УДК 517.95

В. М. БОРОК, Я. И. ЖИТОМИРСКИЙ

УБЫВАЮЩИЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПО ПАРАМЕТРУ

1. В данной статье исследуются линейные дифференциальные уравнения, коэффициенты которых зависят от вещественного параметра, а разные члены уравнения содержат искомую функцию (и ее производные) при различных значениях этого параметра, т. е. дифференциальные уравнения, функциональные по параметру. Оказывается, наличие такой зависимости существенно влияет на свойства решений дифференциального уравнения. В статье предпринято исследование качественных и количественных показателей этого влияния на вопросы единственности решения задачи Коши.

Исследование дифференциально-функциональных уравнений представляет актуальную задачу современной теории дифференциальных уравнений [1]. Если в линейном дифференциальном уравнении с постоянными коэффициентами лишь часть независимых переменных подвергнута линейному преобразованию, то образ Фурье (по той же части переменных) решения будет, в свою очередь, решением дифференциального уравнения, функционального по параметру (коэффициенты которого являются квазиполиномами). Результаты статьи относятся как к этому, так и к более общему случаю достаточно произвольной зависимости преобразования и коэффициентов уравнения от параметра. Ранее нами изучен [2] случай, когда коэффициенты уравнения постоянны, а преобразование параметра имеет специальный вид.

Рассматривается уравнение

$$D_t u(x, y, t) = P(D_x, y)\, u(x, \alpha(y), t) \tag{1}$$

в области $\Pi(a, b) = \boldsymbol{R}^n \times]a, b[\times [0, T]$, где $P(s, y)$ — произвольный полином относительно $s \in \boldsymbol{C}^n$, коэффициенты которого — непрерывные функции относительно $y \in]a, b[$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, $\alpha(y) :]a, b[\to]a, b[$. К уравнению (1) присоединяется начальное условие

$$u(x, y, 0) \equiv 0, \ (x, y) \in \boldsymbol{R}^n \times]a, b[, \tag{1_0}$$

и изучается вопрос о наличии нетривиальных решений задачи (1) — (1_0), удовлетворяющих как можно более жестким оценкам при $|x| \to \infty$ и $y \to a$ или $y \to b$.

При отсутствии зависимости от параметра задачи (1) — (1_0) (т. е. для уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами) полное решение вопроса содержится в [3 — 4] и состоит в том, что всякое нетривиальное решение этой задачи при $|x| \to \infty$ растет достаточно быстро.

Если в уравнении (1) $P(s, y) \equiv P(s)$, $\alpha(y) \equiv \alpha y$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, то задача (1) — (1_0) имеет нетривиальные решения, экспоненциально убывающие при $|x| \to \infty$ (с показателем, меньшим 1), которые достаточно быстро растут при $y \to +\infty$ (если $\alpha > 1$) или при $y \to +0$ (если $\alpha \in]0, 1[$) [2].

В данной статье показано, что если коэффициенты уравнения (1), рассматриваемого, например, в $\Pi(0, \infty)$, растут при $y \to \infty$, то задача (1) — (1_0) имеет нетривиальные решения, быстро убывающие как по x (при $|x| \to \infty$), так и по y (при $y \to \infty$ или при $y \to 0$), причем убывание по y тем сильнее, чем выше скорость роста коэффициентов; в то же время увеличение скорости роста функции $\alpha(y)$, наоборот, замедляет убывание решения.

2. *Основные предположения.* Обозначим символом $M^+(a, b)$ ($-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$) класс функций $\alpha(y):]a, b[\to]a, b[$ со свойствами: 1) $\alpha(y) \in C(]a, b[)$; 2) $\alpha(y)$ строго возрастает на $]a, b[$; 3) $\alpha(y) > y$ при $y \in]a, b[$. Символ $M^-(a, b)$ обозначает класс функций $\alpha(y):]a, b[\to]a, b[$, обладающих свойствами 1) и 2), а вместо 3) — свойством $\alpha(y) < y$ при $y \in]a, b[$.

В уравнении (1) всегда предполагаем $\alpha(y) \in M^+(a, b)$ или $\alpha(y) \in M^-(a, b)$. Нетрудно видеть, что, не уменьшая общности, можно ограничиться изучением случая $\alpha(y) \in M^+(0, \infty)$, перейдя, если надо, к рассмотрению функции $v(x, y, t) \equiv u(x, \psi(y), t)$, где $\psi(y):]0, \infty[\to]a, b[$, $\psi(]0, \infty[) =]a, b[$, $\psi(y)$ — монотонная функция. Поэтому впредь изучаем уравнение (1) в $\Pi(0, \infty)$, $\alpha(y) \in M^+(0, \infty)$ и различаем случаи А: $\alpha(+0) = 0$ и Б: $\alpha(+0) > 0$.

В дальнейшем будем предполагать также выполненными следующие два условия.

Условие 1. $\exists y_0 > 0$, $\exists \delta > 0$, $\exists \sigma_0 \in \boldsymbol{R}^n$, $\exists \lambda(y)$ — возрастающая при $y > 0$ функция, $\lambda(y) \to \infty$ при $y \to \infty$ такие, что при $y \geqslant y_0$, $s \in U_\delta(\sigma_0) = \{s \in \boldsymbol{C}^n : |s - \sigma_0| < \delta\}$ справедливо неравенство

$$|P(is, y)| \geqslant \lambda(y). \tag{2}$$

Сразу же отметим, что в случае полиномиальной зависимости $P(s, y)$ от y (степени l) условие 1 выполняется с $\lambda(y) = a_0 y^l \equiv \lambda_1(y)$, $a_0 \in \boldsymbol{R}$.

Для формулировки условия 2 обозначим $\alpha_0(y) \equiv y$, $\alpha_k(y) = \alpha(\alpha_{k-1}(y))$ $\{k \geqslant 1\}$, $\alpha_{-k}(y) = \alpha^{-1}(\alpha_{-k+1}(y))$, где $\alpha^{-1}(y):]\alpha(+0), \infty[\to]0, \infty[$ — обратная функция. При $k \geqslant 0$, а в случае А и при $k < 0$ функции $\alpha_k(y)$ определены при всех $y > 0$; функция $\alpha_{-k}(y)$ ($k \geqslant 1$) определена в случае Б при $y > \alpha_{k-1}(\alpha(+0))$.

Пусть выполнено условие 1. Положим $y_k = \alpha_k(y_0)$ ($k \geqslant 1$), $y_{-k} = \alpha_{-k}(y_0)/k \in \{1, 2, \ldots, m_0\}$, где в случае А $m_0 = \infty$, а в случае Б величина m_0 определяется условиями $y_{-m_0+1} > \alpha(+0)$, $y_{-m_0} \leqslant \alpha(+0)$; кроме того, положим $y_{-m_0-1} = 0$. Тогда $]0, \infty[= \bigcup\limits_j]y_j, y_{j+1}]$. Обозначим еще $\Lambda(m) = \sum\limits_{j=0}^{m} \ln \lambda(y_j)$, $m(y) = \max\{m : y_m < y\}$.

Условие 2.

$$l_0 = \varlimsup_{m\to\infty} \frac{m \ln m}{\Lambda(m)} < 1.$$

Условие 2, очевидно, выполняется при достаточно быстром росте коэффициентов уравнения (точнее, функции $\lambda(y)$ из условия 1) и функции $\alpha(y)$.

3. **Теорема 1.** *Пусть выполнены условия 1 и 2. Тогда при* $\forall a > 0$, $\forall h \in]0, 1[$ и $\forall b \in]0, 1 - l_0[$ *задача* (1) — (1_0) *имеет решение* $u(x, y, t) \not\equiv 0$, *удовлетворяющее условию*

$$\varlimsup_{|x|+y\to\infty} |u(x, y, t)| \exp\{a|x|^h + b\Lambda(m(y))\} < \infty. \tag{3}$$

Доказательство. Обозначим $\prod_m(s, y) = \prod_{j=0}^{m-1} P^{-1}(is, \alpha_{-j}(y))$, где $m \geqslant 1$, $y \geqslant y_m$, $s \in U_\delta(\sigma_0)$. Определение $\Pi_m(s, y)$ корректно в силу условия 1; кроме того, справедлива оценка:

$$\left|\prod_m(s, y)\right| \leqslant \prod_{j=0}^{m-1} \lambda^{-1}(\alpha_{-j}(y_m)) = \prod_{j=1}^{m} \lambda^{-1}(y_j).$$

Ясно также, что функции $\Pi_m(s, y)$ аналитичны при $s \in U_\delta(\sigma_\rho)$. Пусть $\gamma \in]1, h^{-1}[$, $a_\gamma(\sigma) \in C_0^\infty(U_{\frac{\delta}{2}}(\sigma_0))$, причем для любого мультииндекса β верна оценка $|D^\beta a_\gamma(\sigma)| \leqslant a_1^{|\beta|}|\beta|^{|\beta|\gamma}$. Обозначим $A_m(x, y)$ ($m \geqslant 0$) — (обратное) преобразование Фурье функции $\Pi_m(\sigma, y)\, a_\gamma(\sigma)$ ($\Pi_0(\sigma, y) \equiv 1$); такая функция определена при $y \geqslant y_m$, $x \in R^n$ и удовлетворяет при любом $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ оценке $|x^\beta A_m(x, y)| \leqslant$ $\leqslant C_1 \prod_{j=1}^{m} \lambda^{-1}(y_j)\, a_2^\beta |\beta|^{|\beta|\gamma}$ с некоторыми $C_1 > 0$ и $a_2 > 0$, откуда, с учетом того, что $\gamma < h^{-1}$, следуют оценки

$$|A_m(x, y)| \leqslant C_2 \prod_{j=1}^{m} \lambda^{-1}(y_j) \exp\{-a|x|^h\}, \tag{4}$$

справедливые при некоторых $C_2 > 0$ и $a > 0$ и всех значениях $x \in R^n$, $y \geqslant y_m$.

Построение требуемого решения $u(x, y, t) \not\equiv 0$ теперь осуществляется следующим образом: при $y \in]y_m, y_{m+1}]$ ($m \geqslant 0$) полагаем

$$u(x, y, t) = A_m(x, y)\, b(\alpha_{-m}(y))\, c^{(m)}(t), \tag{5}$$

где $c(t) \in C_0^\infty(0, T)$, $b(y) \in C_0(y_0, y_1)$ — любые функции. Формулой (5) функция $u(x, y, t)$ определена при $x \in R^n$, $y \geqslant y_0$, $t \in [0, T]$. Ее продолжение на $]0, y_0[$ осуществляется согласно формулам

$$u(x, y, t) = \prod_{j=0}^{m-1} P(D_x, \alpha_j(y))\, A_0(x)\, b(\alpha_m(y)) \int_0^t \frac{(t-\tau)^{m-1}}{(m-1)!} c(\tau)\, d\tau \tag{6}$$

при $x \in \boldsymbol{R}^n$, $t \in [0, T]$, $y \in]y_{-m}, y_{-m+1}]$; здесь в случае А $m \geqslant 1$ — любое, а в случае Б $m = 1, 2, \ldots, m_0 + 1$. Нетрудно проверить, что определяемая в $\Pi(0, \infty)$ формулами (5) — (6) функция $u(x, y, t)$ является решением задачи (1) — (1_0). Оценим ее при $y \to +\infty$. Из (4) и (5) следует, что при $y_m < y \leqslant y_{m+1}$ ($m \geqslant 1$) и при некоторых $C_3 > 0$, $C_4 > 0$ и $h_1 > 1$ верны оценки

$$|u(x, y, t)| \leqslant C_3 C_4^m \exp\{-a|x|^h - \Lambda(m) + mh_1 \ln m\}. \tag{7}$$

При этом число m в правой части (7) совпадает, очевидно, с $m(y)$. При заданном $b \in]0, 1 - l_0[$ подберем $h_1 > 1$ так, чтобы $h_1 l_0 < < 1 - b$ и функцию $c(t) \in C_0^\infty(0, T)$ в (5) выберем удовлетворяющей условиям $|c^{(m)}(t)| \leqslant c_4^m (m!)^{h_1}$, $m \geqslant 0$. Тогда, учитывая условие 2, при достаточно больших значениях m, иначе говоря, при достаточно больших значениях y, приходим к справедливости оценки $|u(x, y, t)| \leqslant C \exp\{-a|x|^h - b\Lambda(m(y))\}$. Теорема доказана.

4. Те или иные конкретные предположения о поведении при $y \to \infty$ коэффициентов уравнения (1) и об асимптотическом поведении $\alpha(y)$ дают возможность получения соответствующих конкретных оценок решения. Как уже отмечалось, при условии полиномиальности коэффициентов уравнения (1) (по y) условие 1 выполнено с $\lambda(y) = \lambda_1(y) \equiv a_0 y^l$. Обозначим $\lambda_0(y) \equiv a_0 (\ln y)^l$, $\lambda_2(y) \equiv a_0 \exp\{ly\}$ ($a_0 > 0$), $\mu_{00}(y) = \ln y \ln \ln y$, $\mu_{01}(y) = (\ln \ln y)^2$, $\mu_{10}(y) = \ln^2 y$, $\mu_{11}(y) = \ln y$, $\mu_{20}(y) = y^\mu$, $\mu_{21}(y) = \exp\{(\ln y)^\nu\}$.

Относительно поведения $\alpha(y) \in M^+(0, \infty)$ сделаем одно из двух предположений:

a_0) при достаточно больших значениях y имеют место оценки: $\alpha_1 y \leqslant \alpha(y) \leqslant \alpha_2 y$, $1 < \alpha_1 \leqslant \alpha_2$;

a_1) при достаточно больших значениях y имеют место оценки: $A_1 y^\alpha \leqslant \alpha(y) \leqslant A_2 y^\alpha$, $0 < A_1 \leqslant A_2$, $\alpha > 1$.

Тогда применение теоремы 1 и непосредственный подсчет показывают, что справедливо следующее

Следствие 1. *Пусть выполнено условие 1 с* $\lambda(y) = \lambda_i(y)$ ($i = 0, 1, 2$) *и* $\alpha(y) \in M^+(0, \infty)$ *удовлетворяет условию* (a_j) ($j = 0, 1$). *Тогда, каковы бы ни были постоянные* $a > 0$, $h \in]0, 1[$, *а в случае* $i = 2$ *также* $\mu \in \left]0, \frac{\ln \alpha_1}{\ln \alpha_2}\right[$, $\nu \in]0, 1[$, $b_{2j} > 0$ ($j = 0, 1$), *найдется решение* $u_{ij}(x, y, t) \not\equiv 0$ *задачи* (1) — (1_0), *для которого (в случаях* $i = 0, 1$ *при некотором* $b_{ij} > 0$, $j = = 0, 1$) *справедливо соотношение* $\overline{\lim\limits_{|x| + y \to \infty}} |u_{ij}(x, y, t)| \exp\{a|x|^h + + b_{ij}\mu_{ij}(y)\} < \infty$.

Тем самым качественно результат состоит в том, что скорость возможного убывания (по y при $y \to \infty$) решения $u(x, y, t) \not\equiv 0$ задачи (1) — (1_0) возрастает с увеличением роста $\lambda(y)$ при $y \to +\infty$ и уменьшается с увеличением роста $\alpha(y)$.

5. Покажем, что существенное увеличение скорости убывания по y нетривиальных решений задачи (1) — (1_0) невозможно даже при весьма заметном ослаблении предположений о поведении решений при $|x| \to \infty$. Полином $P(s, y)$ запишем в виде $P(s, y) = \sum_{\gamma:|\gamma| \leqslant P} a_\gamma(y) s^\gamma$.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие*

$$|a_\gamma(y)| \leqslant \lambda(y), \ y \geqslant y_0, \ \gamma: |\gamma| \leqslant p, \tag{8}$$

и $u(x, y, t)$ — решение задачи (1) — (1_0), удовлетворяющее при некоторых $a > 0$ и $h \in]0, 1[$ оценке

$$|u(x, y, t)| \leqslant C \exp\{a|x|^h - \Lambda(y)\}, \ (x, y, t) \in \Pi(0, \infty), \tag{9}$$

где $\Lambda(y) > 0$ — возрастающая функция. Если при достаточно больших значениях y последовательность

$$c_m(y) = \exp\left\{-\Lambda(\alpha_m(y)) + \sum_{j=0}^{m-1} \ln \lambda(\alpha_j(y))\right. \tag{10}$$

является квазианалитической, то $u(x, y, t) \equiv 0$.

Доказательство. Фиксируя достаточно большое $y > 0$, выберем произвольную функцию $\varphi(x) \in S_\beta^0$, где $\beta \in]1, h^{-1}[$ (см. [5]). Тогда при всех $x \in \boldsymbol{R}^n$ верны оценки:

$$|D^\gamma \varphi(x)| \leqslant A^\gamma \exp\{-B|x|^{1/\beta}\}, \ A = A_\varphi > 0, \ B = B_\varphi > 0, \tag{11}$$

$\gamma = (\gamma_1, \ldots \gamma_n)$ — любой мультииндекс.

Функция $F_{\varphi,y}(t) = \int u(x, y, t)\varphi(x)\,dx$, определенная в силу условий (9) и (11) корректно, является бесконечно дифференцируемой, причем

$$D_t^m F_{\varphi,y}(t) = \int u(x, \alpha_m(y), t) \prod_{j=0}^{m-1} P^*(D_x, \alpha_j(y))\varphi(x)\,dx. \tag{12}$$

Формула (12) имеет два следствия: во-первых, $D_t^m F_{\varphi,y}(0) = 0$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ в силу (1_0); во-вторых,

$$|D_t^m F_{\varphi,y}(t)| \leqslant C \exp\left\{-\Lambda(\alpha_m(y))\right\} + \sum_{j=0}^{m-1} \ln \lambda(\alpha_j(y)) \times$$
$$\times A^m = CA^{mp} c_m(y).$$

На основании предположения теоремы о квазианалитичности последовательности $c_m(y)$ делаем вывод о том, что $F_{\varphi,y}(t) \equiv 0$. Отсюда, в силу достаточного запаса функций в пространстве S_β^0 [5], заключаем, что $u(x, y, t) \equiv 0$. Теорема доказана.

Применим доказанную теорему в предположениях относительно $\lambda(y)$ и $\alpha(y)$, аналогичных принятым при установлении следствия 1.

Следствие 2. *Пусть выполнено условие (8) с* $\lambda(y)=\lambda_i(y)$ $|i\in\{0, 1, 2\}|$ *и* $\alpha(y)\in M^{+(0,\infty)}$ *удовлетворяет условию* (a_j), $j\in\{0, 1\}$, *и пусть* $u_{ij}(x, y, t)$ *— решение задачи* (1) — (1_0), *удовлетворяющее при некоторых* $a>0$, $b_{20}>0$, $\mu>\frac{\ln\alpha_1}{\ln\alpha_2}$, $h\in]0, 1[$ *и* $\nu=1$ *и достаточно больших значениях* $y>0$ *оценкам*

$$|D^\gamma u(x, y, t)|\leqslant C\exp\{a|x|^h-b_{ij}\mu_{ij}(y)\}, \quad |\gamma|\leqslant p.$$

Тогда, если постоянная $b_{ij}>0$ ($i, j=0, 1$; *или* $i=2, j=1$) *достаточно велика, то* $u_{ij}(x, y, t)\equiv 0$.

Действительно, вычисления показывают, что во всех шести возникающих случаях последовательность $c_m(y)$, определяемая согласно (10), ограничена; применима теорема 2.

Список литературы; 1. *Мышкис А. Д.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.— Успехи мат. наук, 1977, **32**, вып. 2, с. 172 — 202. 2. *Борок В. М., Житомирский Я. И.* Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных, функциональных по параметру.— Дифференц. уравнения, 1982, **18**, №6, с. 1000 — 1005. 3. *Чаус Н. Н.* О единственности задачи Коши для дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.— Укр. мат. журн., 1964, **16**, №3, с. 417 — 421. 4. *Золотарев Г. Н.* Об оценках сверху классов единственности решения задачи Коши для систем дифференциальных уравнений в частных производных.— Науч. докл. высш. шк., 1958, №2, с. 37 — 40. 5. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции. Вып. 2. Пространства основных и обобщенных функций.— М.: Физматгиз, 1958, с. 1 — 307.

Поступила в редколлегию 02.10.84.