

О ПРОДОЛЬНОМ ИЗГИБЕ МНОГОПРОЛЕТНЫХ СТЕРЖНЕЙ НА ЖЕСТКИХ ОПОРАХ

М. Д. Дольберг

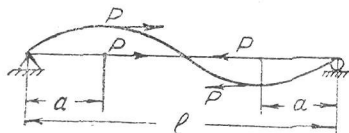
(Харьков)

В настоящей работе мы будем заниматься в основном вопросом о качественном исследовании форм продольного изгиба стержней. Вывод общих свойств форм потери устойчивости стержней, помимо теоретического интереса, важен и для практических расчетов, так как эффективность большинства приближенных методов определения критических сил зависит от удачного выбора предполагаемой формы изгиба.

Долгое время авторы работ по строительной механике молчаливо предполагали, что характер изгиба стержня под действием осевой нагрузки не зависит от закона распределения осевых сил. В частности, глубоко укоренилось мнение, будто первая форма потери устойчивости стержня при любой нагрузке будет безузловой.

В 1937 г. появилась работа О. Блюменталя, трактующая о формах продольного изгиба.

Блюменталь как раз начинает с того, что приводит пример осевой нагрузки, при которой первая форма потери устойчивости стержня имеет узел. Оказывается, что двучарнирно опертый стержень постоянной жесткости (черт. 1), сжатый силой, меняющейся по закону



Чертеж 1.

$$N(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < a, \\ P & a < x < l-a, \\ 0 & l-a < x \leq l, \end{cases}$$

будет обладать первой формой изгиба с узлом в точке $x = \frac{1}{2}$, если только $a > 0,319l$.

В той же работе дано условие, необходимое для того, чтобы однопролетный стержень постоянной жесткости обладал первой формой изгиба, лишенной узлов. Введенный критерий требует монотонного распределения осевых сил. Вопрос о числе узлов высших форм изгиба даже в этой простейшей задаче упомянутым автором не решен.

В настоящей статье рассматривается ряд вопросов, связанных с устойчивостью многопролетного стержня на жестких опорах, при

произвольной изгибной жесткости и произвольном законе распределения осевых сил:

1. О числе форм изгиба, отвечающем n -й критической силе.
2. О числе узлов n -й формы изгиба.
3. О влиянии на критические силы дополнительной жесткой связи.

§ 1.

Постановка задачи и общие замечания

Задача о продольном изгибе стержня приводится, как известно, к интегрированию дифференциального уравнения:

$$[B(x)y''(x)]' + p[f(x)y'(x)]' = 0, \quad (1)$$

где: $B(x)$ — жесткость стержня,

$Pf(x)$ — сумма осевых сил, взятых по одну сторону от сечения.

$B(x)$ и $f(x)$ будем считать положительными, кусочно непрерывными и дифференцируемыми функциями. Разрывы непрерывности возможны лишь на промежуточных опорах.

В точках $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_k (\xi_i \neq \xi_k)$ находятся промежуточные жесткие опоры, препятствующие лишь поперечным смещениям.

Это требование выражается условиями:

$$1. y(\xi_i) = 0; \quad 2. y'(\xi_i - 0) = y'(\xi_i + 0);$$

$$3. B(\xi_i - 0)y''(\xi_i - 0) = B(\xi_i + 0)y''(\xi_i + 0).$$

За начала координат принят левый конец стержня. Длина стержня — 1.

Концы стержня могут быть:

1. Оба свободно опертые —

$$y(0) = y''(0) = y(1) = y''(1) = 0.$$

2. Один свободно опертый, другой защемленный —

$$y(0) = y''(0) = y(1) = y'(1) = 0.$$

3. Оба защемленные —

$$y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0.$$

Эквивалентным дифференциальному уравнению (1) будет интегральное уравнение Треффтца (2):

$$y'(x) = P \int_0^1 K_{11}(x, s) y'(s) f(s) ds, \quad (2)$$

где: $K(x, s)$ — инфлюэнтная функция — функция Грина, рассматриваемого многопролетного стержня.

Здесь, как и в последующем, приняты обозначения:

$$K_{ij}(x, s) = \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial s^j} K(x, s).$$

Если в какой-либо точке $\xi \neq \xi_1$ наложена дополнительная связь, препятствующая поперечному смещению, то интегральное уравнение для этой новой задачи запишется так:

$$Z'(x, \xi) = Q(\xi) \int_0^1 K_{11}(x, s) Z'(s, \xi) f(s) ds - Q(\xi) \frac{K_{10}(x, \xi)}{K(\xi, \xi)} \times \\ \times \int_0^1 K_{01}(\xi, s) Z'(s, \xi) f(s) ds. \quad (3)$$

Если

$$\int_0^1 K_{01}(\xi, s) Z'(s, \xi) f(s) ds \neq 0,$$

то решение уравнения (3) можно выразить через резольвенту ядра $K_{11}(x, s) - \Gamma[x, s; Q(\xi)] -$

$$Z'(x, \xi) = - \frac{Q(\xi) \int_0^1 K_{11}(\xi, s) Z'(s, \xi) f(s) ds}{K(\xi, \xi)} - \int_0^\xi \Gamma[x, s; Q(\xi)] ds.$$

Из условия $Z(\xi, \xi) = 0$ находим, что критические силы новой задачи удовлетворяют уравнению:

$$\int_0^\xi \int_0^\xi \Gamma[x, s; Q(\xi)] dx ds = 0.$$

В силу того, что ядро $K_{11}(x, s)$ симметрично и положительно определено и $f(x) > 0$, можно представить последнее уравнение в виде¹:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{[y_i(\xi)]^2}{P_i - Q(\xi)} = 0, \quad (4)$$

$y_i'(x)$ — i -я нормированная фундаментальная функция ядра, P_i — i -е собственное число ядра $K_{11}(x, s)$.

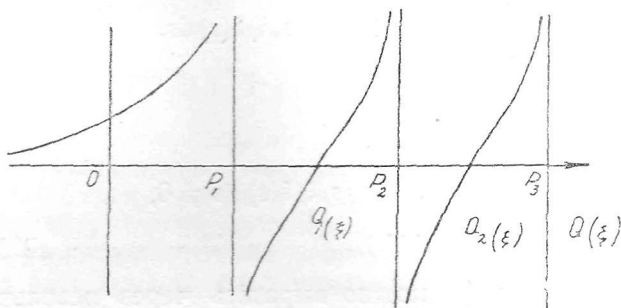
¹ В том случае, когда $\xi = \xi_1$, в уравнении (4) следует сделать предельный переход, после которого уравнение для критических сил примет вид:

$$\sum \frac{[y_i'(\xi)]^2}{P_i - Q(\xi)} = 0.$$

Функция, стоящая слева в уравнении (4), имеет простые полюсы в точках $Q(\xi) = P_i$; между полюсами она монотонно возрастает. Вследствие этого корни уравнения (4) будут перемежаться (чертеж 2) с числами P_i .

Если

$$\int_0^1 K_{01}(\xi, s) Z'(s, \xi) f(s) ds = 0,$$



Чертеж 2.

то это значит, что дополнительная связь попала в узел соответствующей формы изгиба исходного стержня, и $Q(\xi)$ равно одной из критических сил исходного стержня.

Итак, мы пришли к хорошо известным неравенствам.

$$P_1 \leq Q_1(\xi) \leq P_2 \leq Q_2(\xi) \dots \quad (5)$$

Этот ряд неравенств справедлив и при наложении упругой связи. Наша задача будет состоять в том, чтобы показать, что, если связь жесткая, эти неравенства допускают уточнения, а именно: что справедливо соотношение

$$P_1 < Q_1(\xi) \leq P_2 < Q_2(\xi) \dots$$

При этом условии $Q_i(\xi) = P_i$ влечет за собой тождественное совпадение форм изгиба исходного стержня и стержня с дополнительной связью.

§ 2.

Единственность формы изгиба

В тех частных случаях, когда задача о продольном изгибе стержня приводится к дифференциальному уравнению второго порядка, вопрос о единственности формы изгиба стержня, отвечающей некоторой критической силе, легко решить в положительном смысле.

В общем же случае для утверждения единственности необходимо жесткость стержня и функцию распределения осевых сил подчинить некоторым условиям, так как пример, приводимый Блюменталем (см. черт. 1), показывает, что при $a \cong 0,3191$ первой критической силе отвечают две формы изгиба.

Первоначально рассмотрим однопролетный стержень с началом в точке 0 и концом в точке 1.

Очевидно, что, если некоторой критической силе отвечают две формы изгиба $y_1(x)$ и $y_2(x)$, то всегда можно построить функцию

$Z(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, которая на одном из концов стержня обращается в нуль вместе со своими первыми двумя производными.

Следовательно, достаточным условием единственности является отсутствие такой формы изгиба, при которой на одном из концов стержня одновременно обращаются в нуль первые две производные функции прогиба.

Для нахождения указанных достаточных условий построим функционал

$$I(y) = \int_a^b [y''(x)]^2 (x-a) dx \left[\frac{B(x)}{x-a} \right] - P \int_a^b [y'(x)]^2 d[(x-a)f(x)], \quad (6)$$

где $y(x)$ удовлетворяет уравнению (1) и условиям

$$y(a) = y(b) = y'(b) = 0. \quad 1$$

Проинтегрировав выражение (6) по частям, найдем, что

$$I(y) = -(b-a) B(b) [y''(b)]^2.$$

Откуда можно сделать вывод, что $y''(b) \neq 0$ при выполнении условий ²:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{B(x)}{x-a} \right] \leq 0; \quad \frac{d}{dx} [(x-a)f(x)] \geq 0. \quad (7)$$

Эти условия являются достаточными для единственности формы изгиба однопролетного стержня ³.

Для последующего будет важно показать, что при выполнении условий (7) одновременное обращение в нуль первой и второй производной функции прогиба невозможно также и на левом конце стержня.

Предположим, что существует такая форма изгиба, для которой

$$y(a) = y'(a) = y''(a) = 0.$$

¹ Механический смысл функционала $I(y)$ виден из нижеследующего. Как известно, критическая сила может быть найдена из уравнения:

$$\frac{1}{P} = \int_a^b \int_a^b K_{11}(x, s) y'(x) y'(s) f(x) f(s) dx ds$$

($y'(x)$ — нормированная функция с весом $f(x)$).

Продифференцировав обе части этого уравнения по b , можно показать, что

$$\frac{dP}{db} = \frac{I(y)}{b-a}.$$

При выводе этой формулы основная трудность заключается в вычислении производной

$$\frac{d}{db} K_{11}(x, s),$$

которую удалось преодолеть, используя наши ранее полученные результаты о связи инфлюэнтных функций стержней с мало отличающимися жесткостями (3).

² Тожественное равенство нулю в соотношениях (7) исключается.

³ Можно показать, что (7) допускает замену следующими условиями:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{B(x)}{b-x} \right] \geq 0; \quad \frac{d}{dx} [(b-x)f(x)] \leq 0.$$

Настоящие условия показывают, что стержень с шарнирной опорой на левом конце обладает такой формой изгиба, при которой угол поворота на том же конце равен нулю.

Присоединим слева к этому стержню еще один пролет жесткости — В(а), сжатый постоянной по длине силой $Pf(a)$. Непосредственно проверяется, что образованный двухпролетный стержень обладает при произвольной длине дополнительного пролета той же критической силой, что и исходный, и кривой прогиба, описываемой уравнением

$$Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{— на левом пролете,} \\ y(x) & \text{— на правом пролете.} \end{cases}$$

Я. Л. Нудельман (4) показал, что критические силы Q_i такого двухпролетного стержня удовлетворяют неравенствам:

$$\bar{P}_1 \leq Q_1 \leq \bar{P}_2 \leq Q_2 \dots, \quad (8)$$

где совокупность чисел $\bar{P}_i$ является множеством всех критических сил обоих пролетов, взятых в порядке возрастания¹.

Критические силы левого пролета P_i^* будут по мере увеличения длины пролета неограниченно убывать. Из неравенства (9) видно, что убывание чисел P_i^* повлечет за собой неограниченное убывание критических сил Q_i , причем можно показать, что этот процесс будет происходить непрерывно.

Но, как было показано, одна из сил Q_i остается неизменной; следовательно, можно будет так подобрать длину дополнительного пролета, что указанная сила станет кратной, т. е. что ей будут соответствовать две независимые формы изгиба.

Путем рассуждений аналогичных предыдущим, заключаем, что, в силу сказанного, должна существовать функция $\bar{y}(x)$, удовлетворяющая условиям

$$\bar{y}(a) = \bar{y}(b) = \bar{y}'(b) = \bar{y}''(b) = 0,$$

что невозможно в силу неравенства (7).

Полученные результаты можно свести в следующую лемму.

Лемма. Если коэффициенты дифференциального уравнения

$$[B(x)y''(x)]'' + P[f(x)y'(x)]' = 0$$

удовлетворяют в промежутке $\langle a, b \rangle$ условиям

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{B(x)}{x-a} \right] \leq 0; \quad \frac{d}{dx} [(x-a)f(x)] \geq 0,$$

то интеграл этого уравнения, обращающийся в нуль на концах интервала и, кроме того, имеющий на одном из концов равные нулю первые две производные, будет тождественно равен нулю во всем промежутке $\langle a, b \rangle$.

Из настоящей леммы следует, что, если $y(x)$ — функция прогиба многопролетного стержня, то одновременное обращение в нуль её самой и первых двух производных невозможно.

¹ Аналогичное соотношение существует и для частот собственных колебаний стержня (5).

Действительно, пусть в точке ξ ($\xi_{i-1} - 1 \leq \xi \leq \xi_i + 1$) — $y(\xi) = y'(\xi) = y''(\xi) = 0$. Так как $y(\xi_{i-1}) = y(\xi_i) = 0$, то из леммы заключаем, что $y(x) \equiv 0$ в промежутке $\langle \xi_{i-1}, \xi_i \rangle$.

Переходя от пролета к пролету, мы покажем, что $y(x) \equiv 0$ по всей длине стержня.

Между прочим, из этого утверждения следует, что критические силы — P_i стержня с шарнирной опорой на конце, не могут совпадать ни с одной из критических сил $\bar{P}_i$ стержня с заделкой на конце.

В силу этого неравенство (5), связывающее силы P_i и $\bar{P}_i$, допускает уточнение; оно будет иметь вид

$$P_1 < \bar{P}_1 < P_2 < \bar{P}_2 \dots$$

Вторым следствием из сказанного будет

Теорема 1. Если жесткость многопролетного стержня на жестких опорах и функция распределения осевых сил удовлетворяют по всей длине стержня условиям:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{B(x)}{x} \right] \leq 0; \quad \frac{d}{dx} [x f(x)] \geq 0$$

(левый конец стержня находится в точке 0), то каждой критической силе отвечает одна форма потери устойчивости.

Доказательство ведется прежним путем.

Заметим, что настоящая теорема допускает еще такую формулировку: в ряде критических сил стержня на жестких опорах нет двух равных чисел.

В дальнейшем исследовании будем предполагать условия единственности выполненными.

§ 3.

Наложение дополнительной связи Уточнение границ изменения критических сил

Наложим в точке ξ дополнительную жесткую связь, препятствующую поперечным смещениям.

Обозначим критическую силу образованной системы через $-Q(\xi)$, функцию прогиба через $-Z(x, \xi)$.

Наряду с этим рассмотрим еще другой стержень, который получается из основного путем наложения в точке ξ жесткой связи, препятствующей как поперечным смещениям, так и повороту.

Такого рода связь разбивает исходный стержень на два независимых. Обозначим: $P_i^*(\xi)$ — критические силы, $y_i^*(x)$ — функция прогиба, $K_{ii}^*(x, s)$ — функцию влияния левого стержня. Для правого стержня соответствующие величины будут: $P_i^{**}(\xi)$, $y_i^{**}(x)$, $K_{ii}^{**}(x, s)$.

Функции $K_{ii}^*(x, s)$ и $K_{ii}^{**}(x, s)$ в соответствующих интервалах удовлетворяют уравнениям:

$$[B(x) K_{20}^*(x, s)]'' = 0,$$

$$[B(x) K_{20}^{**}(x, s)]'' = 0.$$

Умножим каждое из этих уравнений на $Z(x, \xi)$ и проинтегрируем первое из них в границах от 0 до ξ , второе — от ξ до 1.

Воспользовавшись свойствами функций влияния и уравнением (1), которому удовлетворяет $Z(x, \xi)$, найдем:

$$Z'(x, \xi) = -B(\xi) K_{12}^*(x, \xi) Z'(\xi, \xi) + Q(\xi) \int_0^{\xi} K_{11}^*(x, s) Z'(s, \xi) f(s) ds, \quad (9a)$$

$$0 \leq x \leq \xi,$$

$$Z'(x, \xi) = +B(\xi) K_{12}^{**}(x, \xi) Z'(\xi, \xi) + Q(\xi) \int_{\xi}^1 K_{11}^{**}(x, s) Z'(s, \xi) f(s) ds, \quad (9b)$$

$$\xi \leq x \leq 1.$$

Если $Z'(\xi, \xi) = 0$, то, как это видно из уравнений (9), $Q(\xi)$ должно быть равно либо одному из собственных чисел ядра $K_{11}^*(x, s)$, либо одному из собственных чисел ядра $K_{11}^{**}(x, s)$. Причем, если $\xi \neq \xi_1$ (дополнительная опора не совпадает ни с одной из промежуточных), то $Q(\xi)$ должно быть одновременно равно собственным числам обоих ядер.

Последнее нуждается в доказательстве. Допустим, что $Q(\xi)$ равно собственному числу первого ядра и не равно собственному числу второго ядра; тогда условие $Z'(\xi, \xi) = 0$ влечет за собой $Z(x, \xi) \equiv 0$ во всем интервале $< \xi, 1 >$. Но условия равенства углов поворота и изгибающих моментов по обе стороны от опоры приводят к равенствам: $Z(\xi - 0, \xi) = Z'(\xi - 0, \xi) = Z''(\xi - 0, \xi) = 0$, откуда следует, что $Z(x, \xi) = 0$ во всем интервале $< 0, 1 >$.¹

Если $Q(\xi)$ совпадает с одним из собственных чисел первого из ядер, скажем $Q(\xi) = P_1^*(\xi)$, то после умножения уравнения (8a) на $y_1^{*'}(x)f(x)$ и интегрирования найдем:

$$Z'(\xi, \xi) y_1^{*''}(\xi) = 0$$

и так как $y_1^{*''}(\xi) \neq 0$, то заключаем, что нулю равно $Z'(\xi, \xi)$.

Таким образом, обращение в нуль $Z'(\xi, \xi)$ является не только достаточным, но и необходимым условием совпадения $Q(\xi)$ с собственным числом одного из ядер интегральных уравнений (8).

В том случае, когда $Z'(\xi, \xi) \neq 0$, $Z'(x, \xi)$ допускает представление через резольвенты ядер уравнений (8):

$$Z'(x, \xi) = -B(\xi) Z'(\xi, \xi) \Gamma_{01}^*[x, \xi; Q(\xi)], \quad 0 \leq x \leq \xi$$

$$Z'(x, \xi) = B(\xi) Z'(\xi, \xi) \Gamma_{01}^{**}[x, \xi; Q(\xi)].$$

Условие непрерывности изгибающего момента приводит к следующему уравнению для определения $Q(\xi)$:

$$\Gamma_{11}^*[\xi, \xi; Q(\xi)] + \Gamma_{11}^{**}[\xi, \xi; Q(\xi)] = 0.$$

¹ Если $\xi = \xi_1$ (дополнительная опора совпала с одной из промежуточных), то изгибающий момент терпит в точке ξ разрыв, в силу чего $Z''(\xi - 0, \xi)$, вообще говоря, не равно нулю.

Сделав преобразование, придем к следующему:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{[y_i^{**}(\xi)]^2}{P_i^*(\xi)[P_i^*(\xi) - Q(\xi)]} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[y_i^{***}(\xi)]^2}{P_i^{**}(\xi)[P_i^{**}(\xi) - Q(\xi)]} = - [K_{22}^*(\xi, \xi) + K_{22}(\xi, \xi)]. \quad (10)$$

Функция, стоящая слева в уравнении (10), имеет простые полюсы в точках $P_i^*(\xi)$ и $P_i^{**}(\xi)$ и монотонно возрастает относительно $Q(\xi)$ между полюсами. Можно показать, что правая часть уравнения (10), которую мы обозначим через $a^2(\xi)$, положительна. Корни уравнения (10), будут, в силу сказанного, перемежаться с совокупностью чисел $P_i^*(\xi)$ и $P_i^{**}(\xi)$ (см. черт. 2), которые расположены в порядке возрастания и обозначены $\bar{P}_i(\xi)$. Если учтем возможность совпадения $Q(\xi)$ с некоторыми из чисел $\bar{P}_i(\xi)$ [случай, когда $Z'(\xi, \xi)$], то получим окончательно следующий ряд неравенств:

$$Q_1(\xi) \leq P_1 \leq Q_2(\xi) \leq P_2 \dots \quad (11)$$

$\bar{P}_n(\xi)$ может быть равно одному из чисел $P_1^*(\xi) \dots P_n^*(\xi); P_1^{**}(\xi) \dots P_n^{**}(\xi)$, причем $\bar{P}_n(\xi) \leq P_n^*(\xi)$ и $\bar{P}_n(\xi) \leq P_n^{**}(\xi)$.

Вследствие этого, как видно из неравенств (11), заключаем, что

$$Q_n(\xi) \leq P_n^*(\xi); Q_n(\xi) \leq P_n^{**}(\xi)$$

знак равенства в первом из этих неравенств возможен лишь тогда, когда $Z_n'(\xi, \xi) = 0$, а $Z_n'(\xi, \xi)$ обращается в нуль либо в случае совпадения дополнительной опоры с одной из промежуточных, либо в случае, когда $P_{n-1}^*(\xi) = P_i^{**}(\xi)$.

Если $P_n^*(\xi) = P_i^{**}(\xi)$, то из (11) следует, что $Q_{n+1}(\xi) = P_n^*(\xi)$. Следовательно, при выполнении равенства $Q_n(\xi) = P_n^{**}(\xi)$ будет выполнено также равенство $Q_n(\xi) = Q_{n+1}(\xi)$, что невозможно в силу теоремы 1.

Допустим, что правый конец исходного стержня жестко зашлем, тогда критические силы его в принятых в настоящем параграфе обозначениях будут $P_n^*(l)$. Из неравенства (5) заключаем, что $Q_n(\xi) \geq P_n^*(l)$, а так как в случае, если $\xi \neq \xi_1 - Q_n(\xi) < P_n^*(\xi)$, то найдем, что

$$P_n^*(\xi) > P_n^*(l). \quad (12)$$

Напомним, что $P_n^*(\xi)$ — критическая сила левого пролета — от l не зависит. Следовательно, мы вправе под значением l в неравенстве (12) понимать любое значение, превышающее ξ .

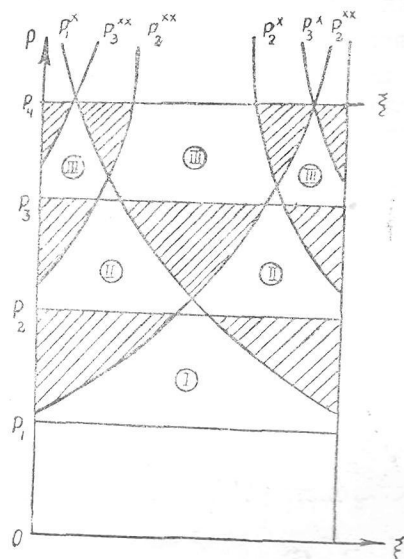
Как уже отмечалось, функция $P_n^*(\xi)$ — непрерывна, и мы вправе поэтому распространить неравенство (12) и на точки $\xi = \xi_1$.

Полученный нами результат гласит:

Критические силы стержня с заделкой на правом конце будут монотонно убывать при перемещении заделки вправо.

Аналогичным приемом доказывается, что функция $P_n^{**}(\xi)$ будет возрастать с ростом ξ . Кроме того легко показать, что $-\lim_{\xi \rightarrow 0} P_n^{**}(\xi) = \infty$

и $\lim_{\xi \rightarrow 1} P_n^{**}(\xi) = \infty$. Из всего сказанного о поведении функций $P_n^{**}(\xi)$ и



Чертеж 3.

$P_n^{**}(\xi)$ можно заключить, что любая пара кривых, которым отвечают уравнения $P = P_i^*(\xi)$ и $P = P_j^{**}(\xi)$, имеет только одну точку пересечения.

Из неравенства (11) видно, что через точку пересечения указанных кривых должна пройти кривая $P = Q_{i+j}(\xi)$, поэтому эта точка встречи лежит между прямыми $P = P_{i+j}$ и $P = P_{i+j+1}$ [см. неравенство (5)].

Теперь можно построить кривые $P = P_i^*(\xi)$ и $P = P_j^{**}(\xi)$ (черт. 3) и указать зоны, в которые попадают соответствующие значения функций $Q_n(\xi)$. На чертеже эти зоны не заштрихованы и обозначены соответствующими номерами. Кривые $P = P_i^*(\xi)$ будут для стержней с шарнирной опоры на правом конце начинаться со значения, лежащего между P_i и P_{i+1} ; в случае же заделки на правом конце — со значения P_i . Аналогично ведут себя и кривые $P = P_j^{**}(\xi)$.

§ 4.

Наложение дополнительной связи Экстремальные точки критических сил

Ядром интегрального уравнения Треффца для стержня с дополнительной связью, наложенной в точке $\xi \neq \xi_1$, будет функция:

$$\bar{K}_{11}(x, s) = K_{11}(x, s) - \frac{K_{10}(x, \xi) K_{10}(s, \xi)}{K(\xi, \xi)} \quad (13)$$

Критические силы этой задачи определяются равенством:

$$\frac{1}{Q(\xi)} = \int_0^1 \int_0^1 \bar{K}_{11}(x, s) Z'(x, \xi) Z'(s, \xi) f(x) f(s) dx ds, \quad (14)$$

причем

$$\int_0^1 [Z'(x, \xi)]^2 f(x) dx = 0. \quad (15)$$

Из (14) дифференцированием обеих частей равенства по ξ находим:

$$\frac{1}{Q^2(\xi)} \cdot \frac{dQ(\xi)}{d\xi} = - \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \xi} [\bar{K}_{11}(x, s)] Z'(x, \xi) Z'(s, \xi) f(x) f(s) dx ds - \\ - 2 \int_0^1 \int_0^1 \bar{K}_{11}(x, s) Z'(x, \xi) \frac{\partial}{\partial \xi} [Z'(s, \xi)] f(x) f(s) dx ds.$$

Второе из слагаемых, стоящих слева, преобразуется в выражение:

$$\frac{2}{Q(\xi)} \cdot \frac{d}{d\xi} \int_0^1 [Z'(x, \xi)]^2 f(x) dx,$$

и, следовательно, в силу условия (15) обращается в нуль. Вычисление первого слагаемого требует знания производной $-\frac{\partial}{\partial \xi} [\bar{K}_{11}(x, s)]$, которую можно найти из (13) в следующей форме:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} [\bar{K}_{11}(x, s)] = - \frac{\bar{K}_{11}(x, \xi) K_{10}(s, \xi) + \bar{K}_{11}(s, \xi) K_{10}(x, \xi)}{K(\xi, \xi)}.$$

Сделав необходимые преобразования, окончательно получим:

$$\frac{dQ(\xi)}{d\xi} = \frac{2Q(\xi)}{K(\xi, \xi)} Z'(\xi, \xi) \int_0^1 K_{01}(\xi, s) Z'(s, \xi) f(s) ds. \quad (16)$$

Из уравнения (16) видно, что функция $Q(\xi)$ имеет две группы экстремальных точек, которые определяются равенствами:

$$\int_0^1 K_{01}(\xi, s) Z'(s, \xi) f(s) ds = 0, \quad (17)$$

$$Z'(\xi, \xi) = 0. \quad (18)$$

Равенство (17), как было указано в § 1, определяет узлы соответствующей формы изгиба исходного стержня. Равенство (18) будет выполнено при пересечении в точке ξ соответствующих кривых $P = P^*(\xi)$ и $P = P^{**}(\xi)$.

Осталось исследовать поведение функций $Q(\xi)$ в окрестности одной из прежних опор.

Первоначально рассмотрим случай, когда дополнительная опора приближается к концу стержня. Если на конце стержня находится заделка, то очевидно, что предельное значение $Q(\xi)$ будет не больше значений $Q(\xi)$ при положении дополнительной опоры вблизи границы. Этот вывод следует из того, что совпадение дополнительной опоры с заделкой просто устраняет дополнительную опору.

В случае же, когда граничная опора шарнирная, следует провести более точные рассуждения.

Пусть дополнительная опора находится вблизи правого конца стержня. Ядро $K_{11}(x, s)$ можно, с точностью до малых высшего порядка, представить в форме:

$$\bar{K}_{11}(x, s) = K_{11}(x, s) - \frac{K_{11}(x, l)K_{11}(s, l)}{K_{11}(l, l) - \varepsilon},$$

где

$$\varepsilon = \frac{2(1 - \xi)}{3B(l)} > 0.$$

Функция прогиба с той же степенью точности удовлетворяет уравнению¹:

$$\begin{aligned} Z'(x, \xi) = & Q(\xi) \int_0^1 K_{11}(x, s) Z'(s, \xi) f(s) ds - \\ & - Q(\xi) \frac{K_{11}(x, l)}{K_{11}(l, l) - \varepsilon} \int_0^1 K_{11}(l, s) Z'(s, \xi) f(s) ds, \end{aligned} \quad (19)$$

решение которого выражается через резольвенту:

$$Z'(x, \xi) = -Q(\xi) \frac{\int_0^1 K_{11}(l, s) Z'(s, \xi) f(s) ds}{K_{11}(l, l) - \varepsilon} \cdot \Gamma[x, l; Q(\xi)]. \quad (20)$$

Кроме того из уравнения (19) следует, что

$$Z'(l, \xi) = -Q(\xi) \frac{\varepsilon}{K_{11}(l, l) - \varepsilon} \int_0^1 K_{11}(l, s) Z'(s, \xi) f(s) ds.$$

Полагая в (20) $x = l$, придем к уравнению для $Q(\xi)$:

$$\Gamma[l, l; Q(\xi)] = \varepsilon. \quad (21)$$

Распределение корней этого уравнения аналогично распределению корней уравнения (10). Здесь важно отметить, что корни уравнения (21) будут больше ($\varepsilon > 0$) корней уравнения

$$\Gamma[l, l, Q(l)] = 0. \quad (22)$$

Корни уравнения (22) являются критическими силами для стержня с заделкой в точке l , т. е. предельными значениями критических сил $Q(\xi)$. Итак доказана

¹ Справедливость сказанного вытекает из того, что

$$\lim_{\xi \rightarrow 1} \int_0^1 K_{11}(l, s) Z'(s, \xi) f(s) ds \neq 0.$$

Теорема 2. Критические силы стержня с опорой, расположенной вблизи конца стержня, будут убывать при стремлении этой опоры к концу стержня.

Если дополнительная опора стремится к одной из промежуточных, то можно говорить лишь о левой и правой производной функции $Q(\xi)$. Покажем, что в этом случае знаки правой и левой производной совпадают.

При $\xi \rightarrow \xi_1 - 0$ формула (16) преобразуется к следующему виду:

$$\left. \frac{dQ}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_1-0} = \frac{2Q(\xi_1)}{K_{11}(\xi_1, \xi_1)} Z''(\xi_1 - 0, \xi_1) \int_0^1 K_{11}(\xi_1, s) Z'(s, \xi_1) f(s) ds.$$

Входящий в эту формулу интеграл может быть вычислен при помощи интегрального уравнения (3):

$$\frac{Q(\xi_1) \int_0^1 K_{11}(\xi_1, s) Z'(s, \xi_1) f(s) ds}{K_{11}(\xi_1, \xi_1)} = B(\xi_1) [Z''(\xi_1 + 0, \xi_1) - Z''(\xi_1 - 0, \xi_1)],$$

откуда

$$\left. \frac{dQ}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_1-0} = 2B(\xi_1) Z''(\xi_1 - 0, \xi_1) [Z''(\xi_1 + 0, \xi_1) - Z''(\xi_1 - 0, \xi_1)];$$

аналогично

$$\left. \frac{dQ}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_1+0} = 2B(\xi_1) Z''(\xi_1 + 0, \xi_1) [Z''(\xi_1 + 0, \xi_1) - Z''(\xi_1 - 0, \xi_1)].$$

Отметим прежде всего, что равенство нулю выражения, стоящего в скобках, означает непрерывность функции $Z''(x, \xi_1)$ в точке ξ_1 , из чего следует, что ξ_1 является узлом фундаментальной функции исходной задачи. Следовательно, в этом случае точка ξ_1 принадлежит группе экстремальных точек, определяемых равенством (17).

При совпадении дополнительной опоры с одной из промежуточных $Q(\xi)$ совпадает с одним из чисел $P^*(\xi_1)$ либо $P^{**}(\xi_1)$.

Предположим, что $Q(\xi_1) = P^*(\xi_1)$. Так как функция $P^*(\xi)$ — монотонно убывающая и $Q(\xi) \leq P^*(\xi)$, мы можем заключить, что

$$\left. \frac{dQ}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_1+0} \leq 0.$$

Тогда

$$\left. \frac{dQ(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_1-0} = \left. \frac{dQ}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_1+0} - 2B(\xi_1) [Z''(\xi_1 + 0, \xi_1) - Z''(\xi_1 - 0, \xi_1)]^2 < 0.$$

Аналогично устанавливается, что в случае совпадения $Q(\xi)$ с $P^*(\xi_1)$ знаки правой и левой производной функции $Q(\xi)$ совпадают.

Итак, точки ξ_1 не являются экстремальными для функции $Q(\xi)$, если только ξ_1 не является узлом фундаментальной функции исходной задачи.

§ 5.

Узлы функции $Z(x, \xi)$

Некоторая форма изгиба, которой соответствует функция $Z(x, \xi)$, имеет, вообще говоря, узлы внутри интервала $\langle 0, 1 \rangle$, часть из которых совпадает с промежуточными опорами. Будем называть узлы, совпадающие с опорами, — опорными узлами, а узлы, не совпадающие с опорами, — естественными узлами.

Смещение дополнительной опоры вызывает смещение естественных узлов. Нетрудно показать, что этот процесс непрерывен, а потому исчезновению и появлению узла должно предшествовать возникновение в некотором месте кратного узла.

На крайней опоре не может возникнуть кратный узел, ибо это влечет за собой одновременное обращение в нуль функции $Z(x, \xi)$ и двух первых её производных. Эти же соображения убеждают нас в том, что и внутри интервала могут образовываться узлы кратности не выше второй. Процесс исчезновения узлов может происходить лишь таким образом: образуется узел второй кратности, который при дальнейшем движении дополнительной опоры исчезает (см. черт. 4).

Пусть функция $Z_1(x, \xi)$ имеет естественные узлы в точках $x_1, x_2, \dots, x_m$, и, при некотором положении дополнительной опоры пара узлов совпала $x_i = x_{i+1} = \bar{x}$.

Очевидно, что $Q_1(\xi) = P_1^{**}(\bar{x})$, но так как $P_1^{**}(\xi)$ — монотонно возрастающая функция, то, следовательно: $Q_1(\xi) > P_1^{**}(\xi)$, что противоречит неравенству (11).

Итак, показано, что узлы функции $Z_1(x, \xi)$ не могут ни появляться, ни исчезать при движении промежуточной опоры.

Функция $Q_1(\xi)$ убывает при стремлении промежуточной опоры к границам; следовательно, $Q_1(\xi)$ имеет внутри интервала $\langle 0, 1 \rangle$ по крайней мере один максимум. Очевидно, это максимальное значение в силу неравенства (17) равно P_2 . Покажем, что $Q_1(\xi)$ имеет единственный максимум в промежутке $\langle 0, 1 \rangle$.

Если число максимумов $Q_1(\xi)$ равно n , то это означает, что $Q(\xi)$ имеет внутри интервала $n - 1$ минимум.

Минимальным значением $Q_1(\xi)$ может быть лишь P_1 .

Отметим, что всякий раз, когда $Q(\xi)$ достигает значения $P_2 - Z_1(x, \xi) = \bar{y}_2(x)$ ($y_2(x)$ — вторая форма изгиба исходного стержня), причем точки, в которых $Q_1(\xi) = P_2$ являются естественными узлами $y_2(x)$.

Из допущения, что число максимумов $Q_1(\xi)$ равно n , следует, что число естественных узлов функции $y_2(x)$ не меньше, чем n .

С другой стороны, когда $Q_1(\xi) = P_1$, то дополнительная связь попала в узел $y_1(x)$; при этом $Z_1(x, \xi) = y_1(x)$. Из условия, что число минимумов равно $n - 1$, непосредственно следует, что число естественных узлов $Z_1(x, \xi)$ будет, при некотором положении дополнительной опоры, равно $n - 2$.

Невозможность нашего допущения вытекает из утверждения о том, что нули функции $Z_1(x, \xi)$ не могут исчезать.

Установлено, следовательно, что $Q_1(\xi)$ имеет внутри интервала $\langle 0, 1 \rangle$ единственный максимум (см. черт. 5).

Отсутствие минимальных точек функции $Q_1(\xi)$ позволяет утверждать, что первая форма потери устойчивости исходного стержня имеет лишь простые опорные узлы. Это же утверждение можно высказать и в отношении функции $Z_1(x, \xi)$, так как она является первой формой изгиба для стержня на $k+1$ промежуточных опорах.

Из того факта, что $Z_1(x, \xi)$ имеет лишь простые опорные узлы, сразу же следует, что $y_2(x)$ имеет точно один естественный узел; $Z_2(x, \xi)$ — вторая форма изгиба стержня на $k+1$ промежуточных опорах — имеет поэтому также один естественный узел.

$Q_2(\xi)$ может принимать экстремальные значения либо при достижении значений P_2 и P_3 , либо в точке ξ_0 , в которой выполняется равенство $P_1^*(\xi) = P_1^{**}(\xi)$.

Рассуждениями, аналогичными предыдущим, можно показать, что при наложенных нами ограничениях на функции $B(x)$ и $f(x)$ фундаментальные функции рассматриваемой краевой задачи с граничными условиями на правом конце $y(b) = y'(b) = 0$ удовлетворяют условию

$$y''(b)[By''(b)]' \geq 0.$$

Соответственно, если на левом конце $y(a) = y'(a) = 0$, то

$$y''(a)[By''(a)]' \leq 0.$$

Из этого свойства фундаментальных функций легко заключить, что ξ_0 либо является нулем второй кратности для функции $y_3(x)$, либо является минимальной точкой функции $Q_2(\xi)$.

Если

$$\int_0^1 K_{01}(\xi_0, s) Z_2'(s, \xi_0) f(s) ds = 0,$$

то сразу заключаем, что точка ξ_0 является узлом функции $y_3(x)$ и притом, в силу условия, $Z_2'(\xi_0, \xi_0) = y_2'(\xi_0) = 0$ — второй кратности.

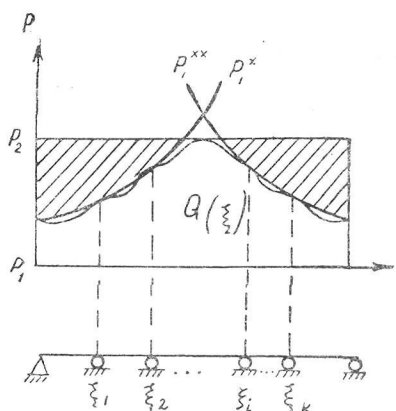
В случае же, когда этот интеграл отличен от нуля, вычислим его из уравнения (3).

Получим:

$$\frac{Q_2(\xi_0) \int_0^1 K_{01}(\xi, s) Z_2'(s, \xi_0) f(s) ds}{K(\xi, \xi_0)} = [BZ_2''(\xi_0 - 0, \xi_0)]' - [BZ_2''(\xi_0 + 0, \xi_0)]'.$$

В силу этого из формулы (16) легко получить, что

$$\frac{d^2 Q}{d\xi^2} \Big|_{\xi = \xi_0} = 2Z_2''(\xi_0, \xi_0) \left[[BZ_2''(\xi_0 - 0, \xi_0)]' - [BZ_2''(\xi_0 + 0, \xi_0)]' \right].$$



Чертеж 5.

Так как $Z_2'(\xi_0, \xi_0) = 0$, функция $Z_2(x, \xi_0)$ представима в виде:

$$Z_2(x, \xi_0) = \begin{cases} y_1^*(x, \xi_0) & x \leq \xi_0, \\ y_1^{**}(x, \xi_0) & x \geq \xi_0, \end{cases}$$

где функции $y^*(x, \xi_0)$ и $y^{**}(x, \xi_0)$ имеют равные вторые производные в точке ξ_1 .

Поэтому

$$\frac{d^2 Q}{d\xi^2} \Big|_{\xi=\xi_0} = 2 \left[[y^*(\xi_0)]'' [B(y^*(\xi_0))]' - (y^{**}(\xi_0))'' [B(y^{**}(\xi_0))]' \right].$$

Действительно, первое из слагаемых не отрицательно, а второе не положительно; вторые производные отличны от нуля, а третьи производные, в силу неравенства нулю рассматриваемого интеграла, не могут одновременно обращаться в нуль.

Вследствие того, что $Q_2(\xi)$ убывает при стремлении промежуточной опоры к концам стержня и имеет минимум внутри промежутка $<0, 1>$, заключаем, что $Q_2(\xi)$ имеет по крайней мере два максимума. Максимальным значением $Q_2(\xi)$ будет P_3 . Если $Q_2(\xi) = P_3$, то $Z_2(x, \xi) = y_3(x)$.

Так как $Z_2(x, \xi)$ имеет один естественный узел, то делаем вывод, что $y_3(x)$ имеет два естественных узла. Отсюда же следует, что $Q_2(\xi)$ не может иметь более двух максимумов.

Аналогичные рассуждения позволяют высказать такую теорему:

Теорема 3. п-я форма изгиба стержня на жестких опорах имеет при соблюдении условий (7) $p-1$ естественных узлов.

В отношении функции $Q_n(\xi)$ нами показано, что она имеет точно p максимумов внутри промежутка $<0, 1>$, причем $\max Q_n(x) = P_{n+1}$. Минимальными точками для $Q_n(\xi)$ будут точки, в которых $Z_n'(\xi) = 0$ (см. черт. 6).

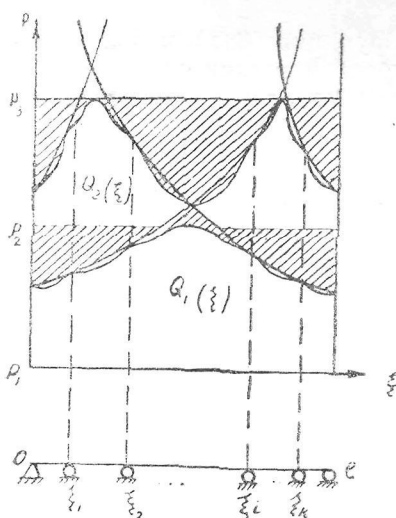
Сказанное разрешает сформулировать:

Теорема 4. Если на стержень наложена дополнительная жесткая связь, не совпадающая ни с одной из промежуточных опор, то критические силы исходного и вновь образованного стержня удовлетворяют неравенствам

$$P_1 < Q_1 \leq P_2 < Q_2 \dots$$

При совпадении дополнительной опоры с одной из промежуточных возможно равенство $Q_n = P_n$, но тогда обязательно также $Q_{n-1} = P_n$.

В заключение отметим, что задача, решаемая в настоящей заметке, аналогична соответствующей проблеме в задаче о колебаниях стержней.



Чертеж 6.

М. Г. Крейн, пользуясь свойствами ядер Келлога, показал осцилляционность фундаментальных функций задачи о колебаниях стержней. Мы не смогли воспользоваться развитыми им методами, так как ядро интегрального уравнения Треффтца, к которому сводится задача устойчивости, заведомо не является ядром Келлога. Этот факт представляет, быть может, интерес с той точки зрения, что обнаружена краевая задача, приводящаяся к интегральному уравнению с некеллоговым ядром, фундаментальные функции которой обладают осцилляционными свойствами.

Несколько слов по поводу наложенных ограничений. Нет оснований считать условия (7) необходимыми для последующих выводов. Отметим, что любые условия, исключающие одновременное обращение в нуль фундаментальной функции и первых двух её производных, являются недостаточными для основных выводов настоящей работы.

Что же касается требования абсолютной жесткости опор, то оно существенно уже хотя бы потому (и это легко показать), что при надлежащем выборе точки приложения и податливости упругой опоры можно любую из критических сил сделать кратной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Blümenthal O. ZAMM, B. 17, H. 4, 1937.
2. Trefftz F. ZAMM, B. 3, S. 273, 1923.
3. Дольберг М. Д. Прикладная математики и мехаяика, т. 6. в. 5. 1942.
4. Нудельман Я. Л. Труды Одесск. гос. унив., в. 1. 1937.
5. Крейн М. Г., Нудельман Я. Л. Труды Одесск. гос. унив., в. 1. 1937.
6. Крейн М. Г. Записки Наук.-досл. институту математики і механіки та Харк. матем. товариства, т. 13, в. 1.