УДК 517.9

А. И. ШАХБАЗОВ

О СПЕКТРЕ КОМПАКТНОГО ОПЕРАТОРА ВЗВЕШЕННОЙ КОМПОЗИЦИИ В НЕКОТОРЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Пусть D — относительно компактная область в пространстве $\boldsymbol{C}^n$, $\overline{D}$ — ее замыкание, и $\varphi\colon \overline{D}\to D$ — непрерывное отображение, голоморфное в D. Хорошо известно (см., например, [1, с. 105]), что отображение φ имеет в $\overline{D}$ единственную неподвижную точку z^0, причем $z^0\in D$ и итерации φ^k отображения φ ($\varphi^0=\mathrm{id}_{\overline{D}}$, $\varphi^{k+1}=\varphi^k\circ\varphi$, $k\geqslant 0$) равномерно на $\overline{D}$ сходятся к постоянному отображению $\varphi^\infty\colon \overline{D}\to D$, $\varphi^\infty(z)\equiv z^0$. Впредь мы будем считать, что $0\in D$ и $z^0=0$.

Обозначим через $\mathrm{Hol}(D)$ алгебру всех функций, голоморфных в D, снабженную компактно-открытой топологией $\varkappa$, и положим, как обычно, $A(D)=C(\overline{D})\cap \mathrm{Hol}(D)$. Алгебра $A(D)$ с равномерной нормой $\|f\|_\infty=\sup\limits_{z\in\overline{D}}|f(z)|$ является банаховой. Пусть $X\subset \mathrm{Hol}(D)$ — некоторое банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_X$, содержащее $A(D)$ и являющееся банаховым $A(D)$-модулем относительно обычного умножения функций, так что для любых $f\in X$ и $a\in A(D)$ функция $af\in X$ и

$$\|af\|_X\leqslant \mathrm{const}\cdot\|a\|_\infty\cdot\|f\|_X \tag{1}$$

(постоянная в правой части не зависит от a и f). Из (1) следует, что для любой функции $f\in X$ оператор умножения $M_f\colon A(D)\to X$, $M_f(a)=fa$, непрерывен. Мы будем также предполагать, что естественное вложение $i\colon(X,\|\cdot\|_X)\hookrightarrow(\mathrm{Hol}(D),\varkappa)$ непрерывно, т. е. для любого компакта $K\subset D$ существует такое $C_K>0$, что

$$\|f\|_{K,\infty}=\sup_{z\in K}|f(z)|\leqslant C_K\|f\|_X \tag{2}$$

для всех $f\in X$.

Так как $\varphi(\overline{D})\subset D$, то $f\circ\varphi\in A(D)$ для всех $f\in\mathrm{Hol}(D)$, причем

$$\|f\circ\varphi\|_\infty\leqslant\|f\|_{\varphi(\overline{D}),\infty}; \tag{3}$$

поэтому отображение $\Phi\colon \mathrm{Hol}(D)\to A(D)$, $\Phi(f)=f\circ\varphi$, является непрерывным линейным оператором. Поскольку пространство $\mathrm{Hol}(D)$ монтелевское (любое его ограниченное подмножество относительно компактно), этот оператор компактен (т. е. для любого ограниченного множества $Q \subset \mathrm{Hol}(D)$ множество $\Phi(Q)$ относительно компактно в $A(D)$). Фиксируем некоторую функцию $u \in X$ и определим линейный оператор $T: X \to X$, полагая $T(f) = u \cdot (f \circ \varphi)$, $f \in X$. Оператор T разлагается в композицию

$$T = M_u \circ \Phi \circ i : X \xrightarrow{i} \mathrm{Hol}(D) \xrightarrow{\Phi} A(D) \xrightarrow{M_u} X$$

операторов i, Φ и M_u; так как i и M_u непрерывны, а Φ компактен, то T тоже компактен. Цель данной работы — вычисление спектра оператора T (при заданных u и φ). В случае $n = 1$ и $D = \{z \in \boldsymbol{C} : |z| < 1\}$ аналогичная задача рассматривалась Камовицем [2] для пространств $X = A(D)$ и $X = H^p(D)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ (см. также [3]; [4]); для $X = A(D)$ в [2] предполагается только, что φ, $u \in A(D)$, $\|\varphi\|_\infty \leqslant 1$ и $u(z) = 0$ в тех точках z, в которых $|\varphi(z)| = 1$ (эти условия обеспечивают компактность T). Наш подход к задаче существенно отличается от подхода Камовица; он основан (главным образом) на применении теории возмущений в сочетании с теоремой Пуанкаре о локальной линеаризуемости (возмущенного) отображения φ в малой окрестности неподвижной точки. Именно благодаря теореме Пуанкаре удается решить задачу для общих многомерных областей D.

Автор признателен Е. А. Горину и В. Я. Лину за постановку задачи и помощь в работе.

2. Формулировка теоремы. Представим отображение φ в виде $\varphi(z) = Az + \psi(z)$, где $A : \boldsymbol{C}^n \to \boldsymbol{C}^n$ — линейное отображение, а $|\psi(z)| \leqslant \mathrm{const} \cdot |z|^2$ для всех $z \in \overline{D}$ (здесь и далее $|\cdot|$ означает l_∞ — норму в $\boldsymbol{C}^n$, т. е. $|w| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |w_i|$ для любого $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \boldsymbol{C}^n$). Пусть $\sigma(A)$ — спектр отображения A и $\sigma_0(A) = \sigma(A) \setminus \{0\} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$. Так как $\varphi(\overline{D}) \subset D$, то $|\alpha| < 1$ для всех $\alpha \in \sigma_0(A)$ (см. лемму 1). Напомним, что собственное значение $\alpha_p \in \sigma_0(A)$ называется *резонансным*, если существуют такие целые неотрицательные $m_1, \ldots, m_s$, что $\sum m_i \geqslant 2$ и $\alpha_p = \alpha_1^{m_1} \ldots \alpha_s^{m_s}$. Пусть $\sigma_*(A)$ — подмножество в $\sigma_0(A)$, состоящее из всех нерезонансных собственных значений (легко понять, что если $\sigma_0(A) \neq \varnothing$, то и $\sigma_*(A) \neq \varnothing$). Обозначим через $\Pi(\varphi)$ мультипликативную подполугруппу (с единицей) в $\boldsymbol{C}$, порожденную множеством $\{0\} \cup \sigma_*(A)$; иными словами, $\Pi(\varphi)$ состоит из 0 и всех чисел вида $\lambda = \prod\limits_{\alpha_i \in \sigma_*(A)} \alpha_i^{q_i}$, $q_i \in \boldsymbol{Z}_+$ (здесь и далее $\boldsymbol{Z}_+$ — множество всех неотрицательных целых чисел).

Следующая теорема содержит основной результат работы.

Теорема. *Спектр оператора T* (в X) *совпадает с множеством $u(0) \cdot \Pi(\varphi)$. В частности, если $u(0) = 0$, то оператор T квазинильпотентен, а если $u(0) = 1$, то $\sigma(T) = \Pi(\varphi)$.*

3. Доказательство теоремы. Доказательству теоремы мы предпошлем несколько лемм.

Лемма 1. а) $|\alpha| < 1$ *для всех* $\alpha \in \sigma(A)$. б) *Существует такое положительное* $\gamma < 1$, *что*

$$|\varphi^k(z)| \leqslant \text{const} \cdot \gamma^k \tag{4}$$

для всех $z \in \overline{D}$ *и всех* $k \in \mathbf{Z}_+$.

Доказательство. Как уже отмечалось, из условия $\varphi(\overline{D}) \subset \subset D$ следует, что итерации φ^k равномерно на D сходится к $\varphi^\infty \equiv \equiv z^0 = 0$; отсюда с помощью леммы Шварца легко получаются оба утверждения леммы.

Лемма 2. *Если* $u(0) = 0$, *то оператор* T *квазинильпотентен, так что* $\sigma(T) = \{0\} = u(0) \cdot \Pi(\varphi)$.

Доказательство. Если $u(0) = 0$, то

$$|u(z)| \leqslant \text{const} \cdot |z|, \quad z \in \overline{D}. \tag{5}$$

Так как

$$(T^N f)(z) = u(z) \prod_{k=1}^{N-1} u(\varphi^k(z)) \cdot f(\varphi^N(z)) \tag{6}$$

и функции $u \circ \varphi^k$, $f \circ \varphi^N \in A(D)$, а $u \in X$, то из формулы (6) и неравенств (1) — (5) следует, что

$$\| T^N f \|_X \leqslant (\text{const})^N \gamma^{\frac{N(N-1)}{2}} \| f \|_X.$$

Поэтому $\| T^N \|^{1/N} \leqslant \text{const} \cdot \gamma^{\frac{N-1}{2}}$ и $\overline{\lim\limits_{N \to \infty}} \| T^N \|^{1/N} = 0$, ч. т. д.

Если $u(0) \neq 0$, то спектры операторов T и $\frac{1}{u(0)} T$ связаны соотношением $\sigma(T) = u(0) \cdot \sigma\left(\frac{1}{u(0)} T\right)$; поэтому в силу леммы 2 нам достаточно рассмотреть случай, когда $u(0) = 1$. В этом случае для всех $z \in \overline{D}$

$$|u(z) - 1| \leqslant \text{const} \cdot |z|; \tag{7}$$

положим

$$u_N(z) = \prod_{k=0}^{N-1} u(\varphi^k(z)), \; z \in \overline{D}, \; N \in \mathbf{N}.$$

Так как $u \in X$ и $u \circ \varphi^k \in A(D)$ при $k \geqslant 1$, то $u_N \in X$; ясно, что для всех N

$$T u_N = u_{N+1}. \tag{8}$$

Лемма 3. *Если* $u(0) = 1$, *то последовательность* $\{u_N\}$ *сходится в* X *к некоторой функции* $u_* \neq 0$, *причем* $Tu_* = u_*$, *так что* $1 \in \sigma(T)$.

Доказательство. Из неравенств (1) — (4) и (7) легко следует, что $\{u_N\}$ является последовательностью Коши в X, и потому сходится в X к некоторой функции u_*. Так как $u_N(0) = 1$

для всех N, то $u_*(0)=1$ и $u_* \neq 0$. Из (8) следует, что $Tu_* = u_*$, ч. т. д.

Из доказанной леммы, в частности, следует, что при достаточно большом N функция

$$\vartheta_N(z) = \prod_{k=N}^{\infty} u(\varphi^k(z))$$

является обратимым элементом алгебры $A(D)$; фиксируем такое N; понятно, что $u_N = u_* \vartheta_N^{-1}$. Фиксируем также произвольное $\lambda \neq 0$ и определим линейные операторы

$$\widetilde{T}: X \to A(D) \text{ и } S_{\lambda, N}: X \to A(D),$$

полагая $\widetilde{T}f = f \circ \varphi$ и $S_{\lambda, N}f = \lambda^{-N} \vartheta_N^{-1} \cdot \widetilde{T}^N f$ (последняя формула имеет смысл, так как $A(D) \subset X$). Ясно, что $\widetilde{T}$ и $S_{\lambda, N}$ компактны. В следующей лемме собраны простые, но полезные тождества, связывающие эти операторы с операторами T, M_{u_m} и M_{u_*}.

Лемма 4. *Справедливы следующие соотношения:*

$$T(fa) = Tf \cdot \widetilde{T}a, \; a \in A(D), \; f \in X; \tag{9}$$

$$TM_{u_*} | A(D) = M_{u_*}\widetilde{T} \mid A(D); \tag{10}$$

$$T^m = M_{u_m}\widetilde{T}^m, m \geqslant 1; \tag{11}$$

$$\widetilde{T}\vartheta_N^{-1} = (\widetilde{T}^N u) \cdot \vartheta_N^{-1}; \tag{12}$$

$$(\widetilde{T}^N u) \cdot (\widetilde{T}^{N+1} f) = \widetilde{T}^N T f, \; f \in X \tag{13}$$

$$M_{u_*} S_{\lambda, N} = \lambda^{-N} T^N; \tag{14}$$

$$\widetilde{T} S_{\lambda, N} = S_{\lambda, N} T. \tag{15}$$

Доказательство. Тождества (9), (11) — (13) следуют прямо из определений; (10) следует из (9) и соотношения $Tu_* = u_*$ (см. лемму 3); (14) легко получается с помощью (11), а (15) — с помощью (12), (13).

В дальнейшем мы будем рассматривать $\widetilde{T}$ как (компактный) оператор, действующий в X, не забывая, однако, что $\widetilde{T}(X) \subset A(D)$. Пусть $\sigma(\widetilde{T})$ — спектр $\widetilde{T}$; любая собственная функция этого оператора принадлежит $A(D)$ (понятно, что 0 не является его собственным значением). Заметим, что операторы M_{u_*} и $S_{\lambda, N}$ инъективны, ибо $u_* \neq 0$ и $\vartheta_N^{-1} \neq 0$, а в $\mathrm{Hol}(D)$ нет делителей нуля. Следующая лемма сводит вычисления спектра (и собственных функций) оператора T к вычислению спектра (и собственных функций) $\widetilde{T}$.

Лемма 5. *Если* $u(0) = 1$, *то* $\sigma(T) = \sigma(\tilde{T})$ *и для каждого* $\lambda \in \sigma(\tilde{T}) \setminus \{0\}$ *оператор умножения* M_{u_*} *изоморфно отображает собственное подпространство* $\tilde{L}_\lambda$ *оператора* $\tilde{T}$ *на собственное подпространство* L_λ *оператора* T.

Доказательство. Ясно, что $0 \in \sigma(T) \cap \sigma(\tilde{T})$. Пусть $\lambda \neq 0$. Если $\lambda \in \sigma(\tilde{T})$ и $0 \neq a \in \tilde{L}_\lambda \subset A(D)$, то из (10) следует, что $TM_{u_*}a = \lambda M_{u_*}a$; поэтому $\lambda \in \sigma(T)$ и $M_{u_*}(\tilde{L}_\lambda) \subset L_\lambda$. Если же $\lambda \in \sigma(T)$ и $0 \neq f \in L_\lambda$, то положим $a = S_{\lambda, N}f$. Тогда из (14) и соотношения $T^N f = \lambda^N f$ следует, что $M_{u_*}a = f$, а из (15) — $\tilde{T}a = \lambda a$, поэтому $\lambda \in \sigma(\tilde{T})$ и $L_\lambda \subset M_{u_*}(\tilde{L}_\lambda)$. Лемма доказана.

Рассмотрим в $\boldsymbol{C}$-алгебре O_0 ростков голоморфных функций в точке $0 \in D$ линейный оператор $\tilde{\boldsymbol{T}}$, действующий по формуле $\tilde{\boldsymbol{T}}\mathfrak{f} = \mathfrak{f} \circ \boldsymbol{\varphi}$, где $\mathfrak{f} \in O_0$, а $\boldsymbol{\varphi}$ — росток отображения φ (в точке 0). Если $\lambda \neq 0$ — собственное значение этого оператора, то через $\tilde{L}_\lambda$ обозначим отвечающее ему собственное подпространство.

Лемма 6. *а) Если* $\lambda \neq 0$ — *собственное значение* $\tilde{\boldsymbol{T}}$ *и* $\mathfrak{f} \in \tilde{\boldsymbol{L}}_\lambda$, *то* $\lambda \in \sigma(\tilde{T})$ *и существует единственная функция* $f \in \tilde{L}_\lambda \subset A(D)$, *росток которой в* 0 *совпадает с* $\mathfrak{f}$.

б) Если $\lambda \in \sigma(\tilde{T}) \setminus \{0\}$, *то* λ — *собственное значение оператора* $\tilde{\boldsymbol{T}}$ *в* O_0.

Доказательство. Пусть f_V — представитель ростка $\mathfrak{f}$ в некоторой связной окрестности $V \subset D$ точки 0. Существует такое N_V, что $\varphi^N(\bar{D}) \subset V$ при всех $N \geqslant N_V$. Так как $\mathfrak{f} = \lambda^{-N}\tilde{\boldsymbol{T}}^N\mathfrak{f} = \lambda^{-N}\mathfrak{f} \circ \boldsymbol{\varphi}^N$ и V связна, то $f_V(z) = \lambda^{-N}f_V(\varphi^N(z))$ для всех $z \in V$. При $N \geqslant N_V$ функция $f = \lambda^{-N}f_V \circ \varphi^N$ принадлежит $A(D)$, не зависит от выбора N и удовлетворяет соотношению

$$\tilde{T}f = \lambda^{-N}f_V \circ \varphi^N \circ \varphi = \lambda \circ \lambda^{-(N+1)}f_V \circ \varphi^{N+1} = \lambda f.$$

Ее росток f_0 в точке 0 совпадает с $\mathfrak{f}$, ибо $f_0 = \lambda^{-N}\mathfrak{f} \circ \boldsymbol{\varphi}^N = \mathfrak{f}$. Единственность f с указанными свойствами следует из связности D. Утверждение (б) тривиально.

Из лемм 2, 3, 5 и 6 следует, что для доказательства теоремы нам достаточно показать, что множество $\Sigma(\tilde{\boldsymbol{T}})$ всех (ненулевых) собственных значений оператора $\tilde{\boldsymbol{T}}$ в O_0 совпадает с $\Pi(\varphi) \setminus \{0\}$. В следующей лемме мы докажем это в том (единственно важном для дальнейшего) частном случае, когда линейное приближение A отображения φ (в нуле) является «общим» и сжимающим линейным эндоморфизмом C^n. Общность A означает, что все его собственные значения $\alpha_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ просты, отличны от 0 и мультипликативно независимы (т. е. если $m_i \in \boldsymbol{Z}$ и $\sum |m_i| \neq \neq 0$, то $\alpha_1^{m_1} \ldots \alpha_n^{m_n} \neq 1$). Мы называем A сжимающим, если все $|\alpha_i| < 1$. Очевидно, что множество общих сжимающих эндоморфизмов всюду плотно в пространстве всех сжимающих эндоморфизмов.

Лемма 7. *Если линейное приближение A отображения φ в точке 0 является общим, то* $\Sigma(\widetilde{\boldsymbol{T}}) = \Pi(\varphi) \setminus \{0\}$.

Доказательство. Согласно лемме 1 эндоморфизм A является сжимающим, а так как он предполагается общим, то все его собственные значения нерезонансны. Поэтому к ростку $\boldsymbol{\varphi}$ отображения φ в точке 0 применима теорема Пуанкаре о локальной линеаризации [5, с. 176]. Таким образом, в точке 0 существует такой росток $\boldsymbol{w}$ системы координат w, биголоморфно связанной с исходными координатами z, что в этих координатах

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{w}) = A\boldsymbol{w}. \tag{16}$$

Так как спектр A прост, то, не ограничивая общности, можем считать, что в координатах w преобразование A диагонально: $A = \operatorname{diag}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$. Пусть $\boldsymbol{a} \in O_0$, $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{w}) = \sum_q a_q \boldsymbol{w}^q$ (здесь и далее $q = (q_1, \ldots, q_n) \in (\boldsymbol{Z}_+)^n$, $\boldsymbol{w}^q = \boldsymbol{w}_1^{q_1}, \ldots, \boldsymbol{w}_n^{q_n}$, $a_q \in \boldsymbol{C}$). Тогда

$$(\widetilde{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{a})(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{a}(A\boldsymbol{w}) = \sum_q a_q \alpha^q \boldsymbol{w}^q, \tag{17}$$

где $\alpha^q = \alpha_1^{q_1}, \ldots, \alpha_n^{q_n}$. Если $\boldsymbol{a}$ — собственный вектор оператора $\widetilde{\boldsymbol{T}}$ с собственным значением $\lambda \neq 0$, то из (17) следует, что

$$a_q \alpha^q = a_q \lambda \text{ для всех } q \in (\boldsymbol{Z}_+)^n. \tag{18}$$

Так как $\boldsymbol{a} \neq 0$, а числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ мультипликативно независимы, то из (18) легко следует, что существует единственное значение мультииндекса q, для которого $a_q \neq 0$ и $\lambda = \alpha^q$. Поэтому $\lambda \in \Pi(\varphi)$ (соответствующее собственное подпространство $\widetilde{\boldsymbol{L}}_\lambda$ оператора $\widetilde{\boldsymbol{T}}$ одномерно и порождается ростком $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{w}^q$). Обратно, если $\lambda \in \in \Pi(\varphi) \setminus \{0\}$, то $\lambda = \alpha^q$ для единственного значения мультииндекса q, и, согласно (17), росток $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{w}^q$ является собственным вектором оператора $\widetilde{\boldsymbol{T}}$ с собственным значением λ. Лемма доказана.

Пусть V — такое открытое подмножество в D, что $\overline{V} \subset D$; обозначим через $A(D, V)$ метрическое пространство всех непрерывных отображений $\overline{D}$ в $\overline{V}$, голоморфных в D, с метрикой $\rho(\psi', \psi'') = \sup_{z \in \overline{D}} |\psi'(z) - \psi''(z)|$ (здесь $|\cdot|$, как обычно, l_∞ — норма в $\boldsymbol{C}^n$).

Лемма 8. *Для всех $f \in X$ и всех $\psi', \psi'' \in A(D, V)$ справедливо неравенство*

$$\|f \circ \psi' - f \circ \psi''\|_X \leqslant \text{const} \cdot \rho(\psi', \psi'') \cdot \|f\|_X \tag{19}$$

(постоянная в правой части не зависит от f, ψ', ψ'').

Доказательство. Так как $f \circ \psi'$, $f \circ \psi'' \in A(D)$, то из (1) следует, что

$$\|f \circ \psi' - f \circ \psi''\|_X \leqslant \text{const} \cdot \|f \circ \psi' - f \circ \psi''\|_\infty. \tag{20}$$

Пусть $2\delta = \inf\{|z' - z''|: z' \in \overline{V}, z'' \in \partial D\}$ и V_δ — δ-окрестность компакта $\overline{V}$; ясно, что $\overline{V} \subset V_\delta \subset \overline{V}_\delta \subset D$ и

$$|f(v') - f(v'')| \leqslant \text{const} \cdot \|f\|_{\overline{V}_\delta, \infty} \cdot |v' - v''| \tag{21}$$

для всех $f \in X$ и всех $v', v'' \in \overline{V}$. Так как $\psi'(\overline{D})$ и $\psi''(\overline{D})$ содержатся в $\overline{V}$, то из неравенств (2), (20) и (21) следует справедливость неравенства (19), ч. т. д.

Пусть $\{B_k\}$ — некоторая последовательность комплексных $(n \times \times n)$-матриц, стремящаяся к нулю. Рассмотрим возмущения ψ_k отображения φ:

$$\psi_k(z) = \varphi(z) + B_k z, \ z \in \overline{D}.$$

Фиксируем такое открытое подмножество V в D, что $\varphi(\overline{D}) \subset \subset V \subset \overline{V} \subset D$; если k достаточно велико, то $\psi_k(\overline{D}) \subset V$; поэтому мы можем (и будем) считать, что последнее включение справедливо для всех k. Из леммы 8 следует, что последовательность компактных линейных операторов

$$\widetilde{T}_k: X \to X, \ \widetilde{T}_k f = f \circ \psi_k,$$

сходится (по оперативной норме) к оператору $\widetilde{T}$. Пусть $\sigma(\widetilde{T}_k)$ — спектр оператора $\widetilde{T}_k$.

Для каждой последовательности множеств $\sigma_k \subset \boldsymbol{C}$, $k = 1, 2, \ldots$, обозначим через $\lim \sigma_k$ подмножество в $\boldsymbol{C}$, состоящее из всех предельных точек всех тех последовательностей $\{\zeta_k\} \subset \boldsymbol{C}$, для которых $\zeta_k \in \sigma_k$ при каждом k.

Так как операторы $\widetilde{T}$, $\widetilde{T}_k$ компактны, то все ненулевые точки их спектров изолированы. Поэтому из стандартных результатов теории возмущений (см., например, [6] с. 269, теорема 3.16) вытекает справедливость следующей леммы.

Лемма 9. $\sigma(\widetilde{T}) = \lim \sigma(\widetilde{T}_k)$.

Для каждого линейного отображения C: $\boldsymbol{C}^n \to \boldsymbol{C}^n$ обозначим через $\Pi(C)$ мультипликативную подполугруппу (с единицей) в $\boldsymbol{C}$, порожденную 0 и спектром C.

Лемма 10. *Если последовательность линейных эндоморфизмов A_k: $\boldsymbol{C}^n \to \boldsymbol{C}^n$ сходится к сжимающему эндоморфизму A, то* $\Pi(A) = \lim \Pi(A_k)$.

Доказательство. Пусть $\sigma(A)$, $\sigma(A_k)$ — спектры отображений A, A_k; так как $A = \lim A_k$, то ясно, что $\sigma(A) = \lim \sigma(A_k)$. Отсюда сразу следует включение $\Pi(A) \subset \lim \Pi(A_k)$. Так как отображение A сжимающее, то спектры $\sigma(A_k)$ всех отображений A_k с достаточно большими номерами k лежат в круге радиуса

$r = r(A) < 1$. Отсюда следует, что если некоторая последовательность $\lambda_{k_j} \in \Pi(A_{k_j})$ сходится к $\lambda \neq 0$, то показатели степеней в мультипликативном представлении каждого λ_{k_j} через собственные значения отображения A_{k_j} ограничены в совокупности; поэтому, переходя к подпоследовательности $k_{j'}$, можно считать, что эти показатели (при подходящей нумерации собственных значений) для больших $k_{j'}$ стабилизируются. Учитывая, что собственные значения A_k сходятся к собственным значениям A, получаем, что $\lambda \in \Pi(A)$. Стало быть, $\lim \Pi(A_k) \subset \Pi(A)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Очевидно, сходящуюся к нулю последовательность матриц $\{B_k\}$ можно выбрать так, что для всякого k линейное приближение $A_k = A + B_k$ отображения ψ_k в точке 0 будет общим сжимающим эндоморфизмом $\boldsymbol{C}^n$. Поэтому к операторам $\tilde{T}_k$ применимы леммы 3, 5—7, из которых следует, что $\sigma(\tilde{T}_k) = \Pi(\psi_k) = \Pi(A_k)$. Согласно лемме 9, $\sigma(\tilde{T}) = \lim \sigma(\tilde{T}_k)$, а из леммы 10 следует, что $\lim \Pi(A_k) = \Pi(A)$. Таким образом, $\sigma(\tilde{T}) = \Pi(A)$. Остается заметить, что всякое ненулевое резонансное собственное значение A (мультипликативно) выражается через нерезонансные собственные значения (с неотрицательными показателями). Стало быть, $\Pi(A) = \Pi(\varphi)$. Теорема доказана.

Список литературы: 1. *Эрве М.* Функции многих комплексных переменных. — М.: Мир, 1965.—102 с. 2. *Kamowitz H.* Compact operators of the form UC_φ.— Pacific I. of Math., 1979, **80**, № 1, p. 205—211. 3. *Caughran I. G., Schwartz H. I.* Spectra of compact composition operators. — Proc. Amer. Math. Soc., 1975, **51**, p. 127—130. 4. *Shapiro I. H., Taylor P. D.* Compact, nuclear and Hilbert—Schmidt composition operators on H^2. — Indiana Univ. Math. J., 1973, **23**, p. 471—496. 5. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.—256 с. 6. *Като И.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.—132 с.

Поступила в редколлегию 01.09.83.