УДК 517.555

Ю. И. ЛЮБАРСКИЙ

ПОЛНОТА И МИНИМАЛЬНОСТЬ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ ВИДА $\left\{a(t)\psi^n(t) - b(t)\varphi^n(t)\right\}_N^\infty$

а. Введение. В настоящей работе рассматриваются вопросы полноты и минимальности в пространстве функций $L^2(I)$ на отрезк, $I = [0, \pi]$ системы функций $\mathcal{K}_N = \mathcal{K}_N(a, b; \varphi, \psi) = \{d_n(t)\}_{n=N}^\infty$, $d_n(t) = a(t)\varphi^n(t) - b(t)\psi^n(t)$, где $a, b, \varphi, \psi \in C(I)$ — заданные функции, $N \in \mathbf{Z}$ — заданное число. Часть результатов работы аннонсирована в [1] и доказана в [2[. В [1, 2] содержится также изложение истории вопроса, которое поэтому здесь не приводится. Укажем лишь, что система $\mathcal{K}_N$ не только представляет самостоятельный интерес, но и является модельной в вопросах полноты и минимальности части собственных и присоединенных функций дифференциальных операторных пучков.

В работе устанавливается (независимо и несколько иным способом это было сделано В. А. Ткаченко, см. [2, §2]), что вопросы полноты и минимальности редуцируются к краевым задачам с карлемановским сдвигом на границе соответствующей области. При этой редукции оказывается, что тривиальная разрешимость однородной задачи эквивалентна полноте, а существование решения неоднородной задачи — минимальности. Получающиеся при этом краевые задачи со сдвигом имеют ряд особенностей по сравнению с известными в литературе и требуют специального изучения. Мы проводим это изучение и показываем, как в широком круге задач выбрать по функциям a, b, φ, Ψ число N таким образом, чтобы система $\mathscr{K}_N(a, b, \varphi, \psi)$ была полной и минимальной в пространстве $L^2(I)$. Полученные результаты применяются затем к модельной системе $\{e^{\alpha nt}\sin nt\}_1^\infty$, $\alpha \in \boldsymbol{C}$.

Автору приятно выразить благодарность Б. Я. Левину и В. А. Ткаченко за полезные обсуждения и поддержку работы.

6. Обозначения. Формулировка результата. Пусть функции $\varphi, \psi \in C^2(I)$; $a, b \in \boldsymbol{C}(I)$. Положим $\Gamma_\varphi = \{z \in \boldsymbol{C},\ z = \varphi(t), t \in I\}$, $\Gamma_\psi = \{z \in \boldsymbol{C},\ z = \Psi(t), t \in I\}$, $\Gamma = \Gamma_\varphi \cup \Gamma_\psi$. Положительным направлением на Γ_φ будем считать направление от $\varphi(0)$ к $\varphi(1)$, а на Γ_ψ — от $\psi(1)$ к $\psi(0)$. В дальнейшем будем считать, что Γ_φ, Γ_ψ — простые кривые и $\varphi'(t)\psi'(t) \neq 0$, $\forall t \in I$ **(1)**, $a(t) \cdot b(t) \neq 0$, $\forall t \in I$ **(2)**. Отображение $f \mapsto f \circ \varphi^{-1}$ (соответственно $f \mapsto f \circ \psi^{-1}$) является изоморфизмом пространств $L^2(I)$ и $L^2(\Gamma_\varphi)(L^2(\Gamma_\psi))$.

Лемма 1. *Пусть выполнены* (1), (2) *и, кроме того, множество* $\Gamma_\varphi \cap \Gamma_\psi$ *не более чем счетно. Тогда следующие утверждения эквивалентны: а) система* $\mathscr{K}_N$ *полна в* $L^2(I)$; *б) не существует ненулевой функции* $h \in L^2(\Gamma)$, *такой что* $\int\limits_\Gamma h(\xi)\xi^n d\xi = 0$, $n \geqslant N$ **(3)** *и* $\frac{\varphi'(t)}{a(t)}h(\varphi(t)) = \frac{\psi'(t)}{b(t)}h(\psi(t))$ *при почти всех* $t \in I$ **(4)**.

Лемма 2. *В условиях леммы 1 следующие утверждения эквивалентны: в) система* $\mathscr{K}_N$ *минимальна в* $L^2(I)$; *г)* $\forall k \geqslant N$ *найдется функция* $h = \hat{h}_k \in L^2(\Gamma)$, *удовлетворяющая* (4) *и такая, что*

$$\int\limits_\Gamma \hat{h}_k(\xi)\xi^n d\xi = \delta_{k,n},\ k,\ n \geqslant N. \tag{5}$$

Леммы 1 и 2 доказываются аналогично. Ограничимся доказательством первой из них.

Доказательство леммы 1. Неполнота $\mathscr{K}_N$ в $L^2(I)$ эквивалентна существованию функции $g \in L^2(I)$ такой, что

$$0 = \int\limits_I g(t)\,d_n(t)\,dt = \int\limits_I \frac{a(t)}{\varphi'(t)} g(t)\varphi^n(t)\,d\varphi(t) - $$

$$- \int\limits_I \frac{b(t)}{\psi'(t)} g(t)\psi^n(t)\,d\psi(t),\ n \geqslant N. \tag{6}$$

Функция h, определенная на Γ соотношениями

$$h(\varphi(t)) = \frac{a(t)}{\varphi'(t)} g(t),\ h(\psi(t)) = \frac{b(t)}{\psi'(t)} g(t),$$

очевидно, принадлежит $L^2(\Gamma)$ и удовлетворяет (4). При выполнении этих условий соотношения (3) и (6) получаются одно из другого заменой переменных $\xi = \varphi(t)$, $\xi \in \Gamma_\varphi$ и $\xi = \psi(t)$, $\xi \in \Gamma_\psi$.

Следствие. *Пусть в условиях леммы 1 множество* $\boldsymbol{C}\setminus\Gamma$ *связно. Тогда при любом* $N \in \boldsymbol{Z}$ *система* $\mathscr{K}_N$ *полна в* $L^2(I)$.

В самом деле, в этом случае $\forall N \in \boldsymbol{Z}$, не существует ненулевой функции, удовлетворяющей (3).

В дальнейшем рассматривается простейший случай, когда $\boldsymbol{C} \setminus \Gamma$ несвязно. Именно, предполагается, что Γ — простая кривая и $\varphi(0) = \psi(0)$, $\varphi(1) = \psi(1)$ **(7)**. При этом Γ — кусочно-гладкий контур, его изломы возможны в точках $\xi_0 = \varphi(0)$, $\xi_1 = \varphi(1)$. Пусть $\pi\theta_0$, $\pi\theta_1$ — внутренние углы в этих точках. Обозначим через D_Γ^+ и D_Γ^- соответственно ограниченную и неограниченную компоненты множества $\boldsymbol{C} \setminus \Gamma$. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $0 \in D_\Gamma^+$ и $\theta_0 > 0$, $\theta_1 > 0$ **(8)**.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (1), (2), (7), (8). *Выберем непрерывную на I ветвь функции* $L(t) \overset{\mathrm{def}}{=} (2i\pi)^{-1} \log\{a(t)\psi'(t)(b(t) \times \varphi'(t))^{-1}\}$ *и положим* $a_+ = b_+ + ic_+ = L(\pi)$, $a_- = b_- + ic_- = L(0)$ *и, кроме того**, $\mu_+ = (\pi\theta_1)^{-1} \log|\varphi'(\pi - 0)/\varphi'(\pi - 0)|$; $\mu_- = (\pi\theta_0)^{-1} \times \log|\psi'(+0)/\varphi'(+0)|$; $\alpha_+ = \frac{\theta_1}{2}(\mu_+^2 + 1) - 1$; $\alpha_- = \frac{\theta_0}{2}(\mu_-^2 + 1) - 1$; $\beta_\pm = \alpha_\pm \pm 2(b_\pm - c_\pm\mu_\pm)$; **(9)** $N_\pm = [(1 - \beta_\pm)/2]$; $N = N_+ + N_- - 1$ **(10)**. *Тогда система $\mathscr{K}_N$ полна и минимальна в $L^2(I)$.*

Доказательство теоремы 1 проведем в несколько шагов. в. Сведем исследование вопросов полноты и минимальности системы $\mathscr{K}_N$ к исследованию краевой задачи со сдвигом в подходящем пространстве аналитических функций. Пусть для определенности принятое ранее направление обхода индуцирует положительное направление на контуре Γ. Отображение $\omega : \xi \mapsto \psi(\varphi^{-1}(\xi))$, $\xi \in \Gamma_\alpha$, $\omega : \xi \mapsto \varphi(\psi^{-1}(\xi))$, $\xi \in \Gamma_\psi$ **(11)** является изменяющим ориентацию гомеоморфизмом контура Γ, который: *i*) удовлетворяет условию Карлемана $\omega(\omega(\xi)) \equiv \xi$; *ii*) переводит Γ_φ и Γ_ψ друг на друга; *iii*) всюду, кроме точек ξ_0 и ξ_1, имеет производную $\omega'(\xi) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$, $\xi = \varphi(t) \in \Gamma_\varphi$; $\omega'(\xi) = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$, $\xi = \psi(t) \in \Gamma_\psi$, непрерывно дифференцируемую (это следует из (1)) на Γ_φ и Γ_ψ. В точках ξ_0 и ξ_1 существуют односторонние производные функции $\omega(\xi)$. Положим далее

$$G(\xi) = \frac{b(t)\varphi'(t)}{a(t)\psi'(t)}, \ \xi = \varphi(t) \in \Gamma_\varphi; \quad G(\xi) = \frac{a(t)\psi'(t)}{b(t)\varphi'(t)}, \ \xi = \psi(t) \in \Gamma_\psi, \tag{12}$$

$$g_k(\xi) = (2i\pi)^{-1}[G(\xi)\xi^{-k-1} - \omega(\xi)^{-k-1}], \ \xi \in \Gamma. \tag{13}$$

Пусть $E^2 = E^2(D_\Gamma^+)$ — пространство В. И. Смирнова (см., например [3]) в D_Γ^+, $E_N^2 = \xi^{-N}E^2$. Из теоремы Ф. и М. Риссов следует, что функции h и $\hat{h}_k$, удовлетворяющие на Γ соотношениям (3), (5) продолжаются в область D_Γ^+ до соответственно функций $h \in E_N^2$ и $\hat{h}_k(\xi) = h_k(\xi) + (2i\pi)^{-1}\xi^{-k-1}$, $h_k \in E_N^2$. Условие (4) приводит теперь к однородной и неоднородной задачам для функций h, h_k, что позволяет переформулировать леммы 1, 2 следующим образом.

---

* Квадратные скобки в соотношении (10) — знак целой части.

Лемма 3. *При выполнении условий* (1), (2), (7), (8) *верно*

а) для полноты системы $\mathcal{K}_N$ *в* $L^2(I)$ *необходимо и достаточно, чтобы однородная задача со сдвигом* $h(\omega(\xi)) = G(\xi)h(\xi)$, $\xi \in \Gamma$ **(14)** *не имела нетривиального решения в пространстве* $E_N^2(D_\Gamma^+)$;

б) для минимальности системы $\mathcal{K}_N$ *в* $L^2(I)$ *необходимо и достаточно, чтобы неоднородная краевая задача со сдвигом* $h_k(\omega(\xi)) = G(\xi)h_k(\xi) + g_k(\xi)$, $\xi \in \Gamma$ **(15)** *при любом* $k \geqslant N$ *была разрешима в пространстве* $E^2(D_\Gamma^+)$.

Здесь ω, G, и g_k определены равенствами (11), (12), (13).

Краевые задачи со сдвигом (14) и (15) подробно рассмотрены в монографии [4], где изложена история вопроса и приведена подробная библиография. В частности, в [4, гл. IV] изложен метод конформной склейки для решения задач (14), (15) для случая, когда Γ — ляпуновский контур и при некотором $\gamma > 0$ выполнено условие $\omega' \in \mathrm{Lip}_\gamma(\Gamma)$. В нашем случае оба эти условия, вообще говоря, нарушаются в точках ξ_0 и ξ_1. Поэтому мы переводим задачу в единичный круг, а затем используем результаты [5], позволяющие применить метод конформного склеивания в случае, когда производная сдвига терпит разрыв в неподвижных точках.

Зафиксируем конформное отображение $Z: \xi \mapsto z = Z(\xi)$ области D_Γ^+ на единичный круг $\boldsymbol{D}$ с центром в нуле, такое, что $Z(\xi_0) = -1$, $Z(\xi_1) = 1$. Положим $z_0 = Z(0)$. Продолжим Z по непрерывности на Γ. При этом $Z(\Gamma_\varphi) = \boldsymbol{T}_-$, $Z(\Gamma_\psi) = \boldsymbol{T}_+$, где $\boldsymbol{T}_\pm$ — соответственно верхняя и нижняя полуокружности. Обозначим через H^2 пространство Харди в единичном круге и положим

$$H_N^2 = (z - z_0)^{-N}(z+1)^{(1-\theta_0)/2}(z-1)^{(1-\theta_1)/2}H^2; \tag{16}$$

$$\tilde{G}(z) = G(Z^{-1}(z)); \ \tilde{g}_k(z) = g_k(Z^{-1}(z)), \ z \in \boldsymbol{T} \ (\stackrel{\mathrm{def}}{=} \partial \boldsymbol{D}); \tag{17}$$

$$\tilde{\omega} = Z^{-1} \circ \omega \circ Z, \quad \tilde{\omega}: \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{T}. \tag{18}$$

Стандартные оценки поведения отображения Z в окрестностях угловых точек ξ_0, ξ_1 позволяют переформулировать лемму 3 следующим образом.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия* (1), (2), (7), (8). *Тогда а) для полноты системы* $\mathcal{K}_N$ *в* $L^2(I)$ *необходимо и достаточно, чтобы однородная краевая задача со сдвигом* $\tilde{h}(\tilde{\omega}(z)) = \tilde{G}(z)\tilde{h}(z)$, $z \in \boldsymbol{T}$ *имела лишь тривиальное решение в* $\tilde{H}^2$; *б) для минимальности системы* $\mathcal{K}_N$ *в* $L^2(I)$ *необходимо и достаточно, чтобы неоднородная краевая задача* $\tilde{h}_k(\tilde{\omega}(z)) = \tilde{G}(z)\tilde{h}_k(z) + \tilde{g}_k(z)$, $z \in \boldsymbol{T}$ *имела решения* $\tilde{h}_k \in \tilde{H}_N^2$ *при каждом* $k \geqslant N$.

Здесь $\tilde{H}_N^2$, $\tilde{G}$, $\tilde{g}_k$ и $\tilde{\omega}$ определены соотношениями (16) — (18).

Для дальнейшего потребуются значения односторонних производных гомеоморфизма $\tilde{\omega}$ в точках ± 1. Прямое вычисление дает

$$\left.\begin{aligned} \lambda_+ \stackrel{\mathrm{def}}{=} -\tilde{\omega}'(1+i0) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \lim_{z \to 1,\, z \in \boldsymbol{T}_+} -\tilde{\omega}'(z) = \left|\frac{\varphi'(\pi-0)}{\psi'(\pi-0)}\right|^{1/\theta_1}, \\ \tilde{\omega}'(1-i0) = \lim_{z \to 1,\, z \in \boldsymbol{T}_-} \tilde{\omega}'(z) = -\lambda_+^{-1}, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

$$\left.\begin{aligned}\lambda_- \stackrel{\text{def}}{=} -\tilde{\omega}'(-1+i0) \stackrel{\text{def}}{=} -\lim_{z\to -1,\, z\in T_+} \tilde{\omega}'(z) = \left|\frac{\varphi'(0)}{\psi'(0)}\right|^{1/\theta_0}, \\ \tilde{\omega}'(-1-i0) = -\lambda_-^{-1}\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Положим также

$$\mu_+ = \frac{1}{\pi\theta_1}\log\lambda_+,\quad \mu_- = \frac{-1}{\pi\theta_0}\log\lambda_-,\quad \varphi_\pm = \operatorname{arctg}\mu_\pm \tag{21}$$

г. Переход к задаче Римана на спирали. Приведем относящиеся к нашему случаю определения и результаты [5].

Определение 1. *Логарифмической спиралью с параметрами* $a\in \boldsymbol{C}\setminus\{0\}$, $\varphi\in(-\pi/2,\ \pi/2)$ *сужающейся к точке* $w_0\in \boldsymbol{C}$, *назовем кривую*

$$S(a,\ \varphi;\ w_0) = \{z\in \boldsymbol{C};\ z = w_0 + a\exp[-t(\cos\varphi + i\sin\varphi)],\ t\geqslant 0\}.$$

Определение 2. *Кривая K асимптотически стремится к логарифмической спирали $S(a,\ \varphi,\ w_0)$, если она допускает такую параметризацию $K=\{F(t),\ t\geqslant 0\}$, что*

$$F(t) - w_0 - ae^{-t(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = O(e^{-2t\cos\varphi}),\ t\to+\infty;$$
$$F'(t) + ae^{i\varphi}e^{-t(\cos\varphi+i\sin\varphi)} = O(e^{-2t\cos\varphi}),\ t\to+\infty.$$

Введем вспомогательное отображение

$$S: z\mapsto s = S(z) = \log\frac{1+z}{1-z}, \tag{22}$$

которое при подходящем выборе аргумента переводит круг $\boldsymbol{D}$ в полосу $\Pi=\{s:|\operatorname{Im} s|<\pi/2\}$.

Теорема А (о конформной склейке [5]). *В введенных выше обозначениях существуют простая гладкая кривая K и конформное отображение $W: \boldsymbol{D}\to \boldsymbol{C}\setminus K$, обладающие следующими свойствами:*

1) *кривая K является объединением двух кривых $K_\pm$, асимптотически стремящихся к логарифмическим спиралям $S(a_\pm,\ \varphi_\pm,\ \pm 1)$ при некоторых значениях $a_\pm\in \boldsymbol{C}\setminus\{0\}$;*

2) *выполнены асимптотические соотношения*

$$W(z) - \{\pm 1 + a_\pm\exp[\mp 2S(z)\cos\varphi_\pm\cdot e^{i\varphi_\pm}]\} = \\ = O(\exp[\pm 4S(z)\cos^2\varphi_\pm]),\ z\to\pm 1,\ z\in \boldsymbol{D}; \tag{23}$$

$$W'(z) \pm 2a_\pm S'(z)\cos\varphi_\pm e^{i\varphi_\pm}\exp[\mp 2S(z)\cos\varphi_\pm e^{i\varphi_\pm}] = \\ = O(\exp[\mp 4S(z)\cos^2\varphi_\pm])\,S'(z),\ z\to\pm 1,\ z\in \boldsymbol{D}; \tag{24}$$

$$3)\ W(z_0) = \infty. \tag{25}$$

Замечание. В [5] рассматривалось конформное отображение на внешность спирали, сходящейся к нулю и к бесконечности. Это с точностью до конформного отображения то же самое.

С помощью отображения W краевые задачи со сдвигом, сформулированные в лемме 4, сводятся к задаче Римана на кривой K (при этом очевидно выполняются соотношения $\tilde{G}(z)\tilde{G}(\tilde{\omega}(z))=1$; $G(\tilde{\omega}(z))\times\times\tilde{g}_k(z)+\tilde{g}_k(\tilde{\omega}(z))=0$, $z\in\boldsymbol{T}$, без которых такое сведение невозможно). Пространство функций, в котором нужно решать задачу Римана, имеет вид

$$\mathscr{H}_N^2\overset{def}{=}\{\hat{f},\ f \text{ голоморфно в } \boldsymbol{C}\diagdown K,\ f(W(z))\in H_N^2\}.$$

Пусть $l_r=W\{z:|z|=r\}$), $r\in(0,\ 1)$ и W_- — отображение, обратное к W. Голоморфная в $\boldsymbol{C}\diagdown K$ функция $\hat{f}$ принадлежит пространству $\hat{\mathscr{H}}_N^2$ если: а) $\hat{f}$ имеет в бесконечности полюс порядка не выше N; б) $\sup\limits_{1/2<r<1}\left\{\int\limits_{l_r}|\hat{f}(w)|^2|W_-(w)+1|^{\theta_0-1}|W_-(w)-1|^{\theta_1-1}|W'_-(w)||dw|\right\}<<\infty$. Положим $\alpha_+=\frac{\theta_1}{2}(\mu_+^2+1)-1$; $\alpha_-=\frac{\theta_0}{2}(\mu_-^2+1)-1$, здесь числа $\mu_\pm$ определены соотношениями (19) — (21). Прямое вычисление с учетом (21) — (24) показывает, что $|W_-(w)+1|^{\theta_0-1}|W_-(w)-1|^{\theta_1-1}\times\times|W'_-(w)|\asymp|w\mp1|^{\alpha_\pm}$, $w\to\pm1$. Поэтому условие б) можно переписать следующим образом:

$$\text{б}')\ \sup_{1/2<r<1}\left\{\int\limits_{l_r}|\hat{f}(w)|^2|w+1|^{\alpha_-}|w-1|^{\alpha_+}|dw|\right\}<\infty.$$

Будем считать положительным на кривой K направление от -1 к 1. Если U — некоторая окрестность K и функция F задана в $U\diagdown K$ то через $F^\pm(v)$ при $v\in K$ обозначим соответственно левое и право предельные значения функции F, если они существуют. В частности, через $W_-^\pm(v)$ при $v\in K$ обозначим значения обратной функции, являющиеся предельными при приближении к K соответственно слева и справа. Положим $\hat{G}(v)=\tilde{G}(W_-^-(v))$, $\hat{g}_k(v)=\tilde{g}_k(W_-^-(v))$, $v\in K$. Лемма 4 может теперь быть переформулирована так.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия* (1), (2), (7), (8). *Тогда* а) *для полноты системы* $\mathscr{K}_N$ *в* $L^2(I)$ *необходимо и достаточно, чтобы однородная задача Римана*

$$\hat{f}^+(v)=\hat{G}(v)\hat{f}^-(v),\ v\in K \tag{26}$$

имела лишь тривиальное решение в пространстве $\hat{\mathscr{H}}_N^2$;

б) *для минимальности системы* $\mathscr{K}_N$ *в* $L^2(I)$ *необходимо и достаточно, чтобы неоднородная задача Римана*

$$\hat{f}_k^+(v)=G(v)\hat{f}_k^-(v)+\hat{g}_k(v),\ v\in K \tag{27}$$

имела решения $\hat{f}_k\in\hat{\mathscr{H}}_N^2$ *при каждом* $k\geqslant N$.

д. Решение задачи Римана проводится по стандартной схеме, изложенной, например, в [6, гл. 2] с учетом специфики, вносимой структурой контура K. Заметим, прежде всего, что длина контура K конечна. Выберем какую-нибудь непрерывную на K ветвь функции $\log\hat{G}(v)$ и определим голоморфную в $\boldsymbol{C}\diagdown K$ функцию

$$X(w)=\exp\left(\frac{1}{2i\pi}\int\limits_K\frac{\log\hat{G}(v)}{v-w}dv\right),\ w\in\boldsymbol{C}\diagdown K.$$

Имеем $X^+(v)=\hat{G}(v)X^-(v)$, $v\in K$. Пусть, кроме того, $a_\pm=b_\pm+ic_\pm=$ $=(2i\pi)^{-1}\log\hat{G}(\pm1)$. Выберем ограниченные окрестности $U_\pm$ точек ±1 такие, что $U_\pm\setminus K$ односвязно и зафиксируем в $U_\pm\setminus K$ какие-нибудь однозначные ветви функций $\arg(w\mp1)$. Легко видеть, что $|X(w)|\asymp$ $\asymp|(w\mp1)^{\pm\alpha_\pm}|$, $w\to\pm1$, $w\in U_\pm\setminus K$ **(28)**. Отсюда и из соотношений $\arg(w\mp1)\asymp(\log|w\mp1|)\operatorname{tg}\varphi_\pm$, $w\to\pm1$, $w\in U_\pm\setminus K$ **(29)** вытекает

$$|X(w)|\asymp|w\mp1|^{\pm(b_\pm-c_\pm\operatorname{tg}\varphi_\pm)},\quad w\to\pm1. \tag{30}$$

Поэтому задачи (26), (27) сводятся к задачам со скачком для функций $f=\hat{f}X^{-1}$, $f_k=\hat{f}_kX^{-1}$ соответственно $f^+(v)=f^-(v)$, $v\in K$ **(31)**, $f_k^+(v)=$ $=f_k^-(v)+\gamma_k(v)$, $v\in K$, $k\geqslant N$ **(32)**, где $\gamma_k(v)=\hat{g}_k(v)(X^+(v))^{-1}$ **(33)**. Опишем пространство $\mathcal{H}_N^2$, в котором нужно исследовать задачи (31), (32). Голоморфная в $\boldsymbol{C}\setminus K$ функция f принадлежит пространству $\mathcal{H}_N^2$, если в) f имеет в бесконечности полюс порядка не выше N;

г) $$\sup_{1/2<r<1}\left\{\int_{l_r}|f(w)|^2|w+1|^{\beta_-}|w-1|^{\beta_+}|dw|\right\}<\infty, \tag{34}$$

где

$$\beta_\pm=\alpha_\pm\pm2(b_\pm-c_\pm\operatorname{tg}\varphi_\pm). \tag{35}$$

С каждыми двумя числами $\gamma_+,\gamma_-\in\boldsymbol{R}$ свяжем пространство $L^2(K;$ $\gamma_+,\gamma_-)$, состоящее из измеримых на K функций Φ таких, что

$$\|\Phi\|^2_{\gamma_+,\gamma_-}\overset{\mathrm{def}}{=}\int_K|\Phi(v)|^2|v+1|^{\gamma_-}|v-1|^{\gamma_+}|dv|<\infty.$$

Легко доказать (для этого нужно вернуться в круг с помощью отображения W_-), что предельные значения $f^\pm$ каждой функции из $\mathcal{H}_N^2$ принадлежат пространству $L^2(K;\beta_+,\beta_-)$.

Рассмотрим задачу (31). Если f удовлетворяет соотношению (31), то f голоморфна в $\boldsymbol{C}\setminus\{\pm1\}$. Из определения (16) пространства H_N^2, оценок (22), (23), конформного отображения W и оценки (28) вытекает, что при некотором достаточно большом m выполнены соотношения $\iint_{U_\pm}|f(w)|^2|w\mp1|^m d\sigma_w<\infty$, где $d\sigma_w$ — элемент евклидовой площади. Отсюда следует, что точки ±1 являются регулярными точками или полюсами функции f и с учетом возможного полюса в бесконечности f является рациональной функцией. Выберем числа $n_\pm\in\boldsymbol{Z}$ таким образом, чтобы $|f(w)|\asymp|w\mp1|^{n_\pm}$, $w\to\pm1$. Из включения $f|_K\in L^2(K;$ $\beta_+,\beta_-)$ следует, что $n_\pm>-(1+\beta_+)/2$ **(36)**. Так как суммарное число нулей и полюсов рациональной функции равно нулю, то должно быть выполнено соотношение $n_++n_--N\leqslant0$ **(37)**. Положим $N_\pm=[(1-$ $-\beta_\pm)/2]$ **(38)**. Соотношение (37) может иметь место лишь при N_++ $+N_--N\leqslant0$. Наоборот, если $N_++N_--N\leqslant0$, то функция $f(w)=$ $=(w+1)^{N_+}(w-1)^{N_-}$ дает пример ненулевой функции из $\mathcal{H}_N^2$, решающей задачу (31). Таким образом доказана

Лемма 6. *При выполнении условий* (1), (2), (7), (8) *для полноты системы* $\mathcal{K}_N$ *в* $L^2(I)$ *необходимо и достаточно выполнения неравенства* $N_+ + N_- - N > 0$, *где числа* $N_\pm$ *определены соотношением* (38).

Для исследования неоднородной задачи (32) рассмотрим преобразование Гильберта на кривой K

$$T:\Phi \mapsto (T\Phi)(v) = \frac{1}{\pi}\oint\limits_{k} \frac{\Phi(v')}{v'-v}\,dv'.$$

Нам понадобится следующее утверждение.

Теорема Б (об ограниченности преобразования Гильберта). *Для ограниченности оператора* T в $L^2(K;\ \gamma_+,\ \gamma_-)$ *необходимо и достаточно, чтобы* $\gamma_\pm \in (-1,\ 1)$.

Это утверждение прямо следует из общей теоремы Давида (см., например [7, теорему 5.1.1]), но допускает и значительно более простое прямое доказательство, аналогичное доказательству теоремы 4.1 [8, гл. 1]. Для функции $\Phi \in L^1(K)$ положим

$$\hat{\Phi}(w) = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{K} \frac{\Phi(v)}{v-w}\,dv, \quad w \in \boldsymbol{C}\setminus K.$$

Следующее утверждение получается с помощью теоремы Б.

Лемма 7. *Для любых* $\gamma_+,\ \gamma_- \in (-1,\ 1)$ *существует* $C = C(\gamma_+\gamma_-)$, *такая что для любой функции* $\Phi \in L^2(K,\ \gamma_+,\ \gamma_-)$

$$\sup_{1/2<r<1}\left\{\int\limits_{l_r} |\hat{\Phi}(w)|^2\, |w+1|^{\gamma_-}\, |w-1|^{\gamma_+}\, |dw|\right\} \leqslant C\,\|\Phi\|^2_{L^2(K;\ \gamma_+,\ \gamma_-)}.$$

Лемма 8. *При выполнении условий* (1), (2), (7), (8) *для минимальности системы* $\mathcal{K}_N$ *в пространстве* $L^2(I)$ *достаточно выполнения неравенства* $N_+ + N_- - N \leqslant 1$, *где числа* $N_\pm$ *определены в* (38).

Доказательство. Достаточно установить, что при $N_+ + N_- - N \leqslant 1$ неоднородная краевая задача (32) разрешима в пространстве $\mathcal{H}^2_N$. Заметим прежде всего, что из соотношений (33), (35) и определения функций $\tilde{g}_k$ следует, что найдется $\delta \in (0,\ 1/4)$, такое, что $\gamma_k(v) \in L^2(K;\ \tilde{\beta}_+,\ \tilde{\beta}_-)$ при всех $\tilde{\beta}_\pm \in [\beta_\pm - \delta,\ \beta_\pm]$. Положим $\beta'_\pm = \beta_\pm$ при $\beta_\pm \notin 2\boldsymbol{Z}+1$; $\beta'_\pm = \beta_\pm - \delta$ при $\beta_\pm \in 2\boldsymbol{Z}+1$ **(39)**. Достаточно найти решение задачи (32) в пространстве $\mathcal{H}'^2_N$, состоящем из функций, удовлетворяющих условиям в), г) с заменой $\beta_\pm$ на $\beta'_\pm$. Положим $F_k(w) = f_k(w)(w+1)^{-N_-}(w-1)^{-N_+}$; $\Gamma_k(v) = \gamma_k(v)(v+1)^{-N_-}(v-1)^{-N_+}$, $\gamma_\pm = \beta'_\pm + 2N_\pm$. В силу выбора чисел $\beta'_\pm$ имеем $\gamma_\pm \in (-1,\ 1)$, $\Gamma_k \in L^2(K;\ \gamma_+,\ \gamma_-)$. Задача (32) сводится теперь к задаче $F^+_k(v) = F^-_k(v) + \Gamma_k(v)$, $v \in K$, $k \geqslant N$, решение которой дается интегралом типа Коши. С помощью леммы 6 заключаем теперь, что функция

$$f_k(w) = (w+1)^{N_-}(w-1)^{N_+}F_k(w) =$$
$$= \frac{(w+1)^{N_-}(w-1)^{N_+}}{2i\pi}\int\limits_{K} \frac{\gamma_k(v)}{(v+1)^{N_-}(v-1)^{N_+}}\frac{dv}{v-w}$$

при каждом $k > N$ является решением задачи (32), удовлетворяющей условию (34) с заменой $\beta_\pm$ на $\beta'_\pm$ и имеющим на бесконечности полюс порядка не выше $N_+ + N_- - 1$. При $N_+ + N_- - 1 \leqslant N$ эта функция принадлежит пространству $\mathcal{H}'^{s}_N$ и тем самым порождает функцию $_k \in L^2(\Gamma)$ удовлетворяющую соотношению (5) и, следовательно, функционал, аннулирующий все элементы системы $\mathcal{K}_N$, кроме имеющего номер k. Лемма 8 доказана.

Теорема 1 является теперь прямым следствием лемм 6, 8.

Замечание. Аналогично тому, как это было сделано выше, можно исследовать полноту и минимальность системы $\mathcal{K}_N$ в $L^p(I)$ при $p \in (1, \infty)$,

е. В качестве приложения теоремы 1 исследуем полноту и минимальность в $L^2(I)$ системы функций $\mathcal{K}_{\alpha, N} = \{e^{\alpha n t} \sin nt\}_N^\infty$ при $\alpha \in \boldsymbol{C}$. При $\alpha \in \boldsymbol{R}$ и $N = 1$ эта система исследовалась многими авторами (историю вопроса см. в [1, 2]). В частности, в работах [9, 10] доказано, что при $\alpha \in \boldsymbol{R}$ система $\mathcal{K}_{\alpha, 1}$ полна и минимальна в $L^2(I)$. С точностью до несущественного множителя $2i$ система $\mathcal{K}_{\alpha, N}$ является частным случаем системы $\mathcal{K}_N(a, b, \varphi, \psi)$ при $a \equiv 1$, $b \equiv 1$, $(t) = \exp((\alpha + i)t)$; $\psi(t) = \exp((a - i)t)$. При $\alpha \in \boldsymbol{C} \setminus \{(-i\infty, -i] \cup [i, \infty)\}$ эти функции удовлетворяют соотношениям (1), (2), (7), (8) к системе $\mathcal{K}_{\alpha, N}$ применима теорема 1. В дальнейшем, если противное не будет оговорено особо, будем считать $\operatorname{Re}\alpha \geqslant 0$, $\operatorname{Im}\alpha \geqslant 0$, $\notin [i, i\infty)$ (Остальные случаи, когда $\alpha \notin (-i\infty, -i] \cup [i, i\infty)$, легко сводятся к этому). Из теоремы 1.2 [2] вытекает полнота системы $\mathcal{K}_{\alpha, 1}$ в $L^2(I)$. Для исследования минимальности воспользуемся теоремой 1. Положим $(\alpha + i)(\alpha - i)^{-1} = \exp(r + i\omega\pi)$, $\omega \in (0, 1]$, $r \geqslant 0$. Прямое вычисление дает значение чисел $\beta_\pm$, участвующих в равенствах

$$(9)\quad \beta_+ = \beta_+(r, \omega) = -\frac{1}{2}\frac{r^2}{\pi^2\omega} - \frac{\omega}{2} - 3;$$

$$\beta_- = \beta_-(r, \omega) = -\frac{1}{2}\frac{r^2}{\pi^2(2-\omega)} + \frac{\omega}{2}.$$

Числа N_+, N_- и N, определяющие полноту и минимальность системы $\mathcal{K}_{\alpha, N}$, получаются отсюда по формуле (10). В частности, значениям $\alpha \in \boldsymbol{R}$ соответствует $r = 0$, откуда $N_+ = 2$, $N_- = 0$ и $N = 1$ — система $\mathcal{K}_{\alpha, 1}$ при $\alpha \in \boldsymbol{R}$ полна и минимальна в пространстве $L^2(I)$. В общем случае $N_+ \geqslant 2$, $N_- \geqslant 0$ и система $\mathcal{K}_{\alpha, 1}$, вообще говоря, переполнена в пространстве $L^2(I)$. Избыток системы $\mathcal{K}_{\alpha, 1}$, оставаясь конечным при каждом $\alpha \in \boldsymbol{C} \setminus [i, i\infty)$ неограниченно возрастает при приближении α к запрещенному лучу $[i, i\infty)$.

Список литературы: 1. *Любарский Ю. И., Ткаченко В. А.* О системе $\{e^{\alpha n t}\sin nt\}_1^\infty$ // Функцион. анализ и его прил.— 1984.— 18, Вып. 2.— С. 69—70. 2. *Любарский Ю. И., Ткаченко В. А.* Полнота и минимальность специальных систем функций на множествах в комплексной плоскости.— Х., 1985.— 29 с. (Препринт Физико-технического института низких температур АН СССР № 33—85). 3. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций.— М.; Л. 1950.— 336 с. 4. *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные, уравнения со сдвигом.— М., 1977.— 448 с. 5. *Любарский Ю. И.* Конформная склейка для сдвига Карлемана, имеющего разрывную производную // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1987.— № 130.— С. 28—32. 6. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи.— М., 1977.— 640 с. 7. *Дынькин Е. М., Осиленкер Б. П.* Весовые оценки сингулярных интегралов и их приложения // Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР. Мат. анализ.— 1983.— **21**.— С. 42—129. 8. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных операторов.— Кишинев, 1973.— 426 с. 9. *Левин Б. Я.* Целые функции.— М., 1971.— 124 с. 10. *Шкаликов А. А.* Об одной системе функций // Мат. заметки.— 1975.— **18**, вып. 6.— С. 885—860.

Поступила в редколлегию 08.08.86