{\rho(\ln r + i\theta)}{1+ic}\right) + O(r^{\rho}). \tag{12}$$

Соотношение (12) содержится в [10], доказательство таково. Если $\varphi(r) = c\ln r$, то при $t \in L$ имеем $|t|^{\rho} = t^{\rho/(1+ic)}$. Пусть $D_R = \{z : r_0 < |z| < R\} \setminus L$; по теореме Коши при $z \in D_R$ имеем

$$z^{\rho/(1+ic)} = \frac{z^{p+1}}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_R} \frac{t^{\rho/(1+ic)}\,dt}{t^{p+1}(t-z)}.$$

Устремляя $R \to \infty$, получим $z^{\rho/(1+ic)} = \left(1 - \exp\frac{2\pi i\rho}{1+ic}\right) I(z) - \frac{z^{p+1}}{2\pi i} \times$ $\times \int\limits_{|t|=r_0} \frac{t^{\rho/(1+ic)}\,dt}{t^{p+1}(t-z)}$, откуда и следует (12).

В случае, когда L — кривая правильного вращения, а l — обычный уточненный порядок (т. е. в (5) имеем $\lambda = \rho$), в [10] установлено, что (11) имеет место равномерно относительно $\theta \in (\varphi(r) + \varepsilon, \varphi(r) + 2\pi - \varepsilon)$ для любого фиксированного $\varepsilon > 0$. Для этого использовалась оценка разности между интегралом $I(s)$ и интегралом по логарифмической спирали с параметром $c = \lim\limits_{r\to\infty} r\varphi'(r)$ и $l(r) \equiv \rho$, а также равенство (12) для последнего интеграла. Для доказательства леммы мы используем другой путь.

Приступим к доказательству. Заметим, что при $t \in L$ выполняется $|t|^{l(|t|)} = t^{\beta(|t|)}$. Применяя к области D_R обобщенную теорему Коши, получим

$$z^{\beta(|z|)} = \frac{z^{p+1}}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_R} \frac{t^{\beta(|t|)}\,dt}{t^{p+1}(t-z)} + \frac{z^{p+1}}{2\pi i} \iint\limits_{D_R} \frac{\bar\partial t^{\beta(|t|)}}{t^{p+1}(t-z)}\,dt \wedge d\bar t.$$

Замечая, что $|z^{\beta(|z|)}| \sim |z|^{l(|z|)}$, $z \to \infty$, и устремляя $R \to \infty$, будем иметь

$$z^{\beta(|z|)} = \frac{z^{p+1}}{2\pi i} \int\limits_{L} \frac{(1 - e^{2\pi i\beta(|t|)})\,|t|^{l(|t|)}}{t^{p+1}(t-z)}\,dt -$$

$$- \frac{z^{p+1}}{2\pi i} \oint\limits_{|t|=r_0} \frac{t^{\beta(|t|)}\,dt}{t^{p+1}(t-z)} + \frac{z^{p+1}}{2\pi i} \iint\limits_{D_\infty} \frac{\bar\partial t^{\beta(|t|)}\,dt \wedge d\bar t}{t^{p+1}(t-z)} = I_1 + I_2 + I_3. \quad (13)$$

Оценим сначала интеграл I_3. Будем далее полагать $z = re^{i\theta}$, $\theta \in (\varphi(r), \varphi(r) + 2\pi)$, $r > r_0$, и покажем, что справедлива равномерная относительно θ оценка

$$I_3(re^{i\theta}) = o(r^{l(r)}), \qquad r \to \infty. \quad (14)$$

Имеем $\bar\partial t^{(\beta|t|)} = (t^{\beta(|t|)} \ln t)\,\beta'(|t|)\,\bar\partial|t|$, $t = |t|e^{i\tau}$, $\tau \in (\varphi(r), \varphi(r) + 2\pi)$. Легко видеть, что из первого из условий (1) и соотношения $l'(r)\, r\ln r = o(1)$, $r \to \infty$ (имеющего место по определению уточненного порядка Бутру), вытекает оценка $\beta'(r)\, r\ln r = o(1)$, $r \to \infty$. Учитывая также, что $|t^{\beta(|t|)}| \sim |t|^{l(|t|)}$, $|\ln t| = O(\ln|t|)$, $|t| \to \infty$ (использовалось второе из условий (1)), заключаем, что

$$|\bar\partial t^{\beta(|t|)}| = o(|t|^{l(|t|)-1}) \leqslant \varepsilon(|t|)\,|t|^{l(|t|)-1},$$

где $\varepsilon(r) > 0$ — некоторая монотонно стремящаяся к 0 при $r \to \infty$ функция. Поэтому

$$|I_3(re^{i\theta})| \leqslant \frac{r^{p+1}}{\pi} \iint\limits_{D_\infty} \frac{\varepsilon(|t|)\,|t|^{l(|t|)-1}}{|t|^{p+1}\,|t - re^{i\theta}|} \left(\frac{1}{2i}\, dt \wedge d\bar{t}\right) =$$

$$= \frac{r^{p+1}}{\pi} \int\limits_{r_0}^{\infty} \varepsilon(s)\, s^{l(s)-p-1}\, ds \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\tau}{|se^{i\tau} - re^{i\theta}|} =$$

$$= 2r^p \int\limits_{r_0}^{\infty} \varepsilon(s)\, s^{l(s)-p-1} \eta(s/r)\, ds,$$

где принято обозначение

$$\eta(u) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |ue^{i\tau} - 1|^{-1}\, d\tau, \quad 0 \leqslant u < \infty$$

(функция η неоднократно использовалась в теории мероморфных функций [11, гл. V]). Легко видеть, что при $u \geqslant 2$ выполняется $\eta(u) \leqslant 2/u$, а при $0 \leqslant u \leqslant 2$ имеем

$$\eta(u) = \frac{1}{\pi} \left(\int\limits_0^{|u-1|} + \int\limits_{|u-1|}^{\pi/2} + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \right) \frac{d\tau}{|u - e^{i\tau}|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi} \left(1 + \int\limits_{|u-1|}^{\pi/2} \frac{d\tau}{\sin\tau} + \frac{\pi}{2}\right) \leqslant C \ln \frac{4}{|u-1|}.$$

Следовательно,

$$|I_3(re^{i\theta})| \leqslant Cr^p \int\limits_{r_0}^{2r} \varepsilon(s)\, s^{l(s)-p-1} \ln \frac{4r}{|s-r|}\, ds +$$

$$+ Cr^{p+1} \int\limits_{2r}^{\infty} \varepsilon(s)\, s^{l(s)-p-2}\, ds \leqslant Cr^p \int\limits_{r_0}^{r/2} \varepsilon(s)\, s^{l(s)-p-1}\, ds +$$

$$+ C\varepsilon\left(\frac{r}{2}\right) r^{l(r)-1} \int\limits_{r/2}^{2r} \ln \frac{4r}{|s-r|}\, ds + Cr^{p+1}\varepsilon(2r) \int\limits_{2r}^{\infty} s^{l(s)-p-2}\, ds.$$

Используя свойства уточненного порядка Бутру [11, с. 91], убеждаемся в справедливости оценки (14).

Перейдем к рассмотрению интеграла I_1. Положим $Q(z) = I_1(z) - (1 - e^{2\pi i\beta(|z|)})\, I(z)$ и покажем, что равномерно относительно $\theta \in (\varphi(r), \varphi(r) + 2\pi)$ выполняется

$$Q(re^{i\theta}) = o(r^{l(r)}), \qquad r \to \infty. \tag{15}$$

Пусть $\delta \in (0, 1/2)$ — малое число. Считая $r = |z|$ достаточно большим, положим $L_1 = L \cap \{t : r_0 \leqslant |t| \leqslant \delta r\}$, $L_2 = L \cap \{t : \delta r \leqslant |t| \leqslant r/\delta\}$, $L_3 = L \cap \{t : |t| \geqslant r/\delta\}$.

Имеем

$$Q(z) = \frac{z^{p+1}}{2\pi i}\left(\int\limits_{L_1} + \int\limits_{L_2} + \int\limits_{L_3}\right) \frac{(e^{2\pi i\beta(r)} - e^{2\pi i\beta(|t|)})\,|t|^{l(|t|)}\,dt}{t^{p+1}(t-z)} = $$
$$= Q_1(z) + Q_2(z) + Q_3(z).$$

Так как $|e^{2\pi i\beta(r)}| \leqslant e^{\pi l(r)} \leqslant C$, то, используя свойства уточненного порядка Бутру [11, с. 91], получаем

$$|Q_1(z)| \leqslant Cr^{p+1}\int\limits_{r_0}^{\delta r} \frac{s^{l(s)-p-1}}{r-s}\,ds \leqslant Cr^p \int\limits_{r_0}^{\delta r} s^{l(s)-p-1}\,ds \leqslant C\delta^{(\lambda-p)/2} r^{l(r)},$$

$$|Q_3(z)| \leqslant Cr^{p+1}\int\limits_{r/\delta}^{\infty} \frac{s^{l(s)-p-1}}{s-r}\,ds \leqslant Cr^{p+1}\int\limits_{r/\delta}^{\infty} s^{l(s)-p-2}\,ds \leqslant C\delta^{(p+1-\rho)/2} r^{l(r)}.$$

Чтобы оценить $Q_2(z)$, понадобится неравенство

$$|e^{2\pi i\beta(r)} - e^{2\pi i\beta(s)}| \leqslant C|r-s|\{\delta r \ln(\delta r)\}^{-1}, \qquad s \in [\delta r, r/\delta], \tag{16}$$

для получения которого достаточно заметить, что

$$|e^{2\pi i\beta(r)} - e^{2\pi i\beta(s)}| \leqslant C|\beta(r) - \beta(s)| \leqslant$$
$$\leqslant C|r-s|\max\{|\beta'(u)| : u \in [\delta r, r/\delta]\}$$

и, что как было установлено ранее, $|\beta'(u)| \leqslant C\{u \ln u\}^{-1}$. Используя (16), получаем

$$|Q_2(z)| \leqslant \frac{Cr^p}{\delta \ln(r\delta)}\int\limits_{\delta r}^{r/\delta} s^{l(s)-p-1}\,ds \leqslant C\delta^{-2} r^{l(r)}/\ln(r\delta) = o(r^{l(r)}),\ r \to \infty.$$

Пользуясь произволом в выборе δ, приходим к (15).

Из (15) следует, что $I_1(z) = (1 - e^{2\pi i\beta(r)})\,I(z) + o(r^{l(r)})$. Подставляя это и (14) в (13) и учитывая очевидное равенство $I_2(z) = O(r^p)$, $r \to \infty$, убеждаемся в справедливости леммы.

Перейдем к доказательству теоремы. Рассмотрим функцию Φ, определяемую равенством (9). Ее аналитичность в области D очевидна, непрерывность в (D) следует из известной теоремы Племеля—Привалова, поскольку функция ψ удовлетворяет условию Дини. Формулы Сохоцкого — Племеля показывают, что Φ удовлетворяет краевому условию (3). Так как в силу (6) имеем $-2\pi < \arg G(t_0) \leqslant \leqslant 0$, то ограниченность функции Φ в окрестности точки $z = t_0$ доказывается так же, как в [2, с. 115]. Поэтому теорема будет доказана, если удастся установить, что функция Φ ограничена в $D \cap \{z : |z| \geqslant R\}$ при некотором R.

Полагая $r=|z|$, $\zeta(r)=re^{i\varphi(r)}$, запишем равенство (9) в виде

$$\ln\Phi(z)=\psi(\zeta(r))\,iI(z)+S(z), \tag{17}$$

где $I(z)$ определяется равенством (10), а

$$S(z)=\frac{z^{p+1}}{2\pi}\int\limits_L\frac{\psi(t)-\psi(\zeta(r))}{t^{p+1}(t-z)}|t|^{l(|t|)}\,dt.$$

Покажем, что равномерно относительно $\theta\in(\varphi(r),\ \varphi(r)+2\pi)$ выполняется

$$S(re^{i\theta})=o(r^{l(r)}),\qquad r\to\infty. \tag{18}$$

Для заданного $\varepsilon>0$ выберем $R>r_0$ таким, чтобы при $|t|$, $r/2>R$ выполнялось $|\psi(t)-\psi(\zeta(r))|<\varepsilon$ (это возможно, так как существует конечный $\lim\limits_{t\to\infty}\psi(t)=\psi(\infty)$). Полагая $L_1=L\cap\{t:r_0\leqslant|t|\leqslant R\}$, $L_2=L\cap\{t:R\leqslant|t|\leqslant r/2\}$, $L_3=L\cap\{t:r/2\leqslant t\leqslant 2r\}$, $L_4=L\cap\{t:2r\leqslant|t|<\infty\}$, запишем

$$S(z)=\frac{z^{p+1}}{2\pi}\left(\int\limits_{L_1}+\int\limits_{L_2}+\int\limits_{L_3}+\int\limits_{L_4}\right)\frac{\psi(t)-\psi(\zeta(r))}{t^{p+1}(t-z)}|t|^{l(|t|)}dt=$$
$$=S_1(z)+S_2(z)+S_3(z)+S_4(z).$$

Ясно, что $S_1(z)=O(r^p)$, $r\to\infty$. Интегралы $S_2(z)$ и $S_4(z)$ оцениваются с помощью свойств уточненного порядка Бутру:

$$|S_2(z)|\leqslant Cr^{p+1}\int\limits_R^{r/2}\frac{\varepsilon s^{l(s)}\,ds}{s^{p+1}(r-s)}\leqslant C\varepsilon r^p\int\limits_{r_0}^{r/2}s^{ls-p-1}ds\leqslant C\varepsilon r^{l(r)},$$

$$|S_4(z)|\leqslant Cr^{p+1}\int\limits_{2r}^{\infty}\frac{\varepsilon s^{l(s)}\,ds}{s^{p+1}(s-r)}\leqslant C\varepsilon r^{p+1}\int\limits_{2r}^{\infty}s^{l(s)-p-2}\,ds\leqslant C\varepsilon r^{l(r)}.$$

Чтобы оценить $S_3(z)$, понадобится неравенство

$$|\psi(t)-\psi(\zeta(r))|\leqslant\omega(Cr^{-2}||t|-r|),\ |t|\in[r/2,\ 2r], \tag{19}$$

где ω — функция, фигурирующая в условии Дини (4). Это неравенство получается так. На основании (4) имеем

$$|\psi(t)-\psi(\zeta(r))|\leqslant\omega(|t^{-1}-(\zeta(r))^{-1}|)\leqslant\omega(Cr^{-2}|t-\zeta(r)|).$$

Так как $|t-\zeta(r)|^2=(|t|-r)^2+4|t|r\sin^2\frac{1}{2}(\varphi(|t|)-\varphi(r))\leqslant$ $\leqslant(|t|-r)^2(1+|t|r\max\{|\varphi'(\tau)|^2:\tau\in[r/2,\ 2r]\})\leqslant C(|t|-r)^2$ (мы воспользовались условиями (1), в силу которых $r\varphi'(r)=O(1)$, $r\to\infty$), получаем (19). Используя (19), имеем

$$|S_3(z)|\leqslant Cr^{p+1}\int\limits_{r/2}^{2r}\frac{\omega(Cr^{-2}|s-r|)}{|s-r|}s^{l(s)-p-1}\,ds\leqslant$$

$$\leqslant Cr^{l(r)}\int\limits_{r/2}^{2r}\frac{\omega(Cr^{-2}|s-r|)}{|s-r|}\,ds\leqslant Cr^{l(r)}\int\limits_{0}^{C/r}\frac{\omega(\delta)}{\delta}\,d\delta=o(r^{l(r)}),\ r\to\infty.$$

Тем самым соотношение (18) доказано.

Покажем, что равномерно относительно $\theta\in(\varphi(r),\ \varphi(r)+2\pi)$ выполняется

$$\operatorname{Im} I(re^{i\theta})\geqslant A(L,\ G)\,r^{l(r)}+o(r^{l(r)}),\ r\to\infty, \tag{20}$$

где $A(L, G)$ — положительная, не зависящая от r и θ величина, определяемая кривой L и коэффициентом G (точнее, выбором функций $\varphi(r)$ и $l(r)$).

Заметим, что $|\operatorname{Im}\beta(r)|\leqslant\frac{1}{2}l(r)$, и в силу условия (8) выполняется

$$0\leqslant\frac{\lambda}{1+C^2(L)}\leqslant\varliminf_{r\to\infty}\operatorname{Re}\beta(r)\leqslant\varlimsup_{r\to\infty}\operatorname{Re}\beta(r)\leqslant\frac{\rho}{1+C^2(L)}<\frac{1}{2}. \tag{21}$$

Поэтому для достаточно больщих r имеем

$$|1-e^{2\pi i\beta(r)}|=\{(1-e^{-2\pi i\operatorname{Im}\beta(r)})^2+4e^{-2\pi\operatorname{Im}\beta(r)}\sin^2\pi\operatorname{Re}\beta(r)\}^{1/2}\geqslant$$

$$\geqslant 2e^{-\pi\operatorname{Im}\beta(r)}\sin\pi\operatorname{Re}\beta(r)>e^{-\pi\rho/2}\sin\frac{\pi\lambda}{1+C^2(L)}>0. \tag{22}$$

Следовательно, асимптотическую формулу (11) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} I(re^{i\theta})&=(1-e^{2\pi i\beta(r)})^{-1}\exp\{\beta(r)(\ln r+i\theta)\}+o(r^{l(r)})=\\ &=\{(1-e^{2\pi i\beta(r)})^{-1}\exp(i\beta(r)(\theta-\varphi(r)))\}r^{l(r)}+o(r^{l(r)})=\\ &=B(\beta(r),\ \theta-\varphi(r))\,r^{l(r)}+o(r^{l(r)}),\quad r\to\infty. \end{aligned} \tag{23}$$

Положим

$$A(L,\ G)=\varliminf_{r\to\infty}\min\{\operatorname{Im}B(\beta(r),\ \alpha):0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi\} \tag{24}$$

и покажем, что $A(L, G)>0$. Действительно, учитывая (21), для достаточно больших r имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}B(\beta(r),\ \alpha)&=(e^{2\pi\operatorname{Im}\beta(r)}+e^{-2\pi\operatorname{Im}\beta(r)}-2\cos 2\pi\operatorname{Re}\beta(r))^{-1}\times\\ &\times(e^{(2\pi-\alpha)\operatorname{Im}\beta(r)}\sin\alpha\operatorname{Re}\beta(r)+e^{-\alpha\operatorname{Im}\beta(r)}\sin(2\pi-\alpha)\operatorname{Re}\beta(r))\geqslant\\ &\geqslant(e^{\pi\operatorname{Im}\beta(r)}+e^{-\pi\operatorname{Im}\beta(r)})^{-2}e^{-2\pi|\operatorname{Im}\beta(r)|}\,2\sin\pi\operatorname{Re}\beta(r)\cos(\pi-\alpha)\operatorname{Re}\beta(r)\geqslant\\ &\geqslant(e^{2\pi|\operatorname{Im}\beta(r)|}+1)^{-2}\,2\sin\pi\operatorname{Re}\beta(r)\cos\pi\operatorname{Re}\beta(r).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$A(L,\ G) \geqslant (e^{\pi\rho}+1)^{-2}\, 2\sin\frac{\pi\lambda}{1+C^2(L)}\cos\frac{\pi\rho}{1+C^2(L)} > 0,$$

что и доказывает справедливость (20).

Поскольку $\lim\limits_{r\to\infty}\psi(\zeta(r)) = \psi(\infty) > 0$, то из (17), (18) и (20) вытекает, что равномерно относительно $\theta \in (\varphi(r),\ \varphi(r)+2\pi)$ выполняется соотношение

$$\ln|\Phi(re^{i\theta})| \leqslant -\psi(\infty)A(L,\ G)\, r^{l(r)} + o(r^{l(r)}),\quad r\to\infty. \tag{25}$$

Тем самым доказательство теоремы 1 завершено.

Функцию (9) естественно назвать *канонической функцией* рассматриваемой краевой задачи Римана, так как она обладает свойствами, аналогичными свойствам канонической функции, введенной Н. В. Говоровым [2, §§ 19, 24], а именно:

1) функция Φ аналитична в D, непрерывна и не обращается в нуль в (D);

2) функция Φ удовлетворяет краевому условию (3);

3) выполняется условие нормировки $\Phi(z) = 1 + O(|z|^{p+1}),\ z\to 0$;

4) в окрестности точки $z = t_0$ (начала контура) справедлива оценка

$$C_1|z-t_0|^{\alpha} \leqslant |\Phi(z)| \leqslant C_2,\quad 0 \leqslant \alpha < 1;$$

5) функция Φ ограничена в D.

Покажем, что, как и в случае, рассмотренном Н. В. Говоровым [2, с. 122, 134], этими свойствами функция Φ определяется однозначно. Предварительно заметим, что для функции Φ, определенной равенством (9), справедлива оценка

$$\int\limits_{\varphi(r)}^{\varphi(r)+2\pi} |\ln\Phi(re^{i\theta})|\, d\theta = O(r^{l(r)}),\quad r\to\infty. \tag{26}$$

Эта оценка вытекает из соотношений (17), (18), (23) и того обстоятельства, что

$$\varlimsup_{r\to\infty}\max\{|B(\beta(r),\ \alpha)| : 0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi\} < \infty.$$

Пусть теперь Φ_1 — произвольная функция, обладающая свойствами 1) — 5). Рассмотрим функцию $f = \Phi_1/\Phi$, где Φ определяется (9). Так как условия 1), 2), 4) выполнены и для Φ_1, и для Φ, то функция f — целая и не имеет нулей. Используя условие 5) для Φ_1 и оценку (26) для Φ, получаем

$$\int\limits_0^{2\pi}\ln^+|f(re^{i\theta})|\, d\theta \leqslant \int\limits_{\varphi(r)}^{\varphi(r)+2\pi}\ln^+|\Phi_1(re^{i\theta})|\, d\theta +$$

$$+\int\limits_{\varphi(r)}^{\varphi(r)+2\pi}\ln^+|1/\Phi(re^{i\theta})|\, d\theta = O(r^{l(r)}) = o(r^{p+1}),\quad r\to\infty. \tag{27}$$

Отсюда следует [11, с. 51], что $f(z) = \exp P(z)$, где P — полином степени не выше p. Но из выполнения для Φ_1 и Φ условия 3) вытекает, что $f(z) = 1 + O(|z|^{p+1})$, $z \to 0$. Поэтому $P \equiv 0$, $f \equiv 1$, $\Phi_1 \equiv \Phi$.

Заметим, что оценка (26) сохранит силу, если свойство 5) (в (27) оно применяется к функции Φ_1) заменить более слабым 5′) выполняется соотношение $\int\limits_{\varphi(r)}^{\varphi(r)+2\pi} \ln^+ |\Phi(re^{i\theta})|\, d\theta = O(r^{l(r)})$. То, что этим свойством (и даже более сильным (26)) обладает функция (9), можно доказать при более слабом, чем (8), условии: $\rho < 1 + c^2(L)$. Действительно, последнего условия достаточно (ср. (22)) для справедливости оценки $\varliminf\limits_{r \to \infty} |1 - e^{2\pi i \beta(r)}| > 0$, которая позволяет перейти от (11) к (23). Таким образом, функция Φ, задаваемая формулой (9), однозначно определяется свойствами 1) — 4), 5′) при условии $\rho < 1 + c^2(L)$, хотя последнее, как легко видеть, уже не обеспечивает ее ограниченности в D.

Пусть F — любая целая функция, удовлетворяющая условию

$$\varlimsup_{r \to \infty} r^{-l(r)} \ln M(r, F) < \psi(\infty) A(L, G), \tag{28}$$

$$M(r, F) = \max\{|F(z)| : |z| = r\},$$

где $A(L, G)$ — постоянная, определяемая равенством (24). Такие функции можно строить, например, с помощью приемов, изложенных в [11, с. 92—95]. Из (25) следует, что произведение $F\Phi$, где Φ — каноническая функция, является решением однородной краевой задачи Римана на L с коэффициентом (7). Так как среди функций F, удовлетворяющих (28), бесконечно много линейно независимых, заключаем, что множество решений рассматриваемой краевой задачи бесконечномерно. Этот факт является обобщением одного утверждения Н. В. Говорова [2, с. 121, следствие 1].

Следующий результат является обобщением теоремы 20.3 Н. В. Говорова [2, с. 120].

Теорема 2. *Для того, чтобы произведение $F\Phi$, где F — целая, а Φ — каноническая (9) функция, являлось решением однородной краевой задачи Римана в условиях теоремы 1 и дополнительном условии $c(L) = C(L)$ (т. е. L является кривой правильного вращения), необходимо и достаточно, чтобы порядок функции F не превосходил $\rho = \varlimsup\limits_{r \to \infty} (l(r))$ и, кроме того, при $t \in L$ выполнялось условие*

$$\ln |F(t)| \leqslant -\ln |\Phi^{\pm}(t)| + O(1),\ t \to \infty \tag{29}$$

(одновременно для Φ^+ и Φ^-).

Доказательство. Если произведение $F\Phi$ является решением задачи Римана, то оно ограничено. Следовательно, $\ln |F(z)| \leqslant -\ln |\Phi(z)| + C$, $z \in D$, откуда сразу вытекает (29). Кроме того, учитывая (25), заключаем, что $\ln M(r, F) \leqslant \psi(\infty) A(L, G) r^{l(r)} + o(r^{l(r)})$ и порядок функции F не превосходит ρ.

Пусть теперь функция F удовлетворяет условиям теоремы. Функция $\Phi_1 = F\Phi$ аналитична в D, непревывна в (D), удовлетворяет краевому условию (3) и ограничена в $D \cap \{z : |z| \leqslant R\}$ при любом $R > 0$. Учитывая (25), имеем для любого $\varepsilon > 0$ оценку $\ln|\Phi_1(z)| \leqslant C_\varepsilon |z|^{\rho+\varepsilon}$, $|z| > r_0$. В силу условия (29) функция Φ ограничена на кривой L. Так как выполнено условие (8), а кривая L имеет правильное вращение, можем применить аналог принципа Фрагмена—Линделефа для области D [12, с. 108, теорема 2.4.3] и заключить, что функция Φ_1 ограничена в D.

Список литературы: 1. *Ахиезер Н. И.* О некоторых формулах обращения сингулярных интегралов // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1945. **9**. С. 275—290. 2. *Говоров Н. В.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом. М., 1986. 240 с. 3. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., 1977. 640 с. 4. *Рогозин С. В.* Краевые задачи и особые интегральные уравнения с бесконечным индексом // Научные труды юбилейного семинара по краевым задачам. Минск, 1985. С. 95—103. 5. *Островский И. В.* Условия разрешимости однородной краевой задачи Римана с бесконечным индексом // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1991. Вып. 55. С. 20—37. 6. *Алехно А. Г.* Неоднородная краевая задача Римана с бесконечным индексом на контуре Ляпунова// Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1980. № 1. С. 51—57. 7. *Алехно А. Г.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом в случае многостороннего завихрения // Докл. АН БССР. 1981. 25, № 8. С. 681—[illegible]. 8. *Алехно А. Г.* Однородная краевая задача Римана с бесконечным индексом произвольного степенного порядка / Докл. АН БССР. 1988. **32**, № 2. С. 112—115. 9. *Данилов Е. А.* Однородная задача Римана с бесконечным индексом степенного порядка на логарифмической спирали // Интегр. и диф. уравнения и приближ. решения. Элиста, 1985. С. 159—164. 10. *Балашов С. К.* О целых функциях конечного порядка с корнями на кривых правильного вращения // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1973. **37**. С. 603—629. 11. *Гольдберг А. А.*, *Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. М., 1972. 592 с. 12. *Евграфов М. А.* Асимптотические оценки и целые функции. М., 1962. 200 с.

Поступила в редколлегию 13.12.89