УДК 519.4

С. Л. ГЕФТЕР, В. Я. ГОЛОДЕЦ, Н. И. НЕССОНОВ

СЧЕТНЫЕ T-ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ НЕЙМАНА

В ряде задач эргодической теории и теории представлений полупростых групп Ли возникают алгебры Неймана, не допускающие аппроксимации конечномерными подалгебрами. Такие алгебры обладают замечательными свойствами, резко отличающимися от соответствующих свойств в аппроксимативно конечном случае. Изучение не аппроксимативно конечных факторов связано в основном с использованием так называемых T-групп [1].

Пусть G — счетная T-группа, у которой все классы сопряженности, кроме тривиального, бесконечны. А. Конн показал, что групповой фактор $R(G)$ имеет счетную фундаментальную группу [2]. G будем в дальнейшем называть $TICC$-группой, а $R(G)$ — фактором Конна. В работе [3] рассмотрены действия $TICC$-групп на инъективных алгебрах Неймана, и для любой счетной подгруппы Γ в $\mathbf{R}_+^*$ построен II_1-фактор со счетной фундаментальной группой, содержащей Γ. Таким образом было показано, что существуют факторы типа II с различными счетными фундаментальными группами, и $TICC$-группа имеет континуум неэквивалентных действий на аппроксимативно конечном факторе типа II_1.

Настоящая статья посвящена изучению связи T-свойства со счетностью фундаментальных групп и свойствам полных факторов типа III_1.

Определения и предварительные сведения даны в § 1. Результаты и методы работы [3] в § 2 использованы для доказательства счетности фундаментальных групп факторов, связанных с представлениями и действиями $TICC$-групп (см. теорему 1.1 и ее следствия), а в § 3 применяются к построению неизоморфных полных факторов типа III_1 с фиксированным точечным модулярным спектром (теорема 2.4). В § 4 строятся II_1-факторы со счетными фундаментальными группами и негомеоморфными группами внешних автоморфизмов. В частности, приведен пример ICC-группы без T-свойства, групповой фактор которой имеет счетную фундаментальную группу и не изоморфен фактору Конна (теорема 3.6 и предложение 3.3), и пример фактора типа II_1 с неизоморфными тензорными степенями (следствие 3.4). Построены также два траекторно неэквивалентных действия группы $SL(n, \mathbf{Z})$ для каждого $n \geqslant 3$ (следствие 3.7). Этот пример интересен в связи с результатом Зиммера о том, что эргодические действия групп $SL(n, \mathbf{Z})$, $n \geqslant 3$, траекторно неэквивалентны при разных n.

§ 1. Основные определения и обозначения. Напомним, что локально компактная группа обладает свойством T, если ее одномерное тривиальное представление является изолированной точкой в пространстве классов эквивалентности неприводимых унитарных представлений [1].

Если G — счетная дискретная группа, то T-свойство означает существование конечного множества $K \subset G$ и $\varepsilon > 0$, которые удовлетворяют следующему условию: для любого унитарного представления v группы G, если существует $\eta \in H_v$ такой, что

$$\|\eta\| = 1 \text{ и } \|v_g\eta - \eta\| < \varepsilon,\ g \in K, \tag{1}$$

то найдется ненулевой $\xi \in H_v$, для которого $v_g\xi = \xi$, $g \in G$.

Обозначим через $\operatorname{Aut} M$ группу $*$-автоморфизмов фактора M. В $\operatorname{Aut} M$ введем топологию с помощью базы окрестностей единицы:

$$U_{\varphi, \varepsilon} = \{\theta \in \operatorname{Aut} M : \|\varphi \circ \theta - \varphi\| < \varepsilon\},\ \varphi \in M_*,\ \varepsilon > 0. \tag{2}$$

Если M имеет сепарабельный преддуал M_*, то $\operatorname{Aut} M$ с топологией (2) является сепарабельной топологической группой и даже полным сепарабельным метрическим пространством.

Фактор M называется полным, если $\operatorname{Int} M$ — замкнутая подгруппа в $\operatorname{Aut} M$. Здесь $\operatorname{Int} M$ — группа внутренних автоморфизмов M.

Пусть N — II_1-фактор с точным нормальным (т. норм.) конечным следом τ, B — I_∞-фактор с т. норм. полуконечным следом tr. Тогда $M = N \otimes B$ — II_∞-фактор с т. норм. полуконечным следом $\tau \otimes \operatorname{tr}$. Через $\operatorname{Aut}_0 M$ обозначим подгруппу в $\operatorname{Aut} M$, состоящую из автоморфизмов M, сохраняющих след $\tau \otimes \mathrm{tr}$. $\mathrm{Aut}_0 M$ является нормальной подгруппой в $\mathrm{Aut}\, M$, и факторгруппа $\mathrm{Aut}\, M/\mathrm{Aut}_0\, M$ называется фундаментальной группой фактора N.

Через $\mathrm{Out}\, N$ обозначим группу внешних автоморфизмов фактора N.

§ 2. Факторы типа II со счетными фундаментальными группами. В этом параграфе доказана счетность фундаментальных групп у следующих факторов: 1) скрещенного произведения фактора Конна на группу внешних автоморфизмов (следствие 1.2); 2) скрещенного произведения конечной алгебры Неймана на эргодическую $TICC$-группу автоморфизмов (следствие 1.3).

Пусть N — фактор типа II_1 с сепарабельным преддуалом, G — счетная T-группа.

Теорема 1.1. *Если u — представление G унитарными операторами N, удовлетворяющее условию $u(G)' \cap N = C$, где $u(G)'$ — коммутант $u(G)$, то N — полный фактор со счетной фундаментальной группой.*

Доказательство теоремы 1.1 было получено В. Я. Голодцом и Н. И. Нессоновым.

Доказательство. Рассмотрим II_∞-фактор $M = N \otimes B$, действующий стандартно в $L^2(M, \tau \otimes \mathrm{tr})$. Пусть A_G — подгруппа в $\mathrm{Aut}\, M$, порожденная в алгебраическом смысле $\mathrm{Int}\, M$ и $\{\theta \in \mathrm{Aut}\, M : \theta(u_g \otimes 1) = u_g \otimes 1,\ g \in G\}$. Покажем, что A_G открыта в топологии (2). Для $\theta \in \mathrm{Aut}\, M$ определим унитарное представление G в $L^2(M, \tau \otimes \mathrm{tr})$: $\pi_\theta(g) = I(u_g \otimes 1) I\theta(u_g \otimes 1)$. Здесь I — унитарная инволюция в $L^2(M, \tau \otimes \mathrm{tr})$: $I(x\xi_0 \otimes b) = x^*\xi_0 \otimes b^*$, $b \in L^2(B, \mathrm{tr})$, ξ_0 — циклический отделяющий вектор в $L^2(N, \tau)$ для N. Пусть $K \subset G$ и $\varepsilon > 0$ определяются T-свойством G и $\eta = \xi_0 \otimes b$. Рассмотрим множество

$$U = \{\theta \in \mathrm{Aut}\, M : \|\pi_\theta(g)\eta - \eta\| < \varepsilon,\ g \in K\}. \tag{3}$$

Если $\theta_n \notin U$, то существует $g_0 \in K$ такое, что $\|\pi_{\theta_n}(g_0)\eta - \eta)\| \geqslant \varepsilon$. Пусть теперь $\theta_n \to \theta$ в топологии (2). Тогда $|\psi(\theta_n(u_{g_0} \otimes 1)) - \psi(\theta(u_{g_0} \otimes 1))| \leqslant \|\psi_0\theta_n - \psi_0\theta\| \to 0$, $\psi \in M_*$, т. е. $\theta_n(u_{g_0} \otimes 1)$ слабо сходится к $\theta(u_{g_0} \otimes 1)$, а значит и сильно, так как $\theta_n(u_{g_0} \otimes 1)$ и $\theta(u_{g_0} \otimes 1)$ — унитарные операторы. Отсюда $\pi_{\theta_n}(g_0)\eta$ сходится к $\pi_\theta(g_0)\eta$. Следовательно, $\theta \notin U$, т. е. U — открытое множество. Далее, $\pi_{\mathrm{id}}(g)\eta = \eta$, $g \in G$, и таким образом, U — окрестность единицы в группе $\mathrm{Aut}\, M$. В силу (1) и (3), если $\theta \in U$, то $L^2(M, \tau \otimes \mathrm{tr})$ содержит $y \neq 0$ такой, что $\pi_\theta(g) y = y$, $g \in G$, или

$$\theta(u_g \otimes 1) y = I(u_g^* \otimes 1) I y,\ g \in G. \tag{4}$$

Лемма. *Существует частичная изометрия $v \in M$ такая, что*

$$\theta(u_g \otimes 1) v = v(u_g \otimes 1),\ g \in G. \tag{5}$$

Доказательство. Рассмотрим гильбертову алгебру (H, I, D), где $H = L^2(M, \tau \otimes \mathrm{tr})$, $D = L^\infty(M, \tau \otimes \mathrm{tr}) \cap L^2(M, \tau \otimes \mathrm{tr})$. Условимся обозначать $Ix = x^*$, $L_a x = ax$, $R_a x = xa$, $(a \in D, x \in H)$. Тогда $IL_a I = R_{a^*}$, $a \in D$. Далее, положим $L(H) = \{L_a : a \in D\}''$, $R(H) = \{R_a : a \in D\}''$. Понятно, что $b \in M$ определяет $L_b x = bx$, $R_b x = Ib^* Ix = xb$, $x \in D$, принадлежащие $L(H)$ и $R(H)$ соответственно, и $b \mapsto L_b$ есть $*$-изоморфизм M на $L(H)$.

Всякому $x \in H$ можно сопоставить оператор L_x в H, определенный на $D \subset H$ согласно формуле $L'_x a = R_a x$, $a \in D$. Оператор L'_x допускает замыкание L_x, измеримое относительно $L(H)$. Перепишем теперь соотношение (4) с помощью операторов L_a и $R_b (a, b \in M)$.

$$L_{\theta(u_g \otimes 1)} y = R_{u_g \otimes 1} y, \quad g \in G. \tag{6}$$

Если $c \in D$, то $R_c L_{\theta(u_g \otimes 1)} y = R_c R_{u_g \otimes 1} y$ и $R_c L_{\theta(u_g \otimes 1)} y = L_{\theta(u_g \otimes 1)} \times \times R_c y = L_{\theta(u_g \otimes 1)} L'_y c$. Аналогично $R_c R_{u_g \otimes 1} y = R_{(u_g \otimes 1)c} y = L'_y \times \times (u_g \otimes 1) c = L'_y L_{u_g \otimes 1} c$. Таким образом, имеет место равенство $L_{\theta(u_g \otimes 1)} L'_y c = L'_y L_{u_g \otimes 1} c (g \in G, c \in D)$. Если $b_n \to b$, где $b_n \in D, b \in \in D(L_y)$ и $L'_y b_n \to L_y b$, то $L_{u_g \otimes 1} b_n \to L_{u_g \otimes 1} b$ и $L'_y (L_{u_g \otimes 1} b_n) = = L_{\theta(u_g \otimes 1)} L'_y b_n \to L_{\theta(u_g \otimes 1)} L_y b$. Следовательно,

$$L_y L_{u_g \otimes 1} b = L_{\theta(u_g \otimes 1)} L_y b (g \in G, b \in D(L_y)),$$

и поэтому

$$L_y L_{u_g \otimes 1} = L_{\theta(u_g \otimes 1)} L_y, \quad g \in G. \tag{7}$$

Применим I к равенству (6), тогда $R_{\theta(u_g^* \otimes 1)} y^* = L_{u_g^* \otimes 1} y^*$. Проделывая с этим равенством преобразования такие же, как и с (6), мы получим соотношение

$$L_{y^*} L_{\theta(u_g \otimes 1)} = L_{u_g \otimes 1} L_{y^*}, \quad g \in G. \tag{8}$$

Но $L_{x^*} = L_x^*$ и (8) можно переписать в виде

$$L_{u_g \otimes 1} L_y^* = L_y^* L_{\theta(u_g \otimes 1)}, \quad g \in G. \tag{8'}$$

Из выражений (7), (8') для $g \in G$ имеем

$$L_{u_g \otimes 1} L_y^* L_y = L_y^* L_y L_{u_g \otimes 1}. \tag{9}$$

Пусть $L_y = V |L_y|$ — полярное разложение L_y. Так как L_y и $|L_y|$ присоединены к $L(H)$, то $V \in L(H)$, а поэтому $V = L_v$, для некоторой частичной изометрии $v \in M$. Далее, из (7) и (9), учитывая, что $|L_y|^2 = L_y^* L_y$, выводим следующее соотношение: $L_{\theta(u_g \otimes 1)} \times \times L_v |L_y| = L_v L_{u_g \otimes 1} |L_y|$, откуда $L_{\theta(u_g \otimes 1) v} = L_{v(u_g \otimes 1)}$, или $\theta(u_g \otimes \otimes 1) v = v (u_g \otimes 1)$, $g \in G$. Лемма доказана.

Пусть теперь $q = v^*v$. Тогда из (5) следует, что $v^*v = (u_g^* \otimes 1) v^*v (u_g \otimes 1)$, т. е. $q \in \{u_g \otimes 1 : g \in G\}' \cap \tilde{M} = 1 \otimes \tilde{B}$. Положим $\tilde{M} = M \otimes B$, $\tilde{B} = B \otimes B$, $\theta_1 = \theta \otimes \mathrm{id}$, $q_1 = q \otimes 1$, $v_1 = v \otimes 1$. Тогда q_1, $1 - q_1$, $p_1 = v_1 v_1^*$, $1 - p_1$ — бесконечные проекторы, а поэтому в унитарной группе $U(\tilde{M})$ существует оператор w_1 такой, что $w_1 v_1 = q_1$, и, следовательно, $(\mathrm{Ad}\, w_1 \theta_1)(u_g \otimes 1) q_1 = w_1 \theta_1 (u_g \otimes 1) w_1^* q_1 = w_1 \theta_1 (u_g \otimes 1) v_1 = w_1 v_1 (u_g \otimes 1) = q_1 (u_g \otimes 1) = u_g \otimes q_1$, $g \in G$. Но тогда $(u_g \otimes 1)(\theta_1^{-1} \mathrm{Ad}\, w_1^*)(q_1) = (\theta_1^{-1} \mathrm{Ad}\, w_1^*)(q_1)(u_g \otimes 1)$, $g \in G$, и поэтому $(\theta_1^{-1} \mathrm{Ad}\, w_1^*)(q_1) \in 1 \otimes \tilde{B}$. Поскольку $(\theta_1^{-1} \mathrm{Ad}\, w_1^*) \times (q_1)$ и $1 - (\theta_1^{-1} \mathrm{Ad}\, w_1^*)(q_1)$ — бесконечные проекторы из $1 \otimes \tilde{B}$, то существует $\tilde{w}_2$ из $U(1 \otimes \tilde{B})$, такой, что $(\theta_1^{-1} \mathrm{Ad}\, w_1^*)(q_1) = \tilde{w}_2 q_1 \tilde{w}_2^*$. Положим $w_2 = \theta_1^{-1}(w_1) \tilde{w}_2$. Тогда $(\theta_1 \mathrm{Ad}\, w_2)(q_1) = (\mathrm{Ad}\, w_1 \theta_1 \mathrm{Ad}\, \tilde{w}_2)(q_1) = q_1$ и

$$(\theta_1 \mathrm{Ad}\, w_2)(u_g \otimes q_1) = u_g \otimes q_1, \ g \in G. \tag{10}$$

Пусть $e_{11} = q_1$, $e_{22} = 1 - q_1$. Найдется частичная изометрия $e_{12} \in 1 \otimes \tilde{B}$, сплетающая e_{11} и $e_{12} : e_{12} e_{21} = e_{11}$, $e_{21} e_{12} = e_{22}$, $(e_{21} = e_{12}^*)$. Если $w_2 = e_{11} + e_{21} (\theta_1 \mathrm{Ad}\, w_2)(e_{12})$, то w_3 — унитарный, $(\mathrm{Ad}\, w_3) \times (e_{ii}) = e_{ii}$ и $(\mathrm{Ad}\, w_3 \theta_1 \mathrm{Ad}\, w_2)(e_{ij}) = e_{ij}$ $(i,\ j = 1,\ 2)$, так как $(\theta_1 \mathrm{Ad}\, w_2)(e_{11}) = e_{11}$. Кроме того, согласно (10)

$$(\mathrm{Ad}\, w_3)(u_g \otimes q_1) = u_g \otimes q_1, \ g \in G. \tag{11}$$

Положим $w_4 = w_3 \theta_1 (w_2)$. Тогда из (10), (11) получаем

$$(\mathrm{Ad}\, w_4 \theta_1)(u_g \otimes q_1) = u_g \otimes q_1, \ g \in G. \tag{12}$$

Далее, $(\mathrm{Ad}\, w_4 \theta_1)(u_g \otimes (1 - q_1)) = (\mathrm{Ad}\, w_4 \theta_1)(u_g \otimes e_{22}) = (\mathrm{Ad}\, w_4 \theta_1) \times (e_{21} (u_g \otimes q_1) e_{12}) = e_{21} (u_g \otimes q_1) e_{12} = u_g \otimes (1 - q_1)$, в силу (12). Таким образом, $(\mathrm{Ad}\, w_4 \theta_1)(u_g \otimes 1) = u_g \otimes 1$, $g \in G$. Поскольку $\{u_g \otimes 1 : g \in G\}' \cap \tilde{M} = 1 \otimes \tilde{B}$, то $(\mathrm{Ad}\, w_4 \theta_1)(1 \otimes \tilde{B}) = 1 \otimes \tilde{B}$. В $U(1 \otimes \tilde{B})$ существует w_5 такой, что $(\mathrm{Ad}\, (w_4 w_5) \theta_1)(1 \otimes x) = 1 \otimes x$, $x \in \tilde{B}$. Отсюда $(\mathrm{Ad}\, w \theta_1)(u_g \otimes 1) = u_g \otimes 1$, где $w = w_5 w_4$, $g \in G$. Так как $\theta_1 = \theta \otimes id$, то для всякого $y \in B$ будем иметь $(\mathrm{Ad}\, w \theta_1) \times (1 \otimes 1 \otimes y) = (\mathrm{Ad}\, w)(1 \otimes 1 \otimes y) = 1 \otimes 1 \otimes y$, и поэтому $w \in M \otimes 1$. Мы приходим к заключению, что A_G содержит U, т. е. A_G — открытая подгруппа. Но $A_G \subset \mathrm{Aut}_0 M$, а значит и $\mathrm{Aut}_0 M$ — открытая подгруппа. Следовательно, фундаментальная группа фактора N счетна, так как $\mathrm{Aut}\, M$ — сепарабельное метрическое пространство в топологии (2). Полнота N доказывается так же, как и в [2].

Теорема 1.1 полностью доказана.

Следствие 1.2. *Пусть G — TICC-группа, K — счетная группа, действующая на $R(G)$ внешними автоморфизмами. Тогда фактор $P = R(G) \times_\alpha K$, являющийся скрещенным произведением $R(G)$ на K, полный и имеет счетную фундаментальную группу.*

Доказательство. Положим $u_g = \pi(r_g)$, где π — вложение $R(G)$ в P, r_g — операторы регулярного представления G. Тогда $u'(G)' \cap P = \pi(R(G))' \cap P = \mathbf{C}$, т. к. действие внешнее. Таким образом, представление u_g удовлетворяет условию теоремы I.1.

Следствие 1.3. *Пусть N — конечная алгебра Неймана с сепарабельным преддуалом, α — действие $TICC$-группы G на N, сохраняющее т. норм. конечный след τ. Если действие эргодическое, т. е. алгебра неподвижных точек тривиальна, то $P = N \times_\alpha G$ — полный фактор со счетной фундаментальной группой.*

Доказательство. Фактор $P = N \times_\alpha G$ порождается операторами $\pi(x)$ и $\lambda_g (x \in N,\ g \in G)$, действия которых в пространстве $l^2(G;\ H)$ определяются соотношениями $(\pi(x)\xi)(h) = \alpha_{h^{-1}}(x)\xi(h)$, $(\lambda_g \xi)(h) = \xi(g^{-1}h)$, где $\xi \in l^2(G;\ H)$ и алгебра N действует в пространстве H. Условие $\lambda(G)' \cap P = \mathbf{C}$ выполняется, так как G — ICC-группа, действующая эргодически.

В § 4 мы приведем примеры и покажем, что II_1-факторы, построенные в 1.2 и 1.3 могут быть не изоморфны фактору Конна.

§ 3. Неизоморфные полные факторы типа III_1 с фиксированным точечным модулярным спектром Sd. Напомним, что точный нормальный (т. норм.) полуконечный вес φ на алгебре Неймана называется почти периодическим (п. п.), если соответствующий модулярный оператор Δ_φ имеет чисто точечный спектр.

Пусть α-действие счетной группы G на алгебре M. Ограниченная по норме последовательность $\{x_n\}$ из M называется асимптотически инвариантной, если $s - \lim\limits_{n\to\infty}\{x_n - \alpha_g(x_n)\} = 0$, $g \in G$. Две ограниченные последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называются эквивалентными, если $s - \lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$.

Лемма 2.1. *Если α-действие T-группы G на III_λ-факторе $M(0 < \lambda \leqslant 1)$, сохраняющее п. п. состояние φ, то любая асимптотически инвариантная последовательность эквивалентна инвариантной.*

Доказательство. Так как φ инвариантно, относительно действия α, то модулярная группа σ^φ оставляет инвариантной алгебру неподвижных точек M^G. Следовательно, существует т. норм. условное ожидание E из M на M^G и $\varphi = \varphi \circ E$. Для асимптотически инвариантной последовательности $\{x_n\}$ докажем, что $s - \lim\limits_{n\to\infty}(x_n - E(x_n)) = 0$. Предположим, что $\|x_n - E(x_n)\|_\varphi \to 0$ и подпоследовательность $\{n_k\}$ такова, что $\|x_{n_k} - E(x_{n_k})\|_\varphi > \delta$. Существует $m \in N : \|\alpha_g(x_{n_m}) - x_{n_m}\|_\varphi < \delta \cdot \varepsilon$, $g \in K$. Здесь $\varepsilon > 0$ и K определяются T-свойством. Рассмотрим унитарное представление u_g группы $G : u_g(x\xi_0) = \alpha_g(x)\xi_0$, $x \in M$, ξ_0 — циклический отделяющий вектор, соответствующий φ. Пусть $v = u_{|H_2}$, где $H_2 = H_1^\perp$, $H_1 = \overline{M^G\xi_0}$. Если $a = \{x_{n_m} - E(x_{n_m})\}$, $\eta = \|a\|^{-1}a\xi_0$, то $\|\eta\| = 1$,

$\eta \in H_2$, так как $E(a) = 0$, и $\|v_g\eta - \eta\| < \varepsilon$ для $g \in K$. Следовательно, найдется $\xi \in H_2$, $\xi \neq 0$ и $v_g\xi = \xi$ для $g \in G$. Очевидно, что Δ_φ^{it} оставляет H_2 инвариантным и коммутирует с v_g. Если $\Delta_\varphi = \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma E_\gamma$ — спектральное разложение Δ_φ, а Γ — его точечный спектр, то E_γ также оставляет H_2 инвариантным и коммутирует с v_g. Докажем, что $E_\gamma\xi = 0$, $\gamma \in \Gamma$. В случае $\gamma \geqslant 1$ существует частичная изометрия $w \in M$ такая, что $\sigma_t^\varphi(w) = \gamma^{it}w$, $ww^* = 1$. Но тогда $\Delta_\varphi^{it} w^* E_\gamma \xi = w^* E_\gamma \xi$, т. е. $w^* E_\gamma \xi \in \overline{M_\gamma \xi_0}$, где M_φ — централизатор состояния φ. Так как M_φ — конечная алгебра, то $w^* E_\gamma \xi = z\xi_0$ для некоторого замкнутого измеримого оператора z, присоединенного к M_φ. Таким образом, $E_\gamma\xi = wz\xi_0$. Поскольку $u_g E_\gamma \xi = E_\gamma \xi$, то $u_g wz = wzu_g$. Используя это равенство, можно показать, что $E_\gamma \xi \in \overline{M^G \xi_0} = H_1$, а значит $E_\gamma\xi = 0$, так как $E_\gamma \xi \in H_2 = H_1^\perp$. Случай $0 < \gamma < 1$ рассматривается аналогично. Из разложения $\xi = \sum_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma \xi$ следует, что $\xi = 0$. Полученное противоречие и доказывает лемму.

Теорема 2.2. *Пусть α — эргодическое действие TICC-группы G на M, сохраняющее п. п. состояние φ. Тогда $M \times_\alpha G$ — полный фактор.*

Доказательство. Фактор $M \times_\alpha G$ порождается операторами $\pi(a)$ и λ_g $(a \in M,\ g \in G)$. Если $x = \sum_{g \in G} \pi(x_g)\lambda_g$, то положим $\psi(x) = \varphi(x_e)$, $\beta_g(x) = \lambda_g x \lambda_g^*$. Тогда ψ — п. п. состояние на $M \times_\alpha G$ и действие β группы G сохраняет ψ. Используя тот факт, что G — ICC-группа и действие α эргодическое, можно показать, что β — эргодическое действие G на $M \times_\alpha G$ (заметим, что λ_g лежат в централизаторе ψ). В силу леммы 2.1 все центральные последовательности $M \times_\alpha G$ тривиальны, и $M \times_\alpha G$ — полный (см. [5]).

Для изучения полных факторов типа III_1 в работе [5] был введен следующий инвариант: $\mathrm{Sd}(M) = \bigcap_\varphi \mathrm{Spec}_p \Delta_\varphi$ — пересечение точечных спектров модулярных операторов, соответствующих п. п. весам на M. Если M — полный III_1-фактор с сепарабельным предуалом и п. п. состоянием, то $\mathrm{Sd}(M)$ — счетная плотная подгруппа в $\boldsymbol{R}_+^*$, и для любой такой подгруппы Γ существует полный III_1-фактор M в сепарабельном пространстве с $\mathrm{Sd}(M) = \Gamma$ [5, следствие 4.4].

Пусть $\lambda_i \in (0,\ 1)$ — образующие счетной плотной подгруппы $\Gamma \subset \boldsymbol{R}_+^*$. Рассмотрим фактор $R_\Gamma = \bigotimes_i R_{\lambda_i}$ и состояние $\varphi_\Gamma = \bigotimes_i \varphi_i$, где R_{λ_i} — аппроксимативно конечный фактор типа III_{λ_i}, φ_i — т. норм. состояние на R_{λ_i}, модулярная группа которого имеет период $T_i = -2\pi/\ln\lambda_i$. Тогда φ_Γ — п. п. состояние, и точечный спектр Δ_{φ_Γ} равен Γ, т. е. φ_Γ — Γ — п. п. состояние. Построим

III_1-фактор $(N(\Gamma), \varphi_\Gamma) = \bigotimes_{g \in G} (M_g, \varphi_g)$. Здесь G — $TICC$-группа, $M_g \approx R_\Gamma$, $\varphi_g = \varphi_\Gamma$ для всех $g \in G$. Обозначим через I_h вложение R_Γ в h-ю компоненту $N(\Gamma)$ и зададим действие α группы G на $N(\Gamma)$: $\alpha_g(I_h(x)) = I_{g^{-1}h}(x)$, $x \in R_\Gamma$. Это действие эргодично и сохраняет состояние $\tilde{\varphi}_\Gamma$. Рассмотрим скрещенное произведение $K(\Gamma) = N(\Gamma) \times_\alpha G$ и п. п. состояние ψ_Γ, построенное каноническим способом по $\tilde{\varphi}_\Gamma$. Если теперь Λ — подгруппа Γ, плотная в $\boldsymbol{R}_+^*$ и порожденная λ_i, $i \in I$, а Λ' порождена λ_i, $i \in \boldsymbol{N} \setminus I$, то положим $N(\Gamma, \Lambda) = N(\Lambda) \otimes N(\Lambda')_{\tilde{\varphi}_{\Lambda'}}$, $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_\Lambda \otimes \tilde{\varphi}_{\Lambda'}$, $K(\Gamma, \Lambda) = N(\Gamma, \Lambda) \times_{\tilde{\alpha}} G$ и ψ — соответствующее п. п. состояние на $K(\Gamma, \Lambda)$. Действие $\tilde{\alpha}$ на $N(\Gamma, \Lambda)$ задается следующим соотношением: $\tilde{\alpha}_g(x \otimes y) = \alpha_g(x) \otimes \alpha_g(y)$, $x \in N(\Lambda)$, $y \in N(\Lambda')_{\tilde{\varphi}_{\Lambda'}}$, $g \in G$.

Теорема 2.3. 1. $K(\Gamma, \Lambda)$ — *полный* III_1-*фактор;* 2. $\mathrm{Sd}\, K(\Gamma, \Lambda) = \Lambda$; 3. $K(\Gamma, \Lambda)_\psi$ — II_1-*фактор со счетной фундаментальной группой, содержащей* Γ.

Доказательство. Так как действие G на $N(\Gamma, \Lambda)$ эргодично и сохраняет п. п. состояние $\tilde{\varphi}$, то по теореме 2.2 $K(\Gamma, \Lambda)$ — полный фактор. Из построения следует, что $\mathrm{Spec}_p \Delta_\psi = \Lambda$, т. е. $\psi = \psi(\Gamma, \Lambda)$ — Λ — п. п. состояние. Далее, $\lambda_g \in K(\Gamma, \Lambda)_{\psi(\Gamma, \Lambda)}$ и

$$\{\lambda_g : g \in G\}' \cap K(\Gamma, \Lambda) = \boldsymbol{C}. \tag{13}$$

Отсюда, $K(\Gamma, \Lambda)_\psi$ — II_1-фактор и, следовательно, $\mathrm{Sd}\, K(\Gamma, \Lambda) = \Lambda$ [5, теорема 4.1]. Из (13) и теоремы 1.1 вытекает счетность фундаментальной группы $K(\Gamma, \Lambda)_\psi$. Кроме того, $K(\Gamma, \Lambda)_{\psi(\Gamma, \Lambda)} \approx K(\Gamma)_{\psi_\Gamma}$, и в силу следствия 2.3 [3] фундаментальная группа $K(\Gamma, \Lambda)_\psi$ содержит Γ.

Теорема 2.4. *Пусть* Γ_1 и Γ_2 — *счетные плотные подгруппы* $\boldsymbol{R}_+^*$, *содержащие* Λ, $K(\Gamma_i, \Lambda)$ — *полные* III_1-*факторы из теоремы 2.3. Если* Γ_2 *не содержится в фундаментальной группе* $K(\Gamma_1, \Lambda)_{\psi(\Gamma_1, \Lambda)}$, *то факторы* $K(\Gamma_1, \Lambda)$ *и* $K(\Gamma_2, \Lambda)$ *неизоморфны.*

Доказательство. Предположим, что $K(\Gamma_1, \Lambda) \approx K(\Gamma_2, \Lambda)$. Тогда факторы $K(\Gamma_1, \Lambda) \otimes B$ и $K(\Gamma_2, \Lambda) \otimes B$ изоморфны, где B — I_∞-фактор. Положим $\psi_i = \psi(\Gamma_i, \Lambda) \otimes \mathrm{tr}$, где tr — т. н. полуконечный след на B. Очевидно, что ψ_i — Λ — п. п. веса на $K(\Gamma_i, \Lambda) \otimes B$, причем $\psi_1(1) = \psi_2(1) = +\infty$. Согласно теореме 4.7 (2) [5], $\psi_2 = \alpha \psi_1 \circ \mathrm{Ad}\, u$, $\alpha > 0$, u — унитарный из $K(\Gamma_1, \Lambda) \otimes B$. Следовательно, централизаторы весов ψ_1 и ψ_2 должны быть изоморфны. Но

$$(K(\Gamma_i, \Lambda) \otimes B)_{\psi_i} = K(\Gamma_i, \Lambda)_{\psi(\Gamma_i, \Lambda)} \otimes B,$$

и так как Γ_2 не содержится в фундаментальной группе $K(\Gamma_1, \Lambda)_{\psi(\Gamma_1, \Lambda)}$, то $K(\Gamma_1, \Lambda)_{\psi(\Gamma_1, \Lambda)} \otimes B$ не изоморфен $K(\Gamma_2, \Lambda)_{\psi(\Gamma_2, \Lambda)} \otimes B$ (см. [3, теорема 2.3]).

Следствие 2.5. *Существует континуум неизоморфных полных факторов типа* III_1 *с фиксированным инвариантом* Sd.

§ 4. Факторы типа II_1 с различными группами внешних автоморфизмов. В данном параграфе приведены примеры ICC-групп H и Γ, групповые факторы которых имеют счетные фундаментальные группы, но $\mathrm{Out}\, R(H)$ не является локально компактной, а $\mathrm{Out}\, R(\Gamma)$ — непрерывная локально компактная группа. Негомеоморфность групп внешних автоморфизмов факторов используется для построения двух траекторно неэквивалентных действий $SL(n, \boldsymbol{Z})$ на пространстве Лебега для каждого $n \geqslant 3$. Показано также, что $R(\Gamma)$ имеет неизоморфные тензорные степени.

Пусть N — полный II_1-фактор с сепарабельным преддуалом. Тогда группа внешних автоморфизмов N — польская в индуцированной топологии (2), т. е. является полным сепарабельным метрическим пространством. В силу [2] группа внешних автоморфизмов фактора Конна счётна и дискретна, а значит локально компактна. Это свойство сохраняется при скрещенных произведениях.

Теорема 3.1. *Если K действует внешними автоморфизмами на факторе Конна $R(G)$, а $P = R(G) \times_\alpha K$, то $\mathrm{Out}\, P$ — локально компактная группа в топологии, индуцированной топологией* (2).

Доказательство. Пусть $\mathrm{Hom}(K, \boldsymbol{T})$ — группа характеров K. $\mathrm{Hom}(K, \boldsymbol{T})$ компактна в топологии поточечной сходимости на K. Обозначим через F подгруппу в $\mathrm{Aut}\, P$, алгебраически порожденную $\mathrm{Int}\, P$ и $\{\theta_\gamma : \gamma \in \mathrm{Hom}(K, \boldsymbol{T})\}$. Автоморфизмы θ_γ задаются соотношениями: $\theta_\gamma(\pi(x)) = \pi(x)$, $\theta_\gamma(\lambda_k) = \gamma(k)\lambda_k$, $x \in R(G)$, $k \in K$. Очевидно, что множество $\{\theta_\gamma\}$ компактно в топологии (2). Отсюда, $p(F)$ — компактно в $\mathrm{Out}\, P$ (p — каноническая проекция на $\mathrm{Out}\, P$). Согласно лемме 7 [4] подгруппа F открыта, и поэтому однородное пространство $\mathrm{Aut}\, P/F$ дискретно и счетно. Группа $\mathrm{Out}\, P$ гомеоморфна $\mathrm{Aut}\, P/F \times p(F)$, и следовательно, локально компактна.

Приведем пример $TICC$-группы G, для которой $\mathrm{Out}\, R(G)$ бесконечна.

Пример 3.2. Рассмотрим диагональное действие $SL(3, \boldsymbol{Z})$ на $\boldsymbol{Z}^3 \oplus \boldsymbol{Z}^3$, и пусть $G = SL(3, \boldsymbol{Z}) \circledS (\boldsymbol{Z}^3 \oplus \boldsymbol{Z}^3)$ — полупрямое произведение. Тогда G — ICC-группа, и так же, как и в теореме 4.3 [6], можно доказать, что G обладает свойством T. С помощью отображения $i(g) = g \otimes 1$ вложим $SL(3, \boldsymbol{Z})$ в $SL(6, \boldsymbol{Z})$. При этом действие группы $i(SL(3, \boldsymbol{Z}))$ на $\boldsymbol{Z}^6$ и будет диагональным действием. С образом $SL(3, \boldsymbol{Z})$ коммутируют матрицы вида $1 \otimes h$, $h \in SL(2, \boldsymbol{Z})$. Таким образом, действие $SL(2, \boldsymbol{Z})$ на $\boldsymbol{Z}^6$ поднимается до действия внешними автоморфизмами на G, а значит и на факторе Конна $R(G)$, т. е. $\mathrm{Out}\, R(G) \supset SL(2, \boldsymbol{Z})$.

В качестве следствия 1.2 и 3.1 получаем такой результат.

Предложение 3.3. *Пусть G — $TICC$-группа, на которой внешними автоморфизмами действует группа $\boldsymbol{Z}$ (например, группа, построенная в 3.2, где внешнее действие $\boldsymbol{Z}$ задается матрицами $\left(\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$. Если $\Gamma = \boldsymbol{Z} \circledS G$, то $R(\Gamma)$ имеет счетную фундаментальную группу и непрерывную локально компактную группу* *внешних автоморфизмов, а поэтому* Γ *не обладает свойством* T *и* $R(\Gamma)$ *не изоморфен фактору Конна.*

Доказательство. Легко видеть, что $R(\Gamma)$ изоморфен $R(G)\times \boldsymbol{Z}$ — скрещенному произведению $R(G)$ на $\boldsymbol{Z}$. Следовательно. на $R(\Gamma)$ действует двойственная группа автоморфизмов $\{\theta_t\}_{t\in[0,\,2\pi]}:\theta_t(\pi(x))=\pi(x)$, $\theta_t(\lambda_n)=e^{int}\lambda_n$ $(x\in R(G),\ n\in\boldsymbol{Z})$, т. е. $\mathrm{Out}\,R(\Gamma)$ — недискретная группа. Согласно 3.1 и 1,2, $\mathrm{Out}\,R(\Gamma)$ — локально компактна и $R(\Gamma)$ имеет счетную фундаментальную группу.

Следствие 3.4. $R(\Gamma)$ *имеет неизоморфные тензорные степени.*

Доказательство. Так как $\Gamma=\boldsymbol{Z}\circledS G$, то $\bigotimes\limits_{n=1}^{m}R(\Gamma)\approx$ $\approx R(G^m)\times\boldsymbol{Z}^m$. Но G^m обладает свойством T, и из доказательства теоремы 3.1 следует, что $\mathrm{Out}\,(\bigotimes\limits_{n=1}^{m}R(\Gamma))$ гомеоморфна $X_m\times$ $\times\,\mathrm{Hom}\,(\boldsymbol{Z}^m,\ \boldsymbol{T})=X_m\times\boldsymbol{T}^m$, где X_m — дискретное пространство. Таким образом, при разных m группы $\mathrm{Out}\,(\bigotimes\limits_{n=1}^{m}R(\Gamma))$ негомеоморфны и факторы $\bigotimes\limits_{n=1}^{m}R(\Gamma)=R(\Gamma^m)$ неизоморфны.

Покажем теперь, что полный фактор типа II_1 может иметь и не локально компактную группу внешних автоморфизмов.

Пусть A — счетная коммутативная группа, α — действие группы G на A, $G\circledS A$ — полупрямое произведение A на G, т. е. группа упорядоченных пар $(n,\ g)$ $(n\in A,\ g\in G)$ с умножением: $(n_1,\ g_1)\times(n_2,\ g_2)=(n_1+\alpha_{g_1}(n_2),\ g_1g_2)$. Возникает дуальное действие $\tilde{\alpha}$ на алгебре $L^\infty(\hat{A},\ \nu)$, где $\hat{A}$ — группа характеров A, ν — мера Хаара на $\hat{A}$: $\tilde{\alpha}_g(x)(s)=x(\hat{\alpha}_g(s))$, $\langle\hat{\alpha}_g(s),\ n\rangle=\langle s,\ \alpha_g(n)\rangle$, $(x\in L^\infty(\hat{A},\ \nu)$, $s\in\hat{A})$.

Лемма 3.5. *Алгебра Неймана* $R(G\circledS A)$ *регулярного представления группы* $G\circledS A$ *изоморфна* $L^\infty(\hat{A},\ \nu)\times_{\tilde{\alpha}}G$ — *скрещенному произведению* $L^\infty(\hat{A},\ \nu)$ *на* G *по отношению к действию* $\tilde{\alpha}$.

Доказательство достаточно стандартно и использует теорему двойственности Понтрягина.

Для $TICC$-группы G положим $\boldsymbol{Z}(G)=\bigoplus\limits_{g\in G}\boldsymbol{Z}$, α — действие G на $\boldsymbol{Z}(G)$, порожденное левым сдвигом, $H=G\circledS\boldsymbol{Z}(G)$.

Теорема 3.6. $R(H)$ — *полный фактор со счетной фундаментальной группой, но* $\mathrm{Out}\,R(H)$ *не локально компактна*, H *не обладает свойством* T, $R(H)$ *не изоморфен фактору Конна и фактору из предложения* 3.3.

Доказательство. Обозначим через S группу характеров $\boldsymbol{Z}(G)$. Из леммы 3.5 $R(H)\approx L^\infty(S,\ \nu)\times_{\tilde{\alpha}}G$. Действие $\tilde{\alpha}$ эргодично, и в силу следствия 1.3 $R(H)$ — полный фактор со счетной фундаментальной группой. Докажем, что группа $\operatorname{Out} R(H)$ не является локально компактной. Пусть σ — автоморфизм окружности T, оставляющий меру Хаара квазиинвариантной. Рассмотрим автоморфизм r_σ пространства $S = \prod_{g\in G} T$: $(r_\sigma s)(g) = \sigma(s(g))$, $(g\in G,\ s\in S)$. Он коммутирует с действием $\hat{\alpha}$ на S, и поэтому поднимается до автоморфизма θ_σ скрещенного произведения $L^\infty \times (S\ \ \nu)$ на G: $\theta_\sigma(\pi(x)) = \pi(\tilde{r}_\sigma(x))$, $\theta_\sigma(\lambda_g) = \lambda_g$ $(x\in L^\infty(S,\ \nu)$, $g\in G)$. Здесь $\pi(x)$ и λ_g — операторы, порождающие скрещенное произведение, $\tilde{r}_\sigma(x)(s) = x(r_\sigma^{-1}(s))$, $s\in S$. Если $\theta_\sigma = \operatorname{Ad} w$, то w коммутирует с λ_g для всех $g\in G$. Следовательно, $w = 1$, т. е. σ — тождественное преобразование. Мы приходим к заключению, что $\operatorname{Out} R(H)$ содержит группу автоморфизмов окружности, а значит не является локально компактной. В силу работы [2] группа H не обладает свойством T и $R(H)$ не изоморфен фактору Конна.

Воспользуемся этой теоремой для построения двух траекторно неэквивалентных действия группы $SL(n,\ \boldsymbol{Z})$, $n\geqslant 3$.

Следствие 3.7. *Естественное действие β группы $SL(n,\boldsymbol{Z})$ на n-мерном торе и действие $SL(n,\ \boldsymbol{Z})$ левыми сдвигами на $S = \prod_{g\in G} T$, где $G = SL(n,\ \boldsymbol{Z})$, траекторно неэквивалентны при $n\geqslant 3$.*

Доказательство. Действие β траекторно эквивалентно действию $SL(n,\ \boldsymbol{Z})$ на T^m, порождающему естественное действие $SL(n,\ \boldsymbol{Z})$ на $\boldsymbol{Z}^n$. В силу леммы 3.5 $R(SL(n,\boldsymbol{Z})ⓈZ^n)\approx L^\infty(T^n,\ \nu)\times_\beta SL(n,\ \boldsymbol{Z})$. Так как $SL(n,\ \boldsymbol{Z})Ⓢ\boldsymbol{Z}^n$ — T-группа, если $n\geqslant 3$ [6, 4.3], то группа внешних автоморфизмов фактора $L^\infty(T^n,\ \nu)\times\times_\beta SL(n,\ \boldsymbol{Z})$ дискретна и счетна (см. [2]). С другой стороны, можно показать, что автоморфизмы θ_σ фактора $L^\infty(S,\ \mu)\times_\alpha SL\times\times(n,\ \boldsymbol{Z})$ (см. доказательство теоремы 3.6) внешние, если $\sigma\neq \mathrm{id}$. Таким образом, группа внешних автоморфизмов фактора $L^\infty(S,\ \mu)\times_\alpha SL(n,\ \boldsymbol{Z})$ не локально компактна. Следовательно, факторы, соответствующие действиям неизоморфны, и действия траекторно неэквивалентны.

Список литературы

1. *Каждан Д. А.* О связи дуального пространства группы со строением ее замкнутых подгрупп.— Функцион. анализ, 1967, № 1, вып. 1, с. 71—74.
2. *Connes A.* A factor of type II with countable fundamental group.— J. Operator Th., 1980, 4, p. 151—153.
3. *Голодец В. Я., Нессонов Н. И.* Свободные группы, T-свойство, II_1-факторы с различными счетными фундаментальными группами.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1983, № 8, с. 7—9.
4. *Choda M.* Crossed products and property T.— Math. Jap., 1981, **26**, № 5, p. 557—567.
5. *Connes A.* Almost periodic states and factors of type III_1.— J. Funct. Anal., 1974, **16**, p. 415—445.

6. *Wang P. S.* On isolated points in the dual spaces of locally compact groups.— Math. Ann., 1975, 218, p. 19—34.

Поступила в редколлегию 16.04.84.