III.

Нѣсколько словъ

по поводу теоремъ П. Л. Чебышева и В. Г. Имшенецкаго объ опредѣленныхъ интегралахъ отъ произведенія функцій.

К. А. Андреева.

---

§ 1.

Теорема П. Л. Чебышева, о которой мы будемъ говорить, можетъ быть формулирована слѣдующимъ образомъ.

Если $f(x)$ и $\psi(x)$ суть такія двѣ функціи, изъ которыхъ каждая постоянно возрастаетъ или постоянно уменьшается при измѣненіи перемѣннаго x отъ 0 до 1, то разность

$$\int_0^1 f(x)\psi(x)dx - \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 \psi(x)dx$$

имѣетъ всегда такой же знакъ, какъ произведеніе производныхъ $f'(x)$ и $\psi'(x)$ этихъ функцій.

Эта теорема доказана весьма просто и изящно А. Н. Коркинымъ, пріемъ котораго состоитъ въ установленіи весьма простаго тождественнаго соотношенія между конечными суммами и въ переходѣ отъ этихъ суммъ къ опредѣленнымъ интеграламъ какъ ихъ предѣламъ [1].

---

[1] Comptes rendus. T. XCVI, № 5, p. 326.

Пользуясь тѣмъ-же самымъ пріемомъ, В. Г. Имшенецкій доказалъ другое предложеніе, которое должно быть поставлено, такъ сказать, въ параллель съ теоремою П. Л. Чебышева, какъ относящееся къ тому-же роду вопросовъ, но тѣмъ не менѣе отъ нея независящее. Это послѣднее предложеніе состоитъ въ слѣдующемъ[1].

Разность

$$\int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b \psi^2(x)\,dx - \left[\int_a^b f(x)\,dx \int_a^b \psi(x)\,dx\right]^2$$

гдѣ a и b суть какія угодно дѣйствительные предѣлы интеграціи, есть величина положительная.

Не трудно вывести пріемомъ нѣсколько отличнымъ отъ упомянутаго, но столь же простымъ и основывающимся лишь на простѣйшихъ свойствахъ опредѣленныхъ интеграловъ, такое тождественное соотношеніе, изъ котораго названныя двѣ теоремы получаются какъ частные случаи.

Пусть $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ будутъ четыре какія нибудь функціи. Перемноживши разности

$$f_1(x)\psi_1(y) - f_1(y)\psi_1(x) \text{ и } f_2(x)\psi_2(y) - f_2(y)\psi_2(x),$$

гдѣ x и y суть независимыя между собою перемѣнныя, будемъ имѣть тождество

$$\begin{aligned}
&f_1(x)f_2(x)\psi_1(y)\psi_2(y) + f_1(y)f_2(y)\psi_1(x)\psi_2(x) - \\
&- f_1(x)\psi_2(x)f_2(y)\psi_1(y) - f_1(y)\psi_2(y)f_2(x)\psi_1(x) = \\
&= [f_1(x)\psi_1(y) - f_1(y)\psi_1(x)][f_2(x)\psi_2(y) - f_2(y)\psi_2(x)]
\end{aligned}$$

Помноживши обѣ части этого тождества на $dx\,dy$ и взявши двойной интегралъ между тѣми же постоянными предѣлами a и b по обоимъ перемѣннымъ, получимъ

[1] См. предыдущую статью, стр. 101 — 102.

$$\int_a^b f_1(x)f_2(x)\,dx\int_a^b \psi_1(y)\psi_2(y)\,dy+$$
$$+\int_a^b f_1(y)f_2(y)\,dy\int_a^b \psi_1(x)\psi_2(x)\,dx-$$
$$-\int_a^b f_1(x)\psi_2(x)\,dx\int_a^b f_2(y)\psi_1(y)\,dy-$$
$$-\int_a^b f_1(y)\psi_2(y)\,dy\int_a^b f_2(x)\psi_1(x)\,dx=$$
$$=\int_a^b\int_a^b\Big[f_1(x)\psi_1(y)-f_1(y)\psi_1(x)\Big]\Big[f_2(x)\psi_2(y)-$$
$$-f_2(y)\psi_2(x)\Big]\,dx\,dy,$$

откуда находимъ

$$\left.\begin{aligned}&\int_a^b f_1(x)f_2(x)\,dx\int_a^b \psi_1(x)\psi_2(x)\,dx-\\&-\int_a^b f_1(x)\psi_2(x)\,dx\int_a^b f_2(x)\psi_1(x)\,dx=\\&=\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b\Big[f_1(x)\psi_1(y)-f_1(y)\psi_1(x)\Big]\Big[f_2(x)\psi_2(y)-\\&\qquad-f_2(y)\psi_2(x)\Big]\,dx\,dy\end{aligned}\right\}\text{(I)}$$

это и есть то соотношеніе, которое мы желали вывести. Очевидно, что первая часть его будетъ положительною, когда разности, находящіяся надъ знакомъ интеграла во второй части, имѣютъ для всѣхъ значеній перемѣнныхъ x и y между предѣлами интеграціи одинакіе знаки, и отрицательною въ противномъ случаѣ.

Если положимъ въ этомъ равенствѣ $f_1=f$, $f_2=\psi$, $\psi_1=\psi_2=1$, то получимъ

$$\left.\begin{aligned}&\int_a^b f(x)\psi(x)\,dx\int_a^b dx-\int_a^b f(x)\,dx\int_a^b \psi(x)\,dx=\\&=\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b\Big[f(x)-f(y)\Big]\Big[\psi(x)-\psi(y)\Big]\,dx\,dy\end{aligned}\right\}\text{(II)}$$

откуда въ предположеніи, что предѣлы интеграціи суть 0 и 1, получается теорема П. Л. Чебышева.

Если же положимъ въ равенствѣ (I) $f_1 = f_2 = f$ и $\psi_1 = \psi_2 = \psi$, то получимъ

$$\left.\begin{aligned}&\int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b \psi^2(x)\,dx - \left[\int_a^b f(x)\,dx \int_a^b \psi(x)\,dx\right]^2 = \\ &= \frac{1}{2}\int_a^b\!\!\int_a^b \Big[f(x)\psi(y) - f(y)\psi(x)\Big]^2 dx\,dy,\end{aligned}\right\}\text{(III)}$$

откуда заключаемъ о справедливости теоремы В. Г. Имшенецкаго.

Наконецъ, полагая въ равенствѣ (II) $f = \psi$ или въ равенствѣ (III) $\psi = 1$, получимъ

$$\int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b dx - \left[\int_a^b f(x)\,dx\right]^2 = \frac{1}{2}\int_a^b\!\!\int_a^b \Big[f(x) - f(y)\Big]^2 dx\,dy,$$

что даетъ вторую теорему В. Г. Имшенецкаго[1].

Внутренній смыслъ пріема употребленнаго нами для вывода равенства (I) есть въ сущности тотъ же самый какъ и въ пріемѣ А. Н. Коркина; различіе состоитъ только въ обозначеніи. Употребляя обычное обозначеніе для функцій, мы нашли возможнымъ не начинать съ конечныхъ суммъ, а прямо оперировать надъ интегралами. Что же касается заключенія о знакѣ второй части этого равенства по знаку интегрируемаго произведенія, то, по основному свойству опредѣленныхъ интеграловъ, мы можемъ его дѣлать и не прибѣгая каждый разъ къ разсмотрѣнію интеграла какъ предѣла суммы.

Замѣчая, что вторая часть равенства (I) есть двойной интегралъ отъ функціи симметричной относительно перемѣнныхъ x и y, мы можемъ представить ее слѣдующимъ образомъ:

---

[1] Ibid. p. 102.

$$\int_a^b \int_a^y \left[f_1(x)\psi_1(y) - f_1(y)\psi_1(x) \right] \left[f_2(x)\psi_2(y) - \right.$$
$$\left. - f_2(y)\psi_2(x) \right] dx\,dy$$

что, впрочемъ, не имѣетъ другаго значенія кромѣ устраненія числоваго множителя $\frac{1}{2}$.

§ 2.

Изъ равенства (I) можно получить много другихъ слѣдствій, которыя могутъ быть формулированы въ видѣ болѣе или менѣе интересныхъ предложеній. Такъ, пользуясь этимъ равенствомъ, можно во многихъ случаяхъ обнаруживать, какое измѣненіе произойдетъ въ произведеніи

$$\int_a^b F_1(x)\,dx \int_a^b F_2(x)\,dx,$$

когда мы отдѣлимъ отъ функціи F_1 одинъ изъ множителей и присоединимъ его къ функціи F_2 или обратно.

Мы дѣлали выше только тѣ предположенія относительно функцій f_1, f_2, ψ_1, ψ_2 въ равенствѣ (I), которыя приводятъ къ теоремамъ П. Л. Чебышева и В. Г. Импенецкаго. Нѣкоторыя другія предположенія могутъ дать подобныя же и даже болѣе общія теоремы. Положимъ, напр., что эти функціи суть цѣлыя степени нѣкоторыхъ двухъ функцій, именно:

$$f_1 = f^{m+h},\ f_2 = f^{m-h},\ \psi_1 = \psi^{m+h},\ \psi_2 = \psi^{m-h}$$

гдѣ m и h суть цѣлыя числа положительныя или отрицательныя. Въ такомъ случаѣ равенство (I) обратится въ

$$\int_a^b f^{2m}(x)\,dx \int_a^b \psi^{2m}(x)\,dx -$$

$$-\int_a^b f^{m+h}(x)\,\psi^{m-h}(x)\,dx \int_a^b f^{m-h}(x)\,\psi^{m+h}(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b \Big[f^{m+h}(x)\,\psi^{m+h}(y) -$$

$$- f^{m+h}(y)\,\psi^{m+h}(x)\Big]\Big[f^{m-h}(x)\,\psi^{m-h}(y) -$$

$$- f^{m-h}(y)\,\psi^{m-h}(x)\Big]\,dx\,dy.$$

Такъ-какъ цѣлыя числа $m+h$ и $m-h$ суть оба четныя или оба нечетныя, то разности

$$[f^{m+h}(x)\,\psi^{m+h}(y) - f^{m+h}(y)\,\psi^{m+h}(x)] \text{ и}$$
$$[f^{m-h}(x)\,\psi^{m-h}(y) - f^{m-h}(y)\,\psi^{m-h}(x)]$$

имѣютъ одинакіе знаки, всякій разъ какъ $m+h$ и $m-h$ имѣютъ одинакіе знаки, т. е когда $m^2-h^2>0$. Если же допустить сверхъ того, что функціи $f(x)$ и $\psi(x)$ не мѣняютъ своихъ знаковъ при измѣненіи перемѣннаго въ предѣлахъ интеграціи, то эти разности будутъ имѣть разные знаки, когда $m^2-h^2<0$. Послѣднее дополнительное условіе неизмѣняемости знака функцій имѣетъ, впрочемъ, значеніе только тогда, когда $m+h$ и $m-h$ суть числа нечетныя. Дѣйствительно, полагая, напр., что при этомъ $m+h>0$, а $m-h<0$ мы можемъ произведеніе

$$[f^{m+h}(x)\,\psi^{m+h}(y) - f^{m+h}(y)\,\psi^{m+h}(x)]\,[f^{m-h}(x)\,\psi^{m-h}(y) -$$
$$- f^{m-h}(y)\,\psi^{m-h}(x)]$$

представить въ такомъ видѣ

$$-\frac{\left\{\begin{matrix}[f^{m+h}(x)\,\psi^{m+h}(y) - f^{m+h}(y)\,\psi^{m+h}(x)]\,[f^{h-m}(x)\,\psi^{h-m}(y) - \\ - f^{h-m}(y)\,\psi^{h-m}(x)]\end{matrix}\right\}}{f^{h-m}(x)\,f^{h-m}(y)\,\psi^{h-m}(x)\,\psi^{h-m}(y)};$$

отсюда и видно, что эта величина будетъ непремѣнно отрицательная, когда $f^{h-m}(x)$ и $f^{h-m}(y)$ имѣютъ одинакіе знаки, точно такъ-же какъ $\psi^{h-m}(x)$ и $\psi^{h-m}(y)$. Если же случится, что $f(x)$ и $f(y)$ имѣютъ одинакіе знаки, а $\psi(x)$ и $\psi(y)$ разные или обратно, то послѣднее выраженіе представитъ величину положительную.

На основаніи сказаннаго получаемъ такое предложеніе.

Каковы бы ни были функціи $f(x)$ и $\psi(x)$, разность

$$\int_a^b f^{2m}(x)\,dx \int_a^b \psi^{2m}(x)\,dx -$$

$$-\int_a^b f^{m+h}(x)\psi^{m-h}(x)\,dx \int_a^b f^{m-h}(x)\psi^{m+h}(x)\,dx\,,$$

гдѣ m и h суть цѣлыя числа, есть величина положительная, когда $m^2 > h^2$. Если же функціи $f(x)$ и $\psi(x)$ не мѣняютъ знака въ предѣлахъ интеграціи, то эта разность есть величина отрицательная, когда $m^2 < h^2$.

Отсюда, какъ частный случай при $m=1$, $h=0$, получается опять теорема В. Г. Имшенецкаго.

§ 3.

Послѣдовательное примѣненіе равенства (I) или его слѣдствій къ различнымъ частнымъ случаямъ можетъ также давать интересные выводы. Какъ примѣръ приведемъ весьма простое разсужденіе, приводящее къ распространенію теоремы П. Л. Чебышева на случай произведенія не двухъ только, а какого угодно числа функцій.

Замѣняя въ неравенствѣ

$$\int_0^1 f_1(x)\,\psi(x)\,dx - \int_0^1 f_1(x)\,dx \int \psi(x)\,dx \gtrless 0$$

функцію $\psi(x)$ послѣдовательно чрезъ

$f_2(x)\,, f_2(x)f_3(x)\,, f_2(x)f_3(x)f_4(x)$, и т. д. до $f_2(x)f_3(x)\ldots f_n(x)$

получимъ рядъ неравенствъ:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^1 f_1(x) f_2(x)\,dx - \int_0^1 f_1(x)\,dx \int_0^1 f_2(x)\,dx \gtrless 0 \\
&\int_0^1 f_1(x) f_2(x) f_3(x)\,dx - \int_0^1 f_1(x)\,dx \int_0^1 f_2(x)\,dx \int_0^1 f_3(x)\,dx \gtrless 0 \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\int_0^1 f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x)\,dx - \\
&\quad - \int_0^1 f_1(x)\,dx \int_0^1 f_2(x)\,dx \ldots \int_0^1 f_n(x)\,dx \gtrless 0.
\end{aligned}\right\}(A)$$

Въ силу теоремы П. Л. Чебышева условія существованія этихъ неравенствъ будутъ послѣдовательно:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{df_1}{dx} \cdot \frac{df_2}{dx} \gtrless 0 \\
&\frac{df_1}{dx} \cdot \frac{d}{dx}\left(f_2 f_3\right) \gtrless 0 \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\frac{df_1}{dx} \cdot \frac{d}{dx}\left(f_2 f_3 \ldots f_n\right) \gtrless 0
\end{aligned}\right\}(\alpha)$$

гдѣ верхніе знаки соотвѣтствуютъ верхнимъ, а нижніе нижнимъ.

Если назовемъ первыя части неравенствъ (A) послѣдовательно чрезъ $A_1, A_2 \ldots A_{n-1}$ и положимъ:

$$\int_0^1 f_3(x)\,dx \int_0^1 f_4(x)\,dx \ldots \int_0^1 f_n(x)\,dx = B_1,$$

$$\int_0^1 f_4(x)\,dx \int_0^1 f_5(x)\,dx \ldots \int_0^1 f_n(x)\,dx = B_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = B_{n-2},$$

$$1 = B_{n-1},$$

то будемъ, очевидно, имѣть

$$A_1B_1+A_2B_2+\ldots+A_{n-1}B_{n-1}=\int_0^1 f_1(x)f_2(x)\ldots f_n(x)dx-$$
$$-\int_0^1 f_1(x)\,dx\int_0^1 f_2(x)\,dx\ldots\int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

Но въ силу условій (α) и принимая во вниманіе видъ выраженій B_1, $B_2\ldots$, должны имѣть мѣсто слѣдующія соотношенія:

$$A_1B_1 \gtrless 0,\text{ когда } \frac{df_1}{dx}\frac{df_2}{dx}\int_0^1 f_3(x)\,dx\int_0^1 f_4(x)\,dx\ldots\int_0^1 f_n(x)\,dx \gtrless 0$$

$$A_2B_2 \gtrless 0,\text{ когда } \frac{df_1}{dx}\frac{d}{dx}[f_2f_3]\int_0^1 f_4(x)\,dx\ldots\int_0^1 f_n(x)\,dx \gtrless 0$$

$$A_3B_3 \gtrless 0,\text{ когда } \frac{df_1}{dx}\frac{d}{dx}[f_2f_3f_4]\int_0^1 f_5(x)\,dx\ldots\int_0^1 f_n(x)\,dx \gtrless 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_{n-1}B_{n-1} \gtrless 0,\text{ когда } \frac{df_1}{dx}\frac{d}{dx}[f_2f_3f_4\ldots f_n] \gtrless 0$$

которыя, въ случаѣ когда каждая изъ функцій $f_3(x)$, $f_4(x)\ldots f_n(x)$ сохраняетъ свой знакъ въ предѣлахъ интеграціи, равнозначущи съ слѣдующими:

$$\left.\begin{array}{l}
A_1B_1 \gtrless 0,\text{ когда } \dfrac{df_1}{dx}\dfrac{df_2}{dx}f_3f_4\ldots f_n \gtrless 0\\
A_2B_2 \gtrless 0,\text{ когда } \dfrac{df_1}{dx}\dfrac{d}{dx}(f_2f_3)f_4f_5\ldots f_n \gtrless 0\\
A_3B_3 \gtrless 0,\text{ когда } \dfrac{df_1}{dx}\dfrac{d}{dx}(f_2f_3f_4)f_5\ldots f_n \gtrless 0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_{n-1}B_{n-1} \gtrless 0,\text{ когда } \dfrac{df_1}{dx}\dfrac{d}{dx}(f_2f_3\ldots f_n) \gtrless 0
\end{array}\right\}(\beta)$$

гдѣ также верхнимъ знакамъ соотвѣтствуютъ верхніе, а нижнимъ — нижніе. Если положимъ, что въ послѣднихъ условіяхъ имѣютъ мѣсто только верхніе знаки, то будемъ имѣть, что разность

$$\int_0^1 f_1(x)\, f_2(x) \ldots f_n(x)\, dx - \int_0^1 f_1(x)\, dx \int_0^1 f_2(x)\, dx \ldots \int_0^1 f_n(x)\, dx$$

имѣетъ величину положительную. Когда же въ послѣднихъ условіяхъ имѣютъ мѣсто только нижніе знаки, то эта разность будетъ отрицательною.

Произведя же въ условіяхъ (β) дифференцированіе произведеній, не трудно видѣть, что первыя ихъ части суть суммы такихъ произведеній, которыя получаются изъ произведенія n функцій $f_1(x)\, f_2(x) \ldots f_n(x)$ чрезъ замѣну двухъ изъ перемножающихся функцій $f_1(x)$ и $f_k(x)$, гдѣ $k = 2, 3, \ldots n$, ихъ производными. Вслѣдствіе этого убѣждаемся въ справедливости слѣдующаго предложенія.

Если каждая изъ функцій $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots f_n(x)$ *и ихъ производныя не мѣняютъ знаковъ при измѣненіи перемѣннаго отъ* 0 *до* 1 *и притомъ всѣ отношенія* $\frac{f_1'(x)}{f_1(x)}$, $\frac{f_2'(x)}{f_2(x)}$, $\ldots \frac{f_n'(x)}{f_n(x)}$ *имѣютъ одинакіе знаки, то разность*

$$\int_0^1 f_1(x)\, f_2(x) \ldots f_n(x)\, dx - \int_0^1 f_1(x)\, dx \int_0^1 f_2(x)\, dx \ldots \int_0^1 f_n(x)\, dx$$

имѣетъ величину положительную, когда число отрицательныхъ функцій въ рядѣ $f_1(x)$, $f_2(x) \ldots f_n(x)$ *есть четное, и отрицательную, когда это число нечетное. Если же при условіи неизмѣняемости знаковъ какъ самихъ функцій, такъ и ихъ производныхъ, отношеніе одной изъ функцій къ ея производной имѣетъ знакъ противоположный знаку всѣхъ другихъ подобныхъ-же отношеній, то эта разность есть положительная при нечетномъ числѣ отрицательныхъ функцій и отрицательная при четномъ.*

Само собою понятно, что условіями поставляемыми въ этой теоремѣ не исчерпываются всѣ случаи, когда разность

$$\int_0^1 f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x)\, dx - \int_0^1 f_1(x)\, dx \int_0^1 f_2(x)\, dx \ldots \int_0^1 f_n(x)\, dx$$

можетъ быть положительною или отрицательною. По мѣрѣ увеличенія числа функцій $f_1, f_2 \ldots f_n$ зависимость между ними, при которой разность эта имѣетъ тотъ или другой знакъ, становится все сложнѣе, такъ что при неопредѣленномъ n формулировать эту зависимость однимъ предложеніемъ было бы затруднительно.

Нелишнее замѣтить, что послѣдняя теорема, также какъ и сама теорема Чебышева, имѣетъ мѣсто при какихъ угодно постоянныхъ предѣлахъ интеграціи. Разница лишь въ томъ, что при произвольныхъ предѣлахъ a и b въ первый членъ разности долженъ входить еще множитель

$$\left[\int_a^b dx\right]^{n-1} \text{ или } (b-a)^{n-1},$$

который обращается въ 1, когда эти предѣлы суть 0 и 1.

§ 4.

Возвращаясь къ равенству (I), укажемъ въ заключеніе, между какими предѣлами должна заключаться числовая величина разности, составляющей его первую часть, при нѣкоторыхъ условіяхъ, налагаемыхъ на входящія въ нее функціи.

Двойной интегралъ, входящій во вторую часть этого равенства, можетъ быть представленъ такимъ образомъ

$$\int_a^b\int_a^b \psi_1(x)\psi_1(y)\psi_2(x)\psi_2(y)\left[\frac{f_1(x)}{\psi_1(x)}-\frac{f_1(y)}{\psi_1(y)}\right]\left[\frac{f_2(x)}{\psi_2(x)}-\frac{f_2(y)}{\psi_2(y)}\right]dxdy$$

или

$$\int_a^b\int_a^b\left\{\psi_1(x)\psi_1(y)\psi_2(x)\psi_2(y)\int_y^x\frac{d}{dz}\left[\frac{f_1(z)}{\psi_1(z)}\right]dz\int_y^x\frac{d}{dz}\left[\frac{f_2(z)}{\psi_2(z)}\right]dz\right\}dxdy.$$

Если положимъ, что производныя

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f_1(x)}{\psi_1(x)}\right] \text{ и } \frac{d}{dx}\left[\frac{f_2(x)}{\psi_2(x)}\right]$$

сохраняютъ свои знаки при измѣненіи перемѣннаго между предѣлами a и b, а функціи $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ мѣняютъ знаки не иначе какъ одновременно, то произведеніе, отъ котораго въ послѣднемъ выраженіи берется двойной интегралъ, будетъ функціею, сохраняющею свой знакъ въ предѣлахъ интеграціи. Вслѣдствіе этого числовая величина разсматриваемаго двойнаго интеграла будетъ представляться послѣднимъ его выраженіемъ въ предположеніи, что всѣ множители интегрируемаго произведенія суть положительные.

Называя буквами A и α наибольшую и наименьшую изъ числовыхъ величинъ функціи $\frac{d}{dz}\left[\frac{f_1(z)}{\psi_1(z)}\right]$, а буквами B и β наибольшую и наименьшую изъ числовыхъ величинъ функціи $\frac{d}{dz}\left[\frac{f_2(z)}{\psi_2(z)}\right]$ для значеній z между предѣлами a и b, будемъ имѣть

$$A\int_a^b dz > \int_a^b \frac{d}{dz}\left[\frac{f_1(z)}{\psi_1(z)}\right]dz > \alpha\int_a^b dz$$

и $$B\int_a^b dz > \int_a^b \frac{d}{dz}\left[\frac{f_2(z)}{\psi_2(z)}\right]dz > \beta\int_a^b dz,$$

а слѣдовательно и подавно

$$A\int_y^x dz > \int_y^x \frac{d}{dz}\left[\frac{f_1(z)}{\psi_1(z)}\right]dz > \alpha\int_y^x dz$$

и $$B\int_y^x dz > \int_y^x \frac{d}{dz}\left[\frac{f_2(z)}{\psi_2(z)}\right]dz > \beta\int_y^x dz,$$

гдѣ предѣлы x и y суть величины, заключающіяся между a и b.

На основаніи этихъ неравенствъ заключаемъ изъ предыдущаго выраженія разсматриваемаго двойнаго интеграла, что числовая величина его заключается между предѣлами

$$ABU \text{ и } \alpha\beta U,$$

гдѣ

$$U=\int_a^b\int_a^b\psi_1(x)\psi_1(y)\psi_2(x)\psi_2(y)(x-y)^2\,dx\,dy=$$

$$=\int_a^b\psi_1(x)\psi_2(x)x^2\,dx\int_a^b\psi_1(y)\psi_2(y)dy-$$

$$-2\int_a^b\psi_1(x)\psi_2(x)x\,dx\int_a^b\psi_1(y)\psi_2(y)y\,dy+$$

$$+\int_a^b\psi_1(x)\psi_2(x)dx\int_a^b\psi_1(y)\psi_2(y)y^2\,dy=$$

$$=2\left\{\int_a^b\psi_1(x)\psi_2(x)x^2\,dx\int_a^b\psi_1(x)\psi_2(x)dx-\right.$$

$$\left.-\left[\int_a^b\psi_1(x)\psi_2(x)x\,dx\right]^2\right\}.$$

Такимъ образомъ получается слѣдующее предложеніе.

Если производныя отношеній $\frac{f_1(x)}{\psi_1(x)}$ *и* $\frac{f_2(x)}{\psi_2(x)}$ *сохраняютъ свои знаки при измѣненіи перемѣннаго отъ* a *до* b, *и притомъ функціи* $\psi_1(x)$ *и* $\psi_2(x)$ *мѣняютъ знаки не иначе какъ одновременно, то числовая величина разности*

$$\int_a^b f_1(x)f_2(x)dx\int_a^b\psi_1(x)\psi_2(x)dx-\int_a^b f_1(x)\psi_2(x)dx\int_a^b f_2(x)\psi_1(x)dx$$

заключается между предѣлами

$$ABU \text{ и } \alpha\beta U,$$

гдѣ U *есть числовая величина разности*

$$\int_a^b\psi_1(x)\psi_2(x)x^2\,dx\int_a^b\psi_1(x)\psi_2(x)\,dx-\left[\int_a^b\psi_1(x)\psi_2(x)x\,dx\right]^2,$$

A *и* α *суть высшій и низшій предѣлы числовыхъ величинъ производной* $\frac{d}{dx}\left[\frac{f_1(x)}{\psi_1(x)}\right]$, *а* B *и* β *такіе же предѣлы для* *производной* $\frac{d}{dx}\left[\frac{f_2(x)}{\psi_2(x)}\right]$ *при названныхъ предѣлахъ измѣняемости перемѣннаго.*

Вторая часть равенства (I), очевидно, не мѣняется, если замѣнить функціи ψ_1 и ψ_2 послѣдовательно чрезъ f_1 и f_2, и обратно. То-же самое можно, слѣдовательно, сдѣлать и въ послѣднемъ предложеніи.

Въ своей статьѣ — «О приближенныхъ выраженіяхъ однихъ интеграловъ черезъ другіе», П. Л. Чебышевъ далъ слѣдующее равенство какъ частный выводъ его общей теоріи

$$\int uv\theta\,dx = \frac{\int u\theta\,dx \int v\theta\,dx}{\int \theta\,dx} + R_1,$$

гдѣ u, v и θ суть какія нибудь функціи перемѣннаго x, изъ которыхъ послѣдняя остается положительною въ предѣлахъ интеграціи. При этомъ онъ указалъ, что числовая величина дополнительнаго члена R_1 второй части не превосходитъ произведенія

$$\frac{\int \theta\,dx \int x^2\theta\,dx - (\int x\theta\,dx)^2}{\int \theta\,dx}\,AB,$$

гдѣ A и B суть наибольшія числовыя величины производныхъ $\frac{du}{dx}$ и $\frac{dv}{dx}$ въ предѣлахъ интеграціи.

Легко видѣть, что результатъ этотъ получается изъ послѣдняго предложенія, если положимъ:

$$f_1 = u\theta,\ f_2 = v,\ \psi_1 = \theta,\ \psi_2 = 1.$$