О МНОГОУГОЛЬНИКАХЪ ПОНСЕЛЕ.

(Статья вторая).

К. А. Андреева.

§ 1.

Въ предыдущей статьѣ мы ограничили наши разсужденія случаемъ лишь треугольниковъ и сверхъ того устранили изъ разсмотрѣнія тотъ случай, когда два данныя коническія сѣченія, относительно которыхъ многоугольники суть вписанные и описанные, имѣютъ двойное соприкосновеніе. Послѣдній случай доступенъ болѣе простому, такъ сказать, непосредственному изслѣдованію, и потому мы разсмотримъ его особо въ заключеніе настоящей статьи, цѣль которой есть распространеніе изложеннаго въ предыдущей на многоугольники съ какимъ угодно числомъ сторонъ.

Пусть, какъ и прежде, S и T будутъ два данныя коническія сѣченія и g точка, взятая какъ нибудь на первомъ изъ нихъ, которую, однако, будемъ предполагать на первое время лежащею внѣ коническаго сѣченія T (фиг. 5-я). Проведя изъ g двѣ касательныя къ T и соединивъ прямою точки a_1 и a_2 ихъ вторичнаго пересѣченія съ S, получимъ треугольникъ $a_1 g a_2$, вписанный въ S и имѣющій стороны, за исключеніемъ одной $a_1 a_2$, касательными къ T. Эту сторону $a_1 a_2$ мы назвали вообще *прямою противолежащею точкѣ* g относительно коническаго сѣченія T.

Изъ точекъ a_1 и a_2 можно провести вторыя касательныя къ T. Построивъ эти касательныя и назвавъ чрезъ α точку ихъ пересѣченія, получимъ четыреугольникъ $\alpha\, a_1\, g\, a_2$ описанный около T и имѣющій всѣ вершины, исключая одной α, противоположной вершинѣ g, на коническомъ сѣченіи S. Вершину α такого четыреугольника, противоположную вершинѣ g, мы будемъ называть вообще *точкою противолежащею точкѣ* g относительно T.

Если назовемъ буквами b_1 и b_2 точки, въ которыхъ прямыя $a_1\alpha$ и $a_2\alpha$ пересѣкаютъ вторично коническое сѣченіе S, и соединимъ эти двѣ точки прямою, то получимъ пятиугольникъ $b_1\, a_1\, g\, a_2\, b_2$, вписанный въ S и имѣющій всѣ стороны, за исключеніемъ одной $b_1\, b_2$, противоположной вершинѣ g, касательными къ T. Эту сторону $b_1\, b_2$ такого пятиугольника мы будемъ вообще называть *второю противолежащею прямою данной точки* g, разумѣя, слѣдовательно, подъ первою противолежащею прямой прямую $a_1\, a_2$.

Проведя чрезъ b_1 и b_2 вторыя касательныя къ T и обозначивъ чрезъ β точку ихъ пересѣченія, получимъ шестиугольникъ, описанный около T и имѣющій всѣ вершины, исключая одной β, противоположной вершинѣ g, на коническомъ сѣченіи S. Вершину β этого шестиугольника будемъ вообще называть *второю противолежащею точкою данной точки* g.

Продолжая такимъ образомъ, мы получимъ для точки g безпредѣльный рядъ послѣдовательныхъ противолежащихъ прямыхъ и противолежащихъ точекъ. Въ этомъ рядѣ прямыя и точки чередуются между собою, такъ что для каждой противолежащей точки существуютъ двѣ *смежныя* противолежащія прямыя, изъ которыхъ одна ей непосредственно предшествуетъ, а другая за ней непосредственно слѣдуетъ. Точно также и для каждой противолежащей прямой имѣются двѣ *смежныя* противолежащія точки.

Для первой противолежащей прямой одна изъ двухъ смежныхъ противолежащихъ точекъ (предшествующая) есть сама данная точка g, которую по этому можно называть своею нулевою противолежащею точкой.

Если случится, что n-ая противолежащая точка будетъ лежать на коническомъ сѣченіи S, то слѣдующая ($n+1$-я) противолежащая прямая будетъ касательною къ S въ этой точкѣ. Всѣ же дальнѣйшія противолежащія точки и прямыя будутъ совпадать съ предыдущими, но только въ обратной послѣдовательности, такъ что $2n+1$-я противолежащая точка будетъ совпадать съ данною точкой g.

Точно также, если n-ая противолежащая прямая есть касательная къ T, то слѣдующая (n-ая) противолежащая точка будетъ точкою прикосновенія этой касательной. Всѣ же дальнѣйшія противолежащія прямыя и точки будутъ совпадать съ предыдущими, но только въ обратномъ порядкѣ, такъ что $2n$-ая противолежащая точка совпадетъ съ g.

§ 2.

Предыдущее построеніе послѣдовательныхъ противолежащихъ прямыхъ и точекъ не выполнимо въ томъ случаѣ, когда данная точка g находится внутри коническаго сѣченія T и когда, слѣдовательно, касательныя изъ g къ этому коническому сѣченію не существуютъ. Мы уже знаемъ, однако, что первая противолежащая прямая существуетъ при всякомъ положеніи g на коническомъ сѣченіи S. Постараемся убѣдиться въ томъ же и для всѣхъ слѣдующихъ противолежащихъ прямыхъ и точекъ.

Положимъ, что μ есть какая-нибудь противолежащая точка (фиг. 6-я), а $m_1 m_2$ и $n_1 n_2$ двѣ смежныя съ нею противолежащія прямыя. По свойству четыреугольника, вписаннаго въ коническое сѣченіе, заключаемъ, что поляра точки μ относительно S проходитъ чрезъ точку p пересѣченія противолежащихъ прямыхъ m_1m_2 и n_1n_2 и есть въ то-же время поляра той-же точки относительно совокупности этихъ прямыхъ, разсматриваемой какъ одно коническое сѣченіе. Построивъ эту поляру pq и соединивъ прямою линіей точки μ и p, будемъ имѣть по этому, что четыре прямыя $p\mu$, pm_1, pq, pn_1 составляютъ гармоническую группу лучей. Отсюда слѣдуетъ, что, зная положеніе противолежащей точки μ и одной изъ смежныхъ съ нею противолежащихъ прямыхъ, мы можемъ построить другую изъ этихъ прямыхъ какъ четвертый гармоническій лучъ къ тремъ лучамъ пучка уже извѣстнымъ.

Построеніе это выполнимо при всякомъ положеніи точки μ, независимо отъ существованія касательныхъ къ T изъ этой точки. Оно убѣждаетъ насъ въ существованіи какой бы ни было противолежащей прямой при условіи, что существуютъ всѣ противолежащія прямыя и точки ей предшествующія, и можетъ быть принято за общее геометрическое опредѣленіе противолежащихъ прямыхъ.

Положимъ теперь, что n_1n_2 есть какая-нибудь противолежащая прямая (та-же фиг.), а μ и ν двѣ смежныя съ нею противолежащія точки. По свойству четыреугольника, описаннаго около коническаго сѣченія, полюсъ прямой n_1n_2 относительно T долженъ лежать на прямой $\mu\nu$ и быть въ то-же время полюсомъ этой прямой относительно совокупности точекъ μ и ν, разсматриваемой какъ одно коническое сѣченіе. Обозначая чрезъ ρ этотъ полюсъ, а чрезъ φ точку пересѣченія прямыхъ n_1n_2 и $\mu\nu$, будемъ имѣть поэтому, что четыре точки μ, φ, ν, ρ составляютъ гармоническую группу. Отсюда слѣдуетъ, что, имѣя противолежащую прямую n_1n_2 и одну изъ смежныхъ съ нею противолежащихъ точекъ, мы можемъ найдти другую построеніемъ четвертой гармонической къ тремъ извѣстнымъ уже точкамъ ряда.

Построеніе это, какъ выполнимое при всякомъ положеніи данныхъ противолежащихъ, убѣждаетъ насъ въ существованіи какой бы ни было противолежащей точки при условіи, что всѣ предыдущія противолежащія прямыя и точки существуютъ. Оно можетъ быть разсматриваемо какъ общее геометрическое опредѣленіе противолежащихъ точекъ.

Такъ-какъ существованіе первой противолежащей прямой уже доказано въ предыдущей статьѣ и такъ-какъ сама данная точка g есть предшествующая этой прямой противолежащая точка (нулевая), то сказаннаго въ настоящемъ параграфѣ достаточно, чтобы убѣдиться, что всѣ противолежащія прямыя и точки существуютъ при всякомъ положеніи точки g на коническомъ сѣченіи S.

Въ виду указанной выше цѣли настоящей статьи намъ предстоитъ рѣшить вопросъ: какимъ образомъ перемѣщается каждая изъ противолежащихъ точекъ и прямыхъ, когда данная точка g перемѣщается по коническому сѣченію S?

§ 3.

Обратимся опять къ разсмотрѣнію какой-нибудь противолежащей точки μ и двухъ смежныхъ съ нею противолежащихъ прямыхъ $m_1 m_2$ и $n_1 n_2$ (фиг. 6-я).

Коническое сѣченіе S и совокупность двухъ прямыхъ $m_1 m_2$ и $n_1 n_2$ имѣютъ общій полярный треугольникъ $p\rho q$, который будетъ таковымъ же и для совокупности двухъ прямыхъ μn_1 и μn_2 (случайныхъ), какъ для коническаго сѣченія, принадлежащаго тому-же пучку. Но послѣднія двѣ прямыя должны быть касательными къ T, а потому прямыя μp и μq, дѣлящія ихъ гармонически, должны быть сопряженными относительно T.

Отсюда слѣдуетъ, что, построивъ поляру точки μ относительно T и назвавъ буквами r и s точки ея пересѣченія съ прямыми μq и μp, будемъ имѣть, что r есть полюсъ прямой μp

относительно T. Такъ-какъ въ то-же время μr есть поляра точки p относительно S, то заключаемъ, что точки p и r суть сопряженныя между собою относительно каждаго изъ коническихъ сѣченій S и T, а слѣдовательно и относительно всѣхъ коническихъ сѣченій пучка (ST). Прямая rs будетъ поэтому полярою точки p относительно нѣкотораго коническаго сѣченія V, принадлежащаго пучку (ST).

Назовемъ буквами e и f точки пересѣченія прямой rs съ прямыми m_1p и n_1p и пусть ε будетъ точка, въ которой поляра точки e относительно T встрѣчаетъ прямую m_1p. Такъ какъ поляра точки e относительно совокупности прямыхъ μn_1 и μn_2 есть та-же, что и относительно T, а поляра той-же точки относительно совокупности прямыхъ m_1p и n_1p есть прямая m_1p, то точка ε пересѣченія этихъ поляръ есть сопряженная съ e относительно каждой изъ этихъ двухъ совокупностей, а съ тѣмъ вмѣстѣ и относительно коническаго сѣченія S, принадлежащаго съ ними къ одному и тому-же пучку. Слѣдовательно, точки e и ε, будучи сопряженными между собою относительно T и S, должны быть таковыми же относительно всѣхъ прочихъ кривыхъ пучка (ST), а въ томъ числѣ и коническаго сѣченія V.

Точка ε, очевидно, не можетъ совпадать съ p, потому что въ противномъ случаѣ точки e и r имѣли бы по отношенію къ T одну и ту-же поляру μp, что возможно только тогда, когда T есть совокупность двухъ прямыхъ.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что коническое сѣченіе V, принадлежащее пучку (ST) и имѣющее прямую rs полярою точки p, проходитъ чрезъ e и касается въ этой точкѣ прямой m_1p. Въ самомъ дѣлѣ, поляра точки e относительно V должна проходить чрезъ точки p и ε, различныя между собою и сопряженныя съ e относительно этой кривой; слѣдовательно, эта поляра есть прямая m_1p и, такъ-какъ она проходитъ чрезъ свой полюсъ e, то должна касаться V въ этой точкѣ.

Точно также легко убѣдиться, что прямая n_1p касается коническаго сѣченія V въ точкѣ f. Мы приходимъ такимъ образомъ къ слѣдующему заключенію.

Поляра всякой противолежащей точки относительно коническаго сѣченія T встрѣчаетъ двѣ смежныя съ нею противолежащія прямыя въ точкахъ, въ которыхъ обѣ эти прямыя касаются одного и того-же коническаго сѣченія пучка (ST).

Если мы будемъ разсматривать какую нибудь противолежащую прямую и двѣ смежныя съ нею противолежащія точки, и приложимъ къ нимъ разсужденія аналогичныя съ предыдущими и составляющія, собственно говоря, преобразованіе вышеизложеннаго по принципу двойственности или методу взаимныхъ поляръ, то получимъ въ результатѣ слѣдующій, подобный предыдущему, выводъ.

Прямыя, соединяющія полюсъ какой нибудь противолежащей прямой относительно S съ двумя смежными съ нею противолежащими точками, касаются въ этихъ точкахъ одного и того-же коническаго сѣченія системы $[ST]$[1].

§ 4.

Точка f, находящаяся при пересѣченіи прямыхъ rs и n_1p, имѣетъ полярою относительно T прямую $\mu\rho$, соединяющую полюсы μ и ρ этихъ прямыхъ (фиг. 6-я). Такъ какъ на этой же прямой $\mu\rho$ должна лежать, какъ мы видѣли, и точка ν, другая противолежащая точка смежная съ противолежащей прямой n_1p, то поляра точки ν относительно T должна также проходить черезъ f. Противолежащая прямая n_1p пересѣкается, слѣдователь-

[1] Системою $[ST]$ мы будемъ называть, какъ и въ предыдущей статьѣ, систему взаимную съ пучкомъ, т. е. состоящую изъ коническихъ сѣченій, имѣющихъ съ S и T общія касательныя.

но, полярами обѣихъ смежныхъ съ нею противолежащихъ точекъ μ и ν относительно T въ одной и той же точкѣ f. Изъ этого заключаемъ, на основаніи перваго изъ предложеній предыдущаго параграфа, что, какъ обѣ противолежащія прямыя смежныя съ точкою μ, такъ и обѣ противолежащія прямыя смежныя съ слѣдующею противолежащею точкой ν касаются одного и того же коническаго сѣченія V пучка (ST).

Имѣя въ виду, что сказанное относится къ какимъ бы то ни было послѣдовательнымъ противолежащимъ прямымъ, мы убѣждаемся, что *всѣ противолежащія прямыя какой либо точки g коническаго сѣченія S относительно коническаго сѣченія T суть касательныя къ одному и тому же коническому сѣченію V пучка (ST).*

Это коническое сѣченіе V опредѣляется, какъ мы видѣли въ предыдущей статьѣ, принадлежащею ему точкою h, сопряженною съ g относительно всѣхъ кривыхъ пучка (ST).

Разсужденія взаимныя съ предыдущими и опирающіяся на второе предложеніе предыдущаго параграфа, должны, очевидно, привести къ подобному же заключенію относительно противолежащихъ точекъ; именно:

Всѣ противолежащія точки какой либо точки g коническаго сѣченія S относительно T лежатъ на одномъ и томъ же коническомъ сѣченіи системы $[ST]$.

Это коническое сѣченіе, которое будемъ обозначать черезъ W, проходитъ, очевидно, черезъ g (какъ одну изъ противолежащихъ точекъ) и опредѣляется вполнѣ касающеюся его прямою, сопряженною относительно всѣхъ коническихъ сѣченій системы $[ST]$ съ касательною къ S въ точкѣ g.

Назовемъ чрезъ W' взаимную поляру коническаго сѣченія W относительно T. Поляры послѣдовательныхъ противолежащихъ точекъ относительно T, будучи касательными къ W', пересѣкаются, какъ показано выше, въ точкахъ прикосновенія коническаго сѣченія V съ противолежащими прямыми. Слѣдовательно, эти поляры составляютъ ломаную линію, вписанную въ коническое сѣченіе V и описанную около W'. Касательныя къ V въ вершинахъ угловъ этой ломаной суть противолежащія прямыя, а полюсы сторонъ ея относительно T — противолежащія точки. Такимъ образомъ получается другой способъ построенія противолежащихъ точекъ и прямыхъ для данной точки g коническаго сѣченія S.

Если назовемъ черезъ V' взаимную поляру коническаго сѣченія V относительно S, то, замѣчая, что полюсы двухъ послѣдовательныхъ противолежащихъ прямыхъ относительно S лежатъ на прямой, проходящей чрезъ промежуточную противолежащую точку и касающейся въ ней къ W, убѣждаемся, что всѣ эти полюсы суть вершины угловъ другой ломаной линіи, вписанной въ V' и описанной около W. Этою ломаною можно также пользоваться для построенія противолежащихъ, такъ какъ точки прикосновенія ея сторонъ съ коническимъ сѣченіемъ W суть противолежащія точки, а поляры ея вершинъ относительно S—противолежащія прямыя.

§ 5.

Задача. *Даны два коническія сѣченія S и T; предполагая, что извѣстна нѣкоторая противолежащая точка μ, найдти обѣ смежныя съ нею противолежащія прямыя.*

На основаніи сказаннаго выше (§ 3), для рѣшенія этой задачи нужно только найдти точку p пересѣченія искомыхъ противолежащихъ прямыхъ (фиг. 6-я), ибо когда эта точка найдена, то вопросъ сводится на построеніе проходящихъ чрезъ нее касательныхъ къ вполнѣ опредѣленному коническому сѣченію V, относительно котораго поляра точки p есть та же прямая ef, какъ и поляра данной точки μ относительно T.

Точка p находится при пересѣченіи поляры pq данной точки μ относительно S съ прямою μp, которая есть одна изъ двухъ прямыхъ, проходящихъ чрезъ μ и сопряженныхъ между собою относительно S и T, а слѣдовательно и относительно всѣхъ коническихъ сѣченій системы $[ST]$. Другая изъ этихъ прямыхъ есть μq, на которой лежатъ полюсы q и r первой относительно S и T.

Отсюда слѣдуетъ, что предложенная задача имѣетъ два рѣшенія, которыя получаются слѣдующимъ построеніемъ.

Сперва чрезъ данную точку μ проводимъ двѣ прямыя сопряженныя между собою относительно обоихъ коническихъ сѣченій S и T и находимъ точки p и q пересѣченія этихъ прямыхъ съ полярою данной точки μ относительно S. Построивъ затѣмъ поляру ef точки μ относительно T, мы опредѣлимъ два коническія сѣченія пучка (ST), изъ которыхъ одно имѣетъ полюсомъ этой прямой точку p, а другое — точку q. Касательныя изъ p къ первому изъ этихъ коническихъ сѣченій будутъ представлять одно рѣшеніе задачи, а касательныя изъ q ко второму — другое.

Такимъ образомъ мы видимъ, что произвольно взятой противолежащей точкѣ μ соотвѣтствуютъ по отношенію къ кривымъ S и T двѣ пары смежныхъ противолежащихъ прямыхъ, которыя при томъ же суть случайныя, т. е. могущія при нѣкоторыхъ положеніяхъ данной точки μ вовсе не существовать. Если же, однако, одна изъ двухъ смежныхъ съ μ противолежащихъ прямыхъ извѣстна напередъ и требуется найдти другую, то во первыхъ эта послѣдняя непремѣнно существуетъ, а во вторыхъ другое рѣшеніе разсматриваемой задачи совершенно устраняется, какъ не относящееся непосредственно къ вопросу.

Задача. *Даны два коническія сѣченія S и T; предполагая, что извѣстна нѣкоторая противолежащая прямая, найдти обѣ смежныя съ нею противолежащія точки.*

Будучи взаимною съ предыдущей, задача эта имѣетъ также два рѣшенія, которыя на такихъ же основаніяхъ, какъ указанныя выше, получаются слѣдующимъ построеніемъ (та же фиг.).

Сперва находимъ на данной прямой n_1p двѣ точки φ и f, сопряженныя между собою относительно обоихъ коническихъ сѣченій S и T, и соединяемъ ихъ прямыми съ полюсомъ ρ данной прямой относительно T. Найдя затѣмъ полюсъ той же прямой относительно S, мы опредѣлимъ два коническія сѣченія системы $[ST]$, изъ которыхъ одно будетъ имѣть эту точку полюсомъ прямой $\varphi\rho$, а другое — полюсомъ прямой $f\rho$. Точки μ и ν пересѣченія перваго изъ этихъ коническихъ сѣченій съ прямою $\varphi\rho$ представятъ одно рѣшеніе предложенной задачи; точки же пересѣченія втораго съ прямою $f\rho$ — другое.

Замѣчаніе, сдѣланное выше о рѣшеніяхъ предыдущей задачи, примѣняется, очевидно, соотвѣтственнымъ образомъ и къ настоящей.

§ 6.

Приступаемъ теперь къ вопросу, поставленному въ концѣ 2-го параграфа. Отвѣтъ на этотъ вопросъ, данный нами въ предыдущей статьѣ лишь для первой противолежащей прямой, во всей своей общности выражается слѣдующимъ предложеніемъ.

При перемѣщеніи точки g по коническому сѣченію S каждая ея противолежащая прямая относительно коническаго сѣченія T огибаетъ коническое сѣченіе, принадлежащее пучку (ST), а каждая противолежащая точка перемѣщается по коническому сѣченію, принадлежащему системѣ $[ST]$.

Для того, чтобы убѣдиться въ полной справедливости этого предложенія нужно только доказать его для какой нибудь противолежащей прямой въ предположеніи, что оно справедливо для предыдущихъ противолежащихъ точки и прямой, а также для какой нибудь противолежащей точки въ предположеніи, что оно имѣетъ мѣсто для предыдущихъ противолежащихъ прямой и точки. Въ самомъ дѣлѣ, справедливость предложенія для первой противолежащей прямой нами уже доказана, а для предшествующей ей противолежащей точки, которая есть сама точка g, она очевидна сама собою. Слѣдовательно, такое доказательство, какъ указанное, позволяетъ намъ прежде всего заключить, что предложеніе справедливо для первой противолежащей точки, затѣмъ для второй противолежащей прямой, затѣмъ для второй противолежащей точки, и т. д.

Кромѣ того, изъ двухъ частей указаннаго сейчасъ плана доказательства, очевидно, достаточно привести только одну, относящуюся, напримѣръ, къ перемѣщенію противолежащей прямой. Обѣ эти части, будучи взаимными, представляютъ въ сущности два ряда равнозначущихъ доводовъ, вслѣдствіе чего при полной убѣдительности одной изъ нихъ не можетъ быть сомнѣнія въ справедливости доказываемаго другою.

И такъ, положимъ, что намъ извѣстно, что какая нибудь противолежащая точка μ, при перемѣщеніи точки g по S, перемѣщается по нѣкоторому коническому сѣченію системы $[ST]$ и что въ то же время предшествующая ей противолежащая прямая перемѣщается, огибая коническое сѣченіе пучка (ST). Постараемся убѣдиться, что и слѣдующая, т. е. другая смежная съ точкою μ, противолежащая прямая огибаетъ коническое сѣченіе пучка (ST).

Пусть C будетъ коническое сѣченіе, описываемое точкой μ, и D его взаимная поляра относительно T. Коническія сѣченія S, T, C, D, какъ слѣдуетъ изъ сказаннаго въ § 5 предыдущей статьи, имѣютъ общій полярный треугольникъ, а потому, какъ показано въ § 6 той же статьи, въ пучкѣ (ST) можно найдти два такія коническія сѣченія X и Y, что взаимныя поляры E и F кривой D относительно этихъ коническихъ сѣченій будутъ принадлежать также пучку (ST). Вообще говоря, коническія сѣченія E и F суть случайныя, могущія не существовать, но мы увидимъ вскорѣ, что сдѣланное выше предположеніе требуетъ существованія одного изъ нихъ и тѣмъ обусловливаетъ существованіе другаго.

Между точками кривыхъ C, E и F имѣетъ мѣсто проективное соотвѣтствіе, такъ какъ онѣ суть полюсы относительно T, X и Y касательныхъ къ одному и тому же коническому сѣченію D.

Вообразимъ точку μ въ какомъ нибудь опредѣленномъ положеніи на коническомъ сѣченіи C (фиг. 7-я) и пусть ε и φ будутъ соотвѣтственныя ей точки кривыхъ E и F, а r точка прикосновенія къ D ихъ общей поляры ef относительно X и Y. Назовемъ далѣе черезъ p точку пересѣченія касательныхъ въ ε и φ къ коническимъ сѣченіямъ E и F и постараемся доказать, что эти двѣ касательныя суть двѣ противолежащія прямыя смежныя съ противолежащей точкой μ.

Для этого, основываясь на сказанномъ въ параграфахъ 5-мъ и 3-мъ, нужно во первыхъ показать, что точка p находится при пересѣченіи поляры точки μ относительно S съ одною изъ двухъ прямыхъ, проходящихъ чрезъ μ и сопряженныхъ между собою относительно всѣхъ коническихъ сѣченій системы [ST]. Во вторыхъ же нужно убѣдиться, что касательныя къ E и F въ точкахъ ε и φ суть въ то-же время касательныя изъ точки p къ коническому сѣченію, принадлежащему пучку (ST) и имѣющему полярою точки p прямую ef, т. е. поляру точки μ относительно T. Слѣдующія разсужденія выяснятъ оба эти пункта въ отдѣльности.

§ 7.

1) Касательныя въ точкахъ μ, ε и φ къ коническимъ сѣченіямъ C, E и F суть поляры одной и той же точки r относительно трехъ коническихъ сѣченій T, X и Y, принадлежа-

щихъ пучку (ST); вслѣдствіе этого онѣ должны проходить чрезъ одну и ту же точку p, сопряженную съ r относительно всѣхъ кривыхъ этого пучка. Такъ какъ μ и r суть полюсы прямой μp относительно двухъ коническихъ сѣченій C и T системы $[ST]$, то на прямой μr находятся полюсы прямой μp относительно всѣхъ коническихъ сѣченій этой системы. Другими словами, прямыя μp и μr суть сопряженныя между собою относительно всѣхъ коническихъ сѣченій системы $[ST]$.

Полюсъ прямой μp относительно S есть нѣкоторая точка q, лежащая на прямой μr и не совпадающая съ r, полюсомъ той же прямой относительно T. Отсюда заключаемъ, что поляра точки p относительно S, должна проходить черезъ точку q сопряженную съ нею относительно S и чрезъ точку r сопряженную съ нею относительно всѣхъ коническихъ сѣченій пучка (ST). Слѣдовательно, эта поляра есть прямая qr, проходящая чрезъ μ; а это показываетъ, что и поляра точки μ относительно S проходитъ чрезъ p.

И такъ, дѣйствительно, точка p находится при пересѣченіи поляры точки μ относительно S съ одною изъ двухъ прямыхъ, проходящихъ чрезъ μ и сопряженныхъ между собою относительно всѣхъ коническихъ сѣченій системы $[ST]$.

2) Поляра точки μ относительно T, будучи касательною въ точкѣ r къ коническому сѣченію D, имѣетъ своими полюсами относительно X и Y точки ε и φ. Вслѣдствіе этого, назвавъ чрезъ e и f точки пересѣченія этой поляры съ касательными въ ε и φ къ кривымъ E и F, будемъ имѣть, что точки e и ε суть сопряженныя между собою относительно коническихъ сѣченій X и E, а точки f и φ — относительно коническихъ сѣченій Y и F. Слѣдовательно, это суть двѣ пары точекъ сопряженныхъ относительно всѣхъ коническихъ сѣченій пучка (ST).

Такъ какъ мы уже видѣли, что r и p суть также двѣ точки сопряженныя относительно всѣхъ кривыхъ пучка (ST), то въ этомъ пучкѣ должно существовать такое коническое сѣченіе V, для котораго ef есть поляра точки p. Поляра точки e относительно V должна проходить чрезъ p, какъ сопряженную съ нею относительно этого коническаго сѣченія, и чрезъ ε, какъ сопряженную съ нею относительно всѣхъ кривыхъ пучка (ST). Слѣдовательно, эта поляра есть касательная къ V въ точкѣ e. Точно также убѣждаемся, что прямая fp касается V въ точкѣ f.

И такъ, дѣйствительно, прямыя $p\varepsilon$ и $p\varphi$ суть двѣ касательныя изъ точки p къ коническому сѣченію, принадлежащему пучку (ST) и имѣющему полярою точки p поляру точки μ относительно T.

Все сказанное относилось къ совершенно произвольному положенію точки μ на коническомъ сѣченіи C, и такъ какъ два коническія сѣченія E и F вполнѣ опредѣляются кривыми S, T и C и не зависятъ отъ положенія точки μ на C, то убѣждаемся, что при перемѣщеніи μ въ какое нибудь другое положеніе на коническомъ сѣченіи C обѣ смежныя съ нею противолежащія прямыя должны оставаться касательными къ тѣмъ же самымъ коническимъ сѣченіямъ E и F.

Предположеніе, что противолежащая прямая, предшествующая точкѣ μ, огибаетъ коническое сѣченіе пучка (ST), позволяетъ намъ заключить, что одно изъ двухъ коническихъ сѣченій E и F, именно, огибаемое предшествующей точкѣ μ противолежащей прямой, непремѣнно существуетъ. Слѣдовательно, и послѣдующая за точкой μ противолежащая прямая огибаетъ также непремѣнно существующее коническое сѣченіе пучка (ST). Въ этомъ именно намъ и нужно было убѣдиться.

§ 8.

Когда точка g находится внѣ коническаго сѣченія T, то ея n-ая противолежащая прямая есть сторона $(2n+1)$-угольника, вписаннаго въ S и имѣющаго всѣ стороны, кромѣ одной, касательными къ T, а n-ая противолежащая точка есть вершина $(2n+2)$-угольника, описаннаго около T и имѣющаго всѣ вершины, кромѣ одной, на коническомъ сѣченіи S.

Слѣдовательно, доказанное нами предложеніе, включая въ себѣ заразъ оба взаимныя предложенія о многоугольникахъ Понселе, приведенныя нами во 2-мъ параграфѣ предыдущей статьи, имѣетъ въ то же время тотъ недостатокъ, что представляетъ обобщеніе перваго изъ нихъ лишь для случая многоугольника съ нечетнымъ, а втораго — лишь для случая многоугольника съ четнымъ числомъ сторонъ. Этотъ недостатокъ не трудно, однако, восполнить, пользуясь слѣдующими соображеніями.

Мы говорили до сихъ поръ о прямыхъ и точкахъ противолежащихъ нѣкоторой точкѣ g, находящейся на коническомъ сѣченіи S, которая и была, такъ сказать, началомъ или исходнымъ пунктомъ всѣхъ построеній, къ которымъ относились наши разсужденія. Возьмемъ теперь для той же цѣли какую нибудь прямую G, касающуюся коническаго сѣченія T (фиг. 8-ая).

Допустимъ, что эта прямая пересѣкаетъ S въ двухъ точкахъ α_1 и α_2. Проведя чрезъ эти двѣ точки вторыя касательныя къ T и назвавъ ихъ точку пересѣченія буквою a, получимъ треугольникъ $\alpha_1 a \alpha_2$, описанный около T и имѣющій всѣ вершины, кромѣ одной, на коническомъ сѣчаніи S. Точка a есть, слѣдовательно, вершина этого треугольника, противолежащая сторонѣ G. Ее можно, по примѣру предыдущаго, назвать *точкою, противолежащею касательной G коническаго сѣченія T относительно коническаго сѣченія S.*

Прямая $\alpha_1 a$ и $\alpha_2 a$ встрѣчаютъ коническое сѣченіе S вторично въ нѣкоторыхъ точкахъ β_1 и β_2. Соединивъ эти точки прямою, получимъ четыреугольникъ $\alpha_1\beta_1\beta_2\alpha_2$, вписанный въ S и имѣющій всѣ стороны, кромѣ одной $\beta_1\beta_2$, противолежащей сторонѣ G, касательными къ T. Будемъ называть эту сторону $\beta_1\beta_2$ *прямою, противолежащею касательной G относительно S.*

Проведя чрезъ точки β_1 и β_2 вторыя касательныя къ T и назвавъ ихъ точку пересѣченія буквою b, будемъ имѣть пятиугольникъ $\alpha_1\beta_1 b\beta_2\alpha_2$, описанный около T и имѣющій всѣ вершины, кромѣ одной b, на коническомъ сѣченіи S. Вершину b, противолежащую сторонѣ G, будемъ называть *второю противолежащею точкой касательной* G.

Затѣмъ получимъ *вторую противолежащую прямую* касательной G и т. д.

Вообще мы будемъ имѣть для прямой G, также какъ въ 1-мъ параграфѣ для точки g, безпредѣльный рядъ противолежащихъ точекъ и прямыхъ, чередующихся между собою.

Фигура, состоящая изъ двухъ коническихъ сѣченій S и T, касательной G ко второму и всѣхъ ея противолежащихъ точекъ и прямыхъ относительно перваго, очевидно, есть взаимныя съ фигурой, состоящей изъ тѣхъ же коническихъ сѣченій S и T, точки g, принадлежащей первому, и всѣхъ ея противолежащихъ прямыхъ и точекъ относительно втораго.

Такъ какъ все сказанное выше, какъ въ предыдущей, такъ и въ настоящей статьяхъ, относясь ко второй изъ этихъ фигуръ, основывалось лишь на извѣстныхъ *дескриптивныхъ* свойствахъ, то наши предыдущія разсужденія примѣнимы и къ первой фигурѣ съ извѣстными, конечно, видоизмѣненіями (замѣною точекъ прямыми и обратно). Въ виду этого не можетъ быть сомнѣнія, во первыхъ, относительно существованія всѣхъ противолежащихъ точекъ и прямыхъ данной касательной G, независимо отъ существованія точекъ ея пересѣченія съ коническимъ сѣченіемъ S, а во вторыхъ, относительно справедливости слѣдующаго предложенія, представляющагося также взаимнымъ съ предложеніемъ, доказаннымъ выше.

При перемѣщеніи касательной G къ коническому сѣченію T каждая ея противолежащая точка относительно коническаго сѣченія S перемѣщается по коническому сѣче-

нію, принадлежащему системѣ [ST], а каждая противолежащая прямая огибаетъ коническое сѣченіе, принадлежащее пучку (ST).

Это предложеніе и восполняетъ упомянутый выше недостатокъ предыдущаго, такъ-какъ оно включаетъ въ себѣ первое изъ предложеній о многоугольникахъ Понселе для случая многоугольника съ четнымъ числомъ сторонъ и второе для случая многоугольника съ нечетнымъ числомъ сторонъ.

Такимъ образомъ предложенія о многоугольникахъ Понселе доказаны нами вполнѣ и притомъ въ обобщеніи, смыслъ и характеръ котораго былъ нами указанъ въ концѣ 3-го параграфа предыдущей статьи.

§ 9.

Намъ остается доказать тѣ-же предложенія для случая, когда коническія сѣченія S и T соприкасаются между собою въ двухъ точкахъ.

Въ этомъ случаѣ для коническихъ сѣченій S и T существуетъ безчисленное множество общихъ полярныхъ треугольниковъ, изъ которыхъ каждый имѣетъ одною изъ сторонъ хорду соприкосновенія (дѣйствительную или идеальную) и одною изъ вершинъ полюсъ этой хорды[1]. Кромѣ того нужно замѣтить, что въ этомъ случаѣ исчезаетъ различіе между пучкомъ (ST) и системой [ST].

Мы будемъ основывать наше доказательство на разсмотрѣніи гомологическихъ фигуръ, т. е. фигуръ, находящихся въ такомъ проективномъ или коллинеарномъ между собою соотвѣтствіи, въ которомъ каждыя двѣ соотвѣтственныя (гомологическія) точки лежатъ на одной прямой съ нѣкоторою постоянною точкой, называемой центромъ гомологіи, и каждыя двѣ соотвѣтственныя

[1] Это обстоятельство и есть та причина, по которой къ настоящему частному случаю не примѣнимо изложенное въ предыдущемъ общее доказательство (см. §§ 5 и 6 предыд. статьи).

(гомологическія) прямыя пересѣкаются въ одной точкѣ съ нѣкоторою постоянною прямою, называемой осью гомологіи. Такое соотвѣтствіе устанавливается, какъ извѣстно, вполнѣ, когда даны центръ и ось гомологіи и одна какая нибудь пара соотвѣтственныхъ точекъ или соотвѣтственныхъ прямыхъ.

Назовемъ чрезъ L хорду прикосновенія коническихъ сѣченій S и T, а чрезъ l полюсъ этой прямой относительно всѣхъ коническихъ сѣченій пучка (ST) (фиг. 9-я). Пусть g_1 и g_2 будутъ два различныя положенія точки g на коническомъ сѣченіи S. Точка p пересѣченія прямыхъ $g_1 g_2$ и L будетъ имѣть общею полярою относительно всѣхъ кривыхъ пучка (ST) нѣкоторую прямую P, проходящую чрезъ l.

Примемъ точку p и прямую P за центръ и ось гомологіи и пусть g_1 и g_2 будутъ соотвѣтственныя точки. Этими условіями соотвѣтствіе устанавливается вполнѣ и всякой произвольной точкѣ a_1 будетъ соотвѣтствовать опредѣленная точка a_2, находящаяся при пересѣченіи прямой pa_1 съ прямою, соединяющею точку g_2 съ точкою встрѣчи прямыхъ $g_1 a_1$ и P.

Такъ-какъ точки g_1 и g_2 раздѣляются гармонически центромъ p и осью P гомологіи, то то-же самое должно быть и для точекъ a_1 и a_2. Это показываетъ, что каждыя двѣ соотвѣтственныя точки находятся на одномъ и томъ-же коническомъ сѣченіи пучка (ST), откуда слѣдуетъ, что и каждыя двѣ соотвѣтственныя прямыя суть касательныя къ одному и тому-же коническому сѣченію пучка (ST). Вообще всѣмъ точкамъ и касательнымъ какого нибудь коническаго сѣченія пучка (ST) должны соотвѣтствовать точки и касательныя того-же коническаго сѣченія.

Положимъ теперь, что M_1 и M_2 суть n-ыя противолежащія прямыя точекъ g_1 и g_2. Построеніе, которымъ онѣ находятся по этимъ точкамъ, нами уже показано выше, и въ разсматриваемомъ теперь частномъ расположеніи коническихъ сѣченій S и T есть то-же самое какъ и въ общемъ.

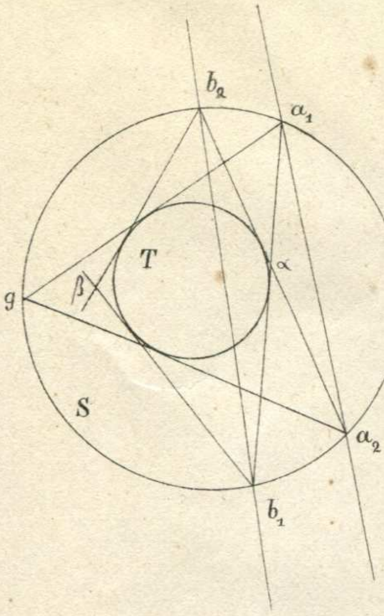
Такъ-какъ точка g_1 и оба коническія сѣченія S и T составляютъ фигуру, для которой гомологическая состоитъ изъ точки g_2 и тѣхъ-же самыхъ коническихъ сѣченій, то и всѣ составныя части построенія по точкѣ g_1 прямой M_1 съ одной стороны и по точкѣ g_2 прямой M_2 съ другой должны представлять также двѣ гомологическія фигуры. Отсюда слѣдуетъ, что и результаты этихъ обоихъ построеній, т. е. прямыя M_1 и M_2, должны быть также гомологическими, а это значитъ, на основаніи вышесказаннаго, что онѣ должны касаться одного и того-же коническаго сѣченія пучка (ST).

Тѣ-же самые доводы убѣждаютъ насъ, что двѣ n-ыя противолежащія точки μ_1 и μ_2 точекъ g_1 и g_2 должны быть точками гомологическими и, вслѣдствіе этого, лежать на одномъ и томъ-же коническомъ сѣченіи пучка (ST).

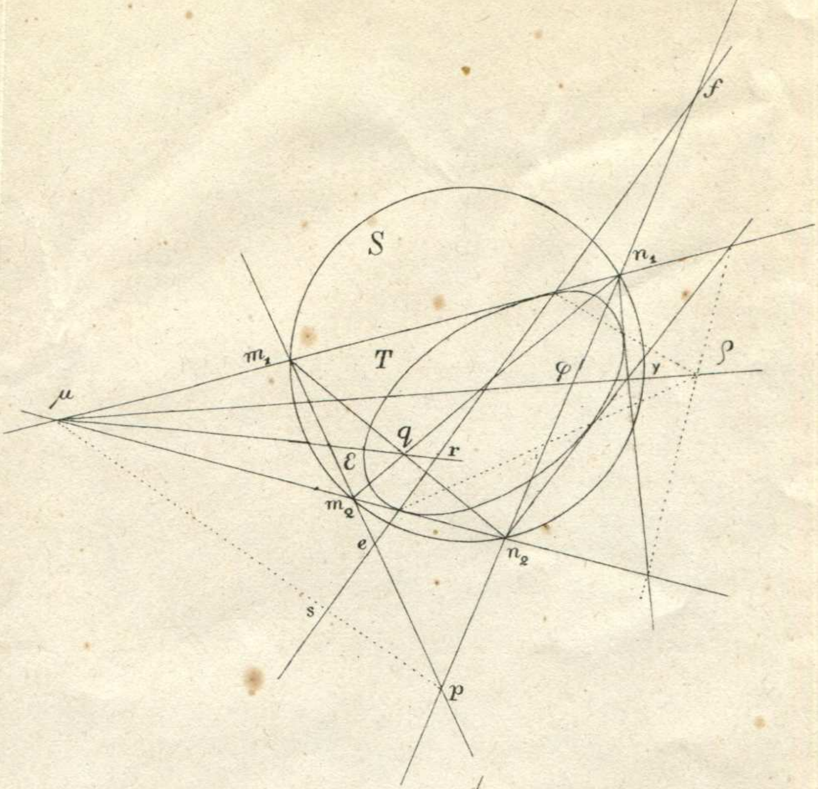
Принимая во вниманіе, что точки g_1 и g_2 были взяты на S совершенно произвольно и что точкою μ_1 опредѣляется вполнѣ единственное проходящее чрезъ эту точку коническое сѣченіе пучка (ST), а прямою M_1 также единственное коническое сѣченіе, касающееся ея и принадлежащее тому-же пучку, мы можемъ видѣть въ сказанномъ полное доказательство справедливости предложенія параграфа 6-го.

Взаимное съ нимъ предложеніе параграфа 8-го должно быть справедливо въ силу закона двойственности и можетъ быть доказано такими-же какъ и предыдущія разсужденія, а именно при помощи гомологическаго соотвѣтствія, которое устанавливаемъ, принимая двѣ данныя касательныя G_1 и G_2 къ коническому сѣченію T за прямыя соотвѣтственныя, прямую, соединяющую точку пересѣченія этихъ касательныхъ съ точкою l, за ось гомологіи, а полюсъ этой послѣдней прямой относительно S и T за центръ гомологіи.

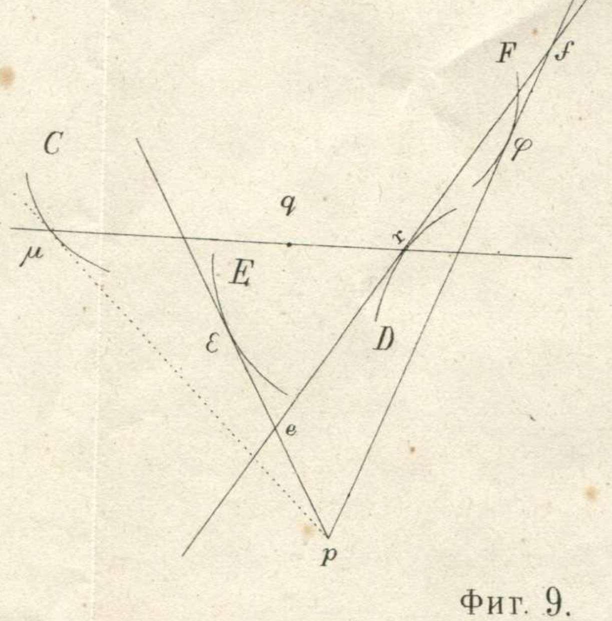
Фиг. 5.



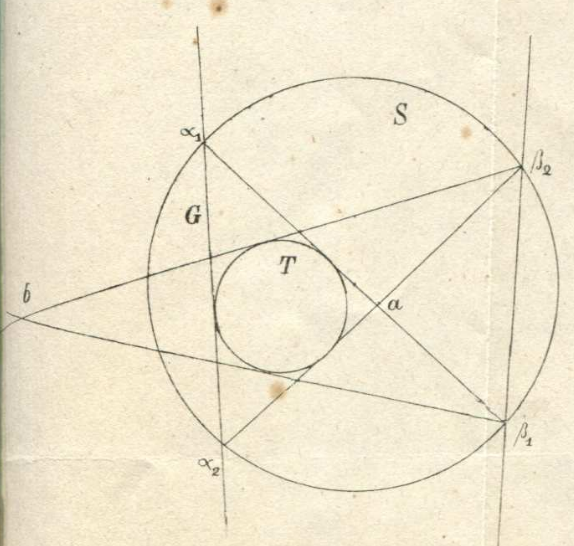
Фиг. 6.



Фиг. 7.



Фиг. 8.



Фиг. 9.