Министерство образования и науки Украины
Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина

Б. В. Кондратьев
Н. И. Лесик

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

Учебно-методическое пособие
для студентов 3-го курса
физического и радиофизического факультетов

Харьков – 2014

УДК 530 (075.8)
ББК 22.311
К 64

Рецензенты:

Н. Н. Колчигин – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической радиофизики радиофизического факультета Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина;

А. Г. Нерух – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики Харьковского национального университета радиоэлектроники.

Утверждено к печати решением Ученого совета
Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина
(протокол № 4 от 31.03.2014 г.)

Кондратьев Б. В.

К 64 Решение задач математической физики в криволинейных системах координат : учебно-методическое пособие для студентов 3-го курса физического и радиофизического факультетов / Б. В. Кондратьев, Н. И. Лесик. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2014. – 288 с.

В пособии приводятся общие формулы для оператора Лапласа в ортогональных криволинейных системах координат. Приведены без доказательства основные формулы теории цилиндрических и сферических функций. Подробно решено много задач математической физики в этих системах координат.

УДК 530 (075.8)
ББК 22.311

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

При решении задач математической физики используются все знания, полученные студентами в курсе «Высшей математики», – это дифференцирование, интегрирование, разложение в ряды, решение дифференциальных уравнений и др. Однако учебников или задачников с подробной разработкой методов решения таких задач, особенно в криволинейных системах координат (в частности, в цилиндрической и сферической системах), практически нет. Предлагаемое методическое пособие призвано восполнить этот пробел.

В первой части пособия приведены общий вид линейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка, рассматриваемого в задачах математической физики, а также граничные и начальные условия к нему. При этом оператор Лапласа Δ записывается в произвольной ортогональной криволинейной системе координат через коэффициенты Ламе; затем, в частности, в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат.

Во второй части приведены многие необходимые основные формулы из теории цилиндрических функций, затем даны подробные решения основных типов задач математической физики в цилиндрической системе координат. Во всех задачах сделаны детальные проверки решения. В третьей части в такой же последовательности приведены основные формулы теории функций Лежандра, сферических и шаровых функций. Затем подробно решаются задачи математической физики.

В конце пособия предложены задачи для самостоятельного решения и ответы к ним.

Предлагаемое пособие будет полезно студентам ФФ, РФФ, ФТФ и др. при изучении курсов «Методы математической физики» и многих разделов теоретической физики.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

Постановка задач математической физики

Представления дифференциального оператора Лапласа в различных криволинейных ортогональных системах координат. Общий вид постановки и решения трех основных задач математической физики.

Литература: [1] – гл. 2, § 1; гл. 3, § 1; гл. 4, § 1. [2] – гл. 14. [6] – § 18. [7] – § 2(8), § 4(3).

Большинство известных физических процессов описывается линейным неоднородным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка с постоянными коэффициентами вида

$$\Delta_3 u - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{b^2}\frac{\partial u}{\partial t} + c^2 \cdot u(M,t) = F(M,t). \qquad (*)$$

Здесь $M(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ – точка в некоторой трехмерной ортогональной криволинейной системе координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ и $t \geq 0$ – время; $u(M,t)$ – искомая функция и $F(M,t)$ – известная правая часть уравнения, описывающая заданные источники. Коэффициенты a,b,c считаем постоянными (они имеют определенный физический смысл).

При постановке задачи для уравнений математической физики нужно задать еще условия $\left.\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)\right|_S = q(M,t)$ при $\alpha,\beta = const \geq 0$ – граничные (краевые) и $u(M,0) = f(M)$, $\quad u_t'(M,0) = g(M)$ – начальные. Здесь $S = \partial V$ – граница заданной области V и $\vec{n}$ – внешняя нормаль к границе S. Если все заданные функции непрерывны в области $\overline{V} = V \bigcup S$, то поставленная задача (уравнение с условиями) всегда имеет единственное решение.

В криволинейной ортогональной системе координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ трехмерный дифференциальный оператор Лапласа Δ_3 имеет вид:

$$\Delta_3 = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\right) + \frac{\partial}{\partial\xi_2}\left(\frac{H_1 H_3}{H_2}\frac{\partial}{\partial\xi_2}\right) + \frac{\partial}{\partial\xi_3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial}{\partial\xi_3}\right)\right],$$

где коэффициенты Ламе $H_i \ (i = 1,\ 2,\ 3)$, которые определяют связь координат декартовой $Oxyz$ и некоторой криволинейной ортогональной системы $O\xi_1\xi_2\xi_3$, вычисляются по формулам

$$H_i^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial\xi_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\xi_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\xi_i}\right)^2 > 0 \qquad \textit{при} \ \ i = 1,\ 2,\ 3.$$

В частности, при переходе от декартовой $x,\ y,\ z$ к цилиндрической $\rho,\ \varphi,\ z$ системе координат (здесь $0 \le \rho \le r$ или $0 < r \le \rho < \infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,$ $|z| < \infty$) по формулам

$$x = \rho\cdot\cos\varphi, \quad y = \rho\cdot\sin\varphi, \quad z = z$$

для коэффициентов Ламе получим выражения

$$H_1 \equiv H_\rho = 1, \quad H_2 \equiv H_\varphi = \rho, \quad H_3 \equiv H_z = 1$$

и оператор Лапласа принимает вид:

$$\Delta_3 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

В сферической системе координат $\rho,\ \theta,\ \varphi$ (здесь $0 \le \rho \le r$ или $0 < r \le \rho < \infty$, $0 \le \varphi < 2\pi,\ |\theta| < \pi$) соответственно получим

$$x = \rho\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi, \quad y = \rho\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi, \quad z = \rho\cdot\cos\theta.$$

$$H_1 \equiv H_\rho = 1, \quad H_2 \equiv H_\theta = \rho, \quad H_3 = H_\varphi = \rho\sin\theta.$$

$$\Delta_3 = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right].$$

При вычислении интегралов в различных криволинейных ортогональных системах координат используются выражения

$$dS = \left((H_1 H_2 \cdot d\xi_1 d\xi_2)^2 + (H_1 H_3 \cdot d\xi_1 d\xi_3)^2 + (H_2 H_3 \cdot d\xi_2 d\xi_3)^2 \right)^{1/2}$$

– элемент граничной поверхности – и $dV = H_1 H_2 H_3 \cdot d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$ – элемент объема ($H_1 H_2 H_3 \cdot = W$ – вронскиан).

Наиболее часто используемым методом решения задач математической физики является метод разделения переменных, когда вместо решения единого дифференциального уравнения в частных производных (*) для функции многих переменных $u(M,t)$, где общее решение выражается через несколько произвольных функций, дело сводится к более простому решению нескольких обыкновенных дифференциальных уравнений, получаемых подстановкой фундаментального решения вида

$$u(M(\xi_1, \xi_2, \xi_3), t) = X_1(\xi_1) \cdot X_2(\xi_2) \cdot X_3(\xi_3) \cdot T(t).$$

Здесь общее решение каждого обыкновенного дифференциального уравнения содержит только произвольные постоянные, которые определяются из условий задачи.

Однако приходится учитывать, что общее уравнение вида (*) допускает разделение переменных (сведение к нескольким самостоятельным задачам для функций одной переменной каждая) только в 11 системах криволинейных ортогональных координат – декартовой, цилиндрической, сферической и др. Координатные поверхности в этих системах должны непрерывно (топологически) преобразовываться при переходе от одной системы координат к другой. Однако если искомая функция оказывается вектором $\vec{u}(M,t)$, то разделение переменных возможно только в трех системах координат – декартовой, цилиндрической и сферической.

Если определены собственные функции (базис) и собственные значения (числа) для оператора Лапласа Δ в заданном уравнении, то решение задачи математической физики можно записать в общем виде с использованием функции Грина (источника). Уравнения математической физики можно разделить на три типа – параболический, гиперболический и эллиптический. Их легко идентифицировать, сравнивая степени аргументов у производных для случая двух переменных $\left(x^2-t,\, x^2-t^2,\, x^2+y^2\right)$.

Для уравнения параболического типа (уравнения переноса, теплопроводности, диффузии и др.) в трехмерной области V, ограниченной поверхностью S, поставим задачу Дирихле (первую краевую задачу)

$$\begin{cases} \Delta_3 u - \dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial u}{\partial t} = F(M,t). & u = u\left(M,\, t\right). \\ u\big|_S = q(M,t). & M(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in V, \quad S=\partial V, \quad \vec{n}\perp S. \\ u\big|_{t=0} = f(M). & 0\le t<\infty. \qquad b=\text{const}>0. \end{cases}$$

Решение этой задачи записывается в виде

$$u(M,t)=\iiint\limits_V f(M')\cdot G(M,M'|t)\cdot dV' -$$

$$-b^2\cdot\int\limits_0^t d\tau\left\{\iiint\limits_V f(M',\tau)\cdot G(M,M'|t-\tau)\cdot dV' +\right.$$

$$\left.+\oiint\limits_S q(M',\tau)\cdot\frac{\partial}{\partial n'}G(M,M'|t-\tau)\,dS'\right\}.$$

Здесь функция Грина (источника) равна

$$G(M,M'|t)=\sum_{n,k,m} e^{-(b\mu_{nkm})^2 t}\cdot\Phi_{nkm}(M)\cdot\overline{\Phi}_{nkm}(M'),$$

где $\Phi_{nkm}(M)$ – собственные функции и $\lambda_{nkm}=-\mu_{nkm}^2<0$ – собственные значения краевой задачи. Эти функции взаимно ортогональны

$$\left(\Phi_{nkm},\Phi_{n'k'm'}\right)=\iiint\limits_V \Phi_{nkm}(M)\cdot\overline{\Phi}_{n'k'm'}(M)\,dV=\delta_{nn'}\cdot\delta_{kk'}\cdot\delta_{mm'}.$$

Здесь M – точка измерения, а M' – точки источников, по которым ведется интегрирование. Экспонента (с зависимостью от времени) называется ядром функции источника; ядро в основном и влияет на сходимость ряда. Здесь тройной ряд сходится абсолютно и равномерно (правильно), и его можно нужное число раз дифференцировать и интегрировать. Нетрудно проверить, что разрешающая формула удовлетворяет всем условиям задачи.

Если решается вторая краевая задача с граничным условием $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_S = q(M,t)$ (условие Неймана) или третья краевая задача $\left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial n} + a\cdot u\right)\right|_S = q(M,t)$ при $a = const$ (смешанное граничное условие), то в формуле решения нужно сделать замену $\dfrac{\partial}{\partial n} \to -1$. Такую же замену нужно делать и при решении задач гиперболического и эллиптического типов.

Задача для уравнения гиперболического типа (уравнения волновое, колебаний и др.) в трехмерном пространстве с граничным условием первого рода имеет вид:

$$\begin{cases} \Delta_3 u - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(M,t). & u = u(M,\, t). \\ u\big|_S = q(M,t); & M(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in V; \quad S = \partial V, \quad \vec{n}\perp S. \\ u\big|_{t=0} = f(M), \qquad u'_t\big|_{t=0} = g(M). & a = \text{const} > 0. \end{cases}$$

Формула для решения этой задачи будет

$$u(M,t) = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V f(M')G(M,M'|t)\cdot dV' + \iiint_V g(M')G(M,M'|t)\cdot dV' -$$

$$-a^2\cdot\int_0^t d\tau\left\{\iiint_V f(M',\tau)\cdot G(M,M'|t-\tau)\cdot dV' +\right.$$

$$\left.+\oiint_S q(M',\tau)\cdot\frac{\partial}{\partial n'}G(M,M'|t-\tau)\,dS'\right\}.$$

Здесь обозначения аналогичны принятым в предыдущей формуле решения. Функция Грина равна

$$G(M,M'|t)=\sum_{n,k,m}\frac{\sin\omega_{nkm}t}{\omega_{nkm}^{p}}\cdot\Phi_{nkm}(M)\cdot\bar{\Phi}_{nkm}(M'),$$

где $\omega_{nkm}=a\mu_{nkm}>0$ – частота колебаний. Показатель степени $p\ge 1$ зависит от условий задачи. Обычно зависимость от времени в ядрах функции Грина получается более сложной.

Общий вид уравнения эллиптического типа – это, например, стационарное уравнение амплитуд Гельмгольца $\Delta_3 u(M)+æ^2\cdot u(M)=F(M)$. Оно получается из волнового уравнения, если зависимость от времени задать в виде $e^{\pm i\omega t}$ и $æ=\dfrac{\omega}{a}>0$. Из него получим уравнения $\Delta_3 u(M)=F(M)$ – Пуассона $(æ=0)$ и $\Delta_3 u(M)=0$ – Лапласа $(F=æ=0)$. Поставим первую краевую задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца

$$\begin{cases}\Delta_3 u(M)+æ^2 u(M)=F(M). & u=u\left(M\right). \qquad æ=const.\\ \qquad u\big|_S=q(M). & M(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in V;\quad S=\partial V,\quad \vec{n}\perp S.\end{cases}$$

Здесь обычно название всей задачи соответствует названию граничного условия, затем указывается для какого уравнения. Все используемые ниже обозначения аналогичны принятым в предыдущих задачах.

Решение нашей задачи запишем в виде

$$u(M)=\iiint_V F(M')\cdot G(M,M')\cdot dV'+\oint\!\!\oint_S q(M')\cdot\frac{\partial}{\partial n'}G(M,M')\cdot dS',$$

где функция Грина (источника) равна

$$G(M,M')=\sum_{n,k,m}\frac{-1}{\mu_{n,k,m}^2-æ^2}\cdot\Phi_{nkm}(M)\cdot\bar{\Phi}_{nkm}(M').$$

Здесь $\Phi_{nkm}(M)$ – собственные функции оператора Лапласа Δ и $\lambda_{nkm}=-\mu_{nkm}^2<0$ – собственные значения. После выполнения интегрирования ядро решения сводится к комбинации гиперболических функций. Поэтому все ряды хорошо сходятся.

Необходимо отметить, что для решения задачи для уравнения Пуассона $\Delta_3 u(M) = F(M) \neq 0$ или Лапласа $\Delta_3 u(M) = 0$ с граничным условием второго рода $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_S = q(M)$ (условие Неймана) необходимо выполнение условия разрешимости

$$\iiint\limits_V \Delta_3 u(M) \cdot dV = \oiint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n} dS \quad \text{или} \quad \iiint\limits_V F(M) \cdot dV = \oiint\limits_S q(M)\, dS.$$

Вообще задачи для уравнения Пуассона и Лапласа с граничным условием Неймана решаются только с точностью до аддитивной постоянной.

Выше были приведены разрешающие формулы для решения задач математической физики в трехмерном пространстве, но после элементарных преобразований их можно использовать для решения соответствующих задач на плоскости или на отрезке. Все вычисления значительно упрощаются, если предварительно удается отделить от искомой функции множители с несколькими переменными (частично разделить переменные).

Таким образом, оказывается наиболее рациональным следующий порядок решения задач математической физики: сначала отделение одного-двух пространственных множителей (ортов) для сведения к уравнению одного переменного, затем решение этого уравнения (возможно, с использованием приведенных формул).

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

Решение задач математической физики с использованием цилиндрических функций

Основные вопросы: Цилиндрическая система координат, вид оператора Лапласа Δ в этой системе. Уравнение Бесселя и его решения – функции Бесселя, Неймана, Ханкеля. Основные свойства этих функций: ряды, рекуррентные формулы, нули, интегралы, асимптотики. Функции Бесселя полуцелого порядка и модифицированные функции Бесселя. Решение краевых задач для уравнения Бесселя; собственные функции и собственные значения этих задач. Постановка задач математической физики в цилиндрической системе координат; естественные граничные условия. Примеры подробного решения разных типов таких задач.

Литература: [1] – Дополнение II (1). § 1 (2,3), § 2, § 3 (1–3), § 4 (6), § 5 (2). [2] – гл. 14, § 1–4, 6. [3] – гл. 13, § 1-7; гл. 17, § 2. [4] – п. 144–147, 151, 154, 155. [5] – гл. 4, № 92–94, 110, 135, 148, 149; гл. 8, № 20, 28, 40, 52, 58, 76.

Задания: [8] – № 113, 120, 121, 156-158, 200, 204. [9] – гл. 4, № 108; гл. 5, № 27, 28; гл. 6, № 59, 60, 62.

ТЕМА 2.1. Основные свойства цилиндрических функций и разложение в ряды по функциям Бесселя

В гильбертовом пространстве $L_2(0,r|\rho)$ со скалярным произведением вида $(f,g)=\int\limits_0^r f(\rho)\overline{g(\rho)}\cdot\rho\,d\rho$ (здесь $f,g\in L_2$ и ρ – весовая функция) рассмотрим краевую задачу Штурма–Лиувилля для оператора Бесселя

$$\hat{D}_Б^{(\nu)}\equiv\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho\frac{d}{d\rho})-\frac{\nu^2}{\rho^2}\qquad\text{при }\ \nu\ge 0\ \text{ и }\ \rho\in(0,r),$$

состоящую в отыскании собственных функций $R(\rho)\ne 0$ и собственных значений (чисел) $\lambda=-\mu^2\le 0,$ удовлетворяющих самосопряженной краевой задаче вида

$$\hat{D}_Б^{(\nu)}R=\lambda R(\rho);\qquad |R(0)|<\infty,\ \ R(r)=0$$

(задача Дирихле, первая краевая задача). Эта задача имеет бесконечное множество собственных значений $\lambda_k=-\mu_k^2=-\left(\alpha_k^{(\nu)}/r\right)^2<0$ (дискретный спектр), где $\alpha_k^{(\nu)}>0$ – простой положительный k-тый корень дисперсионного (характеристического) уравнения $J_\nu(\alpha_k^{(\nu)})=0$; причем последовательность корней только возрастает $\alpha_k^{(\nu)}<\alpha_{k+1}^{(\nu)}$ при всех номерах $k\in N$. Отметим, что величины $\alpha_k^{(\nu)}>0$ не являются корнями функций другого индекса, например $J_{\nu+1}\left(\alpha_k^{(\nu)}\right)\ne 0$.

Здесь $J_\nu(x)$ – функция Бесселя (цилиндрическая функция первого рода) порядка (индекса) $\nu,$ которая задается в виде ряда

$$J_\nu(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\cdot\left(\frac{1}{2}x\right)^{2m+\nu}}{m!\cdot\Gamma(m+\nu+1)}\quad\text{при}\quad x,\nu\in R.$$

Если $x \in R$ и $\nu \geq 0$, то радиус сходимости ряда будет $R_{cx} = \infty$ и функции Бесселя ограничены $\left|J_\nu(x)\right| \leq 1$; в наших задачах обычно будет $\nu = n \in Z_0 \equiv \{0, 1, 2, ...\}$.

Каждому собственному значению λ_k (номеру $k \in N$) соответствует единственная собственная функция (собственный вектор) вида

$$R_k^{(\nu)}(\rho) = \frac{\sqrt{2}}{r} J_\nu\left(\alpha_k^{(\nu)} \frac{\rho}{r}\right) \Big/ J_{\nu+1}\left(\alpha_k^{(\nu)}\right) = \frac{\sqrt{2}}{r} J_\nu(\mu_k \rho) \Big/ J_{\nu+1}(\mu_k r).$$

Значит все собственные значения не вырожденные, а множество собственных функций образует ортонормированный базис $\left(R_k^{(\nu)}, R_{k'}^{(\nu)}\right) = \delta_{kk'}$ при $k, k' \in N$ в пространстве $L_2\left(0, r\middle|\rho\right)$. Поэтому для каждой непрерывной функции $f(\rho) \in L_2$ можно единственным образом получить разложение в ряд Фурье–Бесселя

$$f(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot R_k^{(\nu)}(\rho),$$

который сходится абсолютно и равномерно (правильно) внутри интервала $0 < \rho < r$ и допускает там двукратное дифференцирование. Коэффициенты этого разложения (координаты) определяются с помощью скалярного произведения (интеграла с весом ρ):

$$C_k = \left(f, R_k^{(\nu)}\right) = \int_0^r f(\rho) \cdot \overline{R}_k^{(\nu)}(\rho) \cdot \rho \, d\rho \qquad \text{при} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Нулевой орт $R_0^{(n)}(\rho)$ при $k = 0$ и всех $n \in \mathbb{Z}_0$ отбрасываем, так как корня $\alpha_0^{(0)} = 0$ не существует (там $J_0\left(0\right) = 1 > 0$), а корни $\alpha_0^{(n)} = 0$ для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$ приводят к нулям функции $R_0^{(n)}(\rho) = 0$ (здесь $J_n(0) = 0$ – нулевые корни *n*-того порядка). Однако, при $n = 0$ в разложениях по $J_0\left(\alpha_k^{(0)} \dfrac{\rho}{r}\right)$ приходится учитывать и орт $R_0^{(0)}(\rho) = \dfrac{\sqrt{2}}{r} > 0$.

Приведем далее без доказательств некоторые важные свойства цилиндрических функций.

Общее решение уравнения Бесселя

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(\mu^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y(x) = 0 \qquad \text{при} \quad \mu, \nu \ge 0$$

имеет вид: $y(x) = C_1 \cdot J_\nu(\mu x) + C_2 \cdot N_\nu(\mu x)$, где $C_1, C_2 = const$; а $J_\nu(\mu x)$ и $N_\nu(\mu x)$ – два линейно независимых решения уравнения, это функции Бесселя и Неймана (иногда Вебера $Y_\nu(\mu x)$) соответственно. Вводятся также две функции Ханкеля $H_\nu^{(1,2)}(x) = J_\nu(x) \pm i \cdot N_\nu(x)$. Используем для всех этих функций общее обозначение $Z_\nu(x)$ и запишем несколько рекуррентных формул и интегралов

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\pm\nu} \cdot Z_\nu(x)\right) = \pm x^{\pm\nu} \cdot Z_{\nu\mp1}(x).$$

$$\frac{\nu}{x} \cdot Z_\nu(x) = Z_{\nu\pm1}(x) \pm Z'_\nu(x); \qquad J'_0(x) = -J_1(x).$$

$$Z_{\nu-1}(x) \pm Z_{\nu+1}(x) = \begin{cases} \frac{2\nu}{x} \cdot Z_\nu(x) \\ 2Z'_\nu(x) \end{cases}.$$

$$\int Z_\nu^2(x) \cdot x dx = \frac{1}{2}x^2 \cdot \left[Z_\nu'^2(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) \cdot Z_\nu^2(x) \right] =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \left[Z_\nu^2(x) - Z_{\nu+1}(x) \cdot Z_{\nu-1}(x) \right].$$

$$\int J_0(x) x dx = x J_1(x); \; \int J_0(x) x^3 dx = 2x^2 \cdot J_0(x) + x(x^2 - 4) \cdot J_1(x).$$

$$J_n(-x) = (-1)^n \cdot J_n(x), \quad J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad N_n(0) = -\infty.$$

$$W(J_\nu(x), J_{-\nu}(x)) = -\frac{2}{\pi x}\sin \pi\nu, \qquad W(J_\nu(x), N_\nu(x)) = \frac{2}{\pi x} \ne 0 \; –$$

– вронскианы.

При больших значениях аргумента $|x| >> \nu^2 > 1$ получим асимптотические формулы

$$\begin{matrix} J_\nu(x) \\ N_\nu(x) \end{matrix} \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \left(x - \frac{\pi}{4}(2\nu+1) \right).$$

$$H_\nu^{(1,2)}(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot e^{\pm i\left(x - \frac{\pi}{4}(2\nu+1) \right)}.$$

Только при значениях индекса $\nu = \pm\frac{1}{2}$ цилиндрические функции сводятся к функциям элементарным, например

$$J_{\pm\frac{1}{2}}(x) = -N_{\mp\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix}\, x,$$

$$H_{-\frac{1}{2}}^{(1,2)}(x) = \mp i \cdot H_{\frac{1}{2}}^{(1,2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot e^{\pm ix}.$$

Отсюда, воспользовавшись рекуррентными соотношениями, можно получить нужные выражения через комбинации элементарных функций для любой цилиндрической функции с полуцелым индексом $\nu = n + \frac{1}{2}$ при $n \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$.

Модифицированные цилиндрические функции (функции от чисто мнимого аргумента ix при $x \in \mathbb{R}$):

$$J_\nu(ix) = e^{i\frac{\pi}{2}\nu} \cdot I_\nu(x), \quad \text{где } I_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{2m+\nu}}{m! \cdot \Gamma(m+\nu+1)} \quad \text{при } x, \nu \in \mathbb{R}_+.$$

$$H_\nu^{(1)}(ix) = -\frac{2i}{\pi} e^{-i\nu\frac{\pi}{2}} \cdot K_\nu(x).$$

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \left(\mu^2 + \frac{\nu^2}{x^2} \right) y(x) = 0$$ – модифицированное уравнение.

$$\begin{aligned} I_{-n}(x) &= I_n(x) \\ K_{-n}(x) &= K_n(x) \end{aligned} \quad n \in \mathbb{Z}; \qquad I_{\nu-1}(x) \pm I_{\nu+1}(x) = \begin{cases} 2I'_\nu(x) \\ \dfrac{2\nu}{x} I_\nu(x) \end{cases};$$

для функций $K_\nu(x)$ в последней рекуррентной формуле перед фигурной скобкой нужно поставить знак минус.

$$I_n(0) = \delta_{0,n}, \quad I_n(+\infty) = +\infty; \quad K_n(0) = +\infty, \quad K_n(+\infty) = 0.$$

$$I_\nu(x) \cong \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \quad K_\nu(x) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \qquad \text{при } x >> 1.$$

Краевая задача Штурма–Лиувилля с самосопряженными смешанными (сложными) граничными условиями (условия Дúни) будет

$$D_Б^{(\nu)} R = \lambda R(\rho); \quad |R(0)| < \infty, \quad R'(r) + a \cdot R(\rho) = 0; \qquad a \geq 0.$$

Здесь $\hat{D}_Б^{(\nu)}$ – оператор Бесселя порядка $\nu \geq 0$ и интервал $0 < \rho < r$. Собственные числа задачи равны $\lambda_k = -\mu_k^2 = -\left(\beta_k^{(\nu)} / r\right)^{2`} < 0$ при $k \in \mathbb{N}$, где $\beta_k^{(\nu)} > 0$ – положительный k-тый корень уравнения $\beta \cdot J'_\nu(\beta) + ar \cdot J_\nu(\beta) = 0$; причем значения корней растут $\beta_k^{(\nu)} < \beta_{k+1}^{(\nu)}$ при всех $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$.

Для этой задачи множество ортонормированных собственных функций (базис) при $k \in \mathbb{N}$ имеет вид:

$$\Re_k^{(\nu)}(\rho) = \frac{\sqrt{2}}{r} \cdot \left(1 + \frac{a^2 r^2 - \nu^2}{\beta_k^{(\nu)2}}\right)^{-1/2} \cdot J_\nu\left(\beta_k^{(\nu)} \frac{\rho}{r}\right) \Big/ J_\nu\left(\beta_k^{(\nu)}\right).$$

Здесь случай $a = 0$ $(\nu > 0)$ соответствует граничному условию Неймана $R'(r) = 0$; при $a \neq 0$ имеем смешанное условие. Это, соответственно, вторая и третья краевые задачи. Разделив сложное граничное условие на коэффициент a и положив $a \to \infty$, получим условие Дирихле (первая краевая задача).

Приведем несколько граничных значений для собственных функций:

$$R_k^{(\nu)}(r) = 0 \because J_\nu\left(\alpha_k^{(\nu)}\right) = 0; \qquad \left|R_k^{(\nu)}(0)\right| < \infty.$$

$$\frac{d}{d\rho}R_k^{(\nu)}(r) = -\frac{\sqrt{2}}{r}\alpha_k^{(\nu)} < 0 \because J'_\nu(\alpha) = \frac{\nu}{\alpha}J_\nu(\alpha) - J_{\nu+1}(\alpha).$$

$$\Re_k^{(\nu)}(r) = \frac{\sqrt{2}}{r}\left(1 + \frac{a^2r^2 - \nu^2}{\beta_k^{(\nu)2}}\right)^{-1/2} > 0; \qquad \left|\Re_k^{(\nu)}(0)\right| < \infty.$$

$$\frac{d}{d\rho}\Re_k^{(\nu)}(r) = -\frac{a\sqrt{2}}{r}\left(1 + \frac{a^2r^2 - \nu^2}{\beta_k^{(\nu)2}}\right)^{-1/2} < 0 \because \beta \cdot J'_\nu(\beta) + ar \cdot J_\nu(\beta) = 0.$$

Приведем часто встречающиеся разложения в ряды Фурье–Бесселя при $\nu \geq 0$ в интервале $0 < \rho < r$:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{r}\right)^\nu = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{\alpha_k^{(\nu)}}R_k^{(\nu)}(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_\nu\left(\alpha_k^{(\nu)}\frac{\rho}{r}\right)}{\alpha_k^{(\nu)} \cdot J_{\nu+1}\left(\alpha_k^{(\nu)}\right)} \because J_\nu(\alpha) = 0.$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{r}\right)^\nu = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{ar+\nu}{\beta_k^{(\nu)2} + a^2r^2 - \nu^2}\frac{J_\nu\left(\beta_k^{(\nu)}\frac{\rho}{r}\right)}{J_\nu\left(\beta_k^{(\nu)}\right)} \because \beta \cdot J'_\nu(\beta) + ar \cdot J_\nu(\beta) = 0.$$

$$\frac{1}{8}\left(1 - \frac{\rho^2}{r^2}\right) = \frac{r}{\sqrt{2}} \cdot \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_k^{(0)3}}R_k^{(0)}(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\alpha_k^{(0)}\frac{\rho}{r}\right)}{\alpha_k^{(0)3} \cdot J_1\left(\alpha_k^{(0)}\right)} \because J_0(\alpha) = 0.$$

$$\frac{1}{8}\left(2\frac{\rho^2}{r^2} - 1\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\beta_k^{(0)}\frac{\rho}{r}\right)}{\beta_k^{(0)2} \cdot J_0\left(\beta_k^{(0)}\right)} \because J'_0(\beta) = -J_1(\beta) = 0.$$

$$\frac{J_\nu\left(a\frac{\rho}{r}\right)}{2J_\nu(a)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k^{(\nu)} \cdot J_\nu\left(\alpha_k^{(\nu)}\frac{\rho}{r}\right)}{\left(\alpha_k^{(0)2} - a^2\right) \cdot J_{\nu+1}\left(\alpha_k^{(\nu)}\right)} \because J_\nu(\alpha) = 0.$$

ТЕМА 2.2. Общая схема постановки и решения задач математической физики в цилиндрической системе координат

В этих задачах искомая функция $u(\rho,\varphi,z,t)$ может зависеть от следующих координат: $\rho\in[0,r]$ (или $\rho\in[r,\infty)$ при $r>0$) – радиус, $\varphi\in[0,2\pi)$ – угол, $z\in[0,H]$ (иногда $z\in[0,\infty)$ или $z\in(-\infty,+\infty)$) – высота и $t\in[0,\infty)$ – время.

Обычно в условиях задач явно не записываются естественные граничные условия ограниченности при $\rho=0,\ \rho=+\infty$ или $z=\pm\infty$ и условия периодичности по φ. Значение $\rho=0$ здесь не является граничным – это центр круга $0\le\rho\le r$.

Оператор Лапласа будем записывать в виде $\Delta_3=\Delta_2+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$, где $\Delta_2=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial}{\partial\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ – его плоская часть. После разделения переменных в искомой функции $u(\rho,\varphi,z,t)=R(\rho)\cdot\Phi(\varphi)\cdot Z(z)\cdot T(t)$ (фундаментальное представление) оператор Δ_2 сводится к оператору Бесселя $\hat{D}_Б^{(n)}=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{d}{d\rho}\right)-\dfrac{n^2}{\rho^2}$, так как в силу аксиальной симметрии цилиндрической системы координат на угловую переменную φ накладываются условия периодичности, а зависимость решения от этой переменной обычно выражается через функции $\sin n\varphi$ или $\cos n\varphi$ при $n\in\mathbb{Z}$. Если $n=0$, то решение вообще не зависит от угла φ. Обычно при разделении переменных зависимость от угла φ отделяют первой. В случае сложной зависимости от угла φ искомую функцию $u(\rho,\varphi,z,t)$ приходится раскладывать в ряд Фурье по углам.

Так как координата z является декартовой, то в нестационарных задачах соответствующая зависимость выражается через колебательные собственные функции $Z_k(z) = \sqrt{\frac{2}{H}} \cdot \sin \mu_k z$ или $Z_k(z) = \sqrt{\frac{2}{H}} \cdot \cos \mu_k z$. Однако, в задачах стационарных (без учета времени, а это уравнения типа Гельмгольца и т. п.) могут получаться монотонные гиперболические функции $sh\mu_k z$ или $ch\mu_k z$. При $z = 0$ задача будет плоской.

Основной метод решения задач в данном разделе – это метод разделения переменных (разложение по собственным функциям), когда решение получают в виде ряда по собственным функциям оператора Бесселя.

Решение задач для уравнения теплопроводности (переноса)

<u>Задача 2.1.</u> Плоская задача для однородного уравнения теплопроводности (переноса) внутри круга с граничным условием Дирихле (уравнение параболического типа с граничным условием первого рода; здесь принято $z = 0$).

$$\begin{cases} \Delta_2 u - \dfrac{1}{b^2} u_t' = 0. \\ u\big|_{\rho=r} = At \cdot \cos n\varphi; \\ u\big|_{t=0} = 0. \end{cases} \qquad \begin{aligned} &u = u(\rho, \varphi, t) \; при \; 0 \le \rho \le r. \\ &0 \le \varphi < 2\pi, \; 0 \le t < \infty; \; n \in \mathbb{N}. \\ &A, b, r = const > 0. \end{aligned}$$

Условие ограниченности в центре круга при $\rho = 0$ и условия периодичности по углу φ можно явно не записывать.

Физически задача может описывать нагревание или остывание отрезка круглого цилиндра (вдали от его краев). Изменение температуры цилиндра происходит за счет боковых источников и не равномерно. Начальное условие можно также выбирать в виде $u\big|_{t=0} = B \cdot \left(\dfrac{\rho}{r}\right)^n \cdot \cos n\varphi$; аналогично можно задать и правую часть уравнения.

1. Отделение зависимости от угла φ проводится по формуле, $u(\rho, \varphi, t) = \upsilon(\rho, t) \cdot \cos n\varphi$; тогда новая задача есть

$$\begin{cases} \hat{D}\upsilon - \dfrac{1}{b^2}\upsilon'_t = 0. \\ \left|\upsilon(0,t)\right| < \infty,\ \upsilon(r,t) = At; \\ \upsilon(\rho,0) = 0. \end{cases}$$

$\upsilon = \upsilon(\rho,t)$ при $0 \le \rho \le r,\quad 0 \le t < \infty.$

$\hat{D} \equiv \dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{d}{d\rho}\right) - \dfrac{n^2}{\rho^2}$ – оператор Бесселя порядка $n \in \mathbb{N}$.

2. Приведение граничных условий к однородным выполняется с помощью замены $\upsilon(\rho,t) = w(\rho,t) + \alpha(t)\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^m + \beta(t)$ при $m = 1, 2, 3, \ldots$, где $\left|\upsilon(0,t)\right| = \left|w(0,t) + 0 + \beta(t)\right| < \infty \Rightarrow \left|w(0,t)\right| < \infty$ и примем $\beta(t) = 0$; $\upsilon(r,t) = w(r,t) + \alpha(t) = At \Rightarrow w(r,t) = 0$ при $\alpha(t) = At$. Тогда получим $\upsilon(\rho,t) = w(\rho,t) + At\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^m$. Для определения показателя степени m используем уравнение задачи

$$\hat{D}\upsilon - \frac{1}{b^2}\upsilon'_t \equiv \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right) - \frac{n^2}{\rho^2}\upsilon - \frac{1}{b^2}\frac{\partial\upsilon}{\partial t} =$$

$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial w}{\partial\rho}\right) - \frac{n^2}{\rho^2}w - \frac{1}{b^2}\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{m^2 - n^2}{\rho^2}\cdot At\left(\frac{\rho}{r}\right)^m - \frac{A}{b^2}\left(\frac{\rho}{r}\right)^m = 0.$$

Здесь воспользовались значениями производных

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d}{d\rho}\rho^m\right) = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(m\rho^m\right) = \frac{1}{\rho}m^2\rho^{m-1} = \frac{m^2}{\rho^2}\rho^m.$$

Уравнение для функции $w(\rho,t)$ упрощается, если выбрать $m = n$ – коэффициент при φ. Тогда задача будет

$$\begin{cases} \hat{D}w - \dfrac{1}{b^2}w'_t \equiv \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial w}{\partial\rho}\right) - \dfrac{n^2}{\rho^2}w - \dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{A}{b^2}\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^n. \\ \left|w(0,t)\right| < \infty,\quad w(r,t) = 0; \qquad w = w(\rho,t)\ \textit{при}\ 0 \le \rho \le r, \\ w(\rho,0) = 0. \qquad 0 \le t < \infty. \end{cases}$$

Связь с исходной функцией $u(\rho,\varphi,t)$ имеет вид:

$$u(\rho,\varphi,t)=\upsilon(\rho,t)\cdot\cos n\varphi=\left[At\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n+w(\rho,t)\right]\cdot\cos n\varphi.$$

3. Разделение переменных и решение краевой задачи для оператора Бесселя $\hat{D}=\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d}{d\rho}\right)-\frac{n^2}{\rho^2}$.

Положим фундаментальное решение $w(\rho,t)=R(\rho)\cdot T(t)$ и в гильбертовом пространстве $L_2(0,r|\rho)$ решим краевую задачу Штурма–Лиувилля с самосопряженными граничными условиями первого рода:

$$\hat{D}R=\lambda\cdot R(\rho);\quad |R(0)|<\infty,\quad R(r)=0 \text{ – задача Дирихле.}$$

Решение этой задачи известно:

$$R_k(\rho)=\frac{\sqrt{2}}{r}\cdot J_n(\mu_k\rho)/J_{n+1}(\mu_k r) \text{ – орты (собственные функции).}$$

$$\lambda_k=-\mu_k^2=-\left(\alpha_k^{(n)}/r\right)^2<0 \text{ – собственные значения при } k\in\mathbb{N}.$$

Здесь дисперсионное уравнение $J_n\left(\alpha_k^{(n)}\right)=0$ и $\alpha_k^{(n)}>0$ – положительные простые корни функции Бесселя n-го порядка, причем $J_m\left(\alpha_k^{(n)}\right)\neq 0$ при $n\neq m$.

Разложение функции $w(\rho,t)$ по найденным ортам $R_k(\rho)$ имеет вид:

$$w(\rho,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\cdot R_k(\rho)\qquad\text{при } (R_k,R_{k'})=\delta_{kk'}.$$

Здесь коэффициенты разложения (координаты) удовлетворяют необходимому условию сходимости ряда $\lim_{k\to\infty}T_k(t)=0$. Этот ряд сходится правильно (абсолютно и равномерно) при заданных ρ и t, поэтому его можно дважды дифференцировать.

4. Вывод дифференциального уравнения для функции $T_k(t)$.

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial w}{\partial\rho}\right)-\frac{n^2}{\rho^2}w-\frac{1}{b^2}\frac{\partial w}{\partial t}=\sum_k\left\{\hat{D}R_kT_k-\frac{1}{b^2}R_kT_k'\right\}=$$

$$=-\frac{1}{b^2}\sum_k\left\{T_k'+\left(b\mu_k\right)^2T_k\right\}R_k=\frac{A}{b^2}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n.$$

Здесь использовано уравнение $\hat{D}R_k=\lambda_kR_k=-\mu_k^2R_k$, определяющее собственные функции $R_k(\rho)$ и собственные значения $\lambda_n=-\mu_n^2<0.$

Перепишем последний ряд в виде, более удобном для разложения правой части равенства

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{T_k'+\left(b\mu_k\right)^2T_k\right\}R_k=-A\left(\frac{\rho}{r}\right)^n=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k(t)R_k(\rho),$$

где коэффициенты разложения (координаты) $\gamma_k(t)$ могут быть найдены с использованием рекуррентных соотношений

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\nu}J_{\nu}(x)\right)=x^{\nu}J_{\nu-1}(x)\quad\text{или}\quad\int J_n(x)\cdot x^{n+1}dx=x^{n+1}J_{n+1}(x)$$

при $\nu=n+1$. Тогда получим

$$\gamma_k(t)=\left(-A\left(\frac{\rho}{r}\right)^n,\ R_k\right)=\frac{-A\sqrt{2}}{r^nJ_{n+1}(\alpha)}\int_0^r J_n(\mu_k\rho)\cdot\rho^{n+1}d\rho=$$

$$=\left[\mu_k\rho=\alpha_k^{(n)}\frac{\rho}{r}\equiv x\right]=\frac{-Ar\sqrt{2}}{\alpha^{n+1}J_{n+1}(\alpha)}\int_0^{\alpha}J_n(x)\cdot x^{n+1}dx=$$

$$=\frac{-Ar\sqrt{2}}{\alpha^{n+2}J_{n+1}(\alpha)}x^{n+1}J_{n+1}(x)\Bigg|_0^{\alpha}=-\frac{Ar\sqrt{2}}{\alpha_k^{(n)}}=-\frac{A\sqrt{2}}{\mu_k}=const.$$

Для определения функции $T_k(t)$ получаем уравнение

$$T_k'+\left(\mu_kb\right)^2T_k(t)=-\frac{A\sqrt{2}}{\mu_k}.$$

5. Общее решение линейного неоднородного уравнения первого порядка для функции $T_k(t)$ получится в виде

$$T_k(t) = C_k e^{-(\mu_k b)^2 t} - \frac{A\sqrt{2}}{b^2 \mu_k^3}, \quad \text{где } C_k = const.$$

Поэтому ряд для функции $w(\rho, t)$ будет

$$w(\rho,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \cdot R_k(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ C_k e^{-(\mu_k b)^2 t} - \frac{A\sqrt{2}}{b^2 \mu_k^3} \right\} R_k(\rho).$$

6. Определение постоянной C_k из начального условия.

$$w(\rho,0) = \sum_k \left\{ C_k - \frac{A\sqrt{2}}{b^2 \mu_k^3} \right\} \cdot R_k(\rho) = 0 \Rightarrow C_k = \frac{A\sqrt{2}}{b^2 \mu_k^3} > 0.$$

7. Окончательный вид решения задачи.

$$u(\rho,\varphi,t) = \upsilon(\rho,t)\cos n\varphi = \left\{ At \cdot \left(\frac{\rho}{r}\right)^n + w(\rho,t) \right\} \cdot \cos n\varphi =$$

$$= A\left\{ \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \cdot t - \frac{2}{b^2 r} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - e^{-(\mu_k b)^2 t}\right) \frac{J_n(\mu_k \rho)}{\mu_k^3 J_{n+1}(\mu_k r)} \right\} \cdot \cos n\varphi,$$

где $\mu_k = \alpha_k^{(n)} / r > 0$; $J_n\left(\alpha_k^{(n)}\right) = 0$ и $J_{n+1}\left(\alpha_k^{(n)}\right) \neq 0$ при $n, k \in \mathbb{N}$. Ряд сходится не хуже $O\left(\frac{1}{k^3}\right)$ при $k \to \infty$.

8. Проверка полученного решения по условиям задачи и по размерностям.

$$u(0,\varphi,t) = A\{0 - 0\} \cdot \cos n\varphi = 0 < \infty \because J_n(0) = 0 \ \textit{при} \ n \geq 1,$$

$$u(r,\varphi,t) = At \cdot \cos n\varphi \because J_n(\mu_k r) = J_n\left(\alpha_k^{(n)}\right) = 0.$$

$$u(\rho,\varphi,0) = 0 \because \left(1 - e^{-(\mu_k b)^2 t}\right)\Big|_{t=0} = 0.$$

$u\big|_{\varphi=0} = u\big|_{\varphi=2\pi}$ и $u'_\varphi\big|_{\varphi=0} = u'_\varphi\big|_{\varphi=2\pi} \because \cos n\varphi \ (\sin n\varphi)$ – периодические функции.

Пусть размерность $\left[u\left(\rho,\varphi,t\right)\right]=Q$, тогда по условию задачи находим $\left[A\right]=Q/T$; $\left[b^2\right]=L^2/T$; $\left[\mu_k\right]=1/L$; $\left[\mu_k\rho\right]=1$ и $\left[\mu_k^2 b^2 t\right]=\dfrac{1}{L^2}\dfrac{L^2}{T}T=1$;

$$\left[u\left(\rho,\varphi,t\right)\right]=\frac{Q}{T}\left\{\left(\frac{L}{L}\right)^3\cdot T+\frac{T}{L^2}\frac{1}{L}\cdot L^3\right\}\Rightarrow Q.$$

9. После определения зависимости от угла φ и приведения граничных условий к однородным полученную функцию $w\left(\rho,t\right)$ можно определить, использовав общую формулу решения через функцию Грина.

Выше мы получили правую часть уравнения $F\left(\rho,t\right)=\dfrac{A}{b^2}\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^n=stat>0$ и оба однородных условия $w\left(r,t\right)=w\left(\rho,0\right)=0$.

Тогда разрешающая формула принимает вид:

$$w\left(\rho,t\right)=0-b^2\cdot\int_0^t d\tau\left[\int_0^r\frac{A}{b^2}\left(\frac{\rho'}{r}\right)^n\cdot G\left(\rho,\rho'\middle|t-\tau\right)\cdot 2\pi\cdot\rho' d\rho'+0\right],$$

где функция Грина (источника) будет

$$G\left(\rho,\rho'\middle|t\right)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\left(\mu_k b\right)^2 t}\cdot R_k\left(\rho\right)\cdot\overline{R}_k\left(\rho'\right).$$

Здесь $R_k\left(\rho\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{r}J_n\left(\mu_k\rho\right)\big/J_{n+1}\left(\mu_k r\right)$ – собственные функции первой краевой задачи Дирихле, $\mu_k=\alpha_k^{(n)}\big/r<0$ – собственные числа.

Перепишем разрешающую формулу в развернутом виде:

$$w\left(\rho,t\right)=\frac{2A}{r^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_n\left(\mu_k\rho\right)}{J_{n+1}^2\left(\mu_k r\right)}\cdot\int_0^t e^{-\left(\mu_k b\right)^2\left(t-\tau\right)}d\tau\cdot\int_0^r\left(\frac{\rho'}{r}\right)^n\cdot J_n\left(\mu_k\rho'\right)\rho' d\rho'=$$

$$=\frac{2A}{r^{n+2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_n\left(\mu_k\rho\right)}{J_{n+1}^2\left(\mu_k r\right)}\cdot e^{-\left(\mu_k b\right)^2 t}\cdot\int_0^t e^{+\left(\mu_k b\right)^2\tau}d\tau\cdot\int_0^r J_n\left(\mu_k\rho'\right)\rho'^{\,n+1}d\rho'.$$

Полученные интегралы легко вычисляются:

$$\int_0^t e^{-(\mu_k b)^2(t-\tau)}d\tau = \frac{1}{(\mu_k b)^2}\left(1-e^{-(\mu_k b)^2 t}\right),$$

$$\int_0^r J_n(\mu_k\rho')\rho'^{n+1}d\rho' = \left[\mu\rho' = \alpha\frac{\rho'}{r} \equiv x,\ \ \rho'\Big|_0^r \Rightarrow x\Big|_0^\alpha\right] =$$

$$= \left(\frac{r}{\alpha}\right)^{n+2}\cdot\int_0^\alpha J_n(x)x^{n+1}dx = \left(\frac{r}{\alpha}\right)^{n+2}\cdot x^{n+1}J_{n+1}(x)\Big|_0^\alpha =$$

$$= \left(\frac{r}{\alpha}\right)^{n+2}\cdot\alpha^{n+1}J_{n+1}(\alpha) = \frac{r^{n+2}}{\alpha}J_{n+1}(\alpha) \neq 0.$$

Наконец, можно получить окончательное выражение для функции $w(\rho,t)$:

$$w(\rho,t) = \frac{2A}{r^{n+2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_n(\mu_k\rho)}{J_{n+1}^2(\mu_k r)}\cdot\frac{1}{(\mu_k b)^2}\left(1-e^{-(\mu_k b)^2 t}\right)e^{-(\mu_k b)^2 t}\frac{1}{\alpha}\cdot r^{n+2}J_{n+1}(\alpha) =$$

$$= \frac{2A}{b^2 r}\sum_{k=1}^{\infty}(1-e^{-(\mu_k b)^2 t})\frac{J_n(\mu_k\rho)}{\mu_k^{\,3}J_{n+1}(\mu_k r)}\cdot$$

Теперь решение исходной задачи можно представить в виде $u(\rho,\varphi,t) = \left\{At\left(\frac{\rho}{r}\right)^n + w(\rho,t)\right\}\cdot\cos n\varphi$, что полностью совпадает с результатом, полученным выше.

Обычно после приведения граничных условий к однородным окончательное решение легко получается методом интегрирования по общей формуле.

__**Задача 2.2.**__ Решение простой задачи для уравнения теплопроводности об остывании бесконечно длинного круглого цилиндра радиуса $\rho = r$, начальная температура внутри которого всюду одинакова $u(\rho,0) = A > 0$.

$$\begin{cases} \Delta_2 u - \dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \dfrac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \dfrac{0^2}{\rho^2}u - \dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad u = u(\rho, t). \\ \left|u(0,t)\right| < \infty, u(r,t) = 0. \quad \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \to 0. \quad 0 \le \rho \le r,\ 0 \le t < \infty,\ n = 0. \\ u(\rho, 0) = A. \quad A, b, r = const > 0. \end{cases}$$

1. Граничные условия задачи однородные уже по условиям.

2. Разделение переменных и решение краевой задачи.

Положим фундаментальное решение $u(\rho,t) = R(\rho)\cdot T(t)$, где значение функции $R(\rho)$ находится из решения краевой задачи

$$\hat{D}R = \lambda R(\rho) \quad \text{и} \quad \left|R(0)\right| < \infty,\ R(r) = 0.$$

Здесь $\lambda = -\mu^2 < 0$ – собственные значения (числа), и оператор задает уравнение Бесселя

$$\hat{D}R - \lambda R = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dR}{d\rho}\right) + \left(\mu^2 - \frac{0^2}{\rho^2}\right)R(\rho) = 0.$$

Решение краевой задачи известно:

$$R_k(\rho) = \frac{\sqrt{2}}{r} J_0(\mu_k \rho) \Big/ J_1(\mu_k r) \text{ – собственные функции (орты).}$$

$$\lambda_k = -\mu_k^2 = -\left(\alpha_k^{(0)} / r\right)^2 < 0 \text{ – собственные значения (числа).}$$

Здесь $\alpha_k^{(0)} > 0$ – простые корни характеристического (дисперсионного) уравнения $J_0\left(\alpha_k^{(0)}\right) = 0$, где $0 < \alpha_k^{(0)} < \alpha_{k+1}^{(0)} < \ldots$ и $J_1\left(\alpha_k^{(0)}\right) \ne 0$. Численные значения функций Бесселя $J_n(x)$ определяются по таблицам. Значения индексов $k \in \mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$.

Собственные функции $R_k(\rho)$ взаимно ортогональны в гильбертовом пространстве $L_2(0,r|\rho)$ со скалярным произведением $(R_k, R_{k'}) = \int\limits_0^r R_k(\rho)\cdot\overline{R_{k'}}(\rho)\cdot\rho d\rho = \delta_{kk'}$ с весом ρ.

Непрерывная функция $f(\rho)\in L_2$ может быть разложена в ряд Фурье–Бесселя $f(\rho)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k\cdot R_k(\rho)$, который сходится равномерно и абсолютно в интервале $(0,r)$, и его можно там дважды дифференцировать. Коэффициенты ряда (координаты) здесь равны $C_k = (f, R_k) = \int\limits_0^r f(\rho)\cdot\overline{R_k}(\rho)\cdot\rho\, d\rho.$

Таким образом, решение будем искать в виде ряда $u(\rho,t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} T_k(t)\cdot R_k(\rho)$, для сходимости которого необходимо выполнение условия $\lim\limits_{k\to\infty} T_k(t)=0$ при всех значениях $t\ge 0$.

3. Вывод и решение дифференциального уравнения для временной функции $T_k(t)$.

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)-\frac{1}{b^2}\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_k\left\{\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR_k}{d\rho}\right)\cdot T_k-\frac{1}{b^2}R_k\cdot T_k'\right\}=$$

$$=\sum_k\left\{-\mu_k^2 R_k\cdot T_k-\frac{1}{b^2}R_k T_k'\right\}=-\frac{1}{b^2}\sum_k\left\{T_k'+(\mu_k b)^2\cdot T_k(t)\right\}R_k(\rho)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_k'+(\mu_k b)^2\cdot T_k(t)=0; \qquad \frac{dT_k}{dt}=-(\mu_k b)^2\cdot T_k(t).$$

Здесь вместо сложного решения дифференциального уравнения в частных производных для функции двух переменных $u(\rho,t)$ дело сведено к решению простого уравнения для функции одного переменного, где решение известно: $T_k(t) = C_k \cdot e^{-(\mu_k b)^2 t}$ и $C_k = const.$

4. Определение постоянной C_k из начального условия.

Общее решение рассматриваемой задачи запишем теперь в виде

$$u(\rho,t) = \sum_k T_k(t)\cdot R_k(\rho) = \sum_k C_k \cdot e^{-(\mu_k b)^2 t}\cdot R_k(\rho).$$

Накладывая начальное условие $u(\rho,0) = A,$ получим

$$u(\rho,0) = \sum_k T_k(0)\cdot R_k(\rho) = \sum_k C_k \cdot R_k(\rho) = A \Rightarrow C_k =$$

$$= \left(A, R_k(\rho)\right) = \int_0^r A\cdot \overline{R_k}(\rho)\cdot \rho\, d\rho = \frac{A\sqrt{2}}{r J_1(\alpha)}\cdot \int_0^r J_0(\mu_k \rho)\cdot \rho\, d\rho =$$

$$= \left[\mu_k \rho = \alpha_k^{(0)} \frac{\rho}{r} = x,\ \rho \Big|_0^r \Rightarrow x \Big|_0^\alpha \right] =$$

$$= \frac{Ar\sqrt{2}}{\alpha^2 \cdot J_1(\alpha)} \int_0^\alpha J_0(x)\cdot x dx = \left[\frac{d}{dx}\left(x^\nu \cdot J_\nu(x)\right) = x^\nu \cdot J_{\nu-1}(x) \Rightarrow \right.$$

$$\left. \Rightarrow \int J_0(x)\cdot x dx = x\cdot J_1(x)\ при\ \nu = 1 \right] =$$

$$= \frac{Ar\sqrt{2}}{\alpha^2 J_1(\alpha)}\cdot \alpha J_1(\alpha) = \frac{Ar\sqrt{2}}{\alpha} = \frac{A\sqrt{2}}{\mu_k} > 0.$$

5. Окончательный вид решения задачи теперь получим

$$u(\rho,t) = \sum_k \frac{A\sqrt{2}}{\mu_k} e^{-(\mu_k b)^2 t}\cdot \frac{\sqrt{2}}{r} J_0(\mu_k \rho) / J_1(\mu_k r) =$$

$$= \frac{2A}{r}\sum_{k=1}^\infty e^{-(\mu_k b)^2 t}\, \frac{J_0(\mu_k \rho)}{\mu_k J_1(\mu_k r)} = 2A\cdot \sum_{k=1}^\infty e^{-\left(\alpha_k^{(0)}\frac{b}{r}\right)^2 t}\cdot \frac{J_0\left(\alpha_k^{(0)}\frac{\rho}{r}\right)}{\alpha_k^{(0)} J_1\left(\alpha_k^{(0)}\right)}.$$

Ряд сходится порядка $O\left(e^{-\alpha k^2}\right)$ и $O\left(\frac{1}{k}\right)$ при $t = 0$, если $\alpha > 0$ и $k \to \infty.$

6. Проверка решения по условиям задачи и по размерностям.

$$u(r,t)=0\because J_0\left(\alpha_k^{(0)}\frac{\rho}{r}\right)\Big|_{\rho=r}=0..$$

$$u(\rho,0)=2A\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\alpha_k^{(0)}\frac{\rho}{r}\right)}{\alpha_k^{(0)}J_1\left(\alpha_k^{(0)}\right)}=A\because\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\alpha_k^{(0)}\frac{\rho}{r}\right)}{\alpha_k^{(0)}J_1\left(\alpha_k^{(0)}\right)}=\frac{1}{2}.$$

$$u(+\infty,t)=0\because J_0(\infty)=0.$$

Проверим размерности. Пусть $\left[u(\rho,t)\right]=Q,$ поэтому $\left[A\right]=Q,$ $\left[b^2\right]=\frac{L^2}{T},$ $\left[\mu_k\right]=\frac{1}{L},$ $\left[\alpha_k^{(0)}\right]=\left[J_0/\alpha J_1\right]=1,$ $\left[\mu^2b^2t\right]=\frac{1}{L^2}\frac{L^2}{T}T=1$ и $\left[\left(\alpha\frac{b}{r}\right)^2t\right]=1\frac{L^2}{T}\frac{1}{L^2}T=1$. Тогда размерность решения

$$\left[u(\rho,t)\right]=\left[A\right]\cdot\left[e^{-(\mu_k b)^2t}\right]\cdot\left[J_0/\alpha J_1\right]\Rightarrow Q.$$

7. Найти решения рассматриваемой задачи можно и по общей формуле, использовав функцию Грина (источника).

По условиям нашей задачи для функции $u(\rho,t)$ только от двух переменных имеем $F(\rho,t)=q(\rho,t)=0$ и $f(\rho)=A.$ Здесь индекс $n=0$ – задача симметрична (не зависит от угла φ). Поэтому вид общей формулы решения будет

$$u(\rho,t)=\iint_S f(\rho')\cdot G(\rho,\rho'|t)\,dS'-b^2\cdot\int_0^t d\tau\left[0-0\right]=$$

$$=\left[G(\rho,\rho'|t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\Phi_k(t)\cdot R_k(\rho)\cdot\overline{R_k}(\rho')=\right.$$

$$\left.=\frac{1}{\pi r^2}\sum_k e^{-(\mu_k b)^2t}\frac{J_0(\mu_k\rho)\cdot J_0(\mu_k\rho')}{J_1^2(\mu_k r)}\right]=$$

$$=\int_0^r A\cdot\left(\frac{1}{2\pi}\sum_k e^{-(\mu_k b)^2 t}\cdot R_k(\rho)\cdot\overline{R_k}(\rho')\right)\cdot 2\pi\rho' d\rho'=$$

$$=\frac{2A}{r^2}\sum_k e^{-(\mu_k b)^2 t}\frac{J_0(\mu_k\rho)}{J_1^2(\mu_k r)}\cdot\int_0^r J_0(\mu_k\rho')\rho' d\rho'=$$

$$=\left[\mu_k\rho'=\alpha\frac{\rho'}{r}=x\geq 0,\ \rho'\Big|_0^r\Rightarrow x\Big|_0^{\alpha_k^{(0)}}\right]=$$

$$=\left[\int_0^r J_0(\mu_k\rho')\cdot\rho' d\rho'=\frac{1}{\mu_k^2}\int_0^\alpha J_0(x)\cdot x dx=\frac{1}{\mu_k^2}\cdot xJ_1(x)\Big|_0^\alpha=\right.$$

$$\left.=\frac{r}{\mu_k}J_1(\alpha)=\frac{r}{\mu_k}J_1(\mu_k r)\right]=$$

$$=\frac{2A}{r^2}\sum_k e^{-(\mu_k b)^2 t}\cdot\frac{J_0(\mu_k\rho)}{\mu_k^2 J_1^2(\mu_k^2)}\cdot xJ_1(x)\Big|_0^\alpha=$$

$$=\frac{2A}{r}\sum_{k=1}^\infty e^{-(\mu_k b)^2 t}\cdot\frac{J_0(\mu_k\rho)}{\mu_k\cdot J_1(\mu_k r)};\qquad \text{где } \mu_k=\alpha_k^{(0)}/r>0.$$

Этот результат полностью совпадает с найденным выше.

Задача 2.3. Плоская симметричная задача для однородного уравнения переноса со стационарным граничным условием.

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)-\dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial u}{\partial t}=0. & u=u(\rho,t).\\ |u(0,t)|<\infty,\ u(r,t)=A; & 0\leq\rho\leq r,\\ u(\rho,0)=0. & 0\leq t<\infty.\end{cases}$$

1. В симметричном случае (при $n=0$) граничные условия приводятся к однородным простой заменой $u(\rho,t)=\upsilon(\rho,t)+A$. Тогда

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right)-\dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial\upsilon}{\partial t}=0. & \upsilon=\upsilon(\rho,t).\\ |\upsilon(0,t)|<\infty,\ \upsilon(r,t)=0; & 0\leq\rho\leq r,\\ \upsilon(\rho,0)=-A. & 0\leq t<\infty.\end{cases}$$

2. Разделение переменных и решение краевой задачи для оператора Бесселя $\hat{D} = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d}{d\rho}\right) - \frac{0^2}{\rho^2}$ с условиями $\left|R(0)\right| < \infty$ и $R(r) = 0.$

$\upsilon(\rho,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\cdot R_k(\rho),$ где собственные функции $R_k(\rho) = \frac{\sqrt{2}}{r}J_0\left(\alpha_k^{(0)}\frac{\rho}{r}\right)\Big/J_1\left(\alpha_k^{(0)}\right)$ и собственные значения $\lambda_k = -\mu_k^2 = -\left(\alpha_k^{(0)}/r\right)^2 < 0.$ Здесь $\alpha_k^{(0)} > 0$ – множество простых корней уравнения $J_0\left(\alpha_k^{(0)}\right) = 0,$ причем $J_1\left(\alpha_k^{(0)}\right) \neq 0.$

Для сходимости ряда требуется $\lim\limits_{k\to\infty} T_k(t) = 0$ при всех $t \geq 0$.

3. Вывод и решение уравнения для $T_k(t)$.

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right) - \frac{1}{b^2}\frac{\partial\upsilon}{\partial t} = = -\frac{1}{b^2}\cdot\sum_k\left\{T_k' + \left(b\mu_k\right)^2 T_k(t)\right\}R_k(\rho) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_k' + \left(b\mu_k\right)^2\cdot T_k(t) = 0; \qquad \mu_k = \alpha_k^{(0)}/r > 0.$$

Решение полученного уравнения очевидно: $T_k(t) = C_k\cdot e^{-(\mu_k b)^2 t}$ при $C_k = const.$ Поэтому искомая функция $\upsilon(\rho,t)$ равна

$$\upsilon(\rho,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-(\mu_k b)^2 t} R_k^{(0)}(\rho).$$

4. Постоянная C_k легко определяется из начальнго условия, если использовать рекурентную формулу

$$\frac{d}{dx}\left(x^\nu\cdot J_\nu(x)\right) = x^\nu\cdot J_{\nu-1}(x) \text{ или } \int J_0(x)\cdot x dx = x\cdot J_1(x) \quad \text{при } \nu = 1.$$

Начальное условие здесь записывается в виде $\upsilon(\rho,0) = \sum_k C_k\cdot R_k(\rho) = -A.$

Тогда

$$C_k = \left(-A, R_k\right) = -\frac{A\sqrt{2}}{r\cdot J_1\left(\alpha\right)}\cdot\int\limits_0^r J_0\left(\alpha\frac{\rho}{r}\right)\cdot\rho d\rho = \left[\alpha\frac{\rho}{r} = x\right] =$$

$$= -\frac{A\sqrt{2}}{rJ_1\left(\alpha\right)}\frac{r^2}{\alpha^2}\cdot\int\limits_0^\alpha J_0\left(x\right)\cdot xdx = -\frac{Ar\sqrt{2}}{\alpha^2\cdot J_1\left(\alpha\right)}\cdot\alpha J_1\left(\alpha\right) = -\frac{A\sqrt{2}}{\mu_k} < 0.$$

5. Теперь получим окончательный вид решения.

$$u\left(\rho,t\right) = A + \upsilon\left(\rho,t\right) = A\left\{1 - \frac{2}{r}\cdot\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\left(\mu_k b\right)^2 t}\cdot\frac{J_0\left(\mu_k\rho\right)}{\mu_k\cdot J_1\left(\mu_k r\right)}\right\};\ \ \mu_k = \alpha_k^{(0)}/r > 0.$$

6. Проверка полученного решения по условиям задачи и по размерностям.

$$u\left(r,t\right) = A \because J_0\left(\alpha_k^{(0)}\right) = 0;\quad u\left(\rho,0\right) = 0 \because \sum_k\frac{J_0\left(\mu_k\rho\right)}{\mu_k\cdot J_1\left(\mu_k r\right)} = \frac{1}{2}r.$$

Имеем по условиям $\left[u\left(\rho,t\right)\right] = \left[A\right] = Q,\ \left[b^2\right] = \frac{L^2}{T},\ \left[\mu_k\right] = \frac{1}{L}$. Поэтому

$$\left[\mu_k^2 b^2 t\right] = \frac{1}{L^2}\frac{L^2}{T}T = 1 \text{ и } \left[\mu_k r\right] = \left[\mu_k\rho\right] = \frac{L}{L} = 1,\ \left[u\left(\rho,t\right)\right] = \left[A\right]\cdot\left\{1 + \frac{L}{L}\right\} \Rightarrow Q.$$

7. После приведения граничных условий к однородным легко найти значение функции $\upsilon\left(\rho,t\right)$ по общей формуле с использованием функции Грина.

$$\upsilon\left(\rho,t\right) = \int\limits_0^r f\left(\rho'\right)\cdot G\left(\rho,\rho'\middle|t\right)\cdot 2\pi\rho' d\rho' =$$

$$= -A\cdot\int\limits_0^r\left(\sum_k e^{-\left(\mu_k b\right)^2 t}\cdot R_k\left(\rho\right)\cdot\overline{R}_k\left(\rho'\right)\right)\cdot\rho' d\rho' =$$

$$= -\frac{2A}{r^2}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\left(\mu_k b\right)^2 t}\cdot\frac{J_0\left(\mu_k\rho\right)}{J_1^2\left(\mu_k r\right)}\cdot\int\limits_0^r J_0\left(\mu_k\rho'\right)\rho' d\rho' =$$

$$= -\frac{2A}{r}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\left(\mu_k b\right)^2 t}\cdot\frac{J_0\left(\mu_k\rho\right)}{\mu_k\cdot J_1\left(\mu_k r\right)}.$$

Подобные интегралы уже вычислялись в предыдущих задачах. Решение нашей задачи получим в виде $u\left(\rho,t\right) = A + \upsilon\left(\rho,t\right)$.

Задача 2.4. Плоская задача для однородного уравнения переноса внутри круга с громоздким граничным условием.

$$\begin{cases} \Delta_2 u - \dfrac{1}{b^2}\cdot u_t' = 0. \\ u\Big|_{\rho=r} = At^2\cos n\varphi, \quad u\Big|_{t=0} = 0. \end{cases} \qquad \begin{aligned} & u = u(\rho,\varphi,t), \quad n\in\mathbb{N}. \\ & 0\le\rho\le r, \quad 0\le\varphi<2\pi, \\ & 0\le t<\infty. \end{aligned}$$

Условие ограниченности при $\rho = 0$ и условия периодичности по φ явно не записаны.

1. Отделение зависимости от угла φ выполняется по формуле $u\left(\rho,\varphi,t\right) = \upsilon\left(\rho,t\right)\cdot\cos n\varphi.$

$$\begin{cases} \hat{D}\upsilon - \dfrac{1}{b^2}\upsilon_t' = 0. \\ \left|\upsilon(0,t)\right| < \infty, \quad \upsilon(r,t) = At^2; \\ \upsilon(\rho,0) = 0. \end{cases} \qquad \begin{aligned} & \upsilon = \upsilon(\rho,t). \\ & 0\le\rho\le r, \ 0\le t<\infty. \\ & \hat{D} \equiv \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d}{d\rho}\right) - \frac{n^2}{\rho^2}. \end{aligned}$$

2. Граничные условия приводятся к однородным с помощью замены $\upsilon(\rho,t) = w(\rho,t) + At^2\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^n$. Тогда задачу для функции $w(\rho,t)$ получим

$$\begin{cases} \hat{D}w - \dfrac{1}{b^2}w_t' \equiv \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial w}{\partial\rho}\right) - \dfrac{n^2}{\rho^2}w - \dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{2A}{b^2}t\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^n. \\ \left|w(0,t)\right| < \infty, \ w(r,t) = 0, \ w(\rho,0) = 0. \end{cases}$$

Связь с исходной функцией $u\left(\rho,\varphi,t\right)$ будет

$$u(\rho,\varphi,t) = \upsilon(\rho,t)\cdot\cos n\varphi = \left[At^2\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n + w(\rho,t)\right]\cdot\cos n\varphi.$$

3. Разделение переменных и решение первой краевой задачи Дирихле для оператора Бесселя.

$$w(\rho,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\cdot R_k(\rho), \qquad \text{где } \lim_{k\to\infty} T_k(t) = 0.$$

Здесь $R_k(\rho) = \dfrac{\sqrt{2}}{r} J_n(\mu_k \rho) \big/ J_{n+1}(\mu_k r)$ – собственные функции (орты) и $\lambda_k = -\mu_k^2 = -\left(\alpha_k^{(n)} \big/ r\right)^2 < 0$ – собственные значения. Собственные функции ортогональны $(R_k, R_{k'}) = \delta_{kk'}$ для разных собственных значений (разных чисел $k \neq k'$). Дисперсионное уравнение $J_n\left(\alpha_k^{(n)}\right) = 0$ имеет бесконечный спектр решений $\alpha_k^{(n)} > 0$, где значения $\alpha_k^{(n)} < \alpha_{k+1}^{(n)}$ только возрастают; причем $J_{n+1}\left(\alpha_k^{(n)}\right) \neq 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

4. Вывод дифференциального уравнения для функции $T_k(t)$.

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial w}{\partial\rho}\right) - \frac{n^2}{\rho^2}w - \frac{1}{b^2}\frac{\partial w}{\partial t} = \sum_k \left\{\hat{D}R_k \cdot T_k - \frac{1}{b^2}R_k \cdot T_k'\right\} =$$

$$= -\frac{1}{b^2} \cdot \sum_k \left\{T_k' - (\mu_k b)^2 \cdot T_k\right\} \cdot R_k = \frac{2A}{b^2} t \cdot \left(\frac{\rho}{r}\right)^n = \frac{1}{b^2} \cdot \sum_k \gamma_k(t) \cdot R_k(\rho).$$

Определение коэффициента разложения (координаты)

$$\gamma_k(t) = \left(-2At \cdot \left(\frac{\rho}{r}\right)^n, R_k\right) = -\frac{2\sqrt{2}\,At}{r^{n+1} \cdot J_{n+1}(\alpha)} \cdot \int_0^r J_n\left(\alpha_k^{(n)}\frac{\rho}{r}\right) \cdot \rho^{n+1} d\rho =$$

$$= \left[\alpha\frac{\rho}{r} = x\right] = -\frac{2\sqrt{2}Art}{\alpha^{n+2} \cdot J_{n+1}(\alpha)} \cdot \int_0^\alpha J_n(x) \cdot x^{n+1} dx =$$

$$= -\frac{2\sqrt{2}Art}{\alpha^{n+2} \cdot J_{n+1}(\alpha)} \cdot \alpha^{n+1} J_{n+1}(\alpha) = -\frac{2\sqrt{2}Art}{\alpha_k^{(n)}} = -\frac{2\sqrt{2}A}{\mu_k} t.$$

Теперь уравнение для функции $T_k(t)$ примет вид:

$$T_k' + (\mu_k b)^2 \cdot T_k(t) = \gamma_k(t) \equiv -\frac{2\sqrt{2}A}{\mu_k} t.$$

5. Решение дифференциального уравнения для $T_k\left(t\right)$.

Общее решение линейного однородного уравнения очевидно $\overset{\circ}{T}_k\left(t\right)=C_k\cdot e^{-\left(\mu_k b\right)^2 t}$ и $C_k=\mathrm{const}$; а частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$\tilde{T}_k\left(t\right)=pt+q \qquad \left(p,q=const\right).$$

$$\tilde{T}_k'+\left(\mu_k b\right)^2\cdot\tilde{T}_k\left(t\right)=p+\left(\mu_k b\right)^2\cdot\left(pt+q\right)=-\frac{2\sqrt{2}A}{\mu_k}t\Rightarrow$$

$$\Rightarrow p=-\frac{2\sqrt{2}A}{b^2\mu_k^3},\quad q=-\frac{p}{b^2\mu_k^2}=\frac{2\sqrt{2}A}{b^4\mu_k^5};$$

$$\tilde{T}_k\left(t\right)=\frac{2\sqrt{2}A}{b^4\mu_k^5}\left(1-\mu_k^2 b^2 t\right).$$

Окончательно

$$T_k\left(t\right)=\overset{\circ}{T}_k\left(t\right)+\tilde{T}_k\left(t\right)=C_k\cdot e^{-\left(\mu_k b\right)^2 t}+\frac{2\sqrt{2}A}{b^2\mu_k^5}\cdot\left(1-\mu_k^2 b^2 t\right).$$

6. Постоянную C_k легко определить из начального условия $T_k\left(0\right)=0$. Тогда получим $C_k=-\dfrac{2A\sqrt{2}}{b^4\mu_k^5}<0.$ Функция времени равна

$$T_k\left(t\right)=\frac{2A\sqrt{2}}{b^4\mu_k^5}\left[1-\left(\mu_k b\right)^2 t-e^{-\left(\mu_k b\right)^2 t}\right].$$

7. Окончательный вид решения задачи теперь будет

$$u\left(\rho,\varphi,t\right)=A\left\{\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\cdot t^2+\frac{4}{rb^4}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left[1-\left(b\mu_k\right)^2 t-e^{-\left(\mu_k b\right)^2 t}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\frac{J_n\left(\mu_k\rho\right)}{\mu_k^5\cdot J_{n+1}\left(\mu_k r\right)}\right\}\cdot\cos n\varphi \;\text{ при }\; \mu_k=\alpha_k^{(n)}\big/r>0.$$

8. Проверка полученного решения по условиям задачи и по размерностям.

$$u\big|_{\rho=r}=A\left\{t^2+0\right\}\cos\varphi \because J_n\left(\mu_k r\right)=0;\qquad u\big|_{t=0}=0 \text{ – очевидно.}$$

Примем размерности $\left[u\left(\rho,\varphi,t\right)\right]=Q$, $\left[A\right]=Q/T^2$, $\left[\mu_k\right]=1/L$, $\left[b^2\right]=L^2/T$. Тогда $\left[u\right]\equiv Q=\dfrac{Q}{T^2}\left\{T^2\cdot 1+\dfrac{1}{L}\dfrac{T^2}{L^4}L^5\right\}\Rightarrow Q.$

<u>Задача 2.5.</u> Объемная симметричная задача внутри отрезка цилиндра для однородного уравнения теплопроводности (переноса) с однородными граничными условиями.

$$\begin{cases}\Delta_3 u-\dfrac{1}{b^2}u'_t\equiv\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial u}{\partial t}=0.\\ u\Big|_{\rho=r}=u\Big|_{z=0}=u'_z\Big|_{z=H}=0; \qquad u=u\left(\rho,z,t\right).\\ u\Big|_{t=0}=Az. \qquad 0\le\rho\le r,\ 0\le z\le H,\ 0\le t<\infty.\end{cases}$$

1. Все граничные условия однородны по условию задачи.

2. Разделение переменных и решения краевых задач по аргументам ρ и z.

$$u\left(\rho,z,t\right)=\sum_{k=1`}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}T_{km}\left(t\right)\cdot R_k\left(\rho\right)\cdot Z_m\left(z\right); \qquad \lim_{k,m\to\infty}T_{km}\left(t\right)=0.$$

$$\hat{D}_Б=\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d}{d\rho}\right)-\frac{0^2}{\rho^2} \qquad \text{при } \left|R\left(0\right)\right|<\infty,\ R\left(r\right)=0.$$

$$R_k\left(\rho\right)=\frac{\sqrt{2}}{r}J_0\left(\alpha_k^{(0)}\frac{\rho}{r}\right)\Big/J_1\left(\alpha_k^{(0)}\right) \qquad \text{при } J_0\left(\alpha_k^{(0)}\right)=0,\ J_1\left(\alpha_k^{(0)}\right)\ne 0.$$

$$\lambda_k=-\mu_k^2=-\left(\alpha_k^{(0)}/r\right)^2<0 \qquad \text{при } k\in N; \qquad \left(R_k,R_{k'}\right)=\delta_{kk'}.$$

$$\hat{D}_z=\frac{d^2}{dz^2} \qquad \text{при } Z\left(0\right)=Z'\left(H\right)=0. \qquad Z_m\left(z\right)=\sqrt{\frac{2}{H}}\cdot\sin\mu_m z.$$

$$\lambda_m=-\mu_m^2=-\left(\frac{\pi}{2H}\left(2m+1\right)\right)^2<0 \quad \text{и} \quad m\in Z_0; \qquad \left(Z_m,Z_{m'}\right)=\delta_{mm'}.$$

3. Вывод и решение дифференциального уравнения для функции $T_{km}(t)$.

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{1}{b^2}\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{k,m}\left\{-\mu_k^2\cdot T_{km}-\mu_m^2\cdot T_{km}-\frac{1}{b^2}T'_{km}\right\}R_k Z_m=$$

$$=-\frac{1}{b^2}\cdot\sum_{k,m}\left\{T'_{km}+\left(\mu_{km}b\right)^2\cdot T_{km}\right\}\cdot R_k(\rho)\cdot Z_m(z)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow T'_{km}+\left(\mu_{km}b\right)^2\cdot T_{km}(t)=0 \qquad \text{при } \mu_{km}^2=\mu_k^2+\mu_m^2>0.$$

Решение дифференциального уравнения для функции $T_{km}(t)$ очевидно равно $T_{km}(t)=C_{km}\cdot e^{-\left(\mu_{km}b\right)^2 t}$ при $C_{km}=const.$

Поэтому можно записать

$$u(\rho,z,t)=\sum_{k,m}C_{km}\cdot e^{-\left(\mu_{km}b\right)^2 t}\cdot R_k(\rho)\cdot Z_m(z).$$

4. Определение постоянной C_{km} из начального условия

$$u(\rho,z,0)=\sum_{k,m}C_{km}\cdot R_k(\rho)\cdot Z_m(z)=Az.$$

Постоянную C_{km} (координату) найдем с помощью двойного скалярного произведения

$$C_{km}=\left(Az,R_k Z_m\right)=$$

$$=\frac{A\sqrt{2}}{rJ_1(\alpha)}\int_0^r J_0\left(\alpha\frac{\rho}{r}\right)\cdot\rho\,d\rho\cdot\sqrt{\frac{2}{H}}\cdot\int_0^H\sin\mu_m z\cdot z\,dz=$$

$$=\frac{2A}{r\sqrt{H}J_1(\alpha)}\cdot\left(\frac{r}{\alpha}\right)^2\cdot\alpha J_1(\alpha)\cdot\left(\frac{\sin\mu_m z}{\mu_m^2}-\frac{z}{\mu_m}\cos\mu_m z\right)\Bigg|_0^H=\frac{2A\cdot(-1)^m}{\sqrt{H}\cdot\mu_k\mu_m^2}.$$

5. Окончательный вид решения задачи записывается в виде

$$u(\rho,z,t)=\frac{4A}{Hr}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}e^{-\left(\mu_{km}b^2\right)t}\cdot\frac{J_0(\mu_k\rho)}{\mu_k J_1(\mu_k r)}\cdot\frac{(-1)^m}{\mu_m^2}\sin\mu_m z,$$

где $\mu_{km}^2=\mu_k^2+\mu_m^2>0,\ \ \mu_k=\alpha_k^{(0)}/r>0,\ \ \mu_m=\dfrac{\pi}{2H}(2m+1)>0.$

6. Проверка полученного решения по условиям задачи и по размерностям.

$$u\Big|_{\rho=r} = 0 \because J_0\left(\alpha_k^{(0)}\right) = 0; \qquad u\Big|_{z=0} = u'_z\Big|_{z=H} = 0 \text{ – очевидно.}$$

$$\left[u\right] = Q, \left[A\right] = Q / L, \left[b^2\right] = L / T^2, \left[\mu_{km}\right] = 1 / L.$$

$$\left[u\right] = \frac{\left[A\right]}{L^2} \cdot 1 \cdot L \cdot L^2 \Rightarrow Q.$$

7. Для решения задачи по общей формуле примем

$$F\left(M,t\right) = q\left(M,t\right) = 0 \text{ и } f\left(M\right) = Az,$$

тогда

$$u\left(M,t\right) = \iiint\limits_{V} f\left(M'\right) \cdot G\left(M,M'\middle|t\right) dV' = \int\limits_0^r \int\limits_0^H A\varsigma \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{k,m} e^{-\left(\mu_{km} b\right)^2 t} \times \right.$$

$$\left. \times R_{km}\left(\rho,z\right) \cdot \bar{R}_{km}\left(\rho',\varsigma\right) \right) \cdot 2\pi\, \rho' d\rho' d\varsigma,$$

где $R_{km}\left(\rho,z\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{r} \dfrac{J_0\left(\mu_k \rho\right)}{J_1\left(\mu_k r\right)} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{H} \sin \mu_m z$ – собственные функции

и $\mu_{km}^2 = \mu_k^2 + \mu_m^2 = \left(\alpha_k^{(0)} / r\right)^2 + \left(\dfrac{\pi}{2H}(2m+1)\right)^2$ – собственные значения задачи при

$k \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{Z}_0$.

$$u\left(\rho,z,t\right) = \frac{4A}{Hr^2} \cdot \sum_{k,m} e^{-\left(\mu_{km} b\right)^2 t} \cdot \frac{J_0\left(\mu_k \rho\right)}{J_1^2\left(\mu_k r\right)} \cdot \int\limits_0^r J_0\left(\mu_k \rho'\right) \cdot \rho' d\rho' \times$$

$$\times \sin \mu_k z \cdot \int\limits_0^H \sin\mu_k \varsigma \cdot \varsigma d\varsigma =$$

$$= \frac{4A}{Hr^2} \cdot \sum_{k,m} e^{-\left(\mu_{km} b\right)^2 t} \cdot \frac{J_0\left(\mu_k \rho\right)}{J_1^2\left(\mu_k r\right)} \frac{\alpha}{\mu_k^2} J_1\left(\alpha\right) \cdot \sin \mu_k z \cdot \frac{\left(-1\right)^m}{\mu_m} =$$

$$= \frac{4A}{Hr} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\left(\mu_{km} b\right)^2 t} \cdot \frac{J_0\left(\mu_k \rho\right)}{\mu_k \cdot J_1\left(\mu_k r\right)} \cdot \frac{\left(-1\right)^m}{\mu_m} \sin \mu_k z.$$

Задача 2.6. Плоская задача для уравнения переноса внутри круга со сложными неоднородными граничными условиями.

$$\begin{cases} \Delta_2 u - \dfrac{1}{b^2}u'_t \equiv \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} - \dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0. \\ \left| u\big|_{\rho=0}\right| < \infty, \quad \left(u'_\rho + au\right)\Big|_{\rho=r} = f(t)\cdot\cos n\varphi; \\ u\big|_{t=0} = 0. \end{cases} \qquad \begin{matrix} u = u(\rho,\varphi,t). \\ 0 \le \rho \le r,\ 0 \le \varphi < 2\pi, \\ 0 \le t < \infty. \\ a > 0,\ n \in \mathbb{Z}_0. \end{matrix}$$

1. Сначала отделим зависимость от угла $u(\rho,\varphi,t) = \upsilon(\rho,t)\cdot\cos n\varphi$, тогда

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right) - \dfrac{n^2}{\rho^2}\upsilon - \dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial\upsilon}{\partial t} = 0. \\ \left|\upsilon(0,t)\right| < \infty, \quad \upsilon'_\rho(r,t) + a\cdot\upsilon(r,t) = f(t); \\ \upsilon(\rho,0) = 0. \end{cases} \qquad \begin{matrix} \upsilon = \upsilon(\rho,t). \\ 0 \le \rho \le r, \\ 0 \le t < \infty. \end{matrix}$$

2. Приведение граничных условий к однородным проводится по формуле $\upsilon(\rho,t) == w(\rho,t) + \alpha(t)\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^\nu + \beta(t)$, где величины $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и ν требуется определить.

$\left|\upsilon(0,t)\right| < \infty \Rightarrow \left|w(0,t)\right| < \infty$ при $\alpha(t) \ne 0$ и $\nu > 0$. Примем $\beta(t) = 0$.

$$\hat{D}_Б\left(\alpha(t)\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^\nu\right) = \frac{\alpha(t)}{r^\nu}\left[\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d}{d\rho}\rho^\nu\right) - \frac{n^2}{\rho^2}\rho^\nu\right] =$$

$$= \frac{\alpha(t)}{\rho^2}\left(\nu^2 - n^2\right)\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^\nu = 0 \quad \text{при } \nu = n.$$

Поэтому внешнее граничное условие имеет вид:

$$\left(\upsilon'_\rho + a\upsilon\right)\Big|_{\rho=r} = \left\{ w'_\rho + aw + \frac{n\alpha}{\rho}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n + aw + \right.$$

$$\left. + \alpha\cdot a\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \right\}\Bigg|_{\rho=r} = \left(w'_\rho + aw\right)\Big|_{\rho=r} + \alpha\cdot\left(\frac{n}{r} + a\right) = f(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(w'_\rho + aw\right)\Big|_{\rho=r} = f(t) - \alpha(t)\cdot\left(\frac{n}{r} + a\right) = 0$$

при $\alpha(t)=\dfrac{r}{ar+n}f(t)\equiv\tilde{f}(t)$ и $ar+n>0$ – условие Ди́ни. Таким образом

$$\upsilon(\rho,t)=w(\rho,t)+\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\cdot\tilde{f}(t).$$

Начальное условие

$$\upsilon(\rho,0)=w(\rho,0)+\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\cdot\tilde{f}(0)=0\Rightarrow w(\rho,0)=-\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\cdot\tilde{f}(0)\neq 0.$$

Введем оператор уравнения $\hat{D}=\hat{D}_Б-\dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial}{\partial t}$. Тогда

$$\hat{D}\upsilon=\hat{D}w+\hat{D}\left(\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\cdot\tilde{f}(t)\right)=\hat{D}w+\tilde{f}\cdot\hat{D}_Б\left(\frac{\rho}{r}\right)^n-\frac{1}{b^2}\cdot\tilde{f}'\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n=$$

$$=0\Rightarrow\hat{D}w=\frac{1}{b^2}\tilde{f}'(t)\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\equiv F(\rho,t)\neq 0,\ \text{ так как } \hat{D}_Б\rho^n=0.$$

Итак, задача для функции $w(\rho,t)$ примет вид:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial w}{\partial\rho}\right)-\dfrac{n^2}{\rho^2}w-\dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial w}{\partial t}=F(\rho,t)\equiv\dfrac{1}{b^2}\tilde{f}'(t)\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^n. \\ \left|w(0,t)\right|<\infty,\quad w'_\rho(r,t)+a\cdot w(r,t)=0; \\ w(\rho,0)=-\tilde{f}(0)\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^n.\end{cases}\qquad \begin{matrix} w=w(\rho,t). \\ 0\le\rho\le r, \\ 0\le t<\infty.\end{matrix}$$

Здесь новая искомая функция $w(\rho,t)$ выражается через исходную функцию $u(\rho,\varphi,t)$ по формуле

$$u(\rho,\varphi,t)=\upsilon(\rho,t)\cdot\cos n\varphi=\left[w(\rho,t)+\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\cdot\frac{r\cdot f(t)}{ar+n}\right]\cdot\cos n\varphi.$$

3. Разделение переменных и решение краевой задачи.

$$w(\rho,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\cdot R_k(\rho),\quad \text{где } \lim_{k\to\infty}T_k(t)=0 \text{ и } (R_k,R_{k'})=\delta_{kk'}.$$

Для определения собственных функций (ортов) рассмотрим краевую задачу

$$\hat{D}_Б R = \lambda R(\rho) \qquad \text{при } \left|R(0)\right| < \infty \ \text{ и } \ R'(r) + a \cdot R(r) = 0.$$

Здесь $\lambda_k = -\mu_k^2 = -\left(\beta_k^{(n)}/r\right)^2 < 0$ – дискретный полубесконечный спектр собственных значений при $k \in \mathbb{N}$, а $\beta_k^{(n)} > 0$ – простые корни дисперсионного уравнения $\beta \cdot J_n'(\beta) + ar \cdot J_n(\beta) = 0.$ Тогда ортонормированные собственные функции имеют вид:

$$\Re_k^{(n)}(\rho) = \frac{\sqrt{2}}{r}\left(1 + \frac{a^2 r^2 - n^2}{\beta_k^{(n)2}}\right)^{-1/2} \cdot J_n\left(\beta_k^{(n)} \frac{\rho}{r}\right) \Big/ J_n\left(\beta_k^{(n)}\right).$$

4. Вывод дифференциального уравнения для функции $T_k(t)$.

$$\hat{D}_Б w - \frac{1}{b^2} w_t' = \sum_k \left\{ \hat{D}_Б \Re_k \cdot T_k - \frac{1}{b^2} \Re_k T_k' \right\} =$$

$$= -\frac{1}{b^2} \sum_k \left\{ T_k' + (b\mu_k)^2 \cdot T_k \right\} \Re_k = \frac{1}{b^2} \tilde{f}'(t) \cdot \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \equiv F(\rho, t) =$$

$$= \frac{1}{b^2} \cdot \sum_k F_k(t) \cdot \Re_k(\rho), \text{ где}$$

$$T_k' + (\mu_k b)^2 \cdot T_k(t) = F_k(t) \equiv -\tilde{f}'(t) \cdot \left(\left(\frac{\rho}{r}\right)^n, \Re_k \right).$$

Скалярное произведение вычислим отдельно (см. тему 2.1).

$$\left(\left(\frac{\rho}{r}\right)^n, \Re_k \right) = \int_0^r \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \cdot \Re_k(\rho) \cdot \rho \, d\rho =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{r}\left(1 + \frac{a^2 r^2 - n^2}{\beta_k^{(n)2}}\right)^{-1/2} \cdot \int_0^r \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \cdot J_n\left(\beta_k^{(n)} \frac{\rho}{r}\right) \Big/ J_n\left(\beta_k^{(n)}\right) \cdot \rho \, d\rho =$$

$$= \left[\beta \frac{\rho}{r} = x, \quad \rho \Big|_0^r \Rightarrow x \Big|_0^\beta \right] =$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\beta^{n+1}}\left(1+\frac{a^2r^2-n^2}{\beta_k^{(n)2}}\right)^{-1/2}\cdot\frac{1}{J_n(\beta)}\cdot\int_0^{\beta}J_n(x)\cdot x^{n+1}dx=$$

$$=\left[\int J_{\nu-1}(x)\cdot x^{\nu}dx=x^{\nu}\cdot J_{\nu}(x)\qquad \text{при } \nu=n+1\right]=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\mu_k}\cdot\left(1+\frac{a^2r^2-n^2}{\beta_k^{(n)2}}\right)^{-1/2}\cdot\frac{J_{n+1}(\mu_k r)}{J_n(\mu_k r)}=$$

$$=\Big[J_{n+1}(\beta)=\frac{n}{\beta}J_n(\beta)-J_n'(\beta)=\frac{n}{\beta}J_n(\beta)+\frac{ar}{\beta}J_n(\beta)=\frac{ar+n}{\beta}J_n(\beta),$$

здесь $J_n'(\beta)=-\dfrac{ar}{\beta}J_n(\beta)$ – граничное условие $\Big]=$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\mu_k}\left(1+\frac{a^2r^2-n^2}{\beta_k^{(n)2}}\right)^{-1/2}\cdot\frac{ar+n}{\beta}=\frac{\sqrt{2}}{\mu_k}\frac{ar+n}{\sqrt{\left(\mu_k^2+a^2\right)r^2-n^2}};\qquad \mu_k=\beta_k^{(n)}/r>0.$$

Значит, уравнение для функции $T_k(t)$ имеет вид:

$$T_k'+(\mu_k b)^2\cdot T_k(t)=F_k(t)\equiv -f'(t)\cdot\frac{\sqrt{2}}{\mu_k^2}\left(1+\frac{a^2r^2-n^2}{\mu_k^2r^2}\right)^{-1/2}.$$

5. Решение дифференциального уравнения для функции $T_k(t)$.

Решение соответствующего однородного уравнения очевидно $T_k(t)=C_k\cdot e^{-(\mu_k b)^2t}$, где $C_k=const$. Решение неоднородного уравнения найдем методом вариации произвольной постоянной. Для этого положим $T_k(t)=C_k(t)\cdot e^{-(\mu_k b)^2t}$. Здесь $C_k(t)\neq const$ и найдем его из заданного уравнения

$$T_k'+(\mu_k b)^2\cdot T_k(t)=C_k'(t)\cdot e^{-(\mu_k b)^2t}-(\mu_k b)^2\cdot C_k(t)e^{-(\mu_k b)^2t}+$$
$$+(\mu_k b)^2\cdot C_k(t)e^{-(\mu_k b)^2t}=C_k'(t)e^{-(\mu_k b)^2t}=F_k(t)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow C_k'(t)=F_k(t)e^{+(\mu_k b)^2t}.$$

Откуда находится $C_k(t) = C_k + \int\limits_0^t F_k(\tau)\, e^{+(\mu_k b)^2 \tau} d\tau$ при $C_k = const.$

Тогда искомое решение дифференциального уравнения будет

$$T_k(t) = C_k(t) \cdot e^{-(\mu_k b)^2 t} = C_k \cdot e^{-(\mu_k b)^2 t} + \int\limits_0^t F_k(\tau) \cdot e^{-(\mu_k b)^2 (t-\tau)} d\tau.$$

Теперь функция $w(\rho, t)$ примет вид:

$$w(\rho,t) = \sum_k T_k(t) \cdot R_k(\rho) = \sum_k \left\{ C_k e^{-(\mu_k b)^2 t} + \int\limits_0^t F_k(\tau)\, e^{-(\mu_k b)^2 (t-\tau)} d\tau \right\} \Re_k(\rho) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ C_k e^{-(\mu_k b)^2 t} + \frac{\sqrt{2}}{\mu_k^2} \left(1 + \frac{a^2 r^2 - n^2}{\mu_k^2 r^2} \right)^{-1/2} \cdot \int\limits_0^t f'(\tau) \cdot e^{-(\mu_k b)^2 (t-\tau)} d\tau \right\} \Re_k(\rho).$$

6. Определение постоянной C_k из начального условия.

$$w(\rho,0) = \sum_k C_k \Re_k(\rho) = -\tilde{f}(0) \cdot \left(\frac{\rho}{r} \right)^n; \quad \tilde{f}(0) = \frac{r}{ar+n} f(0).$$

Координату C_k найдем с помощью скалярного произведения

$$C_k = -\tilde{f}(0) \cdot \left(\left(\frac{\rho}{r} \right)^n, \Re_k \right) = -\tilde{f}(0) \cdot \frac{\sqrt{2}}{\mu_k^2} \left(1 + \frac{a^2 r^2 - n^2}{\mu_k^2 r^2} \right)^{-1/2}.$$

Аналогичный интеграл уже вычислялся выше в п. 4.

7. Подставим выражение C_k в ряд для функции $w(\rho,t)$.

$$w(\rho,t) = -\frac{2}{r} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ f(0) + \int\limits_0^t f'(\tau) e^{(\mu_k b)^2 \tau} d\tau \right\} \cdot e^{-(\mu_k b)^2 t} \times$$

$$\times \left(1 + \frac{a^2 r^2 - n^2}{\mu_k^2 r^2} \right)^{-1} \cdot \frac{J_n(\mu_k \rho)}{\mu_k^2 \cdot J_n(\mu_k r)}, \quad \text{где } \mu_k = \beta_k^{(n)} / r > 0.$$

Теперь можно записать окончательный вид решения задачи:

$$u(\rho,\varphi,t) = \left\{ \frac{r}{ar+n} \left(\frac{\rho}{r} \right)^n \cdot f(t) + w(\rho,t) \right\} \cdot \cos n\varphi =$$

$$=\left\{\frac{r}{ar+n}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\cdot f(t)-\frac{2}{r}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left[f(0)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_0^t f'(\tau)\,e^{(\mu_k b)^2\tau}\right]\cdot e^{-(\mu_k b)^2 t}\cdot\left[\left(\mu_k^2+a^2\right)r^2-n^2\right]^{-1}\cdot\frac{J_n(\mu_k\rho)}{J_n(\mu_k r)}\right\}\cdot\cos n\varphi=$$

$$=\left\{\frac{r}{ar+n}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\cdot f(t)-\frac{2}{r}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left[f(t)-(\mu_k b)^2\cdot\int_0^t f(\tau)e^{-(\mu_k b)^2\cdot(t-\tau)}d\tau\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left(1+\frac{a^2r^2-n^2}{\mu_k^2r^2}\right)^{-1}\cdot\frac{J_n(\mu_k\rho)}{\mu_k^2\cdot J_n(\mu_k r)}\right\}\cdot\cos n\varphi.$$

8. Проверка полученного решения по условиям задачи и размерностям.

$$u(0,\varphi,t)=0<\infty\because\lim_{\rho\to 0}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n=0\ \text{ и }\ \lim_{\rho\to 0}J_n(\mu_k\rho)=0\ \text{ при }n\in\mathbb{N}.$$

$$\left.\left(u'_\rho+a\,u\right)\right|_{\rho=r}=\left\{\frac{r}{ar+n}\left[\frac{n}{r}\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n-1}+a\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\right]\cdot f(t)-\right.$$

$$-2r\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^r f(\tau)e^{-(\mu_k b)^2\cdot(t-\tau)}\cdot\left(1+\frac{a^2r^2-n^2}{\mu_k^2r^2}\right)^{-1}\times$$

$$\left.\left.\times\frac{\mu_k\cdot J'_n(\mu_k\rho)+a\cdot J_n(\mu_k\rho)}{\mu_k^2\cdot J_n(\mu_k r)}d\tau\right\}\right|_{\rho=r}\cdot\cos n\varphi=$$

$$=f(t)\cdot\cos n\varphi\because\mu_k\cdot J'_n(\mu_k r)+a\cdot J_n(\mu_k r)=0.$$

$$u(\rho,\varphi,0)=\frac{r\cdot f(0)}{ar+n}\left\{\left(\frac{\rho}{r}\right)^n-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{ar+n}{\left(\mu_k^2+a^2\right)r^2-n^2}\cdot\frac{J_n(\mu_k\rho)}{J_n(\mu_k r)}\right\}\cdot\cos n\varphi=0\because$$

$$\because\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{ar+n}{\left(\mu_k^2+a^2\right)r^2-n^2}\frac{J_n(\mu_k\rho)}{J_n(\mu_k r)}.$$

По условию задачи имеем размерности $\left[u(\rho,\varphi,t)=Q\right]$, $\left[f(t)\right]=Q/L$,

$$\left[b^2\right]=L^2/T;\quad [a]=[\mu_k]=1/L;\quad [ar+n]=1;\quad\left[1+\frac{a^2r^2-n^2}{\mu_k^2r^2}\right]=1;\left[\mu_k^2b^2t\right]=1.$$

Тогда получим $\quad [u]\equiv Q=L\cdot\dfrac{Q}{L}+\dfrac{1}{L}\cdot\left[\dfrac{Q}{L}+\dfrac{1}{T}\cdot\dfrac{Q}{L}\cdot T\right]\cdot L^2\Rightarrow Q.$

9. В частном случае $f\left(t\right)=At$ получим

$$u\left(\rho,\varphi,t\right)=\frac{Ar}{ar+n}\left\{t\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n}+\frac{2}{b^{2}}\left(ar+n\right)\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-e^{-\left(\mu_{k}b\right)^{2}t}}{\left(\mu_{k}^{2}+a^{2}\right)r^{2}-n^{2}}\cdot\frac{J_{n}\left(\mu_{k}\rho\right)}{\mu_{k}^{2}\cdot J_{n}\left(\mu_{k}r\right)}\right\}\cdot\cos n\varphi.$$

<u>Задача 2.7.</u> Решение уравнения переноса внутри отрезка цилиндра, если задана только начальная температура.

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho^{2}}\dfrac{\partial^{2}u}{\partial\varphi^{2}}+\dfrac{\partial^{2}u}{\partial z^{2}}-\dfrac{1}{b^{2}}\dfrac{\partial u}{\partial t}=0.\\ \left|u\left(0,\varphi,z,t\right)\right|<0,\ u\left(r,\varphi,z,t\right)=0.\\ u\left(\rho,\varphi,z,t\right)=u\left(\rho,\varphi+2\pi,z,t\right),\\ u'_{\varphi}\left(\rho,\varphi,z,t\right)=u'_{\varphi}\left(\rho,\varphi+2\pi,z,t\right).\\ u\left(\rho,\varphi,0,t\right)=0,\ u'_{z}\left(\rho,\varphi,H,t\right)=0.\\ u\left(\rho,\varphi,z,0\right)=Az\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^{n}\cdot\cos n\varphi.\end{cases}$$

$$u=u\left(\rho,\varphi,z,t\right).$$
$$0\le\rho\le r,\ 0\le\varphi<2\pi.$$
$$0\le z\le H,\ 0\le t<\infty.$$
$$n\in\mathbb{Z}_{0}=\left\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\right\}.$$

Упрощенная запись условий задачи:

$$u\Big|_{\rho=r}=0;\ u\Big|_{z=0}=0,\ u'_{z}\Big|_{z=H}=0;\ u\Big|_{t=0}=Az\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n}\cdot\cos n\varphi.$$

1. Сначала отделим зависимость от угла $u\left(\rho,\varphi,z,t\right)=\upsilon\left(\rho,z,t\right)\cdot\cos n\varphi.$

Тогда

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right)-\dfrac{n^{2}}{\rho^{2}}\upsilon+\dfrac{\partial^{2}\upsilon}{\partial z^{2}}-\dfrac{1}{b^{2}}\dfrac{\partial\upsilon}{\partial t}=0.\\ \left|\upsilon\Big|_{\rho=0}\right|<\infty,\ \upsilon\Big|_{\rho=r}=0;\ \upsilon\Big|_{z=0}=0;\ \upsilon'_{z}\Big|_{z=H}=0;\qquad \upsilon=\upsilon\left(\rho,z,t\right).\\ \upsilon\Big|_{t=0}=Az\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^{n}.\end{cases}$$

2–3. Все граничные условия задачи однородны по условиям, поэтому можно сразу разделить переменные и записать разложение функции $\upsilon(\rho,z,t)$ в ряд по собственным функциям двух переменных (по ортам)

$$\upsilon(\rho,z,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}T_{km}(t)\cdot\upsilon_{km}(\rho,z)\equiv\sum_{k,m}T_{km}(t)\cdot R_k(\rho)\cdot Z_m(z),$$

где собственные функции $R_k(\rho)=\dfrac{\sqrt{2}}{r}\dfrac{J_n(\mu_k\rho)}{J_{n+1}(\mu_k r)}$, $\quad \mu_k=\alpha_k^{(n)}/r>0;$

$J_n\left(\alpha_k^{(n)}\right)=0$ – дисперсионное уравнение и $J_{n+1}\left(\alpha_k^{(n)}\right)\neq 0.$

$Z_m(z)=\sqrt{\dfrac{2}{H}}\cdot\sin\mu_m z;\ \ \mu_m=\dfrac{\pi}{2H}(2m+1)>0.$

Здесь, как обычно, двумерная собственная функция является произведением двух одномерных собственных функций, которые являются решениями своих краевых задач

$$\hat{D}_Б R=\lambda_k R(\rho),\quad \left|R(0)\right|<\infty \text{ и } R(\rho)=0,$$

где $\hat{D}_Б\equiv\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{d}{d\rho}\right)-\dfrac{n^2}{\rho^2};\ \lambda_k=-\mu_k^2=-\left(\alpha_k^{(n)}/r\right)^2<0.$

$$\hat{D}_z Z=\lambda_m Z(z),\quad Z(0)=0 \text{ и } Z'(H)=0.$$

где $\hat{D}_z\equiv\dfrac{d^2}{dz^2},\ \lambda_m=-\mu_m^2=-\left(\dfrac{\pi}{2H}(2m+1)\right)^2<0.$

Двумерное собственное число $\lambda_{k\,m}$ равно сумме двух одномерных собственных чисел

$$\lambda_{km}=\lambda_k+\lambda_m=-\mu_m^2-\mu_k^2=-\mu_{km}^2=-\left(\alpha_k^{(n)}/r\right)^2-\left(\frac{\pi}{2H}(2m+1)\right)^2<0$$

при $k\in\mathbb{N}$ и $m\in\mathbb{Z}_0$.

4–5. Вывод и решение дифференциального уравнения для функции времени $T_{km}(t)$.

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right)-\frac{n^2}{\rho^2}\upsilon+\frac{\partial^2\upsilon}{\partial z^2}-\frac{1}{b^2}\frac{\partial\upsilon}{\partial t}=$$

$$= \sum_{k,m} \left\{ -\mu_k^2 T_{km} - \mu_m^2 T_{km} - \frac{1}{b^2} T'_{km} \right\} \cdot R_k(\rho) \cdot Z_m(z) =$$

$$= -\frac{1}{b^2} \sum_{k,m} \left\{ T'_{km} + (\mu_{km} b)^2 \cdot T_{km}(t) \right\} \cdot \upsilon_{km}(\rho, z) = 0 \Rightarrow T'_{km} + (\mu_{km} b)^2 \cdot T_{km}(t) = 0;$$

$$\mu^2{}_{km} = \mu^2{}_k + \mu^2{}_m > 0.$$

Решение полученного линейного однородного дифференциального уравнения очевидно $T_{km}(t) = C_{km} \cdot e^{-(\mu_{km} b)^2 t}$ при $C_{km} = const$. Искомая функция $\upsilon(\rho, z, t)$ принимает вид:

$$\upsilon(\rho, z, t) = \sum_{k,m} C_{km} \cdot e^{-(\mu_{km} b)^2 t} \cdot \upsilon_{km}(\rho, z).$$

6. Определение постоянной C_{km} из начального условия с помощью скалярного произведения.

$$\upsilon(\rho, z, 0) = \sum_{k,m} C_{km} \cdot \upsilon_{km}(\rho, z) = \sum_{k,m} C_{km} \cdot R_k(\rho) \cdot Z_m(z) = Az \cdot \left(\frac{\rho}{r}\right)^n.$$

$$C_{km} = \left(Az \left(\frac{\rho}{r}\right)^n, R_k Z_m \right) = \frac{A\sqrt{2}}{r J_{n+1}} \cdot \int_0^r \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \cdot J_n(\mu_k \rho) \cdot \rho d\rho \times$$

$$\times \sqrt{\frac{2}{H}} \cdot \int_0^H z \cdot \sin \mu_m z \cdot dz = [\mu_k \rho = x] =$$

$$= \frac{2A}{r\sqrt{H} \cdot J_{n+1}} \cdot \frac{1}{r^{n+1}} \int_0^\alpha \left(\frac{xr}{\alpha}\right)^{n+1} \cdot J_n(x) \frac{r dx}{\alpha} \cdot \int_0^H z \, d \frac{\cos \mu_m z}{-\mu_m} =$$

$$= \frac{-2Ar}{\mu_m \sqrt{H} \cdot \alpha^{n+2} J_{n+1}} \cdot x^{n+1} J_{n+1}(x) \Big|_0^\alpha \cdot \left(z \cos \mu_m z - \frac{\sin \mu_m z}{\mu_m} \right) \Bigg|_0^H = \frac{2A \cdot (-1)^m}{\mu_m^2 \mu_k \sqrt{H}}.$$

7. Окончательный вид решения задачи.

$$u(\rho, \varphi, z, t) = \upsilon(\rho, z, t) \cdot \cos n\varphi = \sum_{k,m} T_{km}(t) \cdot R_k(\rho) \cdot Z_m(z) \cdot \cos n\varphi =$$

$$= \frac{4A}{Hr} \cdot \cos n\varphi \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\mu_k \mu_m^2} \cdot e^{-\left(\mu_k^2 + \mu_m^2\right) b^2 t} \cdot \frac{J_n(\mu_k \rho)}{J_{n+1}(\mu_k r)} \cdot \sin \mu_m z,$$

где $\mu_k = \alpha_k^{(n)} / r > 0,\ \mu_m = \dfrac{\pi}{2H}(2m+1) > 0;\ \ k \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{Z}_0$. Число $n \in \mathbb{Z}_0$ задается по условию задачи.

Даже при $t = 0,$ когда не действует экспоненциальное убывание общего члена двойного ряда при $k, m \to \infty,$ полученный ряд сходится порядка $O\left(\dfrac{1}{km^2}\right)$ при $k, m \to \infty.$

8. Проверка решения задачи по заданным условиям и по размерностям.

$$u\Big|_{\rho=0} = 0 < \infty \because J_n(0) = 0 \qquad \text{при } n \in \mathbb{N};$$

$$u\Big|_{\rho=r} = 0 \because J_n(\mu_k r) = J_n\left(\alpha_k^{(n)}\right) = 0.$$

$$u\Big|_{z=0} = 0 \because \sin 0 = 0; \qquad u'_z\Big|_{z=H} = 0 \because \cos \mu_m H = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi m\right) = 0;$$

$$u\Big|_{t=0} = \frac{4A}{Hr} \cdot \cos n\varphi \cdot r \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_n\left(\alpha_k^{(n)} \rho / r\right)}{\alpha_k^{(n)} \cdot J_{n+1}\left(\alpha_k^{(n)}\right)} \times$$

$$\times \frac{4H^2}{\pi^2} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^2} \sin \frac{\pi z}{2H}(2m+1) =$$

$$= \frac{4A}{H} \cdot \cos n\varphi \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \cdot \frac{4H^2}{\pi^2} \frac{\pi^2 z}{8H} = Az\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \cdot \cos n\varphi.$$

По условиям задачи имеем размерности

$\left[u(\rho, \varphi, z, t)\right] \equiv Q,\quad [A] = Q/L,\quad \left[b^2\right] = L^2/T,\quad \left[\mu_{km}\right] = 1/L,\quad [\mu_m z] = 1,$

$\left[\left(\mu_k^2 + \mu_m^2\right) b^2 t\right] = (1/L^2) \cdot L^2 / T \cdot T = 1; \qquad$ откуда $\qquad \left[u(\rho, \varphi, z, t)\right] \equiv Q =$

$= \dfrac{[A]}{L^2} L^3 \Rightarrow Q.$

<u>Задача 2.8.</u> Решение симметричного уравнения переноса внутри цилиндра с простым начальным условием.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)-\dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial u}{\partial t}=0. \\ u\Big|_{\rho=0}<\infty, \quad u\Big|_{\rho=r}=0; \\ u\Big|_{t=0}=A\left(1-\dfrac{\rho^2}{r^2}\right). \end{cases} \qquad \begin{matrix} u=u(\rho,t). \\ 0\le\rho\le r, \\ 0\le t<\infty. \end{matrix}$$

1. Условие задачи не зависит от угла φ – условие симметричное; поэтому примем индекс $n=0$. Граничные условия задачи однородные.

2–3. Разделение переменных и решение краевой задачи.

$$u(\rho,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\cdot R_k(\rho), \qquad \text{здесь обязательно} \qquad \lim_{k\to\infty}T_k(t)=0.$$

Собственные функции оператора Бесселя $\hat{D}=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{d}{d\rho}\right)-\dfrac{0^2}{\rho^2}$ равны

$R_k(\rho)=\dfrac{\sqrt{2}}{r}\dfrac{J_0(\mu_k\rho)}{J_1(\mu_k r)}$ и собственные значения $\lambda_k=-\mu_k^2=-\left(\alpha_k^{(0)}/r\right)^2<0$,

где $J_0(0)=1,\quad J_0\left(\alpha_k^{(0)}\right)=0$ при $k=1,2,3,\ldots$ Здесь $\alpha_k^{(0)}>0$ – простые корни и $\alpha_k^{(0)}<\alpha_{k+1}^{(0)}$; однако $J_1\left(\alpha_k^{(0)}\right)\ne 0$.

4–5. Вывод и решение дифференциального уравнения для функции времени $T_k(t)$.

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)-\frac{1}{b^2}\frac{\partial u}{\partial t}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR_k}{d\rho}\right)+\frac{0^2}{\rho^2}R_k\right]\cdot T_k-\frac{1}{b^2}R_kT_k'\right\}=\sum_k\left\{-\mu_k^2R_kT_k-\frac{1}{b^2}R_kT_k'\right\}=$$

$$=-\frac{1}{b^2}\sum_k\left\{T_k'+(\mu_k b)^2\cdot T_k\right\}R_k=0\Rightarrow T_k'+(\mu_k b)^2\cdot T_k(t)=0.$$

Решение полученного линейного однородного дифференциального уравнения очевидно:

$$T_k(t) = C_k \cdot e^{-(\mu_k b)^2 t} \quad \text{при } C_k = const.$$

Искомая функция $u(\rho,t)$ принимает вид:

$$u(\rho,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-(\mu_k b)^2 t} \cdot R_k(\rho).$$

6. Определение постоянной C_k из начального условия.

$$u(\rho,0) = \sum_k C_k \cdot R_k(\rho) = A\left(1 - \frac{\rho^2}{r^2}\right) \Rightarrow C_k = \left(A\left(1 - \frac{\rho^2}{r^2}\right), R_k\right) =$$

$$= \frac{A\sqrt{2}}{rJ_1(\alpha)} \cdot \int_0^r \left(1 - \frac{\rho^2}{r^2}\right) \cdot J_0\left(\alpha\frac{\rho}{r}\right) \cdot \rho d\rho = \left[\alpha_k^{(0)}\frac{\rho}{r} = x\right] =$$

$$= \frac{Ar\sqrt{2}}{\alpha^2 J_1(\alpha)} \cdot \int_0^{\alpha} \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right) \cdot J_0(x) x dx = \frac{Ar\sqrt{2}}{\alpha^2 J_1(\alpha)} \times$$

$$\times \left\{ x \cdot J_1(x) - \frac{1}{\alpha^2}\left[x^3 \cdot J_1(x) - 2x^2 \cdot J_0(x) - 4x \cdot J_1(x)\right] \right\} \Bigg|_0^{\alpha} = \frac{4Ar\sqrt{2}}{\alpha^3} = \frac{4A\sqrt{2}}{r^2 \mu_k^3} > 0.$$

7. Окончательный вид решения задачи.

$$u(\rho,t) = \sum_k T_k(t) \cdot R_k(\rho) = \frac{8A}{r^3} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(\mu_k b)^2 t} \frac{J_0(\mu_k \rho)}{\mu_k^3 \cdot J_1(\mu_k r)} \quad \text{при } \mu_k = \alpha_k^{(0)} / r > 0.$$

8. Проверка полученного решения по условиям и по размерностям.

$$u(0,t) < \infty \because J_0(0) = 1 \text{ и общий член ряда } O\left(e^{-k^2}\right) \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

$$u(r,t) = 0 \because J_0(\mu_k r) = J_0\left(\alpha_k^{(0)}\right) = 0.$$

$$u(\rho,0) = 8A \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\alpha_k^{(0)} \rho / r\right)}{\alpha_k^{(0)3} \cdot J_1\left(\alpha_k^{(0)}\right)} = 8A \cdot \frac{1}{8}\left(1 - \frac{\rho^2}{r^2}\right) = A\left(1 - \frac{\rho^2}{r^2}\right).$$

По условиям задачи имеем размерности $\left[u(\rho,t)\right]\equiv Q$; $[A]=Q$; $\left[b^2\right]=L^2/T$; $[\mu_k]=1/L$. Тогда $[\mu_k r]=[\mu_k\rho]=1$; $\left[\mu_k^2 b^2 t\right]=\frac{1}{L^2}\cdot\frac{L^2}{T}\cdot T=1$.

$\left[u(\rho,t)\right]\equiv Q=\frac{[A]}{L^3}\cdot L^3=Q.$

9. Для задачи с однородными граничными условиями решение легко находится по общей формуле с использованием функции Грина.

$$u(\rho,t)=\int_0^r q(\rho')\cdot G(\rho,\rho'|t)\cdot 2\pi\rho' d\rho'=$$

$$=\frac{A}{2\pi}\int_0^r\left(1-\frac{\rho'^2}{r^2}\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty}e^{-(\mu_k b)^2 t}\cdot R_k(\rho)\overline{R}_k(\rho')\right)\cdot 2\pi\rho' d\rho'=$$

$$=\frac{2A}{r^2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}e^{-(\mu_k b)^2 t}\cdot\frac{J_0(\mu_k\rho)}{J_1^2(\mu_k r)}\cdot\int_0^r\left(1-\frac{\rho'^2}{r^2}\right)\cdot J_0(\mu_k\rho')\cdot\rho' d\rho'=$$

$$=\left[\mu_k\rho'=\alpha\frac{\rho'}{r}\equiv x\right]=2A\cdot\sum_{k=1}^{\infty}e^{-(\mu_k b)^2 t}\cdot\frac{J_0(\mu_k\rho)}{\alpha^2\cdot J_1^2(\alpha)}\cdot\int_0^{\alpha}\left(1-\frac{x^2}{\alpha^2}\right)\cdot J_0(x)\cdot x dx=$$

$$=2A\cdot\sum_k e^{-(\mu_k b)^2 t}\cdot\frac{J_0(\mu_k\rho)}{\alpha^4\cdot J_1^2(\alpha)}\cdot\int_0^{\alpha}\left(\alpha^2\cdot x-x^3\right)\cdot J_0(x)dx=$$

$$=2A\cdot\sum_k e^{-(\mu_k b)^2 t}\cdot\frac{J_0(\mu_k\rho)}{\alpha^4\cdot J_1^2(\alpha)}\cdot\Big\{\alpha^2\cdot xJ_1(x)-$$

$$-\left(2x^2\cdot J_0(x)+x\left(x^2-4\right)J_1(x)\right)\Big\}\Big|_0^{\alpha}=$$

$$=2A\cdot\sum_k e^{-(\mu_k b)^2 t}\cdot\frac{J_0(\mu_k\rho)}{\alpha^4\cdot J_1^2(\alpha)}\cdot\left\{\alpha^2\cdot\alpha-\alpha^3+4\alpha\right\}\cdot J_1(\alpha)=$$

$$=8A\cdot\sum_k e^{-(\mu_k b)^2 t}\cdot\frac{J_0(\mu_k\rho)}{\alpha^3\cdot J_1(\mu_k r)}=\frac{8A}{r^3}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}e^{-(\mu_k b)^2 t}\cdot\frac{J_0(\mu_k\rho)}{\mu_k^3\cdot J_1(\mu_k r)}.$$

Использованные здесь интегралы приведены выше в теме 2.1. Полученное здесь решение совпадает с найденным ранее.

<u>Задача 2.9.</u> Решение неоднородной задачи Неймана (второй краевой задачи) для уравнения переноса внутри круга.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}-\dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial u}{\partial t}=0. \\ u\Big|_{\rho=0}<\infty,\ u'_\rho\Big|_{\rho=r}=f(t)\cdot\cos n\varphi; \\ u\Big|_{t=0}=0. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u=u(\rho,\varphi,t). \\ 0\le\rho\le r, \\ 0\le\varphi<2\pi, \\ 0\le t<\infty. \\ n\in\mathbb{N}. \end{array}$$

Условия периодичности явно не записаны.

1. Отделение зависимости от угла φ проводится по формуле $u(\rho,\varphi,t)=\upsilon(\rho,t)\cdot\cos n\varphi.$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial \upsilon}{\partial\rho}\right)-\dfrac{n^2}{\rho^2}\upsilon-\dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial \upsilon}{\partial t}=0. \\ \upsilon\Big|_{\rho=0}<\infty,\quad \upsilon'_\rho\Big|_{\rho=r}=f(t); \\ \upsilon\Big|_{t=0}=0. \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \upsilon=\upsilon(\rho,t). \\ 0\le\rho\le r, \\ 0\le t<\infty. \end{array}$$

2. Приведение граничных условий к однородным проводится по формуле $\upsilon(\rho,t)=w(\rho,t)+\dfrac{r}{n}\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^n f(t).$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial w}{\partial\rho}\right)-\dfrac{n^2}{\rho^2}w-\dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial w}{\partial t}=\dfrac{r}{nb^2}\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^n\cdot f'(t). \\ \left|w(0,t)\right|<\infty,\ w'_\rho(r,t)=0; \\ w(\rho,0)=-\dfrac{r}{n}\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^n\cdot f(0). \end{cases} \qquad \begin{array}{c} w=w(\rho,t). \\ 0\le\rho\le r, \\ 0\le t<\infty. \end{array}$$

Связь исходной функции $u(\rho,\varphi,t)$ и функции $w(\rho,t)$, удобной для исследований, выражается формулой

$$u(\rho,\varphi,t)=\left(\frac{r}{n}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n}\cdot f(t)+w(\rho,t)\right)\cdot\cos n\varphi.$$

3. Разделение переменных $w(\rho,t)=R(\rho)\cdot T(t)$ и решение краевой задачи Неймана для оператора Бесселя.

$$\begin{cases}\hat{D}_Б=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{d}{d\rho}\right)-\dfrac{n^2}{\rho^2}. & \hat{D}_Б R=\lambda R(\rho),\\ \left|R(0)\right|<\infty,\quad R'(r)=0. & \lambda=-\mu^2<0.\end{cases}$$

Решение поставленной второй краевой задачи известно

$$\Re_k(\rho)=\frac{\sqrt{2}}{r}\cdot\left(1-\frac{n^2}{\beta_k^{(n)2}}\right)^{-1/2}\cdot J_n\left(\beta_k^{(n)}\rho/r\right)\Big/J_n\left(\beta_k^{(n)}\right)\ -$$

множество взаимно ортогональных собственных функций $\left(\Re_k,\Re_{k'}\right)=\delta_{kk'}$, где величина $\beta_k^{(n)}>0$ – простой корень характеристического (дисперсионного) уравнения $J_n'(\beta)=0;$ причем $0<\beta_k^{(n)}<\beta_{k+1}^{(n)}<\ldots$ и $J_n\left(\beta_k^{(n)}\right)\neq 0.$ Собственные числа задачи равны $\lambda_k=-\mu_k^2=-\left(\beta_k^{(n)}/r\right)^2<0;$ они составляют полубесконечный дискретный спектр. Разложение непрерывных функций по базису $\Re_k(\rho)$ сходится правильно.

4. Вывод дифференциального уравнения для функции времени $T_k(t)$ и определение начального условия $T_k(0)$.

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial w}{\partial\rho}\right)-\frac{n^2}{\rho^2}w-\frac{1}{b^2}\frac{\partial w}{\partial t}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Re_k}{\partial\rho}\right)-\frac{n^2}{\rho^2}\Re_k\right]\cdot T_k-\frac{1}{b^2}\Re_k T_k'\right\}=$$

$$=-\frac{1}{b^2}\cdot\sum_k\left\{T_k'+\left(\mu_k b\right)^2\cdot T_k\left(t\right)\right\}\Re_k\left(\rho\right)=\frac{r}{nb^2}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\cdot f'\left(t\right).$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{T_k'+\left(\mu_k b\right)^2\cdot T_k\left(t\right)\right\}\Re_k\left(\rho\right)=-\frac{r}{n}f'\left(t\right)\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n=$$

$$=-\frac{r}{n}f'\left(t\right)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\cdot\Re_k\left(\rho\right),\quad \gamma_k=const;$$

$$\gamma_k=\left(\left(\frac{\rho}{r}\right)^n,\Re_k\right)=\int_0^r\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\cdot\Re_k\left(\rho\right)\cdot\rho d\rho=\left[\beta_k^{(n)}\frac{\rho}{r}=x\right]=$$

$$=\frac{r\sqrt{2}}{\beta}\left(1-\frac{n^2}{\beta^2}\right)^{-1/2}\cdot\frac{J_{n+1}\left(\beta\right)}{J_n\left(\beta\right)}=\frac{n\,r\sqrt{2}}{\beta_k^{(n)2}}\left(1-\frac{n^2}{\beta_k^{(n)2}}\right)^{-1/2}>0.$$

Аналогично найдем и начальное значение функции времени.

$$w\left(\rho,0\right)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k\left(0\right)\cdot\Re_k\left(\rho\right)==-\frac{r}{n}f\left(0\right)\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n=-\frac{r}{n}f\left(0\right)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\Re_k\left(\rho\right),$$

$$\gamma_k=\int_0^r\left(\frac{r}{\rho}\right)^n\cdot\Re_k\left(\rho\right)\rho\,d\rho=\frac{n\,r\sqrt{2}}{\beta_k^{(n)2}}\left(1-\frac{n^2}{\beta_k^{(n)2}}\right)^{-1/2}.$$

5. Постановка и решение начальной задачи Коши для функции $T_k\left(t\right)$.

$$\begin{cases}T_k'+\left(\mu_k b\right)^2\cdot T_k\left(t\right)=-\dfrac{r}{n}f'\left(t\right)\cdot\gamma_k. & \gamma_k=\dfrac{n\,r\sqrt{2}}{\beta_k^{(n)2}}\left(1-\dfrac{n^2}{\beta_k^{(n)2}}\right)^{-1/2}.\\ T_k\left(0\right)=-\dfrac{r}{n}f\left(0\right)\cdot\gamma_k. & \end{cases}$$

Общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения равно $T_k\left(t\right)=C_k e^{-\left(\mu_k b\right)^2 t}$ при $C_k=const$; а частное решение найдем методом вариации произвольной постоянной

$$T_k'+\left(\mu_k b\right)^2\cdot T_k\left(t\right)=C_k'\left(t\right)\cdot e^{-\left(\mu_k b\right)^2 t}-$$

$$-\left(\mu_k b\right)^2\cdot C_k\left(t\right)e^{-\left(\mu_k b\right)^2 t}+\left(\mu_k b\right)^2\cdot C_k\left(t\right)e^{-\left(\mu_k b\right)^2 t}=$$

$$= C_k'(t)\cdot e^{-(\mu_k b)^2 t} = -\frac{r}{n} f'(t)\gamma_k \Rightarrow C_k'(t) = -\frac{r}{n}\gamma_k \cdot f'(t) e^{+(\mu_k b)^2 t}.$$

$$C_k(t) = C_k - \frac{r}{n}\gamma_k \cdot \int\limits_0^t f'(\tau) e^{+(\mu_k b)^2 \tau} d\tau,\ \ C_k = const.$$

Теперь общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения будет равно

$$T_k(t) = C_k(t)\cdot e^{-(\mu_k b)^2 t} = C_k \cdot e^{-(\mu_k b)^2 t} - \frac{r}{n}\gamma_k \cdot \int\limits_0^t f'(\tau) e^{-(\mu_k b)^2 (t-\tau)} d\tau.$$

Подставив сюда известное начальное значение $T_k(0) = C_k = -\frac{r}{n} f(0)\cdot\gamma_k$, получим частное решение поставленной задачи Коши

$$T_k(t) = -\frac{r}{n}\gamma_k \cdot \left[f(0) + \int\limits_0^t f'(\tau) e^{-(\mu_k b)^2 (t-\tau)} d\tau \right] =$$

$$= -\frac{r}{n}\gamma_k \cdot \left[f(t) - f(0)\cdot\left(1 - e^{-(\mu_k b)^2 t}\right) - (\mu_k b)^2 \cdot \int\limits_0^t f(\tau) e^{-(\mu_k b)^2 (t-\tau)} d\tau \right].$$

Функция $T_k(t)$ при всех $t \ge 0$ и $k \to \infty$ имеет порядок $O\left(\frac{1}{k^2}\right)$.

6. Окончательный вид решения задачи.

$$u(\rho,\varphi,t) = \left[\frac{r}{n} f(t) \left(\frac{\rho}{r}\right)^n + w(\rho,t) \right]\cdot \cos n\varphi =$$

$$= \left\{ \frac{r}{n} f(t)\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n + \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\cdot \Re_k(\rho) \right\}\cdot \cos n\varphi =$$

$$= \frac{r}{n}\left\{ \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \cdot \left(f(t) - f(0) \right) - \right.$$

$$\left. - \int\limits_0^t f'(\tau)\cdot\left[\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k e^{-(\mu_k b)^2 (t-\tau)} \cdot \Re_k(\rho) \right] d\tau \right\} \cos n\varphi =$$

$$=\frac{r}{n}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\cdot\left(f(t)-f(0)\right)\cdot\cos n\varphi-$$

$$-2\,r\cdot\int\limits_0^t f'(\tau)\cdot\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\beta_k^{(n)2}-n^2}e^{-\left(\frac{b}{r}\beta_k^{(n)}\right)^2\cdot(t-\tau)}\cdot\frac{J_n\left(\beta_k^{(n)}\rho/r\right)}{J_n\left(\beta_k^{(n)}\right)}\right]d\tau\cdot\cos n\varphi=$$

$$=\frac{r}{n}\left\{f(t)\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n-\sum_{k=1}^{\infty}\left[f(0)+\int\limits_0^t f'(\tau)\cdot e^{-\left(\frac{b}{r}\beta_k^{(n)}\right)^2\cdot(t-\tau)}d\tau\right]\cdot\gamma_k\Re_k(\rho)\right\}\cdot\cos n\varphi.$$

Получается, что ряд сходится не хуже $O\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$ при $k\to\infty$.

7. Проверка полученного решения по условиям задачи и по размерностям.

$$u\Big|_{\rho=0}=0<\infty\because R_k(0)=0,\qquad J_n(0)=0\quad\text{при } n\in\mathbb{N}.$$

$$u'_\rho\Big|_{\rho=r}=\frac{r}{n}\left\{f(t)\cdot\frac{n}{r}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n-1}-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\int\limits_0^t f'(\tau)e^{-\left(\beta_k^{(n)}\frac{b}{r}\right)^2(t-\tau)}d\tau\right)\gamma_k\Re_k'(\rho)\right]\right\}\Big|_{\rho=r}\cdot\cos n\varphi=$$

$$=f(t)\cdot\cos n\varphi\because\Re_k'(r)=0;$$

$$u\big|_{t=0}=0-2r\cdot\int\limits_0^0 f'(\tau)e^{-\left(\beta_k^{(n)}\frac{b}{r}\right)^2(t-\tau)}d\tau=0.$$

Выполнение условий периодичности с периодом 2π для функций $u(\rho,\varphi,t)$ и $u'_\varphi(\rho,\varphi,t)$ очевидно.

По условиям задачи получаем размерности

$$\left[u(\rho,\varphi,t)\right]\equiv Q,\quad\left[f(t)\right]=Q/L,\quad\left[f'(t)\right]=Q/LT,$$

$$\left[b^2\right]=L^2/T,\quad \left[\gamma_k\right]=L,\quad \left[\Re_k\right]=1/L,\quad \left[\mu_k\rho\right]=\left[\mu_k r\right]=1,$$

$$\left[\mu_k^2 b^2 t\right]=\left[\beta_k^{(n)}\frac{b^2}{r^2}t\right]=\frac{L^2}{T}\frac{1}{L^2}T=1.$$

Откуда

$$\left[u(\rho,\varphi,t)\right]=Q=L\left\{[f]+\left([f]+[f_t']\cdot T\right)\cdot[\gamma_k]\cdot[\Re_k]\right\}\Rightarrow Q.$$

8. Если задано ненулевое начальное условие задачи $u(\rho,\varphi,0)=g(\rho)\cdot\cos n\varphi$, то решение принимает вид;

$$u(\rho,\varphi,t)=\frac{r}{n}\left\{f(t)\left(\frac{\rho}{r}\right)^n+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\Gamma_k-f(0)\cdot\gamma_k\right)\cdot e^{-(\mu_k b)^2 t}-\gamma_k\int_0^t f'(\tau)\cdot e^{-(\mu_k b)^2(t-\tau)}d\tau\right]\cdot\Re_k(\rho)\quad\right\}\cdot\cos n\varphi,$$

,

где $\Gamma_k=(g,\Re_k)=\int\limits_0^r g(\rho)\cdot\Re_k(\rho)\rho\,d\rho=const.$

Если в граничном $u'_\rho\Big|_{\rho=r}=f(t)\cdot\cos n_1\varphi$ и начальном $u\Big|_{t=0}=g(\rho)\cdot\cos n_2\varphi$ условиях заданы косинусы разных аргументов $n_1\neq n_2$, то решение задачи проще разбить на две части, только с одним из неоднородных условий в каждой. Аналогично следует поступить, если такая неоднородность задана в уравнении.

Задача 2.10. Решение внутри круга с помощью функции Грина дифференциального уравнения параболического типа с граничными условиями первого рода (краевая задача Дирихле).

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}-\dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial u}{\partial t}=F(\rho,\varphi,t). \\ u\Big|_{\rho=0}<0, \qquad u\Big|_{\rho=r}=q(\varphi,t); \\ u\Big|_{\varphi}=u\Big|_{\varphi+2\pi}, \quad u'_{\varphi}\Big|_{\varphi}=u'_{\varphi}\Big|_{\varphi+2\pi}; \\ u\Big|_{t=0}=g(\rho,\varphi). \end{cases} \qquad \begin{aligned} &u=u(\rho,\varphi,t). \\ &0\le\rho\le r, \\ &0\le\varphi<2\pi, \\ &0\le t<\infty. \end{aligned}$$

1. Отделение зависимости от угла φ при $L_2\left(0,2\pi\,|1\right)$.

$$\hat{D}_{\varphi}=\frac{d^2}{d\varphi^2}; \quad \begin{cases}\Phi''+\nu^2\cdot\Phi(\varphi)=0, \quad \lambda_{\varphi}=-\nu^2\le 0, \quad \nu=n\in\mathbb{Z}. \\ \Phi(0)=\Phi(2\pi), \qquad \Phi'(0)=\Phi'(2\pi).\end{cases}$$

$$\Phi_n(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{in\varphi} \qquad \text{при } n\in\mathbb{Z}.$$

$$(F,\Phi_n)=\int_0^{2\pi}F(\rho,\varphi',t)\cdot\Phi_n^*(\varphi')\,d\varphi'\equiv F_n, \quad (q,\Phi_n)=q_n(t),$$
$$(g,\Phi_n)=g_n(\rho), \qquad \upsilon_n(\rho,t)=(u,\Phi_n).$$

В дальнейшем индекс n часто не дописывается. Новая постановка задачи будет

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right)-\dfrac{n^2}{\rho^2}\upsilon-\dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial\upsilon}{\partial t}=F(\rho,t). \\ \upsilon\Big|_{\rho=0}<\infty, \quad \upsilon\Big|_{\rho=r}=q(t); \quad \upsilon\Big|_{t=0}=g(\rho). \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\upsilon_n=\upsilon(\rho,t). \\ &0\le\rho\le r, \\ &0\le t<\infty. \end{aligned}$$

2. Разделение переменных $\upsilon_n(\rho,t)=R(\rho)\cdot T(t)$ и решение первой краевой задачи для оператора Бесселя $\hat{D}_{Б}=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{d}{d\rho}\right)-\dfrac{n^2}{\rho^2}$ в пространстве $L_2\left(0,r\,|\,\rho\right)$

$$\begin{cases} \hat{D}_Б R = \lambda R(\rho) \\ |R(0)| < \infty, \quad R(r) = 0. \end{cases} \qquad \begin{aligned} R_k(\rho) &= \frac{\sqrt{2}}{r} \frac{J_n(\mu_k \rho)}{J_{n+1}(\mu_k r)}, \\ \lambda_k &= -\mu_k^2 = -\left(\frac{\alpha_k^{(n)}}{r}\right)^2 < 0. \end{aligned}$$

$$J_n(\mu_k \rho) = J_n\left(\alpha_k^{(n)} \frac{\rho}{r}\right); \; J_n\left(\alpha_k^{(n)}\right) = 0 \quad \text{и} \quad J_n'\left(\alpha_k^{(n)}\right) \neq 0, \;\; J_{n+1}\left(\alpha_k^{(n)}\right) \neq 0.$$

$$0 \equiv \alpha_0^{(n)} < \alpha_k^{(n)} < \alpha_{k+1}^{(n)} < \ldots \qquad \text{при} \;\; n \in \mathbb{N}.$$

$$\upsilon_n(\rho, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) R_k(\rho) \qquad \text{при} \;\; T_k = (\upsilon_n, R_k); \quad \lim_{k \to \infty} T_k(t) = 0.$$

3. Вывод дифференциального уравнения для функции времени $T_k(t)$.

$$\int_0^r \left(\hat{D}_Б \upsilon \cdot R_k - \upsilon \cdot \hat{D}_Б R_k\right) \cdot \rho \, d\rho \equiv \left(\hat{D}_Б \upsilon, R_k\right) - \left(\upsilon, \hat{D}_Б R_k\right) =$$

$$= \left(\left(F + \frac{1}{b^2} \upsilon_t'\right), R_k\right) + \mu^2 \cdot (\upsilon, R_k) =$$

$$= (F, R_k) + \frac{1}{b^2}(\upsilon_t', R_k) + \mu_k^2 T_k = F_k(t) + \frac{1}{b^2} T_k'(t) + \mu_k^2 T_k(t) =$$

$$= F_k(t) + \frac{1}{b^2} T_k'(t) = \frac{1}{b^2} \cdot \left(T_k' + (\mu_k b)^2 T_k + b^2 F_k\right).$$

Легко также проверить выполнение равенства

$$\left(\hat{D}_Б \upsilon, R_k\right) - \left(\upsilon, \hat{D}_Б R_k\right) = \int_0^r \left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial \upsilon}{\partial \rho}\right) R_k - \upsilon \frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dR_k}{d\rho}\right)\right] d\rho =$$

$$= \int_0^r \left(\upsilon_\rho' R_k - \upsilon R_k' + \rho \upsilon_\rho'' R_k + \rho \upsilon_\rho' R_k' -\right.$$

$$\left. - \rho \upsilon_\rho' R_k' - \rho \upsilon R_k''\right) d\rho = \int_0^r \frac{d}{d\rho}\left[\rho\left(\upsilon_\rho' R_k - \upsilon R_k'\right)\right] d\rho =$$

$$= \rho\left(\upsilon_\rho' R_k - \upsilon R_k'\right)\Big|_0^r = 0 - r \cdot \upsilon(r, t) \cdot R_k'(r) = -r \cdot q(t) \cdot R_k'(r).$$

Приравнивая оба полученных выше выражения, получим искомое дифференциальное уравнение

$$T_k' + (\mu_k b)^2 T_k(t) = -b^2 \left(F_k(t) + r\,q(t)\cdot R_k'(r)\right); \qquad \upsilon_n(r,t) = q_n(t).$$

4. Решение дифференциального уравнения для функции времени $T_k(t)$.

Решение соответствующего однородного дифференциального уравнения очевидно $T_k(t) = C_k e^{-(\mu_k b)^2 t}$ при $C_k = const.$ Частное решение неоднородного уравнения найдем методом вариации постоянной. Пусть $T_k(t) = C_k(t)\cdot e^{-(\mu_k b)^2 t}$, где $C_k(t) \neq const$ подлежит определению. Тогда

$$T_k' + (\mu_k b)^2 T_k = C_k'(t)\cdot e^{-(\mu_k b)^2 t} - (\mu_k b)^2 C_k(t)\cdot e^{-(\mu_k b)^2 t} +$$

$$+ (\mu_k b)^2 C_k(t)\cdot e^{-(\mu_k b)^2 t} = C_k'(t)\cdot e^{-(\mu_k b)^2 t} =$$

$$= -b^2 \left(F_k(t) - rR_k'\ (r)\cdot q(t)\right) \Rightarrow C_k(t) =$$

$$= C_k - b^2 \cdot \int_0^t \left[F_k(\tau) + r\,R_k'(r)\cdot q(\tau)\right]\cdot e^{+(\mu_k b)^2 \tau} d\tau$$

и решение уравнения для функции времени равно

$$T_k(t) = C_k(t)\cdot e^{-(\mu_k b)^2 t} = C_k \cdot e^{-(\mu_k b)^2 t} -$$

$$- b^2 \cdot \int_0^t \left[F_k(\tau) + r\,R_k'(r)\cdot q(\tau)\right]\cdot e^{-(\mu_k b)^2 (t-\tau)} d\tau; \qquad C_k = const.$$

5. Определение постоянной интегрирования C_k.

Зная разложение искомой функции $\upsilon(\rho,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) R_k(\rho)$ по функциям Бесселя, легко найти начальное значение временной функции $\upsilon(\rho,0) = = \sum_k T_k(0) R_k(\rho) = g(\rho) = \sum_k g_k \cdot R_k(\rho)$, откуда $T_k(0) = C_k = const.$ Тогда

$$T_k(t) = g_k e^{-(\mu_k b)^2 t} - b^2 \cdot \int_0^t \left[F_k(\tau) + r\,R_k'(r)\cdot q(\tau)\right] e^{-(\mu_k b)^2 (t-\tau)} d\tau.$$

6. Окончательный вид решения задачи.

$$\upsilon_n(\rho,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)R_k(\rho)=\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{g_k e^{-(\mu_k b)^2 t}-$$

$$-b^2\cdot\int_0^t\left[F_k(\tau)+rR_k'(r)\cdot q(\tau)\right]e^{-(\mu_k b)^2(t-\tau)}d\tau\Big\}R_k(\rho)=$$

$$=\sum_k\Big\{\int_0^r g(\rho')R_k(\rho')\rho' d\rho'\cdot e^{-(\mu_k b)^2 t}-b^2\cdot\int_0^t\Big[\int_0^r F(\rho',\tau)R_k(\rho')\rho' d\rho'+$$

$$+rR_k'(r)\cdot q(\tau)\Big]e^{-(\mu_k b)^2(t-\tau)}d\tau\Big\}\cdot R_k(\rho)=$$

$$=\int_0^r g(\rho')\cdot\left(\sum_k e^{-(\mu_k b)^2 t}R_k(\rho')R_k(\rho)\right)\cdot\rho' d\rho'-$$

$$-b^2\cdot\int_0^t\Big[\int_0^r F(\rho',\tau)\cdot\left(\sum_k e^{-(\mu_k b)^2(t-\tau)}\cdot R_k(\rho')R_k(\rho)\right)\rho' d\rho'+$$

$$+rq(\tau)\cdot\left(\sum_k e^{-(\mu_k b)^2(t-\tau)}\cdot R_k(\rho')R_k(\rho)\right)\Big]d\tau=$$

$$=\int_0^r g(\rho')\cdot G(\rho',\rho|t)\cdot\rho' d\rho'-b^2\cdot\int_0^t\Big[\int_0^r F_n(\rho',\tau)\cdot G(\rho',\rho|t-\tau)\cdot\rho' d\rho'+$$

$$+rq_n(\tau)\cdot G_\rho'(\rho',r|t-\tau)\Big]d\tau,$$

где функция Грина равна

$$G_n(\rho',\rho|t)=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-(\mu_{kn}b)^2 t}\cdot R_{kn}(\rho')R_{kn}(\rho);\qquad \mu_{kn}=\alpha_k^{(n)}/r>0.$$

Теперь можно записать и решение исходной задачи

$$u(\rho,\varphi,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}T_{kn}(t)\cdot R_{kn}(\rho)=$$

$$=\left[R_{kn}(\rho,\varphi)=\frac{\sqrt{2}}{r}\frac{J_n\left(\alpha_k^{(n)}\dfrac{\rho}{r}\right)}{J_{n+1}\left(\alpha_k^{(n)}\right)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{in\varphi}\right]=$$

$$= \iint\limits_{\sigma} g(\rho', \varphi') \cdot G\left(\rho, \varphi; \rho', \varphi' \middle| t\right) d\sigma' -$$

$$- b^2 \cdot \int\limits_0^t d\tau \left[\iint\limits_{\sigma} F(\rho', \varphi', \tau) \cdot G\left(\rho, \varphi; \rho', \varphi' \middle| t - \tau\right) d\sigma' + \right.$$

$$\left. + \oint\limits_C q(\varphi', \tau) \cdot \frac{\partial}{\partial \rho'} G\left(\rho, \varphi; \rho', \varphi' \middle| t - \tau\right)\Big|_{\rho'=r} \cdot dl' \right],$$

где $\sigma = \pi r^2$, $C = 2\pi r$, $d\sigma' = \rho' d\rho' d\varphi'$, $dl' = r d\varphi'$, $\dfrac{\partial}{\partial \rho'} = \dfrac{\partial}{\partial n}$.

Последнюю формулу можно использовать и для решения трехмерной задачи, если ввести координаты точки $M(\rho, \varphi, z)$ и рассматривать задачу внутри отрезка цилиндра $0 \le z \le H$. Тогда функцию Грина следует умножить на функцию длинны $Z_m(z)$, двумерные интегралы заменить на трехмерные по отрезку цилиндра, а интеграл по контуру заменить на интеграл по поверхности отрезка цилиндра.

Для сокращения записи в последней формуле можно обозначить $M(\rho, \varphi)$ и $M'(\rho', \varphi')$, тогда приведем ее к обычному виду

$$u(M, t) = \iint\limits_{\sigma} g(M') \cdot G\left(M, M' \middle| t\right) d\sigma' -$$

$$- b^2 \cdot \int\limits_0^t d\tau \left[\iint\limits_{\sigma} F(M', \tau) \cdot G\left(M, M' \middle| t - \tau\right) d\sigma' + \right.$$

$$\left. + \oint\limits_C q(M', \tau) \cdot \frac{\partial}{\partial n'} G\left(M, M' \middle| t - \tau\right) dl' \right].$$

7. Проверка решения по условиям задачи и по размерностям.

Если воспользоваться известной связью граничных условий для функций Грина с δ-функцией Дирака

$$G\left(M, M' \middle| \tau \vee t - \tau\right)\Big|_C = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial n'} G\left(M, M', \middle| \tau\right) = -\frac{1}{b^2} \cdot \delta(M, M') \cdot \delta(t, \tau),$$

то граничное условие задачи удовлетворяется

$$u\Big|_{\rho=r} = \iint\limits_{\sigma} g\cdot G\Big|_C \cdot d\sigma' - b^2 \cdot \int\limits_0^t d\tau \left[\iint\limits_{\sigma} F\cdot G\Big|_C \cdot d\sigma' + \oint\limits_C q\cdot \frac{\partial}{\partial n'} G\Big|_C \cdot d\,l' \right] =$$

$$= 0 - b^2 \cdot \int\limits_0^t \left[0 + \oint\limits_C q\left(M',\tau\right)\cdot\left(-\frac{1}{b^2}\cdot\delta\left(M',M\right)\cdot\delta\left(\tau,t\right)\right) d\,l' \right] d\tau =$$

$$= q\left(M',t\right)\Big|_{\rho'=r} = q\left(\varphi,t\right).$$

Известно и начальное значение функции Грина $G\left(M,M'\middle|0\right) = \delta\left(M,M'\right)$, поэтому

$$u\Big|_{t=0} = \iint\limits_{\sigma} g\left(M'\right)\cdot\delta\left(M',M\right)d\sigma' -$$

$$- b^2\cdot\int\limits_0^t \left[\ldots\right] d\tau\Big|_{t=0} = g\left(M\right) - 0 = g\left(\rho,\varphi\right).$$

Проверим соответствие размерностей в формуле решения.

Пусть размерности $\left[u\left(M,t\right)\right] \equiv Q,$ тогда $\left[q\right] = \left[g\right] = Q,$ $\left[F\right] = Q/L^2,$ $\left[b^2\right] = L^2/T,$ $\left[G\right] = \left[R_k\right]^2 = 1/L^2,$ $\left[\frac{\partial}{\partial n}G\right] = 1/L^3,$ $\left[d\sigma\right] = L^2,$ $\left[dl\right] = L,$

Тогда размерности формулы ответа совпадают

$$\left[u\left(M,t\right)\right] \equiv Q = \left[g\right]\cdot\left[G\right]\cdot L^2 + \frac{L^2}{T}T\cdot\left(\left[F\right]\cdot\left[G\right]\cdot L^2 + \left[f\right]\cdot\left[\frac{\partial}{\partial n}G\right]\cdot L\right) =$$

$$= Q\cdot\frac{1}{L^2}\cdot L^2 + \frac{L^2}{T}T\cdot\left(Q/L^2\cdot 1/L^2\cdot L^2 + Q\cdot 1/L^3\cdot L\right) \Rightarrow Q.$$

Решение задач для уравнения колебаний (волнового уравнения)

Задача 2.11. Плоская задача для неоднородного волнового уравнения внутри круга (колебания круглой мембраны) со всеми однородными условиями.

$$\begin{cases} \Delta_2 u - \dfrac{1}{a^2}u''_{tt} = F(\rho,\varphi,t) \equiv At\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^n\cdot\cos n\varphi. \\ u\Big|_{\rho=r} = 0; \qquad u\Big|_{t=0} = u'_t\Big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

$u = u(\rho,\varphi,t).$
$0 \le \rho \le r,\ 0 \le \varphi < 2\pi,$
$0 \le t < \infty.$
$n \in \mathbb{Z}_0.$

Условие ограниченности при $\rho = 0$ и условия периодичности по углу φ явно не записаны. Здесь плоская часть оператора Лапласа равна $\Delta_2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$.

1–2. Граничные условия заданы однородными. Отделение зависимости от угла $u(\rho,\varphi,t) = \upsilon(\rho,t)\cdot\cos n\varphi$.

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right) - \frac{n^2}{\rho^2}\upsilon - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\upsilon}{\partial t^2} = At\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n. & \upsilon = \upsilon(\rho,t). \\ |\upsilon(0,t)| < \infty, \quad \upsilon(r,t) = 0; & 0 \le \rho \le r, \quad 0 \le t < \infty. \\ \upsilon(\rho,0) = \upsilon_t'(\rho,0) = 0. & A,a,r = const > 0. \end{cases}$$

3. Разделение переменных и решение первой краевой задачи для оператора Бесселя.

$$\hat{D}_Б = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d}{d\rho}\right) - \frac{n^2}{\rho^2}$$ с однородными граничными условиями;

$$\upsilon(\rho,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)R_k(\rho) \quad \text{при } (R_k, R_{k'}) = \delta_{kk'}.$$

Здесь $R_k(\rho) = \frac{\sqrt{2}}{r}J_n(\mu_k\rho)/J_{n+1}(\mu_k r)$ – ортонормированные собственные функции и $\lambda_k = -\mu_k^2 = -(\alpha_k^{(n)}/r)^2 < 0$ – дискретный спектр собственных чисел. $J_n\left(\alpha_k^{(n)}\right) = 0$ – дисперсионное уравнение, корни которого $\alpha_k^{(n)} > 0$ – простые и $\alpha_k^{(n)} < \alpha_{k+1}^{(n)}$ при $k \in \mathbb{N}$. Отметим необходимость предела $\lim\limits_{k\to\infty} T_k(t) = 0$ при всех $t \ge 0$.

4. Вывод дифференциального уравнения для определения функции $T_k(t)$.

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right) - \frac{n^2}{\rho^2}\upsilon - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\upsilon}{\partial t^2} \equiv \sum_k\left\{\hat{D}_Б R_k\cdot T_k - \frac{1}{a^2}R_k\cdot T''_k\right\} =$$

$$=-\frac{1}{a^2}\sum_k\left\{T''_k+(a\mu_k)^2\cdot T_k(t)\right\}\cdot R_k(\rho)=At\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sum_k\left\{T''_k+(\mu_k a)^2T_k\right\}R_k=-Aa^2t\left(\frac{\rho}{r}\right)^n=\sum_k\gamma_k(t)R_k(\rho),$$

где

$$\gamma_k(t)=\left(-Aa^2t\left(\frac{\rho}{r}\right)^n,R_k\right)=-\frac{Aa^2t\sqrt{2}}{r^{n+1}\cdot J_{n+1}(\alpha)}\cdot\int_0^r\rho^{n+1}\cdot J_n(\mu_k\rho)\,d\rho=$$

$$=\left[\mu_k\rho=x,\ \rho\Big|_0^r\Rightarrow x\Big|_0^{\alpha_k^{(n)}}\right]=\frac{-Aa^2t\sqrt{2}}{r^{n+1}\cdot J_{n+1}}\cdot\int_0^\alpha\left(\frac{xr}{\alpha}\right)^{n+1}\cdot J_n(x)\,\frac{rdx}{\alpha}=$$

$$=\frac{-Aa^2rt\sqrt{2}}{\alpha^{n+2}\cdot J_{n+1}}\cdot\int_0^\alpha J_n(x)\cdot x^{n+1}dx=\frac{-Aa^2rt\sqrt{2}}{\alpha^{n+2}\cdot J_{n+1}(\alpha)}\cdot x^{n+1}J_{n+1}(x)\Big|_0^\alpha=$$

$$=-A\sqrt{2}a^2rt/\alpha_k^{(n)}=-A\sqrt{2}a^2t/\mu_k.$$

Таким образом, искомое уравнение для функции $T_k(t)$ получим в виде

$$T''_k+(\mu_k a)^2\cdot T_k(t)=\gamma_k(t)\equiv-Aa^2\sqrt{2}t/\mu_k;\quad \mu_k=\alpha_k^{(n)}/r>0.$$

5. Общее решение однородного уравнения для функции $T_k(t)$ очевидно $\mathring{T}_k(t)=C_k\cdot\cos\mu_k at+\tilde{C}_k\cdot\sin\mu_k at\qquad\left(C_k,\tilde{C}_k=const\right)$, а частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде двучлена $\tilde{T}_k(t)=p_kt+q_k\quad(p_k,q_k=const)$. Тогда $\tilde{T}''_k+(\mu_k a)^2\tilde{T}_k=$

$$=0+(\mu_k a)^2\cdot(pt+q)=-Aa^2\sqrt{2}t/\mu_k\Rightarrow p_k=-A\sqrt{2}/\mu_k^3<0\ \text{ и }\ q_k=0.$$

Здесь $\mu_k a\equiv\omega_k=\alpha_k^{(n)}\dfrac{a}{r}>0$ – собственные частоты колебаний круглой мембраны.

Теперь решение задачи примет вид:

$$\upsilon(\rho,t)=\sum_k T_k(t)\cdot R_k(\rho)=\sum_k\left\{C_k\cdot\cos\omega_kt+\tilde{C}_k\cdot\sin\omega_kt-\frac{A\sqrt{2}}{\mu_k^3}t\right\}R_k(\rho).$$

6. Определение постоянных C_k и $\tilde{C}_k$ из начальных условий.

$$\upsilon(\rho,0)=\sum_k\left\{C_k+0-0\right\}\cdot R_k(\rho)=0\Rightarrow C_k=0.$$

$$\upsilon_t'(\rho,0)=\sum_k\left\{0+\tilde{C}_k\omega_k-\frac{A\sqrt{2}}{\mu_k^3}\right\}R_k(\rho)=0\Rightarrow \tilde{C}_k=\frac{A\sqrt{2}}{a\mu_k^4}>0.$$

7. Окончательный вид решения задачи и его проверка по условиям задачи и по размерностям.

$$u(\rho,\varphi,t)=\upsilon\left(\rho\right)\cdot\cos n\varphi=\frac{2A}{ar}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sin\mu_k at-\mu_k at\right)\frac{J_n\left(\mu_k\rho\right)}{\mu_k^4\cdot J_{n+1}\left(\mu_k r\right)}\cdot\cos n\varphi,$$

где $\mu_k=\alpha_k^{(n)}/r>0$ и $J_n\left(\alpha_k^{(n)}\right)=0;$ здесь $\alpha_k^{(n)}>0$ – простые нули.

Ряд сходится порядка $O\left(\frac{1}{k^3}\right)$ при $k\to\infty$.

$$u\left(0,\varphi,t\right)=0<\infty\because J_n\left(0\right)=0;\quad u\left(r,\varphi,t\right)=0\because J_n\left(\alpha_k^{(n)}\right)=0.$$

$u\left(\rho,\varphi,0\right)=u_t'\left(\rho,\varphi,0\right)=0$ – очевидно .

Размерности: $\left[u\left(\rho,\varphi,t\right)\right]=W,$ $\left[A\right]=W/L^2T,\left[a\right]=L/T,$

$\left[\mu_k at\right]=\frac{1}{L}\frac{L}{T}T=1,$ поэтому $\left[u\right]=\frac{W/L^2T}{(L/T)\cdot L}\cdot\frac{1}{1/L^4}\Rightarrow W.$

8. Теперь получим решение задачи по общей формуле с использованием функции Грина.

После отделения зависимости от угла φ запишем

$$F\left(\rho,t\right)=At\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n,\quad q\left(t\right)=f\left(\rho\right)=g\left(\rho\right)=0.$$

Поэтому

$$\upsilon(\rho,t)=0+0-a^2\cdot\int_0^t d\tau\left(\int_o^r F(\rho',\tau)\cdot G_k(\rho,\rho'\left|t-\tau\right.)\cdot 2\pi\rho' d\rho'+0\right)=$$

$$=-Aa^2\int_0^t d\tau\int_0^r\left(\frac{\rho'}{r}\right)^n\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\omega_k(t-\tau)}{\omega_k}R_k(\rho)\cdot\overline{R}_k(\rho')\right)\cdot\rho' d\rho'=$$

$$= -\frac{2Aa^2}{r^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_n(\mu_k\rho)}{\omega_k J_{n+1}^2(\mu_k r)}\cdot\int_0^t \sin\omega_k(t-\tau)\cdot\tau d\tau\times$$

$$\times\int_0^r\left(\frac{\rho'}{r}\right)^n J_n(\mu_k\rho')\rho' d\rho'; \qquad \omega_k=\mu_k a>0.$$

Оба интеграла можно вычислить отдельно.

$$\int_0^t \sin\omega_k\left(t-\tau\right)\cdot\tau d\tau=\int_0^t\frac{\tau}{\omega_k}\cdot d\cos\omega_k\left(t-\tau\right)=\frac{1}{\omega_k}\left\{-\tau\cdot\cos\omega_k\left(t-\tau\right)\Big|_0^t-\right.$$

$$\left.-\int_0^t\cos\omega_k\left(t-\tau\right)\cdot d\tau\right\}=\frac{1}{\omega_k}\left\{t+\frac{1}{\omega_k}\cdot\int_0^t d\sin\omega_k\left(t-\tau\right)\right\}=$$

$$=\frac{1}{\omega_k}\left\{t+\frac{1}{\omega_k}\cdot\sin\omega_k\left(t-\tau\right)\Big|_0^t\right\}=\frac{1}{\omega_k^2}\left(\omega_k t-\sin\omega_k t\right).$$

$$\int_0^r\left(\frac{\rho'}{r}\right)^n\cdot J_n\left(\mu_k\rho'\right)\cdot\rho' d\rho'=\left[\mu_k\rho'=\alpha_k^{(n)}\frac{\rho}{r}=x\right]=$$

$$=\int_0^{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^n\cdot J_n\left(x\right)\cdot\left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 x dx=\frac{r^2}{\alpha^{n+2}}\cdot\int_0^{\alpha}J_n\left(x\right)\cdot x^{n+1}dx=$$

$$=\frac{r^2}{\alpha^{n+2}}\cdot x^{n+1}J_{n+1}\left(x\right)\Big|_0^{\alpha}=\frac{r^2}{\alpha}J_{n+1}\left(\alpha\right)=\frac{r}{\mu_k}J_{n+1}\left(\mu_k r\right)\neq 0.$$

Теперь функция $\upsilon\left(\rho,t\right)$ примет вид:

$$\upsilon\left(\rho,t\right)=-\frac{2Aa^2}{r^2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_n\left(\mu_k\rho\right)}{\omega_k\cdot J_{n+1}^2\left(\mu_k r\right)}\cdot\frac{\omega_k t-\sin\omega_k t}{\omega_k^2}\cdot\frac{r}{\mu_k}J_{n+1}\left(\mu_k r\right)=$$

$$=\frac{2A}{ar}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sin\omega_k t-\omega_k t\right)\cdot\frac{J_n\left(\mu_k\rho\right)}{\mu_k^4\cdot J_{n+1}\left(\mu_k r\right)}.$$

Решение исходной задачи получим в виде $u\left(\rho,\varphi,t\right)=\upsilon\left(\rho,t\right)\cdot\cos n\varphi.$

Задача 2.12. Плоская задача для однородного волнового уравнения внутри круга (колебания круглой мембраны) с неоднородным граничным условием Дирихле.

$$\begin{cases} \Delta_2 u - \dfrac{1}{a^2} u''_{tt} = 0. \\ u\Big|_{\rho=r} = At \cdot \sin n\varphi; \\ u\Big|_{t=0} = u'_t\Big|_{t=0} = 0. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u = u(\rho,\varphi,t). \\ 0 \le \rho \le r, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \\ 0 \le t < \infty. \quad n \in \mathbb{N}. \end{array}$$

Условия ограниченности при $\rho = 0$ и периодичности по углу φ явно не записаны. Здесь обозначено $\Delta_2 = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}(\rho\dfrac{\partial}{\partial\rho}) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$.

1. Отделение зависимости от угла φ дает $u(\rho,\varphi,t) = \upsilon(\rho,t)\cdot\sin n\varphi$.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}(\rho\dfrac{\partial\upsilon}{\partial\rho}) - \dfrac{n^2}{\rho^2}\upsilon - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2\upsilon}{\partial t^2} = 0. \\ |\upsilon(0,t)| < \infty, \quad \upsilon(r,t) = At; \\ \upsilon(\rho,0) = \upsilon'_t(\rho,0) = 0. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \upsilon = \upsilon(\rho,t). \\ 0 \le \rho \le r, \quad 0 \le t < \infty. \end{array}$$

2. Приведение граничных условий к однородным выполняется по формуле $\upsilon(\rho,t) = w(\rho,t) + At\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^m$ при $m \in \mathbb{N}$.

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right) - \frac{n^2}{\rho^2}\upsilon - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\upsilon}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial w}{\partial\rho}\right) - \frac{n^2}{\rho^2}w -$$

$$-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{m^2 - n^2}{\rho^2}At\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^m = 0, \quad \Rightarrow \quad \text{примем } m = n.$$

Условия задачи после упрощения примут вид:

$$\begin{array}{ll} \dfrac{1}{\zeta}\dfrac{\partial}{\partial\zeta}\left(\zeta\dfrac{\partial w}{\partial\zeta}\right) - \dfrac{\nu^2}{\zeta^2}w - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. & w = w(\zeta,t). \\ |w(0,t)| < \infty, \ w(r,t) = 0. & 0 \le \zeta \le r, \\ w(\zeta,0) = 0, \ w'_t(\zeta,0) = -A\cdot\left(\dfrac{\zeta}{r}\right)^n. & 0 \le t < \infty. \end{array}$$

Связь последней искомой функции с первоначальной такова:

$$u(\rho,\varphi,t) = \upsilon(\rho,t)\cdot\sin n\varphi = \left[At\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n + w(\rho,t)\right]\cdot\sin n\varphi.$$

3. Разделение переменных и решение первой краевой задачи Дирихле для оператора Бесселя.

$$\hat{D}_Б = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho\frac{d}{d\rho}) - \frac{n^2}{\rho^2}.$$

$$w(\rho,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) R_k(\rho) \qquad \text{при } (R_k, R_{k'}) = \delta_{kk'}.$$

Здесь $R_k(\rho) = \frac{\sqrt{2}}{r} J_n(\mu_k \rho) / J_{n+1}(\mu_k r)$ – ортонормированные собственные функции и $\lambda_k = -\mu_k^2 = -\left(\alpha_k^{(n)} / r\right)^2 < 0$ – дискретный спектр собственных значений. $J_n\left(\alpha_k^{(n)}\right) = 0$ – дисперсионное (характеристическое) уравнение, корни которого $\alpha_k^{(n)} > 0$ при $k \in \mathbb{N}$ – простые и возрастающие $\alpha_k^{(n)} < \alpha_{k+1}^{(n)}$, причем $J_{n+1}\left(\alpha_k^{(n)}\right) \neq 0$. Для сходимости ряда требуется $\lim_{k\to\infty} T_k(t) = 0$ при всех $t \geq 0$.

4. Вывод дифференциального уравнения для определения функции – координаты $T_k(t)$.

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial w}{\partial\rho}\right) - \frac{n^2}{\rho^2} w - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \equiv \sum_k \left\{ \hat{D}_Б\, R_k \cdot T_k - \frac{1}{a^2} R_k \cdot T''_k \right\} =$$

$$= -\frac{1}{a^2} \cdot \sum_k \left\{ T''_k + (\mu_k a)^2 \cdot T_k \right\} \cdot R_k = 0 \Rightarrow T''_k + (\mu_k a)^2 \cdot T_k(t) = 0$$

– обыкновенное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Здесь $\omega_k = \mu_k a = \alpha_k^{(n)} \frac{a}{r} > 0$ – частоты собственных колебаний круглой мембраны.

5. Решение полученного однородного дифференциального уравнения известно: $T_k(t) = C_k \cdot \cos\omega_k t + \tilde{C}_k \cdot \sin\omega_k t$ $\left(C_k, \tilde{C}_k = const\right)$, поэтому искомую функцию $w(\rho,t)$ можно записать в виде

$$w(\rho,t)=\sum_k T_k(t)\cdot R_k(\rho)=\sum_k\left\{C_k\cdot\cos\omega_k t+\tilde{C}_k\cdot\sin\omega_k t\right\}\cdot R_k(\rho).$$

6. Постоянные C_k и $\tilde{C}_k$ можно определить из начальных условий. При этом сначала выгоднее использовать однородное начальное условие, а потом – неоднородное.

$$w(\rho,0)=\sum_k\left\{C_k\cdot 1+\tilde{C}_k\cdot 0\right\}\cdot R_k(\rho)=0\Rightarrow C_k=0,$$

$$w'_t(\rho,0)=\sum_k\left\{0+\tilde{C}_k\cdot\omega_k\right\}\cdot R_k(\rho)=-A\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\neq 0.$$

Используя ортогональность собственных функций $R_k(\rho)$, получим

$$\tilde{C}_k\omega_k=\left(-A\left(\frac{\rho}{r}\right)^n,R_k\right)=-A\cdot\int_0^r\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\cdot R_k(\rho)\cdot\rho d\rho=$$

$$=\frac{-A\sqrt{2}}{r^n\cdot J_{n+1}(\alpha)}\int_0^r\rho^{n+1}\cdot J_n(\mu_k\rho)d\rho=\left[\mu_k\rho=\alpha_k^{(n)}\frac{\rho}{r}=x;\ \rho\Big|_0^r\Rightarrow x\Big|_0^\alpha\right]=$$

$$=\frac{-A\sqrt{2}r}{\alpha^{n+2}\cdot J_{n+1}(\alpha)}\int_0^\alpha J_n(x)x^{n+1}dx=\frac{-A\sqrt{2}r}{\alpha^{n+2}\cdot J_{n+1}(\alpha)}\cdot\alpha^{n+1}J_{n+1}(\alpha)=$$

$$=\frac{-Ar\sqrt{2}}{\alpha_k^{(n)}};\qquad\tilde{C}_k=-\frac{A\sqrt{2}}{a\mu_k}<0.$$

Тогда $T_k(t)=-\dfrac{A\sqrt{2}}{a\mu_k^2}\cdot\sin\omega_k t$ и действительно выполняется условие $T_k(t)=O\left(\dfrac{1}{k^2}\right),\quad k\to\infty$, достаточное для хорошей сходимости ряда по индексу k (высокие обертоны ничтожны).

7. Окончательный вид решения задачи и его проверка.

$$w(\rho,t)=-\sum_k\frac{A\sqrt{2}}{a\mu_k^2}\cdot\sin\omega_k t\cdot R_k(\rho)=-\frac{2A}{ar}\cdot\sum_k\frac{J_n(\mu_k\rho)}{\mu_k^2\cdot J_{n+1}(\mu_k r)}\cdot\sin\omega_k t.$$

Теперь окончательный ответ принимает вид:

$$u(\rho,\varphi,t) = A\left\{t\left(\frac{\rho}{r}\right)^n - \frac{2}{ar}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_n\left(\mu_k\rho\right)}{\mu_k^2\cdot J_{n+1}\left(\mu_k r\right)}\cdot\sin\omega_k t\right\}\cdot\sin n\varphi;$$

здесь $\mu_k = \alpha_k^{(n)} / r > 0$ и $\omega_k = \mu_k a.$

Проверка ответа по всем условиям задачи.

$$u\left(0,\varphi,t\right) = 0 < \infty \because J_n\left(0\right) = 0.$$

$$u\left(r,\varphi,t\right) = A\left\{t\cdot 1 - 0\right\}\sin n\varphi = At\cdot\sin n\varphi \because J_n\left(\mu_k r\right) = J_n\left(\alpha_k^{(n)}\right) = 0.$$

$$u\left(\rho,\varphi,0\right) = 0 \text{ – очевидно.}$$

$$u'_t\left(\rho,\varphi,0\right) = A\left\{\left(\frac{\rho}{r}\right)^n - \frac{2}{r}\sum_k\frac{J_n\left(\mu_k\rho\right)}{\mu_k\cdot J_{n+1}\left(\mu_k r\right)}\right\}\cdot\sin n\varphi = 0 \because$$

$$\because \frac{r}{2}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_n\left(\mu_k\rho\right)}{\mu_k\cdot J_{n+1}\left(\mu_k r\right)}.$$

Проверка размерностей.

$$\left[u\left(\rho,\varphi,t\right)\right] \equiv W,\quad \left[A\right] = W / T,\quad \left[a\right] = L / T,\quad \left[\mu_k\right] = \left[\frac{\alpha_k^{(n)}}{r}\right] = 1 / L.$$

$$\left[u\right] = \frac{W}{T}\cdot\left\{T\cdot 1 + \frac{1}{L\cdot L / T}\cdot L^2\right\} \Rightarrow W.$$

8. После отделения зависимости от угла φ и приведения граничных условий к однородным по формуле

$$u\left(\rho,\varphi,t\right) = \left[At\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n + w\left(\rho,t\right)\right]\cdot\sin n\varphi$$

условия задачи для новой искомой функции $w\left(\rho,t\right)$ примут вид:

$$F\left(\rho,t\right) = q\left(\rho,t\right) = f\left(\rho\right) = 0 \quad \text{и} \quad g\left(\rho\right) = -A\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n.$$

Для отыскания функции $w(\rho,t)$ составим общую формулу решения через функцию Грина и получим

$$w(\rho,t)=\int_0^r g(\rho')\cdot G(\rho,\rho'|t)\cdot 2\pi\rho' d\rho' = -A\int_0^r \left(\frac{\rho'}{r}\right)^n \cdot G(\rho,\rho'|t)\cdot \rho' d\rho' =$$

$$=-\frac{2A}{r^2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\omega_k t}{\omega_k}\frac{J_n(\mu_k\rho)}{J_{n+1}^2(\mu_k r)}\cdot\int_0^r \left(\frac{\rho'}{r}\right)^n\cdot J_n(\mu_k\rho')\cdot\rho' d\rho'.$$

Последний интеграл хорошо известен

$$\int_0^r \left(\frac{\rho'}{r}\right)^n \cdot J_n(\mu_k\rho')\cdot\rho' d\rho' = \left[\mu_k\rho' = \alpha_k^{(n)}\frac{\rho}{r} = x\right] = \frac{r^2}{\alpha^{n+2}}\cdot\int_0^{\alpha} J_n(x)\cdot x^{n+1}dx =$$

$$=\frac{r^2}{\alpha^{n+2}}\cdot x^{n+1}J_{n+1}(x)\Big|_0^{\alpha} = \frac{r^2}{\alpha}J_{n+1}(\alpha) = \frac{r}{\mu_k}J_{n+1}(\mu_k r)\neq 0.$$

Поэтому функция $w(\rho,t)$ принимает окончательный вид:

$$w(\rho,t) = -\frac{2A}{r^2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\omega_k t}{\omega_k}\frac{J_n(\mu_k\rho)}{J_{n+1}^2(\mu_k r)}\cdot\frac{r}{\mu_k}J_{n+1}(\mu_k r) =$$

$$=-\frac{2A}{ar}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_n(\mu_k\rho)}{\mu_k^2 J_{n+1}(\mu_k r)}\cdot\sin\omega_k t;\quad \omega_k = a\mu_k > 0.$$

Это позволяет определить требуемую функцию $u(\rho,\varphi,t)$.

<u>Задача 2.13.</u> Плоская задача для уравнения колебаний круглой мембраны с усложненным граничным условием Дирихле.

$$\begin{cases} \Delta_2 u - \dfrac{1}{a^2}u''_{tt} = 0. \\ u\big|_{\rho=r} = At^2\cdot\sin n\varphi; \\ u\big|_{t=0} = u'_t\big|_{t=0} = 0. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u = u(\rho,\varphi,t). \\ 0\le\rho\le r,\quad 0\le\varphi<2\pi, \\ 0\le t<\infty.\quad n\in\mathbb{N}. \\ \Delta_2 = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial}{\partial\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \end{array}$$

Условия ограниченности при $\rho = 0$ и периодичности по углу φ явно не записаны.

1. Отделение зависимости от угла $u(\rho,\varphi,t) = \upsilon(\rho,t)\cdot\sin n\varphi.$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right) - \dfrac{n^2}{\rho^2}\upsilon - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2\upsilon}{\partial t^2} = 0. \\ \left|\upsilon(0,t)\right| < \infty, \;\; \upsilon(r,t) = At^2; \\ \upsilon(\rho,0) = \upsilon_t'(\rho,0) = 0. \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \upsilon = \upsilon(\rho,t). \\ 0 \le \rho \le r, \;\; 0 \le t < \infty. \end{array}$$

2. Приведение граничных условий к однородным.

$$\upsilon(\rho,t) = w(\rho,t) + \alpha(t)\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n + \beta(t); \quad n \ge 2.$$

$\upsilon(r,t) = w(r,t) + \alpha(t) + \beta(t) = At^2 \Rightarrow w(r,t) = 0$ при $\alpha(t) = At^2$ и $\beta(t) = 0.$

$$\upsilon(\rho,t) = w(\rho,t) + At^2\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n.$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}(\rho\dfrac{\partial w}{\partial\rho}) - \dfrac{n^2}{\rho^2}w - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{2A}{a^2}\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^n. \\ \left|w(0,t)\right| < \infty, \quad w(r,t) = 0; \\ w(\rho,0) = w_t'(\rho,0) = 0. \end{cases} \qquad \begin{array}{c} w = w(\rho,t). \\ 0 \le \rho \le r, \;\; 0 \le t < \infty. \end{array}$$

$$u(\rho,\varphi,t) = \upsilon(\rho,t)\cdot\sin n\varphi = \left\{At^2\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n + w(\rho,t)\right\}\cdot\sin n\varphi.$$

3. Разделение переменных и решение краевой задачи для оператора Бесселя $\hat{D}_Б = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}(\rho\dfrac{\partial}{\partial\rho}) - \dfrac{n^2}{\rho^2}.$

$$w(\rho,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\cdot R_k(\rho); \qquad (R_k, R_{k'}) = \delta_{kk'}.$$

Здесь (как и выше) $R_k(\rho) = \dfrac{\sqrt{2}}{r}J_n(\mu_k\rho)/J_{n+1}(\mu_k r)$ – ортонормированные собственные функции (базис) и $\lambda_k = -\mu_k^2 = -\left(\alpha_k^{(n)}/r\right)^2 < 0$ – дискретный спектр собственных значений.

4. Вывод дифференциального уравнения для определения функции – координаты $T_k(t)$.

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial w}{\partial\rho}\right)-\frac{n^2}{\rho^2}w-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=$$

$$=\sum_k\left\{\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR_k}{d\rho}\right)-\frac{n^2}{\rho^2}R_k\right)\cdot T_k-\frac{1}{a^2}R_kT_k''\right\}=$$

$$=-\frac{1}{a^2}\cdot\sum_k\left\{T''_k+\left(\mu_k a\right)^2\cdot T_k(t)\right\}\cdot R_k=\frac{2A}{a^2}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n.$$

$$\sum_k\left\{T''_k+\left(\mu_k a\right)^2\cdot T_k(t)\right\}\cdot R_k=-2A\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n=\sum_k\gamma_k(t)\cdot R_k(\rho),$$

где

$$\gamma_k(t)=\left(-2A\left(\frac{\rho}{r}\right)^n,R_k\right)=-2A\cdot\int_0^r\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\cdot R_k(\rho)\cdot\rho d\rho=$$

$$=\frac{-2A\sqrt{2}}{r^{n+1}\cdot J_{n+1}(\alpha)}\int_0^r J_n\left(\alpha\frac{\rho}{r}\right)\cdot\rho^{n+1}d\rho=\left[x=\alpha_k^{(n)}\frac{\rho}{r}\geq 0\right]=$$

$$=\frac{-2Ar\sqrt{2}}{\alpha^{n+2}\cdot J_{n+1}(\alpha)}\int_0^\alpha J_n(x)\cdot x^{n+1}dx=$$

$$=\left[\frac{d}{dx}\left(x^\nu\cdot J_\nu(x)\right)=x^\nu\cdot J_{\nu-1}(x),\ \nu=n+1\right]=$$

$$=\frac{-2Ar\sqrt{2}}{\alpha^{n+2}\cdot J_{n+1}(\alpha)}\cdot x^{n+1}J_{n+1}(x)\Big|_0^\alpha=\frac{-2A\sqrt{2}r}{\alpha_k^{(n)}}=\frac{-2A\sqrt{2}}{\mu_k}<0;$$

$$T''_k+\left(\mu_k a\right)^2\cdot T_k(t)=\gamma_k\equiv-\frac{2A\sqrt{2}}{\mu_k}<0.$$

5. Решение дифференциального уравнения для функции времени представим в виде $T_k(t)=\mathring{T}_k(t)+\tilde{T}_k(t)$. Здесь $\mathring{T}_k(t)=C_k\cdot\sin\mu_k at+$ $+\tilde{C}_k\cdot\cos\mu_k at$ – общее решение однородного уравнения. $\left(C_k,\tilde{C}_k=const\right)$

и $\tilde{T}_k(t) = \gamma_k / (\mu_k a)^2 = -2A\dfrac{\sqrt{2}}{\mu_k^3 a^2} = const < 0$ – постоянное частное решение уравнения.

6. Постоянные C_k и $\tilde{C}_k$ определим с помощью начальних условий. Для этого сначала запишем

$$w(\rho,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{C_k \cdot \sin\mu_k at + \tilde{C}_k \cdot \cos\mu_k at - \frac{2A\sqrt{2}}{\mu_k^3 a^2}\right\}R_k(\rho).$$

$$w(\rho,0) = \sum_{k=1}\left\{0 + \tilde{C}_k - \frac{2A\sqrt{2}}{a^2\mu_k^3}\right\}R_k(\rho) = 0 \Rightarrow \tilde{C}_k = \frac{2A\sqrt{2}}{a^2\mu_k^3}.$$

$$w_t'(\rho,0) = \sum_{k=1}\{\, C_k \cdot \mu_k a + 0 - 0\}\, R_k(\rho) = 0 \Rightarrow C_k = 0.$$

После небольших преобразований получим

$$w(\rho,t) = -\frac{2A\sqrt{2}}{a^2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\cos\mu_k at\right)\cdot\frac{1}{\mu_k^3}R_k(\rho).$$

7. Окончательный вид решения задачи.

$$u(\rho,\varphi,t) = \left\{At^2\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n + w(\rho,t)\right\}\cdot\sin n\varphi =$$

$$= A\left\{\left(\frac{\rho}{r}\right)^n t^2 - \frac{4}{a^2 r}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\cos\mu_k at\right)\frac{J_n(\mu_k\rho)}{\mu_k^3\cdot J_{n+1}(\mu_k r)}\right\}\cdot\sin n\varphi,$$

где $\mu_k a = \alpha_k^{(n)}\dfrac{a}{r} \geq 0, \quad \omega_k = \mu_k a = \alpha_k^{(n)}\dfrac{a}{r} > 0$ – собственные частоты колебаний круглой мембраны.

Так как $\mu_k \cong \pi k$ при $k >> 1$, то общий член ряда имеет порядок $O\left(\dfrac{1}{k^3}\right)$ при $k \to \infty$. Поэтому ряд сходится правильно (абсолютно и равномерно) при всех значениях $0 \leq \rho \leq r$ и $0 \leq t < \infty$ и его можно дважды дифференцировать по этим переменным (ряд удовлетворяет уравнению задачи).

8. Проверка ответа по условиям задачи и по размерностям.

$$u(0,\varphi,t) = A\{0-0\}\cdot\sin n\varphi = 0 < \infty \because J_n(0) = 0 \text{ при } n \geq 1.$$

$$u(r,\varphi,t) = A\{t^2 - 0\}\cdot\sin n\varphi = At^2\cdot\sin n\varphi \because J_n(\mu_k r) = 0.$$

$u\big|_{\varphi=0} = u\big|_{\varphi=2\pi}$ и $u'_\varphi\big|_{\varphi=0} = u'_\varphi\big|_{\varphi=2\pi}$ – это соответствует свойствам функции $\sin n\varphi$.

$$u(\rho,\varphi,0) = A\left\{0 - \frac{4}{a^2 r}\cdot\sum_k (1-\cos 0)\cdot\ldots\right\}\cdot\sin n\varphi = 0.$$

$$u'_t(\rho,\varphi,0) = A\left\{0 - \frac{4}{ar}\cdot\sum_k \sin 0\cdot\ldots\right\}\cdot\sin n\varphi = 0.$$

Размеренности отдельных величин.

$$[u(\rho,\varphi,t)] \equiv W, \quad [\mathrm{A}] = W/T^2, \quad [a] = L/T, \quad [\mu_k] = 1/L,$$

$$[\mu_k\rho] = [\mu_k r] = 1. \quad [\mu_k a] = \frac{1}{L}\cdot\frac{L}{T} = \frac{1}{T} \text{ и } [\omega_k t] = [\mu_k a t] = 1.$$

$$[u(\rho,\varphi,t)] \equiv W = \frac{W}{T^2}\left\{T^2\cdot 1 + \frac{T^2}{L^2}\frac{1}{L}\frac{1}{1/L^3}\right\} \Rightarrow W.$$

Выполним также проверку ответа по уравнению.

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left\{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right) - \frac{n^2}{\rho^2}\upsilon - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\upsilon}{\partial t^2}\right\}\cdot\sin n\varphi =$$

$$= A\left\{\frac{n^2\rho^{n-2}}{r^n}\cdot t^2 - \frac{n^2}{\rho^2}\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n t^2 - \frac{2}{a^2}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n - \right.$$

$$- \frac{4}{a^2 r}\sum_{\kappa=1}^{\infty}\left[(1-\cos\mu_\kappa a t)\cdot\hat{D}_Б\,\frac{J_n(\mu_\kappa\rho)}{\mu_\kappa^3\cdot J_{n+1}(\mu_\kappa r)} - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{a^2}\cdot a^2\mu_\kappa^2\cdot\cos\mu_\kappa a t\cdot\frac{J_n(\mu_\kappa\rho)}{\mu_\kappa^3\cdot J_{n+1}(\mu_\kappa r)}\right]\right\}\cdot\sin n\varphi =$$

$$=\left[\hat{D}_Б J_n\left(\mu_\kappa\rho\right)\equiv\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d}{d\rho}\right)-\frac{n^2}{\rho^2}\right)J_n\left(\mu_r\rho\right)=-\mu_\kappa^2 J_n\left(\mu_\kappa\rho\right)\neq 0\right]=$$

$$=A\left\{-\frac{2}{a^2}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n-\frac{4}{a^2 r}\sum_{\kappa=1}^{\infty}\left[-\left(1-\cos\mu_\kappa at\right)\cdot\frac{J_n\left(\mu_k\rho\right)}{\mu_k\cdot J_{n+1}\left(\mu_k r\right)}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\cos\mu_\kappa at\cdot\frac{J_n\left(\mu_k\rho\right)}{\mu_k\cdot J_{n+1}\left(\mu_k r\right)}\right]\right\}\cdot\sin n\varphi=$$

$$=-\frac{2A}{a^2}\left\{\left(\frac{\rho}{r}\right)^n-\frac{2}{r}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_n\left(\mu_k\rho\right)}{\mu_k\cdot J_{n+1}\left(\mu_k r\right)}\right\}\cdot\sin n\varphi=-\frac{2A}{a^2}\left\{0\right\}\cdot\sin n\varphi=0.$$

<u>Задача 2.14.</u> Плоская симметричная задача для однородного волнового уравнения в круге с однородными граничными условиями.

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)-\dfrac{1}{\alpha^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-0.\\ |u\left(0,t\right)|<\infty,\qquad u\left(r,t\right)=0;\\ u\left(\rho,0\right)=A\cdot\left(1-\dfrac{\rho^2}{r^2}\right),\quad u_t'\left(\rho,0\right)=0.\end{cases}\qquad\begin{matrix}u=u\left(\rho,t\right).\\ 0\le\rho\le r,\qquad 0\le t<\infty.\end{matrix}$$

1–2. В симметричном случае нет зависимости от угла φ и индекс в уравнении Бесселя $n=0$, а граничные условия заданы однородными.

3. Разделение переменных и решение первой краевой задачи для оператора Бесселя при $n=0$.

$$u\left(\rho,t\right)=\sum_{\kappa=1}^{\infty}T_\kappa\left(t\right)R_\kappa\left(\rho\right)\qquad\text{при }\left(R_\kappa,R_{\kappa'}\right)=\delta_{kk'}.$$

Здесь оператор $\hat{D}_Б=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{d}{d\rho}\right)-\dfrac{0^2}{\rho^2}$ при условиях $\left|R\left(0\right)\right|<\infty$ и $R\left(r\right)=0$ дает $R_\kappa\left(\rho\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{r}J_0\left(\mu_\kappa\rho\right)\Big/J_1\left(\mu_\kappa r\right)-$ ортонормированный базис собственных функций и $\lambda_\kappa = -\mu_\kappa^2 = -\left(\alpha_\kappa^{(0)}/r\right)^2 < 0$ – дискретный спектр собственных значений. Дисперсионное уравнение $J_0\left(\alpha_\kappa^{(0)}\right) = 0$ имеет простые положительные корни $\alpha_\kappa^{(0)} > 0$ при $k = 1, 2, 3, \ldots;$ которые возрастают $0 < \alpha_\kappa^{(0)} < \alpha_{\kappa+1}^{(0)} < \ldots$ при $k \in \mathbb{N}$. При этом $J_1\left(\alpha_\kappa^{(0)}\right) \neq 0$ и $J_0(0) = 1 \neq 0$, т. е. значения $\alpha_0^{(0)} \equiv 0$ не существует.

Для сходимости ряда требуется $\lim\limits_{k\to\infty} T_\kappa(t) = 0.$

4. Вывод дифференциального уравнения для определения функции $T_\kappa(t)$.

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_\kappa \left\{\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR_\kappa}{d\rho}\right)\cdot T_\kappa - \frac{1}{a^2}R_\kappa T_k''\right\} =$$

$$= -\frac{1}{a^2}\cdot\sum_\kappa\left\{T_\kappa'' + \left(\mu_\kappa a\right)^2 T_\kappa\right\}R_\kappa(\rho) = 0 \Rightarrow T_\kappa'' + \left(\mu_\kappa a\right)^2\cdot T_\kappa(t) = 0,$$

где $\omega_\kappa = \mu_\kappa a = \alpha_\kappa^{(0)}\dfrac{a}{r} > 0 -$ собственные частоты колебаний мембраны.

5. Общее решение уравнения для функции $T_\kappa(t)$ получим $T_\kappa(t) = C_\kappa\cdot\cos\mu_\kappa at + \tilde{C}_\kappa\cdot\sin\mu_\kappa at,$ где $C_\kappa, \tilde{C}_\kappa = const.$ Теперь искомую функцию $u(\rho,t)$ можно записать в виде

$$u(\rho,t) = \sum_\kappa T_\kappa(t)\cdot R_\kappa(\rho) = \sum_\kappa\left\{C_\kappa\cdot\cos\mu_\kappa at + \tilde{C}_\kappa\cdot\sin\mu_\kappa at\right\}R_\kappa(\rho).$$

6. Определенние постоянных C_κ и $\tilde{C}_\kappa$ из начальных условий

$$u_t'(\rho,0) = \sum_\kappa\left\{0 + \tilde{C}_\kappa\cdot\mu_\kappa a\right\}\cdot R_\kappa(\rho) = 0 \Rightarrow \tilde{C}_\kappa = 0.$$

$$u(\rho,0) = \sum_\kappa\left\{C_\kappa + 0\right\}R_\kappa(\rho) = A\left(1 - \frac{\rho^2}{r^2}\right) \Rightarrow C_\kappa = \left(A\left(1 - \frac{\rho^2}{r^2}\right), R_\kappa\right) =$$

$$= \frac{A\sqrt{2}}{r}\cdot\int_0^r\left(1 - \frac{\rho^2}{r^2}\right)\cdot\frac{J_0(\mu_\kappa\rho)}{J_1(\mu_\kappa r)}\cdot\rho\cdot d\rho = \left[x = \alpha_\kappa^{(0)}\frac{\rho}{r} \geq 0\right] =$$

$$= \frac{Ar\sqrt{2}}{\alpha \cdot J_1(\alpha)} \cdot \int_0^\alpha \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right) \cdot J_0(x) x\,dx.$$

Выше (тема 1) приведены результаты вычислением этих интегралов. Поэтому получим

$$\int_0^\alpha J_0(x) \cdot x dx = xJ_1(x)|_0^\alpha = \alpha_\kappa^{(0)} \cdot J_1\left(\alpha_\kappa^{(0)}\right) \neq 0.$$

$$\int_0^\alpha J_0(x) \cdot x^3 dx = \left(x^3 \cdot J_1(x) + 2x^2 \cdot J_0(x) - 4x \cdot J_1(x)\right)|_0^\alpha =$$

$$= \alpha_\kappa^{(0)} \cdot \left(\alpha_\kappa^{(0)2} - 4\right) \cdot J_1\left(\alpha_\kappa^{(0)}\right) \neq 0.$$

$$C_\kappa = \frac{Ar\sqrt{2}}{\alpha^2 \cdot J_1(\alpha)} \left\{\alpha \cdot J_1(\alpha) - \frac{1}{\alpha^2} \cdot \alpha\left(\alpha^2 - 4\right) \cdot J_1(\alpha)\right\} = 4Ar\sqrt{2} / \alpha_\kappa^{(0)3} > 0.$$

7. Окончательный вид решения задачи.

$$u(\rho, t) = \frac{8A}{r^3} \cdot \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_\kappa \rho)}{\mu_\kappa^3 \cdot J_1(\mu_\kappa r)} \cos \mu_\kappa at.$$

Здесь $\mu_k = \alpha_k^{(0)} / r > 0$ и $\omega_\kappa = \mu_\kappa a = \alpha_\kappa^{(0)} \dfrac{a}{r} > 0$ – частота колебаний мембраны. Ряд сходится порядка $O\left(\dfrac{1}{k^3}\right)$ при $k \to \infty$.

8. Проверка решения задачи по условиям и по размерностям.

$$u(0, t) = \frac{8A}{r^3} \cdot \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{\cos \mu_\kappa at}{\mu_\kappa^3 \cdot J_1(\mu_k r)} < \infty \text{ – ряд сходится.}$$

$$u(r, t) = 0 \because J_0(\mu_\kappa r) = J_0\left(\alpha_\kappa^{(0)}\right) = 0.$$

$$u_t'(\rho, 0) = 0 \because (\cos \mu_\kappa at)'_t |_{t=0} = -\mu_\kappa a \cdot \sin 0 = 0.$$

$$u(\rho, 0) = \frac{8A}{r^3} \cdot \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_\kappa \rho)}{\mu_\kappa^3 \cdot J_1(\mu_\kappa r)} = 8A \cdot \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\alpha_\kappa^{(0)} \dfrac{\rho}{r}\right)}{\alpha_\kappa^{(0)3} \cdot J_1\left(\alpha_\kappa^{(0)}\right)} =$$

$$= 8A \cdot \frac{1}{8}\left(1 - \frac{\rho^2}{r^2}\right) = A \cdot \left(1 - \frac{\rho^2}{r^2}\right)$$ – см. тему 1.

Размерности величин.

$$\left[u(\rho,t)\right] = W,\ \left[A\right] = W,\ \left[a\right] = \frac{L}{T},\ \left[\mu_\kappa\right] = \frac{1}{L}.\ \ \left[u(\rho,t)\right] = \frac{W}{L^3}L^3 \Rightarrow W.$$

<u>**Задача 2.15**</u>. Плоская задача для уравнения колебаний круглой мембраны с граничным условием Неймана.

$$\begin{cases} \Delta_2 u - \dfrac{1}{a^2}u''_{tt} = 0. \\ u'_\rho\,|_{\rho=r} = A \cdot \sin n\varphi; \\ u\,|_{t=0} = u'_t\,|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

$u = u(\rho,\varphi,t)$.

$0 \le \rho \le r,\ 0 \le \varphi < 2\pi,$

$0 \le t < \infty,\quad n \in \mathbb{N}.$

$$\Delta_2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Условия ограниченности при $\rho = 0$ и периодичности по углу φ явно не записаны.

1. Отделение зависимости от угла $u(\rho,\varphi,t) = \upsilon(\rho,t)\cdot\sin n\varphi.$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right) - \dfrac{n^2}{\rho^2}\upsilon - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2\upsilon}{\partial t^2} = 0. \\ |\,\upsilon(0,t)\,| < \infty, \quad \upsilon'_\rho(r,t) = A; \\ \upsilon(\rho,0) = \upsilon'_t(\rho,0) = 0. \end{cases}$$

$\upsilon = \upsilon(\rho,t).$

$0 \le \rho \le r, \quad 0 \le \varphi < 2\pi.$

2. Приведение граничных условий к однородным.

$$\upsilon(\rho,t) = w(\rho,t) + \alpha(t)\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^m + \beta(t); \qquad m \ge 2.$$

Примем $\beta(t) = 0$ из-за ограниченности условий в нуле $|\,w(0,t)\,| < \infty$. и найдем производную при $\rho = r$.

$$\upsilon'_\rho(r,t) = w'_\rho(r,t) + \alpha(t)\frac{m}{r} = A.$$

Требование $w'_\rho\left(r,t\right)=0$ приводит к значению $\alpha\left(t\right)=A\dfrac{r}{m}=const.$ Поэтому $\upsilon\left(\rho,t\right)=w\left(\rho,t\right)+A\dfrac{r}{m}\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^m$, и уравнение принимает вид:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right)-\frac{n^2}{\rho^2}\upsilon-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\upsilon}{\partial t^2}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial w}{\partial\rho}\right)-\frac{n^2}{\rho^2}w-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+$$

$$+\frac{m^2-n^2}{\rho^2}\frac{Ar}{m}\left(\frac{\rho}{r}\right)^m=0.$$

Для упрощения уравнения примем $m=n\geq 2.$ Тогда задача для функции $w(\rho,t)$ запишется в виде

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial w}{\partial\rho}\right)-\dfrac{n^2}{\rho^2}w-\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0.\\ \left|w\left(0,t\right)\right|<\infty,\ w'_\rho\left(r,t\right)=0;\\ w\left(\rho,0\right)=-\dfrac{Ar}{n}\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^n,\ w'_t\left(\rho,0\right)=0.\end{cases}\qquad \begin{array}{c}w=w\left(\rho,t\right).\\ 0\leq\rho\leq r,\quad 0\leq t<\infty.\end{array}$$

А связь функции $w(\rho,t)$ с первоначальной функцией $u\left(\rho,\varphi,t\right)$ имеет форму

$$u\left(\rho,\varphi,t\right)=\upsilon\left(\rho,t\right)\cdot\sin n\varphi=\left\{\frac{Ar}{n}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n+w\left(\rho,t\right)\right\}\cdot\sin n\varphi.$$

3. Разделение переменных $w(\rho,t)=R\left(\rho\right)\cdot T\left(t\right)$ и решение в гильбертовом пространстве $L_2\left(0,r\middle|\rho\right)$ задачи Штурма–Лиувилля для самосопряженного оператора Бесселя $\hat{D}_Б$ с граничними условиями Неймана (второй краевой задачи).

$$\hat{D}_Б=\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d}{d\rho}\right)-\frac{n^2}{\rho^2}\qquad \text{при }\left|R\left(0\right)\right|<\infty\ \text{ и }\ R'\left(r\right)=0.$$

Решением этой задачи являются функции

$$\Re_k\left(\rho\right)=\frac{\sqrt{2}}{r}\left(1-\frac{n^2}{\beta_k^{(n)^2}}\right)^{-1/2}\cdot J_n\left(\beta_k^{(n)}\frac{\rho}{r}\right)/\,J_n\left(\beta_k^{(n)}\right),$$

составляющие ортонормированный базис собственных функций $\left(\Re_k, \Re_{k'}\right) = \delta_{kk'}$. А собственные значения $\lambda_k = -\mu_k^2 = -\left(\beta_k^{(n)} / r\right)^2 < 0$ составляют дискретный, отрицательно определенный бесконечный спектр. Здесь $\beta_k^{(n)} > 0$ при $k \in \mathbb{N}$ – простые положительные корни производной (дисперсионного уравнения) $J_n^{'}\left(\beta\right) = 0;$ причем отбрасывается $\beta_0^{(n)} \equiv 0$ – многократный нулевой корень.

Разложение в ряд искомой функции $w(\rho, t)$ записывается в стандартной форме

$$w(\rho,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k\left(t\right) \cdot \Re_k\left(\rho\right), \quad \text{здесь } \lim_{k \to \infty} T_k\left(t\right) = 0.$$

Этот ряд сходится правильно (абсолютно и равномерно) при всех значениях $0 \le \rho \le r$ и $0 \le t < \infty;$ его можно дважды дифференцировать по ρ и по t, если условия на границах области определения непрерывны или имеют конечные скачки (разрывы первого рода).

4–5. Вывод и решение уравнения для функции $T_k\left(t\right)$.

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial w}{\partial \rho}\right) - \frac{n^2}{\rho^2} w - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} =$$

$$= \sum_k \left\{ \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{d\Re_k}{d\rho}\right) T_k - \frac{n^2}{\rho^2}\Re_k T_k - \Re_k T_k^{''} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{a^2} \cdot \sum_k \{T_k^{''} + \left(\mu_k a\right)^2 \cdot T_k\} \Re_k = 0 \Rightarrow T_k^{''} + \left(\mu_k a\right)^2 \cdot T_k\left(t\right) = 0.$$

Решение последнего уравнения очевидно.

$$T_k\left(t\right) = C_k \cdot \sin \mu_k a t + \tilde{C}_k \cdot \cos \mu_k a t \qquad \text{при } C_{k,} \tilde{C}_k = const;$$

поэтому ряд для функции $w(\rho, t)$ будет

$$w(\rho,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ C_k \cdot \sin \mu_k a t + \tilde{C}_k \cdot \cos \mu_k a t \right\} \cdot \Re_k\left(\rho\right).$$

6. Определение постоянных C_k и $\tilde{C}_k$ из начальных условий задачи.

$$w'_t(\rho,0)=\sum_k \left\{C_k\cdot\mu_k a\cdot 1-\tilde{C}_k\cdot 0\right\}\cdot\Re_k(\rho)=0\Rightarrow C_k=0.$$

$$w(\rho,0)=\sum_k \tilde{C}_k\cdot\Re_k(\rho)=-\frac{Ar}{n}\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n,$$

откуда $\tilde{C}_k=\left(-\frac{Ar}{n}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n,\Re_k\right)=-\frac{Ar}{n}\int_0^r\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\cdot\Re_k(\rho)\cdot\rho d\rho=$

$$=-\frac{A\sqrt{2}}{nr^n}\frac{\left(1-n^2/\beta^2\right)^{-1/2}}{J_n(\beta)}\cdot\int_0^r J_n\left(\beta\frac{\rho}{r}\right)\cdot\rho^{n+1}d\rho=\left[x=\beta_k^{(n)}\frac{\rho}{r}\right]=$$

$$=-\frac{A\sqrt{2}r^2}{n\beta^{n+2}}\frac{\left(1-n^2/\beta^2\right)^{-1/2}}{J_n(\beta)}\cdot\int_0^\beta J_n(x)\cdot x^{n+1}dx=$$

$$=-\frac{A\sqrt{2}r^2}{n\beta^{n+2}}\frac{\left(1-n^2/\beta^2\right)^{-1/2}}{J_n(\beta)}\cdot x^{n+1}\cdot J_{n+1}(x)\Big|_0^\beta=$$

$$=\left[J_{n+1}(\beta)=\frac{n}{\beta}J_n(\beta)-J'_n(\beta)=\frac{n}{\beta}J_n(\beta)-0\right]=-\frac{A\sqrt{2}r^2}{\beta_k^{(n)}\sqrt{\beta_k^{(n)2}-n^2}}<0.$$

7. Окончательный вид решения задачи.

$$u(\rho,\varphi,t)=Ar\cdot\left\{\frac{1}{n}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\mu_k^2r^2-n^2}\frac{J_n(\mu_k\rho)}{J_n(\mu_k r)}\cos\mu_k at\right\}\sin n\varphi,$$

где $\mu_k=\beta_k^{(n)}\big/r>0,\ J'_n\left(\beta_k^{(n)}\right)=0,\ J_n\left(\beta_k^{(n)}\right)\neq 0,$ при $\kappa\in\mathbb{N}$. Ряд сходится порядка $O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ при $k\to\infty$.

8. Проверка решения задачи по условиям и размерностям.

$$u(0,\varphi,t)=Ar\cdot\{0-0\}\sin n\varphi=0<\infty\because J_n(0)=0.$$

$$u'_\rho(r,\varphi,t)=Ar\left\{\frac{r^{n-1}}{r^n}-0\right\}\sin n\varphi=A\cdot\sin n\varphi\because J'_n\left(\beta_\kappa^{(n)}\right)=0.$$

$$u(\rho,\varphi,0)=Ar\cdot\left\{\frac{1}{n}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\mu_k^2r^2-n^2}\frac{J_n(\mu_k\rho)}{J_n(\mu_kr)}\right\}\sin n\varphi=0\because$$

$$\because\left(\frac{\rho}{r}\right)^n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2n}{\beta_k^{(n)2}-n^2}\frac{J_n\left(\beta_k^{(n)}\frac{\rho}{r}\right)}{J_n\left(\beta_k^{(n)}\right)}.$$

Размерности заданных величин: $\left[u(\rho,\varphi,t)\right]=W$, $[A]=W/L$, $[\mu_k]=1/L$,

$$[\mu_kat]=\left[\beta_k\frac{at}{r}\right]=\frac{L}{T}\frac{T}{L}=1.\quad [u]=\frac{W}{L}L\cdot\left[\frac{L^2}{L^2}+1\right]\Rightarrow W.$$

9. После упрощения условий задачи заменой

$$u(\rho,\varphi,t)=\left\{\frac{Ar}{n}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n+w(\rho,t)\right\}\cdot\sin n\varphi$$

для новой искомой функции $w(\rho,t)$ новые условия задачи принимают вид:

$$F(\rho,t)=q(r,t)=g(\rho)=0 \text{ и } w(\rho,0)=f(\rho)=-\frac{Ar}{n}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n.$$

Теперь для определения функции $w(\rho,t)$ воспользуемся разрешающей формулой с использованием функции Грина

$$w(\rho,t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^r f(\rho')\cdot G(\rho,\rho'|t)\cdot 2\pi\rho'd\rho'=$$

$$=-\frac{Ar}{n}\int_0^r\left(\frac{\rho'}{r}\right)^n\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty}\cos\omega_kt\cdot\Re_k(\rho)\cdot\overline{\Re}_k(\rho')\right)\cdot\rho'd\rho'=$$

$$=-\frac{Ar}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\cos\omega_kt\cdot\frac{2}{r^2}\left(1-\frac{n^2}{\beta_k^{(n)2}}\right)^{-1}\cdot\frac{J_n(\mu_k\rho)}{J_n^2(\mu_kr)}\cdot\int_0^r\left(\frac{\rho'}{r}\right)^n\cdot J_n(\mu_k\rho')\cdot\rho'd\rho';$$

$$\omega_k=a\mu_k=\beta_k^{(n)}\frac{a}{r}>0.$$

Последний интеграл легко вычисляется.

$$\int_0^r\left(\frac{\rho'}{r}\right)^n\cdot J_n(\mu_k\rho')\cdot\rho'd\rho'=\left[\mu_k\rho'=\beta_k^{(n)}\frac{\rho'}{r}=x\right]=$$

$$=\int_0^\beta\left(\frac{x}{\beta}\right)^n\cdot J_n(x)\cdot\left(\frac{r}{\beta}\right)^2 x\,dx=\frac{r^2}{\beta^{n+2}}\int_0^\beta J_n(x)\cdot x^{n+1}dx=$$

$$=\frac{r^2}{\beta^{n+2}}\cdot x^{n+1}J_{n+1}(x)\Big|_0^\beta=\frac{r^2}{\beta}J_{n+1}(\beta)=\frac{r^2}{\beta}\left(\frac{n}{\beta}J_n(\beta)-J'_n(\beta)\right)=$$

$$=\frac{nr^2}{\beta^2}J_n(\beta)=\frac{n}{\mu_k^2}J_n(\mu_k r)\neq 0;$$

$$J'_n(\mu_k r)=J'_n\left(\beta_k^{(n)}\right)=0.$$

Теперь функцию $w(\rho,t)$ запишем в окончательном виде.

$$w(\rho,t)=-\frac{2A}{rn}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\cos\omega_k t\cdot\left(1-\frac{n^2}{\beta_k^{(n)2}}\right)^{-1}\cdot\frac{J_n(\mu_k\rho)}{J_n^2(\mu_k r)}\cdot\frac{n}{\mu_k^2}J_n(\mu_k r)=$$

$$=-Ar\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\mu_k^2r^2-n^2}\frac{J_n(\mu_k\rho)}{J_n(\mu_k r)}\cos\mu_k at.$$

Проверим совпадение размерностей.

$$\left[u(\rho,\varphi,t)\right]=W,\quad [A]=W/L,\quad [\mu_k]=1/L,$$

$$[\mu_k at]=[\beta_k^{(n)}\frac{at}{r}]=L/T,\quad T/l=1,\quad [u]=\frac{W}{L}L\cdot\left\{\frac{L^2}{L^2}+1\right\}\Rightarrow W.$$

<u>Задача 2.16.</u> Плоская усложненная задача для уравнения колебаний круглой мембраны с граничными условиями Неймана.

$$\begin{cases}\Delta_2 u-\dfrac{1}{a^2}u''_{tt}=0.\\ u'_\rho\big|_{\rho=r}=f(t)\cdot\sin n\varphi;\\ u\big|_{t=0}=u'_t\big|_{t=0}=0.\end{cases}\qquad \begin{array}{c}u=u(\rho,\varphi,t).\\ 0\le\rho\le r,\quad 0\le\varphi<2\pi,\\ 0\le t<\infty.\quad n\in\mathbb{N}.\end{array}$$

Условия ограниченности при $\rho=0$ и периодичности по углу φ явно не записаны.

1. Отделение зависимости от угла $u(\rho,\varphi,t)=\upsilon(\rho,t)\sin n\varphi.$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right)-\dfrac{n^2}{\rho^2}\upsilon-\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2\upsilon}{\partial t^2}=0. & \upsilon=\upsilon(\rho,t). \\ \left|\upsilon(0,t)\right|<\infty,\quad \upsilon'_\rho(r,t)=f(t); & 0\le\rho\le r, \\ \upsilon(\rho,0)=\upsilon'_t(\rho,0)=0. & 0\le t<\infty. \end{cases}$$

2. Приведение граничных условий к однородным.

$$\upsilon(\rho,t)=w(\rho,t)+\frac{r}{n}f(t)\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n.$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial w}{\partial\rho}\right)-\dfrac{n^2}{\rho^2}w-\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\dfrac{r}{na^2}f''(t)\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^n. \\ \left|w(0,t)\right|<\infty,\quad w'_\rho(r,t)=0; \\ w(\rho,0)=-\dfrac{r}{n}f(0)\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^n,\quad w'_t(\rho,0)=-\dfrac{r}{n}f'(0)\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^n. \end{cases}$$

$$u(\rho,\varphi,t)=\left\{\frac{r}{n}f(t)\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n+w(\rho,t)\right\}\cdot\sin n\varphi.$$

3. Разделение переменных. Определение собственных функций и значений оператора Бесселя.

$$w(\rho,t)=\sum_{\kappa=1}^{\infty}T_k(t)\cdot\Re_k(\rho);\qquad \left(\Re_k,\Re_{k'}\right)=\delta_{kk'}.$$

$$\begin{cases} \hat{D}_Б=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{d}{d\rho}\right)-\dfrac{n^2}{\rho^2}. & L_2\left(0,r\,|\,\rho\right),\quad \hat{D}_Б\Re=\lambda\Re(\rho), \\ \left|\Re(0)\right|<\infty,\quad \Re'(r)=0. & \lambda=-\mu^2\le 0. \end{cases}$$

$$\Re_k(\rho)=\frac{\sqrt{2}}{r}\left(1-\frac{n^2}{\beta_k^{(n)2}}\right)^{-1/2}\cdot\frac{J_n\left(\beta_k^{(n)}\dfrac{\rho}{r}\right)}{J_n\left(\beta_k^{(n)}\right)}.$$

$\lambda_k = -\mu_k^2 = -\left(\beta_k^{(n)} / r\right)^2 < 0,$ где $J_n^{'}\left(\beta_k^{(n)}\right) = 0$ – дисперсионное уравнение и $\beta_k^{(n)} > 0$ – его простые корни; $J_n\left(\beta_k^{(n)}\right) \neq 0.$

4. Постановка задачи для определения функции $T_k(t)$.

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial w}{\partial\rho}\right) - \frac{n^2}{\rho^2}w - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \sum_k\left\{\hat{D}_Б\Re_k\cdot T_k - \frac{1}{a^2}\Re_k T_k^{"}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{a^2}\sum_k\left\{T_k^{"} + (\mu_k a)^2\cdot T_k\right\}\Re_k = \frac{r}{na^2}f''(t)\left(\frac{\rho}{r}\right)^n.$$

$$\sum_k\left\{T_k^{"} + (\mu_k a)^2\cdot T_k\right\}\Re_k = -\frac{r}{n}f''(t)\left(\frac{\rho}{r}\right)^n = -\frac{r}{n}f''(t)\cdot\sum_k\gamma_k\Re_k(\rho),$$

где $\gamma_k = \left(\left(\frac{\rho}{r}\right)^n, \Re_k\right) = \int_0^r\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\cdot\overline{\Re}_k(\rho)\cdot\rho d\rho = \frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{\beta_k^{(n)^2} - n^2}}\frac{J_{n+1}\left(\beta_k^{(n)}\right)}{J_n\left(\beta_k^{(n)}\right)} =$

$$= \frac{n}{\beta_k^{(n)}}\cdot\frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{\beta_k^{(n)^2} - n^2}} > 0; \quad T_k^{"} + (\mu_k a)^2\cdot T_k(t) = -\frac{r}{n}\gamma_k\cdot f''(t).$$

Аналогично получаются значения начальных условий:

$$w(\rho,0) = \sum_\kappa T_k(0)\cdot\Re_k(\rho) = -\frac{r}{n}f(0)\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \Rightarrow T_k(0) = -\frac{r}{n}f(0)\cdot\gamma_k.$$

$$w'_t(\rho,0) = \sum_\kappa T_k^{'}(0)\cdot\Re_k(\rho) = -\frac{r}{n}f'(0)\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \Rightarrow T'_k(0) = -\frac{r}{n}f'(0)\cdot\gamma_k.$$

Получаем начальную задачу Коши для функции $T_k(t)$:

$$\begin{cases} T_k'' + \omega_k^2\cdot T_k(t) = -\frac{r}{n}\gamma_k\cdot f''(t). \\ T_k(0) = -\frac{r}{n}\gamma_k\cdot f(0), \quad T'_k(0) = -\frac{r}{n}\gamma_k\cdot f'(0). \end{cases}$$

$\omega_k = \frac{a}{r}\beta_k^{(n)} > 0$ – частоты, $\gamma_k = \frac{n}{\beta_k^{(n)}}\cdot\frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{\beta_k^{(n)^2} - n^2}} > 0.$

5. Решение задачи Коши для функции $T_k(t)$.

Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения получим методом вариации постоянных

$$T_k(t) = A_k \cdot \cos\omega_k t + B_k \cdot \sin\omega_k t - \frac{r}{n}\gamma_k \cdot \int_0^t \frac{\sin\omega_k(t-\tau)}{\omega_k} f''(\tau)\,d\tau,$$

где A_k, B_k – постоянные интегрирования.

$$T_k(0) = A_k = -\frac{r}{n}\gamma_k \cdot f(0), \qquad T'_k(0) = \omega_k B_k = -\frac{r}{n}\gamma_k \cdot f'(0);$$

$$T_k(t) = -\frac{r}{n}\gamma_k \cdot \left\{ f(0)\cdot\cos\omega_k t + f'(0)\cdot\frac{\sin\omega_k t}{\omega_k} + \int_0^t \frac{\sin\omega_k(t-\tau)}{\omega_k} f''(\tau)\,d\tau \right\}.$$

Последний интеграл можно значительно упростить:

$$\int_0^t \frac{\sin\omega_k(t-\tau)}{\omega_k} f''(\tau)\,d\tau = \frac{\sin\omega_k(t-\tau)}{\omega_k} f'(\tau)\Big|_0^t + \int_0^t f'(\tau)\cdot\cos\omega_k(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= -\frac{\sin\omega_k t}{\omega_k} f'(0) + f(\tau)\cdot\cos\omega_k(t-\tau)\Big|_0^t - \omega_k\int_0^t f(\tau)\cdot\sin\omega_k(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= -\frac{\sin\omega_k t}{\omega_k} f'(0) + f(t) - f(0)\cdot\cos\omega_k t - \omega_k\int_0^t f(\tau)\cdot\sin\omega_k(t-\tau)\,d\tau.$$

Подставив последнее выражение в формулу для $T_k(t)$, получим окончательно

$$T_k(t) = -\frac{r}{n}\gamma_k \cdot \left\{ f(t) - \omega_k \cdot \int_0^t f(\tau)\cdot\sin\omega_k(t-\tau)\,d\tau \right\}.$$

6. Окончательный вид решения задачи.

$$w(\rho,t) = -\frac{r}{n}\cdot\sum_{\kappa=1}^{\infty}\left\{ f(t) - \omega_k\int_0^t f(\tau)\cdot\sin\omega_k(t-\tau)\,d\tau \right\}\gamma_k\cdot\Re_k(\rho) =$$

$$= -\frac{r}{n}\left\{ f(t)\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n - \sum_k \omega_k\gamma_k\cdot\int_0^t f(\tau)\cdot\sin\omega_k(t-\tau)\,d\tau\cdot\Re_k(\rho) \right\}.$$

$$u(\rho,\varphi,t)=\left\{\frac{r}{n}f(t)\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n+w(\rho,t)\right\}\cdot\sin n\varphi=$$

$$=\frac{r}{n}\left\{f(t)\left(\frac{\rho}{r}\right)^n-\sum_k\left[f(t)-\omega_k\int_0^t f(\tau)\sin\omega_k(t-\tau)d\tau\right]\gamma_k\Re_k(\rho)\right\}\sin n\varphi=$$

$$=\frac{r}{n}\cdot\sum_k\omega_k\gamma_k\cdot\int_0^t f(\tau)\sin\omega_k(t-\tau)d\tau\cdot\Re_k(\rho)\cdot\sin n\varphi=$$

$$=2a\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k^{(n)}}{\beta_k^{(n)2}-n^2}\cdot\int_0^t f(\tau)\cdot\sin\frac{a\beta_k^{(n)}}{r}(t-\tau)d\tau\cdot\frac{J_n\left(\beta_k^{(n)}\frac{\rho}{r}\right)}{J_n\left(\beta_k^{(n)}\right)}\cdot\sin n\varphi,$$

где $J_n'\left(\beta_k^{(n)}\right)=0$, $J_n\left(\beta_k^{(n)}\right)\neq 0$, $\beta_k^{(n)}>0$ – простые корни производной.

7. Проверка решения задачи по условиям и по размерностям.

$$u(0,\varphi,t)=0<\infty,$$

$$u'_\rho(r,\varphi,t)=\frac{r}{n}\left\{f(t)\cdot\frac{n}{r}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n-1}-\sum_k\left[f(t)-\ldots\right]\cdot\gamma_k\Re_k'(\rho)\right\}\Big|_{\rho=r}\cdot\sin n\varphi=$$

$$=f(t)\cdot\sin n\varphi\because\Re'_k(r)=0.$$

$$u(\rho,\varphi,0)=\frac{r}{n}\left\{f(0)\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n-\sum_k\left[f(0)-0\right]\cdot\gamma_k\Re_k(\rho)\right\}\cdot\sin n\varphi=0\because$$

$$\because\left(\frac{\rho}{r}\right)^n=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\Re_k(\rho).$$

$$u'_t(\rho,\varphi,0)=\frac{r}{n}\left\{f'(0)\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n-\sum_k\left[f'(0)-\omega_k\left(f(t)\sin\omega_k(t-t)-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\omega_k\cdot\int_0^t f(\tau)\cdot\cos\omega_k(t-\tau)d\tau\right)\Big|_{t=0}\right]\gamma_k\Re_k(\rho)\right\}\cdot\sin n\varphi=$$

$$=\frac{r}{n}f'(0)\cdot\left\{\left(\frac{\rho}{r}\right)^n-\sum_k\gamma_k\Re_k(\rho)\right\}\cdot\sin n\varphi=0.$$

Проверим совпадение размеренностей в ответе:

$$\left[u(\rho,\varphi,t)\right] \equiv W, \quad \left[f(t)\right] = \frac{W}{L}, \quad \left[\gamma_k\right] = L, \quad \left[R_k\right] = \frac{1}{L}, \quad [a] = \frac{L}{T},$$

$$[u] = \frac{L}{T} \cdot 1 \cdot [f] \cdot 1 \cdot T \cdot 1 \cdot 1 = L \cdot [f] \Rightarrow W.$$

8. В случае $f(t) = A = const$ получим (см. задачу 2.15)

$$u(\rho,\varphi,t) = -2Ar \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos\left(\beta_k^{(n)} \frac{at}{r}\right)}{\beta_k^{(n)2} - n^2} \cdot \frac{J_n\left(\beta_k^{(n)} \frac{\rho}{r}\right)}{J_n\left(\beta_k^{(n)}\right)} \cdot \sin n\varphi =$$

$$= A\frac{r}{n}\left\{\left(\frac{\rho}{r}\right)^n - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2n}{\beta_k^{(n)2} - n^2} \frac{J_n\left(\beta_k^{(n)} \frac{\rho}{r}\right)}{J_n\left(\beta_k^{(n)}\right)} \cos\left(\beta_k^{(n)} \frac{at}{r}\right)\right\} \cdot \sin n\varphi.$$

Задача 2.17. Плоская симметричная задача для уравнения колебаний круглой мембраны с граничными условиями Неймана (свободные границы).

$$\begin{cases} \Delta_2 u - \dfrac{1}{a^2} u''_{tt} \equiv \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \dfrac{\partial u}{\partial \rho}\right) - \dfrac{0^2}{\rho^2} u - \dfrac{1}{a^2} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \\ \left|u(0,t)\right| < \infty, \quad u'_\rho(r,t) = 0; \\ u(\rho,0) = f(\rho), \quad u'_t(\rho,0) = g(\rho). \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u = u(\rho,t). \\ 0 \le \rho \le r, \ 0 \le t \le \infty. \end{array}$$

1–2. Задача от угла φ не зависит, а граничные условия однородны.

3. Разделение переменных. Определение собственных функций и значений симметричного оператора Бесселя.

При решении задачи Неймана для оператора Бесселя $\hat{D}_Б = \dfrac{1}{\rho} \dfrac{d}{d\rho}\left(\rho \dfrac{d}{d\rho}\right) - \dfrac{0^2}{\rho^2}$ с индексомм $n = 0$ и граничными условиями $\left|R(0)\right| < \infty$ и $R'(r) = 0$ решение приходится искать в виде ряда

$$u(\rho,t) = T_0(t)R_0(\rho) + \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)R_k(\rho),$$

где дополнительно появляется «нулевой » член при $k = 0$, так как только $J_0(0) = 1 \neq 0$, а $J_0'(0) = -J_1(0) = 0$ и все другие $J_n(0) = 0$ при $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ При решении характеристического уравнения $\hat{D}_Б R = \lambda R(\rho)$ приходится отдельно рассматривать два случая $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_k = -\mu_k^2 < 0$ при $k \in \mathbb{N}$.

В первом случае имеем $\hat{D}_Б R = \lambda_0 R(\rho) \equiv 0$ или $\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho \dfrac{dR}{d\rho}\right) = 0,$ откуда $R_0(\rho) = C_0 + \tilde{C}_0 \cdot \ln\rho \quad \left(C_{0,} \tilde{C}_0 = const\right)$. Условие ограниченности $\left|R(0)\right| < \infty$ требует $\tilde{C}_0 = 0$ и $R_0(\rho) = C_0$. А после нормировки

$$\|R_0\|^2 = (R_0, R_0) = \int_0^r |C_0|^2 \cdot \rho\, d\rho = |C_0|^2 \cdot \frac{1}{2} r^2 = 1$$

получим орт $R_0(\rho) = \dfrac{\sqrt{2}}{r} = const.$

Во втором случае $\hat{D}_Б R = -\mu_k^2 R(\rho)$ получим $R_k(\rho) = = C_k \cdot J_0(\mu_k \rho) + \tilde{C}_k \cdot N_0(\mu_k \rho) \quad \left(C_{0,} \tilde{C}_0 = const\right)$, где полагаем $\tilde{C}_0 = 0,$ так как $N_0(0) = -\infty.$ Поэтому $R_k(\rho) = C_k \cdot J_0(\mu_k \rho)$ при $C_k \neq 0.$ Найдем собственные значения из уравнения $R'_k(r) = -C_k \mu_k \cdot J_1(\mu_k r) = 0$. Значит $\mu_k r = \alpha_k^{(1)} > 0$ или $\lambda_k = -\mu_k^2 = -\left(\alpha_k^{(1)} / r\right)^2 < 0;$ поэтому $R_k(\rho) = C_k \cdot J_0\left(\alpha_k^{(1)} \dfrac{\rho}{r}\right).$ Выполним нормировку

$$\|R_k\|^2 = \int_0^r \left|R_k(\rho)\right|^2 \cdot \rho d\rho = |C_k|^2 \cdot \int_0^r J_0^2\left(\alpha_k^{(1)} \frac{\rho}{r}\right) \cdot \rho d\rho =$$

$$= \left[\alpha_k^{(1)} \frac{\rho}{r} = x\right] = |C_k|^2 \cdot \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 \cdot \int_0^{\alpha} J_0^2(x) \cdot x dx =$$

$$=\left|C_k\right|^2\cdot\left(\frac{r}{\alpha}\right)^2\cdot\frac{1}{2}x^2\left(J_1^2(x)+J_0^2(x)\right)\Big|_0^{\alpha_k^{(1)}}=\left|C_k\right|^2\cdot\frac{r^2}{2}J_0^2\left(\alpha_k^{(1)}\right)=1.$$

Поэтому $C_k=\dfrac{\sqrt{2}}{r}/J_0\left(\alpha_k^{(1)}\right)$ и орт

$$R_k(\rho)=\frac{\sqrt{2}}{r}\cdot J_0\left(\alpha_k^{(1)}\frac{\rho}{r}\right)/J_0\left(\alpha_k^{(1)}\right)=\frac{\sqrt{2}}{r}\cdot J_0(\mu_k\rho)/J_0(\mu_k r).$$

4–5. Вывод и решение уравнений для функций от времени $T_0(t)$ и $T_k(t)$.

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-\frac{1}{a^2}\left\{T_0''R_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left[T_k''+\left(\alpha_k^{(1)}\frac{a}{r}\right)^2\cdot T_k\right]R_k\right\}=0.$$

$$R_0(\rho):\qquad T_0''(t)=0,\quad T_0(t)=A_0t+B_0\qquad (A_0,B_0=const).$$

$$R_k(\rho):\qquad T_k''+\omega_k^2\cdot T_k(t)=0,\qquad T_k(t)=A_k\sin\omega_k t+B_k\cos\omega_k t,$$

где $\omega_k=\alpha_k^{(1)}\dfrac{a}{r}>0$ – частота колебаний, $A_k,B_k=const.$

Теперь искомую функцию $u(\rho,t)$ можно записать в виде

$$u(\rho,t)=(A_0t+B_0)R_0+\sum_{k=1}^{\infty}\{A_k\sin\omega_k t+B_k\cos\omega_k t\}R_k(\rho).$$

6. Определение постоянных интегрирования из начальных условий.

$$u(\rho,0)=B_0R_0+\sum_{k=1}^{\infty}B_kR_k(\rho)=f(\rho)\Rightarrow B_0=(f,R_0)=\frac{\sqrt{2}}{r}\int_0^r f(\rho')\rho'd\rho',$$

$$B_k=(f,R_k)=\frac{\sqrt{2}}{r}\int_0^r f(\rho')\frac{J_0(\mu_k\rho')}{J_0(\mu_k r)}\rho'd\rho',\qquad \mu_k=\alpha_k^{(1)}/r>0.$$

$$u'_t(\rho,0)=A_0R_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_kR_k(\rho)=g(\rho)\Rightarrow A_0=(g,R_0)=\frac{\sqrt{2}}{r}\int_0^r g(\rho')\rho'd\rho',$$

$$A_k\omega_k=(g,R_k)=\frac{\sqrt{2}}{r}\int_0^r g(\rho')\frac{J_0(\mu_k\rho')}{J_0(\mu_k r)}\rho'd\rho'.$$

Здесь $\rho' \in [0, r]$ – переменная интегрирования; $\mu_k = \alpha_k^{(1)} / r > 0$ и $\omega_k = \mu_k a = \alpha_k^{(1)} \dfrac{a}{r} > 0$ – частота колебаний.

7. Окончательный вид решения задачи и его проверка.

$$u(\rho, t) = \frac{2}{r^2} \int_0^r \left(g(\rho') t + f(\rho') \right) \rho' d\rho' + \frac{2}{r^2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sin \omega_k t}{\omega_k} \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^r g(\rho') \cdot J_0(\mu_k \rho') \rho' d\rho' + \cos \omega_k t \cdot \int_0^r f(\rho') J_0(\mu_k \rho') \rho' d\rho' \right\} \cdot \frac{J_0(\mu_k \rho)}{J_0^2(\mu_k r)}.$$

$|u(0,t)| < \infty$ – все интегралы сходящиеся.

$$u'_\rho(r, t) = 0 \because J'_0(\mu_k \rho)\Big|_{\rho = r} = -\mu_k \cdot J_1(\mu_k r) = -\mu_k \cdot J_1\left(\alpha_k^{(1)}\right) = 0.$$

$$u(\rho, 0) = \frac{2}{r^2} \left\{ \int_0^r f(\rho') \rho' d\rho' + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^r f(\rho') \cdot J_0(\mu_k \rho') \rho' d\rho' \cdot \frac{J_0(\mu_k \rho)}{J_0^2(\mu_k r)} \right\} =$$

$$= B_0 R_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k R_k(\rho) = f(\rho).$$

$u'_t(\rho, 0) = g(\rho)$ – проверка аналогична.

8. В частном случае, когда $u(\rho, 0) = A$ и $u'_t(\rho, 0) = B$ – постоянные, получим решение $u(\rho, t) = A + Bt$, так как все скалярные произведения $(f, R_k) = (g, R_k)$ теперь равны нулю при $k = 1, 2, 3, \ldots$ Действительно, ведь все эти скалярные произведения сводятся к интегралам вида

$$\int_0^r J_0(\mu_k \rho') \cdot \rho' d\rho' = \left[\mu_k \rho' = \alpha_k^{(1)} \frac{\rho}{r} = x \right] = \left(\frac{r}{\alpha} \right)^2 \cdot \int_0^\alpha J_0(x) \cdot x dx =$$

$$= \left(\frac{r}{\alpha} \right)^2 \cdot x J_1(x) \Big|_0^\alpha = \frac{r^2}{\alpha_k^{(1)}} J_1\left(\alpha_k^{(1)}\right) = 0 \quad \text{при } k \in \mathbb{N}.$$

9. Так как задача симметричная – не зависит от угла φ, а уравнение и оба граничных условия однородны $F(\rho, t) = q(\rho, t) = 0$, то искомую функцию

$u(\rho,t)$ можно определить по общей разрешающей формуле с использованием функции Грина

$$u(\rho,t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^r f(\rho')\cdot G(\rho,\rho'|t)\cdot\rho' d\rho'+\int_0^r g(\rho')\cdot G(\rho,\rho'|t)\cdot\rho' d\rho'.$$

Здесь функция Грина (источника) равна

$$G(\rho,\rho'|t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\omega_k t}{\omega_k}R_k(\rho)\cdot\overline{R}_k(\rho')=$$

$$=\frac{2}{r^2}\left(t+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\omega_k t}{\omega_k}\frac{J_0(\mu_k\rho)\cdot J_0(\mu_k\rho')}{J_0^2(\mu_k r)}\right),$$

где $\omega_k=\mu_k a=\beta_k^{(0)}\dfrac{a}{r}$ и $\beta_k^{(0)}$ – простые корни дисперсионного уравнения $J'_0(\beta)=0$, причем $\beta_k^{(0)}<\beta_{k+1}^{(0)}$ – растут при $k\in\mathbb{N}$. $R_k(\rho)=\dfrac{\sqrt{2}}{r}J_0\left(\beta_k^{(0)}\dfrac{\rho}{r}\right)/J_0\left(\beta_k^{(0)}\right)$ – собственные функции и $\lambda_k=-\mu_k^2=-\left(\beta_k^{(0)}/r\right)^2$ – собственные значения задачи Неймана для оператора Бесселя индекса $n=0$.

В частном случае $k=0$ получим $R_0(\rho)=\dfrac{\sqrt{2}}{r}=const>0$ и $\beta_k^{(0)}=0;$ поэтому $\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{\sin\omega_k t}{\omega_k}=t.$

Вычислим приведенные выше интегралы раздельно.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^r f(\rho')\cdot G(\rho,\rho'|t)\cdot\rho' d\rho'=\frac{2}{r^2}\left\{\int_0^r f(\rho')\cdot\rho' d\rho'+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\cos\omega_k t\cdot\frac{J_0(\mu_k\rho)}{J_0^2(\mu_k r)}\cdot\int_0^r f(\rho')\cdot J_0(\mu_k\rho')\cdot\rho' d\rho'\right\}.$$

Второй интеграл записывается аналогично.

$$\int_0^r g(\rho')\cdot G(\rho,\rho'|t)\cdot\rho' d\rho' = \frac{2}{r}\left\{t\cdot\int_0^r g(\rho')\cdot\rho' d\rho' + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\omega_k t}{\omega_k}\cdot\frac{J_0(\mu_k\rho)}{J_0^2(\mu_k r)}\cdot\int_0^r g(\rho')\cdot J_0(\mu_k\rho')\cdot\rho' d\rho'\right\}.$$

Сложив значения этих интегралов, получим формулы решения задачи $u(\rho,t)$.

Решение стационарных задач

<u>**Задача 2.18.**</u> Пространственная смешанная краевая задача (с граничными условиями третьего рода) для уравнения Лапласа внутри отрезка цилиндра.

$$\begin{cases}\Delta_3 u \equiv \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho^2}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.\\ u\Big|_{\rho=r}=Az\cdot\cos n\varphi;\qquad u\Big|_{z=0}=u'_z\Big|_{z=H}=0.\end{cases}\qquad \begin{array}{l}u=u(\rho,\varphi,z).\\ 0\le\rho\le r,\ \ 0\le\varphi\le 2\pi,\\ 0\le z\le H.\qquad n\in\mathbb{Z}_o.\end{array}$$

Условия ограниченности при $\rho=0$ и периодичности по φ явно не записаны.

1. Отделение зависимости от угла φ: $u(\rho,\varphi,z)=\upsilon(\rho,z)\cdot\cos n\varphi.$

$$\begin{cases}\hat{D}_Б\upsilon+\upsilon''_{zz}\equiv\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right)-\dfrac{n^2}{\rho^2}\upsilon+\dfrac{\partial^2\upsilon}{\partial z^2}=0.\\ \left|\upsilon(0,z)\right|<\infty,\quad \upsilon(r,z)=Az;\\ \\ \upsilon(\rho,0)=\upsilon'_z(\rho,H)=0.\end{cases}$$

2–3. Пара граничных условий по переменной z однородна по условию задачи. В любом случае, всегда проще воспользоваться собственными функциями и значениями по декартовой координате z, так как собственными функциями здесь оказываются простые тригонометрические функции.

Будем искать фундаментальное решение $\upsilon(\rho,z)=R(\rho)\cdot Z(z)$ в виде ряда $\upsilon(\rho,z)=\sum_{k=o}^{\infty}R_k(\rho)\cdot Z_k(z)$, где функция $Z_k(z)$ находится из краевой задачи в гильбертовом пространстве $L_2\left(0,H\middle|1\right)$, т. е.

$$\hat{D}_z=\frac{d^2}{dz^2} \quad \text{и} \quad Z''=\lambda Z(z)=-\mu^2 Z(z) \quad \text{при} \quad Z(0)=Z'(H)=0.$$

Решение это краевой задачи известно:

$Z_k(z)=\sqrt{\dfrac{2}{H}}\cdot\sin\mu_k z$ – собственные функции, составляющие ортонормированный базис $(Z_k,Z_{k'})=\delta_{kk'}$;

$\lambda_k=-\mu_k^2=-\left(\dfrac{\pi}{2H}(2k+1)\right)^2<0$ – собственные значения (спектр задачи) при $k\in\mathbb{Z}_0=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ...\}$.

Ряд для функции $\upsilon(\rho,z)$ сходится равномерно и абсолютно (сходится правильно); при этом необходимо $\lim\limits_{k\to\infty}R_k(\rho)=0$.

4. Вывод дифференциального уравнения для функции $R_k(\rho)$.

Подставим разложение функции $\upsilon(\rho,z)$ в уравнение задачи и используем оператор Бесселя $\hat{D}_Б=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{d}{d\rho}\right)-\dfrac{n^2}{\rho^2}$. Тогда получается

$$\hat{D}_Б\upsilon+\upsilon''_{zz}=\sum_k\left\{\hat{D}_Б R_k-\mu_k^2 R_k\right\}\cdot Z_k=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\hat{D}_Б R_k-\mu_k^2 R_k=\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR_k}{d\rho}\right)-\left(\mu_k^2+\frac{n^2}{\rho^2}\right)R_k(\rho)=0 \text{ –}$$

модифицированное уравнение Бесселя.

5. Решение уравнения для функции $R_k(\rho)$.

$$R_k(\rho)=C_k\cdot I_n(\mu_k\rho)+\tilde{C}_k\cdot K_n(\mu_k\rho);\qquad C_k,\tilde{C}_k=const.$$

Здесь $I_\nu\left(x\right)=e^{\pm i\pi\nu}\cdot J_\nu\left(\pm ix\right)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\dfrac{\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m+\nu}}{m!\cdot\Gamma\left(\nu+m+1\right)}$ – модифицированная функция Бесселя первого рода (функция Боссе), где $I_\nu\left(0\right)=0$ при $\nu>0$ и $R_{сход}=\infty$, $I_\nu\left(x\right)\cong e^x\big/\sqrt{2\pi x}$ при $x>>1$, $I_\nu\left(\infty\right)=\infty$, $I_{-n}\left(x\right)=I_n\left(x\right)$.

$K_\nu\left(x\right)$ – функция Макдональда (модифицированная функция Ханкеля первого рода): $H_\nu^{(1)}\left(ix\right)=J\left(ix\right)+i\cdot N_\nu\left(ix\right)=-\dfrac{2i}{\pi}e^{-i\nu\frac{\pi}{2}}\cdot K_\nu\left(x\right)$, $K_\nu\left(0\right)=\infty$, $K_\nu\left(x\right)\cong\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}\cdot e^{-x}$ при $x>>1$, $K_\nu\left(\infty\right)=0$, $K_\nu(x)=\dfrac{\pi}{2}\left(I_{-\nu}\left(x\right)-I_\nu\left(x\right)\right)\Big/\sin\nu\pi$.

6. Определение постоянных интегрирования C_k и $\tilde{C}_k$ из начальных условий по радиусу ρ.

$$\upsilon\left(\rho,z\right)=\sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty}\left\{C_k\cdot I_n\left(\mu_k\rho\right)+\tilde{C}_k\cdot K_n\left(\mu_k\rho\right)\right\}\cdot Z_k\left(z\right).$$

$$\left|\upsilon\left(0,z\right)\right|<\infty:\quad I_n\left(0\right)=0,\quad K_n\left(0\right)=\infty\Rightarrow\tilde{C}_k=0.$$

$$\upsilon\left(r,z\right)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k\cdot I_n\left(\mu_k r\right)\cdot Z_k\left(z\right)=Az\Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_k\cdot I_n\left(\mu_k r\right)=\left(Az,Z_k\right)=A\sqrt{\frac{2}{H}}\cdot\int_0^H\sin\mu_k z\cdot z\,dz=A\sqrt{\frac{2}{H}}\cdot\frac{\left(-1\right)^k}{\mu_k^2},$$

$$C_k=A\sqrt{\frac{2}{H}}\cdot\frac{\left(-1\right)^k}{\mu_k^2}\Bigg/I_n\left(\mu_k r\right).$$

7. Окончательный вид решения задачи.

$$u\left(\rho,\varphi,z\right)=\upsilon\left(\rho,z\right)\cdot\cos n\varphi=\frac{2A}{H}\cdot\sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k}{\mu_k^2}\cdot\frac{I_n\left(\mu_k\rho\right)}{I_n\left(\mu_k r\right)}\cdot\sin\mu_k z\cdot\cos n\varphi;$$

$\mu_k = \dfrac{\pi}{2H}\left(2k+1\right) > 0.$ Ряд сходится правильно; его общий член имеет порядок $O\left(\dfrac{1}{k^2}e^{-k(r-\rho)}\right)$ при $k \to \infty$.

8. Проверка полученного решения по условиям задачи и по разностям.

$$u\left(0,\varphi,z\right) = u\Big|_{\rho=0} = 0 < \infty \because I_n\left(0\right) = 0;$$

$$u\left(r,\varphi,z\right) = u\Big|_{\rho=r} = \frac{2A}{H}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k}{\mu_k}\sin\mu_k z\cdot\cos n\varphi = Az\cdot\cos n\varphi \because$$

$$\because \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k}{\mu_k^2}\sin\mu_k z = \left(\frac{2H}{\pi}\right)^2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k}{\left(2k+1\right)^2}\sin\frac{\pi z\left(2k+1\right)}{2H} = \left(\frac{2H}{\pi}\right)^2\cdot\frac{\pi^2 z}{8H} = \frac{1}{2}Hz$$

при $\mu_k = \dfrac{\pi}{2H}\left(2k+1\right)$.

$$u\Big|_{z=0} = 0 \because \sin 0 = 0,\ \ u'_z\Big|_{z=H} = 0 \because \cos\mu_k H = \cos\frac{\pi}{2}\left(2k+1\right) = 0.$$

Сравнение размерностей в условиях и в ответете.

$$\left[u\left(\rho,\varphi,z\right)\right] \equiv Q, \quad \left[A\right] = Q/L, \quad \left[\mu_k\right] = 1/L.$$

$$\left[u\right] \equiv Q = \left[\frac{2A}{H}\cdot\frac{1}{\mu_k^2}\right] = \frac{Q}{L}\cdot\frac{1}{L}L^2 \Rightarrow Q.$$

9. Решение стационарной задачи $\Delta_3 u = F\left(M\right)$ и $u\big|_S = f\left(M\right)$ по общей формуле с использованием функции Грина, если разложение в ряд Фурье проводится по тригонометрическим функциям, зависящим от декартовой координаты z.

Выше рассмотрена упрощенная задача Дирихле $\Delta_2\upsilon\left(\rho,z\right) = 0$ и $\upsilon\left(r,z\right) = f\left(z\right) \equiv Az,\quad \upsilon\left(\rho,0\right) = \upsilon'_z\left(\rho,H\right) = 0,$ где для ряда Фурье $\upsilon\left(\rho,z\right) = \sum\limits_{k-0}^{\infty}R_k\left(\rho\right)\cdot Z_k\left(z\right)$ найдены собственные функции $Z_k\left(z\right) = \sqrt{\dfrac{2}{H}}\cdot\sin\mu_k z$ и собственные значения $\lambda_k = -\mu_k^2 < 0$ при $\mu_k = \dfrac{\pi}{2H}\left(2k+1\right)$. Коэффициенты разложения (координаты) тоже определены; запишем их в виде $R_k\left(\rho\right) = C_k\cdot I_n\left(\mu_k\rho\right)$.

Постоянную C_k найдем из неоднородного условия

$$\upsilon(r,z)=\sum_k C_k I_n(\mu_k r)\cdot Z_k(z)=f(z)\equiv Az,$$

откуда $C_k I_n(\mu_k r)=(f,Z_k)\equiv\int_0^H f(\zeta)\cdot\bar{Z}_k(\zeta)d\zeta.$

Теперь выражение для функции $\upsilon(\rho,z)$ запишем в виде

$$\upsilon(\rho,z)=\sum_k\frac{I_n(\mu_k\rho)}{I_n(\mu_k r)}\cdot\int_0^H f(\zeta)\cdot\bar{Z}_k(\zeta)d\zeta\cdot Z_k(z)=$$

$$=\int_0^H f(\zeta)\cdot\left\{\sum_k\frac{I_n(\mu_k\rho)}{I_n(\mu_k r)}\cdot Z_k(z)\cdot\bar{Z}_k(\zeta)\right\}d\zeta\equiv\int_0^H f(\zeta)\cdot G(\rho,z;\zeta)d\zeta.$$

Следовательно, функция Грина (источника) равна

$$G(\rho,z;\zeta)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{I_n(\mu_k\rho)}{I_n(\mu_k r)}\cdot Z_k(z)\cdot\bar{Z}_k(\zeta).$$

Используя условия задачи, когда неоднородное граничное условие $f(z)=Az$ и правая часть уравнения $F(\rho,z)=0,$ легко получим

$$\upsilon(\rho,z)=\int_0^H f(\varsigma)\cdot G(\rho,z;\varsigma)\,d\varsigma=\frac{2A}{H}\sum_k\frac{I_n(\mu_k\rho)}{I_n(\mu_k r)}\cdot\int_0^H\sin\mu_k\varsigma\cdot\varsigma\,d\varsigma\cdot\sin\mu_k z=$$

$$=\frac{2A}{H}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{I_n(\mu_k\rho)}{I_n(\mu_k r)}\cdot\frac{(-1)^k}{\mu_k^2}\cdot\sin\mu_k z\quad\text{при}\ \mu_k=\frac{\pi}{2H}(2k+1).$$

Выражение функции $\upsilon(\rho,z)$ через функцию Грина $G(\rho,z;\zeta)$ позволяет громоздкое решение аналогичных задач математической физики сводить к квадратурам.

Наконец, возвращаясь к функции $u(\rho,\varphi,z)=\upsilon(\rho,z)\cdot\cos n\varphi,$ получаем решение задачи.

Задача 2.19. Проведем решение предыдущей задачи более сложным методом разложения в ряд по функциям Бесселя.

1. Решение задачи снова начинается с отделения зависимости от угла φ: $u(\rho,\varphi,z)=\upsilon(\rho,z)\cdot\cos n\varphi.$ Тогда

$$\begin{cases}\hat{D}_Б\upsilon+\upsilon''_{zz}\equiv\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right)-\dfrac{n^2}{\rho^2}\upsilon+\dfrac{\partial^2\upsilon}{\partial z^2}=0.\\ \left|\upsilon(0,z)\right|<\infty,\quad \upsilon(r,z)=Az;\\ \upsilon(\rho,0)=\upsilon'_z(\rho,H)=0.\end{cases}\qquad \begin{aligned}&\upsilon=\upsilon(\rho,z).\\ &0\le\rho\le r,\quad 0\le z\le H.\\ &\hat{D}_Б=\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d}{d\rho}\right)-\frac{n^2}{\rho^2}.\end{aligned}$$

2. В предыдущем случае разложение в ряд проводилось по тригонометрическим функциям, так как это более простой вариант. Однако для приобретения навыков работы с цилиндрическими функциями можно решить и несколько более сложный вариант задачи – раскладывая по функциям Бесселя.

Так как граничные условия по переменной ρ не однородны, то для эрмитовости оператора Бесселя $\hat{D}_Б$ эту пару условий нужно сначала привести к однородным (самосопряженным). После этого могут появиться неоднородности в уравнении или в условиях по другой переменной z.

Привести граничные условия по ρ к однородным можно по формуле $\upsilon(\rho,z)=w(\rho,z)+\alpha(z)\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^m+\beta(z)$, где функции $\alpha(z)$, $\beta(z)$ и показатель $m>0$ нужно определить; тогда $w(\rho,z)$ будет новой искомой функцией.

$$\left|\upsilon(0,z)\right|=\left|w(0,z)+0+\beta(z)\right|<\infty\Rightarrow\left|w(0,z)\right|<\infty\ \text{ и }\ \beta(z)=0,$$
$$\upsilon(r,z)=w(r,z)+\alpha(z)=Az\Rightarrow w(r,z)=0\ \text{ и }\ \alpha(z)=Az.$$

Связь функций $\upsilon(\rho,z)$ и $w(\rho,z)$ теперь имеет вид: $\upsilon(\rho,z)=w(\rho,z)+Az\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^m$, а показатель степени m определяется с использованием уравнения задачи

$$\hat{D}_Б \upsilon + \upsilon''_{zz} = \hat{D}_Б w + w''_{zz} + \hat{D}_Б \left\{ Az \cdot \left(\frac{\rho}{r} \right)^m \right\} + 0 =$$

$$= \hat{D}_Б w + w''_{zz} + Az \cdot \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho}{r} \right)^m \right) - Az \cdot \frac{n^2}{\rho^2} \cdot \left(\frac{\rho}{r} \right)^m =$$

$$= \hat{D}_Б w + w''_{zz} + Az \frac{m^2 - n^2}{\rho^2} \cdot \left(\frac{\rho}{r} \right)^m = 0.$$

Уравнение значительно упрощается, если принять $m = n > 0$.

Граничные условия по координате z теперь оказываются неоднородными:

$$\upsilon'_z(\rho,0) = w'_z(\rho,0) + A \cdot \left(\frac{\rho}{r} \right)^n = 0 \Rightarrow w'_z(\rho,0) = -A \left(\frac{\rho}{r} \right)^n ;$$

$$\upsilon(\rho,H) = w(\rho,H) + AH \cdot \left(\frac{\rho}{r} \right)^n = 0 \Rightarrow w(\rho,H) = -AH \cdot \left(\frac{\rho}{r} \right)^n .$$

Таким образом, постановка задачи для новой (неоднородной по переменной z) функции $w(\rho,z)$ принимает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial}{\partial\rho} \left(\rho \dfrac{\partial w}{\partial\rho} \right) - \dfrac{n^2}{\rho^2} w + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0. \\ |w(0,z)| < \infty, \quad w(r,z) = 0; \\ w'_z(\rho,0) = -A \cdot \left(\dfrac{\rho}{r} \right)^n, \quad w(\rho,H) = -AH \cdot \left(\dfrac{\rho}{r} \right)^n . \end{cases} \qquad \begin{array}{l} w = w(\rho,z). \\ 0 \le \rho \le r, \quad 0 \le z \le H. \end{array}$$

Для приведения граничных условий по радиусу ρ к однородным нужно запомнить вид замены и сразу пользоваться соотношением $\upsilon(\rho,z) = w(\rho,z) + \upsilon(r,z) \cdot \left(\frac{\rho}{r} \right)^n$, где n – порядок функции Бесселя.

3. Разделение переменных и решение краевой задачи по переменной ρ.

Решение будем искать в виде ряда $w(\rho, z) = \sum_{k=1}^{\infty} Z_k(z) \cdot R_k(\rho)$, где функция $R_k(\rho)$ находится из краевой задачи в гильбертовом пространстве $L_2(0, r|\rho)$, т. е.

$$\hat{D}_Б = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d}{d\rho}\right) - \frac{n^2}{\rho^2}; \qquad |R(0)| < \infty, \quad R(r) = 0,$$

или более подробная запись:

$$\hat{D}_Б = \lambda R \equiv -\mu^2 R(\rho); \qquad \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) + \left(\mu^2 - \frac{n^2}{\rho^2}\right)R(\rho) = 0.$$

Решение этой краевой задачи известно:

$$R_k(\rho) = \frac{\sqrt{2}}{r}\frac{J_n(\mu_k\rho)}{J_{n+1}(\mu_k\rho)} = \frac{\sqrt{2}}{r}\frac{J_n\left(\alpha_k^{(n)}\dfrac{\rho}{r}\right)}{J_{n+1}\left(\alpha_k^{(n)}\right)}$$ – собственные функции,

составляющие ортонормированный базис $(R_k, R_{k'}) = \int_0^r R_k(\rho) \cdot \bar{R}_{k'}(\rho) \cdot \rho d\rho = \delta_{kk'}$ (ρ – весовая функция). Здесь $J_n(x)$ – функция Бесселя первого рода с индексом $n \in \mathbb{Z}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$. Величины $\alpha_k^{(n)} > 0$ – простые корни этой функции $J_n\left(\alpha_k^{(n)}\right) = 0$, где $\alpha_k^{(n)} < \alpha_{k+1}^{(n)}$; причем $J_{n_1}\left(\alpha_k^{(n_2)}\right) \neq 0$ при $n_1 \neq n_2$ и любых $k = 1, 2, 3, ...$

$\lambda_k = -\mu_k^2 = -\left(\dfrac{\alpha_k^{(n)}}{r}\right)^2 < 0$ – собственные значения задачи (спектр задачи) при $k \in \mathbb{Z}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$.

Ряд для функции $w(\rho, z)$ сходится абсолютно и равномерно (правильно); при этом необходимо $\lim_{k\to\infty} Z_k(z) = 0$. Обобщенный коэффициент Фурье–Бесселя находится с помощью интеграла (он играет роль координаты)

$$Z_k(z) = (w, R_k) = \int_0^r w(\rho', z) \cdot \bar{R}_k(\rho') \cdot \rho' d\rho'.$$

4. Вывод дифференциального уравнения для функции $Z_k(z)$.

$$\hat{D}_Б w + w'' = \sum_k \left\{ \left[\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dR_k}{d\rho}\right) - \frac{n^2}{\rho^2} R_k \right] \cdot Z_k + R_k Z_k'' \right\} =$$

$$= \sum_k \left\{ -\mu_k^2 R_k \cdot Z_k + R_k Z_k'' \right\} = \sum_k \left\{ Z_k'' - \mu_k^2 \cdot Z_k \right\} R_k = 0 \Rightarrow Z_k'' - \mu_k^2 \cdot Z_k(z) = 0.$$

5. Решение дифференциального уравнения для функции $Z_k(z)$ представим в виде, удобном для дальнейших вычислений.

$$Z_k(z) = C_k \cdot \mathrm{ch}\mu_k z + \tilde{C}_k \cdot \mathrm{sh}\mu_\mathrm{k}(H-z); \qquad C_k, \tilde{C}_k = const.$$

Тогда ряд для функции $w(\rho, z)$ можно записать в окончательной форме

$$w(\rho,z) = \sum_{k=1}^{\infty} Z_k(z) \cdot R_k(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ C_k \cdot \mathrm{ch}\mu_k z + \tilde{C}_k \cdot \mathrm{sh}\mu_k (H-z) \right\} \cdot R_k(\rho).$$

6. Определение постоянных C_k и $\tilde{C}_k$ из граничных условий по переменной z.

$$w_z'(\rho,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 0 - \tilde{C}_k \mu_k \cdot \mathrm{ch}\mu_\mathrm{k} H \right\} \cdot R_k(\rho) = -A\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\gamma}_k \cdot R_k(\rho) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{\gamma}_k = \left(-A\left(\frac{\rho}{r}\right)^n, R_k \right) = -A \cdot \int_0^r \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \cdot \overline{R}_k(\rho) \cdot \rho \, d\rho =$$

$$= -\frac{A}{r^n} \cdot \frac{\sqrt{2}/r}{J_{n+1}(\alpha)} \cdot \int_0^r J_n\left(\alpha \frac{\rho}{r}\right) \cdot \rho^{n+1} d\rho = \left[\alpha_k^{(n)} \frac{\rho}{r} = x \right] =$$

$$= -\frac{Ar\sqrt{2}}{\alpha^{n+2} J_{n+1}(\alpha)} \cdot \int_0^r J_n(x) \cdot x^{n+1} dx.$$

Проинтегрировав известную рекуррентную формулу $\frac{d}{dx}\left(x^\nu \cdot J_\nu(x)\right) = x^\nu \cdot J_{\nu-1}(x)$ при $\nu = n+1$, сразу получим значение нашего интеграла $\int_0^\alpha J_n(x) \cdot x^{n+1} dx = \alpha^{n+1} \cdot J_{n+1}(\alpha)$. Поэтому искомый коэффициент разложения в ряд равен

$$\tilde{\gamma}_k = \frac{-Ar\sqrt{2}}{\alpha^{n+2}\cdot J_{n+1}(\alpha)}\cdot\alpha^{n+1}\cdot J_{n+1}(\alpha) = -\frac{Ar\sqrt{2}}{\alpha_k^{(n)}} = -\frac{A\sqrt{2}}{\mu_k} < 0.$$

Таким образом, $-\tilde{C}_k\mu_k \mathrm{ch}\mu_\mathrm{k} H = \tilde{\gamma}_k \equiv -\dfrac{A\sqrt{2}}{\mu_k}$, откуда коэффициент $\tilde{C}_k = \dfrac{A\sqrt{2}}{\mu_k^2}\Big/\mathrm{ch}\mu_\mathrm{k} H > 0.$

Вторую постоянную C_k определяют аналогично

$$w(\rho,H) = \sum_{k=1}^{\infty}\{C_k \mathrm{ch}\mu_\mathrm{k} H + 0\}\, R_k(\rho) = -AH\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \equiv \sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\cdot R_k(\rho).$$

$\gamma_k = -\left(AH\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^n, R_k\right) = -\dfrac{AH\sqrt{2}}{\mu_k} < 0$ – нужный интеграл уже вычислен выше, поэтому второй коэффициент равен $C_k\cdot\mathrm{ch}\mu_k H = \gamma_k \equiv -\dfrac{AH\sqrt{2}}{\mu_k}$ и $C_k = -\dfrac{AH\sqrt{2}}{\mu_k}\Big/\mathrm{ch}\mu_k H$.

7. Окончательный вид решения задачи, когда разложение проводится по функциям Бесселя.

$$u(\rho,\varphi,z) = \upsilon(\rho,z)\cdot\cos n\varphi = \left\{Az\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n + w(\rho,r)\right\}\cdot\cos n\varphi == A\cdot\left\{z\left(\frac{\rho}{r}\right)^n - \right.$$

$$\left. -\frac{2}{r}\cdot\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{J_n(\mu_k\rho)}{J_{n+1}(\mu_k r)}\cdot\left[\,\mu_k H\cdot\mathrm{ch}\,\mu_k z - \mathrm{sh}\,\mu_k(H-z)\,\right]\Big/\left(\mu_k^2\cdot ch\mu_k H\right)\right\}\cdot\cos n\varphi.$$

Ряд сходится быстро, так как отношения гиперболических функций затухают экспоненциально $\dfrac{\mathrm{ch}\mu_k z}{\mathrm{ch}\mu_k H} \cong e^{-\mu_k(H-z)} \to 0$ и $\dfrac{\mathrm{sh}\mu_k(H-z)}{\mathrm{ch}\mu_k H} \cong e^{-\mu_k z} \to 0$ при $k\to\infty$.

8. Проверка полученного решения по условиям задачи и по размерностям.

$$u(0,\varphi,z)=0<\infty \because J_n\left(\alpha_k^{(n)}\frac{\rho}{r}\right)\bigg|_{\rho=0}=\delta_{0,n};$$

$$u(r,\varphi,z)=Az\cdot\cos\varphi \because J_n\left(\alpha_k^{(n)}\frac{\rho}{r}\right)\bigg|_{\rho=r}=J_n\left(\alpha_k^{(n)}\right)=0.$$

$$u_z'(\rho,\varphi,0)=A\left\{\left(\frac{\rho}{r}\right)^n-\frac{2}{r}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_n(\mu_k\rho)}{J_{n+1}(\mu_k r)}\left[0+\mu_k\cdot\mathrm{ch}\mu_k H\right]\Big/(\mu_k^2\mathrm{ch}\mu_k H)\right\}\cos n\varphi=$$

$$=A\left\{\left(\frac{\rho}{r}\right)^n-\frac{2}{r}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_n(\mu_k\rho)}{\mu_k\cdot J_{n+1}(\mu_k r)}\right\}\cdot\cos n\varphi=$$

$$=A\left\{\left(\frac{\rho}{r}\right)^n-2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_n\left(\alpha_k^{(n)}\frac{\rho}{r}\right)}{\alpha_k^{(n)}\cdot J_{n+1}\left(\alpha_k^{(n)}\right)}\right\}\cdot\cos n\varphi=A\left\{\left(\frac{\rho}{r}\right)^n-\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\right\}\cdot\cos n\varphi=0.$$

$$u(\rho,\varphi,H)=A\cdot\left\{H\left(\frac{\rho}{r}\right)^n-\frac{2}{r}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_n(\mu_k\rho)}{J_{n+1}(\mu_k r)}\left[\mu_k H\cdot\mathrm{ch}\mu_k H-0\right]\Big/\mu_k^2\cdot\mathrm{ch}\mu_k H\right\}\times$$

$$\times\cos n\varphi=AH\cdot\left\{\left(\frac{\rho}{r}\right)^n-\frac{2}{r}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J(\mu_k\rho)}{\mu_k J_{n+1}(\mu_k r)}\right\}\cdot\cos n\varphi=0.$$

Проверим совпадение размерностей в условиях задачи с размерностями в формуле окончательного решения.

$$\left[u(\rho,\varphi,z)\right]\equiv Q,\quad [A]=\frac{Q}{L},\quad [\mu_k]=\frac{1}{L},\quad [\mu_k\rho]=[\mu_k r]=[\mu_k H]=1.$$

$$[u]=[A]\cdot\left\{L\cdot 1+\frac{1}{L}[1]\cdot L^2\right\}=\frac{Q}{L}\cdot L\Rightarrow Q.$$

9. Приведение к однородным сразу всех граничных условий обычно не удается. Однако всегда можно одну задачу с неоднородностями на многих границах записать в виде нескольких задач с неоднородными для одной пары переменных каждая. Возможно и последовательное приведение к однородным нескольких пар граничных условий.

Задачи на определение собственных функций (векторов) и собственных значений (чисел) можно поставить и решить только с использованием оператора дифференцирования второго порядка и самосопряженных (однородных) граничных условий. Такой же оператор с начальными условиями составляет задачу Коши, где не бывает собственных функций и чисел; зато всегда существует решение – единственное и устойчивое (непрерывное).

В нестационарных задачах – уравнениях переноса (теплопроводности, диффузии и др.) и уравнениях колебаний (волновое и т. п.) – ответ, конечно, зависит от времени. При этом при решении задач для уравнений переноса (уравнений параболического типа) зависимость от времени t имеет вид $e^{-\mu_k^2 b^2 t}$ и ряд сходится быстро, а в случае задач для уравнений колебаний (уравнениях гиперболического типа) зависимость от времени имеет вид $\dfrac{\sin \mu_k a t}{\mu_k^p}$ $(p = 1, 2, 3...)$ и ряд сходится медленнее. Стационарные задачи (уравнения эллиптического типа) всегда имеют экспоненциальную сходимость.

Легко заметить, что при разложении в ряд искомой функции $w(\rho, z) = \sum\limits_k R_k(\rho) \cdot Z_k(z)$ оказывается, что базисные функции всегда оказываются колеблющимися (не стремятся к определенному пределу при $k \to \infty$), зато другая функция (координатная) всегда стремится к нулю при $k \to \infty$. Именно за счет этой координатной функции сходится весь ряд.

10. Решение стационарных задач Дирихле $\Delta_3 u = F(M)$ и $u\big|_s = f(M)$ по общей формуле с использованием функции Грина, если разложение в ряд Фурье–Бесселя проводится по функциям Бесселя, зависящим от полярного радиуса ρ (сравнить с п. 9 задачи 2.18).

Выше рассматривалась упрощенная задача Дирихле

$$\Delta_2 w(\rho, z) = F(\rho, z) \equiv 0 \quad \text{и} \quad w(r, z) = 0, \quad w_z'(\rho, 0) = f(\rho) = -A\left(\frac{\rho}{r}\right)^n,$$

$w(\rho, H) = H \cdot f(\rho)$. Для разложения в ряд Фурье–Бесселя $w(\rho, z) = \sum_{k=1}^{\infty} Z_k(z) \cdot R_k(\rho)$ определены собственные функции $R_k(\rho) = \frac{\sqrt{2}}{r} J_n(\mu_k \rho) \Big/ J_{n+1}(\mu_k r)$ и собственные значения $\lambda_k = -\mu_k^2 = -\left(\alpha_k^{(n)} / r\right)^2 < 0$, где $J_n(\alpha) = 0$ – дисперсионное уравнение для определения множества простых корней $0 < \alpha_k^{(n)} < \alpha_{k+1}^{(n)} < \ldots$ и $J_{n+1}\left(\alpha_k^{(n)}\right) \neq 0$.

Коэффициенты разложения в ряд (координаты) представим в виде $Z_k(z) = C_k \cdot \mathrm{ch}\mu_\mathrm{k} z + \tilde{C}_k \cdot \mathrm{sh}\mu_\mathrm{k}(H - z)$ при $C_k, \tilde{C}_k = const$. Тогда ряд Фурье–Бесселя нужно записать следующим образом:

$$w(\rho, z) = \sum_{k=1}^{\infty} Z_k(z) \cdot R_k(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ C_k \cdot \mathrm{ch}\mu_\mathrm{k} z + \tilde{C}_k \cdot \mathrm{sh}\mu_\mathrm{k}(H - z) \right\} R_k(\rho).$$

Здесь постоянные $C_k, \tilde{C}_k$ можно определить из неоднородных условий

$$w'_z(\rho, 0) = -\sum_k \tilde{C}_k \mu_k \cdot \mathrm{ch}\mu_\mathrm{k} H \cdot R_k(\rho) = f(\rho) = \sum_k \tilde{\gamma}_k \cdot R_k(\rho);$$

$$w(\rho, H) = \sum_k C_k \mathrm{ch}\mu_\mathrm{k} H \cdot R_k(\rho) = H \cdot f(\rho) = \sum_k \gamma_k \cdot R_k(\rho).$$

Коэффициенты разложения γ_k и $\tilde{\gamma}_k$ найдем с помощью скалярных произведений (интегралов)

$$\tilde{\gamma}_k = -\tilde{C} \mu_k \mathrm{ch}\mu_\mathrm{k} H = (f, R_k) \equiv \int_0^r f(\rho') \cdot \overline{R}_k(\rho') \rho' d\rho' = -\frac{A\sqrt{2}}{\mu_k};$$

$$\gamma_k = C_k \cdot \mathrm{ch}\mu_\mathrm{k} H = (Hf, R_k) \equiv H \cdot \int_0^r f(\rho') \cdot \overline{R}_k(\rho') \rho' d\rho' = \frac{AH\sqrt{2}}{\mu_k}.$$

Отсюда значения постоянных равны

$$C_k = H \cdot (f, R_k) / \mathrm{ch}\mu_\mathrm{k} H, \quad \tilde{C}_k = -(f, R_k) / \mu_k \cdot \mathrm{ch}\mu_\mathrm{k} H, \quad C_k = -\mu_k H \cdot \tilde{C}_k \neq 0.$$

Теперь разложение искомой функции в ряд Фурье–Бесселя записывается в виде

$$w(\rho,z)=\sum_k\left\{H\frac{(f,R_k)}{\mathrm{ch}\mu_\mathrm{k}H}\mathrm{ch}\mu_\mathrm{k}z-\frac{(f,R_k)}{\mu_k\cdot\mathrm{ch}\mu_\mathrm{k}H}\mathrm{sh}\mu_\mathrm{k}(H-z)\right\}R_k(\rho)=$$

$$=\sum_k\frac{H\mu_k\cdot\mathrm{ch}\mu_k z-\mathrm{sh}\mu_k(H-z)}{\mu_k\cdot\mathrm{ch}\mu_k H}\cdot\int\limits_0^r f(\rho')\cdot\bar{R}_k(\rho')\rho'd\rho'\cdot R_k(\rho)=$$

$$=\int\limits_0^r f(\rho')\cdot\left\{\sum_k\frac{H\mu_k\cdot\mathrm{ch}\mu_k z-\mathrm{sh}\mu_k(H-z)}{\mu_k\cdot\mathrm{ch}\mu_k H}\cdot\bar{R}_k(\rho')\cdot R_k(\rho)\right\}\cdot\rho'd\rho'=$$

$$=\int\limits_0^r f(\rho')\cdot G(\rho,z;\rho')\cdot\rho'd\rho',$$

где функция Грина (источника) нашей задачи

$$G(\rho,z;\rho')=\sum_k\frac{H\mu_k\cdot\mathrm{ch}\mu_k z-\mathrm{sh}\mu_k(H-z)}{\mu_k\cdot\mathrm{ch}\mu_k H}\cdot\bar{R}_k(\rho')\cdot R_k(\rho).$$

Выражение искомой функции $w(\rho,z)$ через интеграл с известной функцией Грина $G(\rho,z;\rho')$ позволяет громоздкое решение задачи с произвольными заданными условиями свести к простым квадратурам. Так, в нашей задаче с условиями $F(\rho,z)=0$ и $f(\rho)=-A\left(\frac{\rho}{r}\right)^n$ получим

$$w(\rho,z)=\frac{2A}{r^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}\mu_k(H-z)-H\mu_k\mathrm{ch}\mu_k z}{\mu_k\cdot\mathrm{ch}\mu_k H}\cdot\int\limits_0^r\left(\frac{\rho'}{r}\right)^n J_n(\mu_k\rho')\rho'd\rho'\frac{J_n(\mu_k\rho)}{J_{n+1}^2(\mu_k r)}=$$

$$=\left[\int\limits_0^r\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\cdot J_n(\mu_k\rho)\rho d\rho=\int\limits_0^\alpha\left(\frac{x}{\alpha}\right)^n\cdot J_n(x)x\,dx\cdot\left(\frac{r}{\alpha}\right)^2=\frac{r^2}{\alpha^{n+2}}\int\limits_0^\alpha J_n(x)\cdot x^{n+1}dx=\right.$$

$$\left.=\frac{r^2}{\alpha^{n+2}}\cdot\alpha^{n+1}J_{n+1}(\alpha)=\frac{r}{\mu_k}J_{n+1}(\mu_k r)\ \text{при}\ \mu_k\rho=\alpha_k^{(n)}\frac{\rho}{r}=x\right]=$$

$$=-\frac{2A}{r^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H\mu_k\cdot\mathrm{ch}\mu_k z-\mathrm{sh}\mu_k(H-z)}{\mu_k\cdot\mathrm{ch}\mu_k H}\cdot\frac{r}{\alpha}J_{n+1}(\mu_k r)\frac{J_n(\mu_k\rho)}{J_{n+1}^2(\mu_k r)}=$$

$$= -\frac{2A}{r}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H\mu_k\cdot \mathrm{ch}\mu_k z - \mathrm{sh}\mu_k\left(H-z\right)}{\mu_k^2\cdot \mathrm{ch}\mu_k H}\cdot\frac{J_n\left(\mu_k\rho\right)}{J_{n+1}\left(\mu_k r\right)}.$$

Используя соответствие $u\left(\rho,\varphi,z\right)=\left\{Az\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^n+w\left(\rho,z\right)\right\}\cdot\cos n\varphi,$

получим окончательный вид решения задачи.

__Задача 2.20.__ Решение стационарной задачи для уравнения Пуассона со смешанными граничными условиями (условиями третьего рода) внутри отрезка цилиндра.

$$\begin{cases}\Delta_3 u\equiv\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=F_0\left(\rho,\varphi,z\right)\equiv A\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^2\cdot\sin n\varphi.\\ u\big|_{\rho=r}=f_0\left(\varphi,z\right)\equiv Bz\cdot\sin n\varphi;\quad u'_z\big|_{z=0}=u\big|_{z=H}=0.\end{cases}$$

$$u=u\left(\rho,\varphi,z\right)\quad\text{при } 0\le\rho\le r,\quad 0\le\varphi<2\pi,\quad 0\le z\le H.$$

Здесь $A,B,r,H=const>0$, $n\in\mathbb{N}$; естественные граничные условия ограниченности при $\rho=0$ и периодичности по φ явно не записаны.

Если в разных условиях задачи заданы различные зависимости от угла φ, то такую задачу следует разбить на несколько частей, с однотипными условиями в каждой.

1. После отделения зависимости от угла φ по формуле $u\left(\rho,\varphi,z\right)=\upsilon\left(\rho,z\right)\cdot\sin n\varphi$ условия задачи будут

$$\begin{cases}\Delta_2\upsilon\equiv\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right)-\dfrac{n^2}{\rho^2}\upsilon+\dfrac{\partial^2\upsilon}{\partial z^2}=F\left(\rho,z\right)\equiv A\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^2. & \upsilon=\upsilon\left(\rho,z\right).\\ \upsilon\big|_{\rho=r}=f\left(z\right)\equiv Bz,\quad \upsilon'_z\big|_{z=0}=\upsilon\big|_{z=H}=0. & 0\le\rho\le r,\ 0\le z\le H.\end{cases}$$

2. Пара граничных условий по переменной z однородна по условию.

3. Разделение переменных и решение краевой задачи по переменной z.

В гильбертовом пространстве $L_2\left(0,H\middle|1\right)$ для оператора $\hat{D}=\dfrac{d^2}{dz^2}$ с однородными граничными условиями $Z'(0)=Z(H)=0$ получим собственные функции (ортонормированный базис) $Z_k(z)=\sqrt{\dfrac{2}{H}}\cdot\cos\mu_k z$ и собственные значения (дискретный спектр) $\lambda_k=-\mu_k^2=-\left(\dfrac{\pi}{2H}(2k+1)\right)^2<0$ при $k\in\mathbb{Z}_0$.

Разложение функции $\upsilon(\rho,z)$ в ряд Фурье по базису $Z_k(z)$ имеет вид: $\upsilon(\rho,z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}R_k(\rho)\cdot Z_k(z)$; для сходимости ряда необходимо $\lim\limits_{k\to\infty}R_k(\rho)=0.$

Такой ряд по собственным функциям эрмитова оператора сходится абсолютно и равномерно в прямоугольнике $\{0\le\rho\le r,\ 0\le z\le H\}$ и там его можно дважды дифференцировать по каждой переменной ρ и z.

4) Вывод дифференциального уравнения для функции $R_k(\rho)$.

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right)-\frac{n^2}{\rho^2}\upsilon+\frac{\partial^2\upsilon}{\partial z^2}=\sum_k\left\{\left[\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR_k}{d\rho}\right)-\frac{n^2}{\rho^2}R_k\right]\cdot Z_k+R_kZ_k''\right\}=$$

$$=\sum_k\left\{\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR_k}{d\rho}\right)-\left(\mu_k^2+\frac{n^2}{\rho^2}\right)R_k\right\}Z_k=$$

$$=F(\rho,z)\equiv A\left(\frac{\rho}{r}\right)^2=\sum_k\gamma_k(\rho)Z_k(z).$$

Коэффициент Фурье $\gamma_k(\rho)$ определим с помощью скалярного произведения (интеграла)

$$\gamma_k(\rho)=\left(A\left(\frac{\rho}{r}\right)^2,Z_k\right)=A\cdot\int_0^H\left(\frac{\rho}{r}\right)^2\cdot\bar{Z}_k(z)dz=A\left(\frac{\rho}{r}\right)^2\sqrt{\frac{2}{H}}\cdot\int_0^H\cos\mu_k z\cdot dz=$$

$$=A\sqrt{\frac{2}{H}}\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^2\cdot\frac{(-1)^k}{\mu_k}.$$

Приравняв коэффициенты разложений Фурье в обеих частях равенства при одинаковых базисных ортах Z_k, получим

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\,R_k}{d\rho}\right)+\left(\left(i\mu_k\right)^2-\frac{n^2}{\rho^2}\right)R_k\left(\rho\right)=\gamma\left(\rho\right)\equiv A\sqrt{\frac{2}{H}}\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^2\frac{\left(-1\right)^k}{\mu_k}\neq 0 \; -$$

неоднородное модифицированное уравнение Бесселя.

5. Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения для функции $R_k\left(\rho\right)$.

Общее решение соответствующего однородного уравнения Бесселя будет

$$\overset{\circ}{R}_k\left(\rho\right)=C_k\cdot I_n\left(\mu_k\rho\right)+\tilde{C}_k\cdot K_n\left(\mu_k\rho\right);\qquad C_k,\tilde{C}_k=const.$$

Здесь $I_n\left(x\right)$и $K_n\left(x\right)$ – модифицированные функции Бесселя порядка n.

Так как неоднородность нашего линейного уравнения является второй степенью переменной ρ, то частное решение нужно искать в виде многочлена той же степени

$$\tilde{R}_k\left(\rho\right)=M_2\rho^2+M_1\rho+M_0;\qquad M_2,M_1,M_0=const.$$

Подставим функцию $\tilde{R}_k\left(\rho\right)$ в неоднородное дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\,\tilde{R}_k}{d\rho}\right)-\left(\mu_k^2+\frac{n^2}{\rho^2}\right)\tilde{R}_k=-\mu_k^2M_2\rho^2-\mu_kM_1\rho-\mu_k^2M_0-n^2M_2+4M_2+$$

$$+M_1\left(1-n^2\right)\Big/\rho-n^2M_0\Big/\rho^2=\rho^2\cdot A\sqrt{\frac{2}{H}}\cdot\frac{\left(-1\right)^{k+1}}{\mu_k^3}\neq 0$$

и сравним коэффициенты при одинаковых степенях ρ, тогда получим алгебраическую систему уравнений для определения постоянных M_2,M_1 и M_0:

$$\begin{array}{l|l}
\rho^2 & \left\{\begin{array}{l}
-\mu_k^2M_2=A\sqrt{\dfrac{2}{H}}\dfrac{\left(-1\right)^k}{\mu_k}\Rightarrow M_2=A\sqrt{\dfrac{2}{H}}\dfrac{\left(-1\right)^{k+1}}{\mu_k^3}\neq 0.\\
-\mu_kM_1=0.\\
4M_2-\mu_k^2M_0-n^2M_2=0\Rightarrow M_2\cdot\left(n^2-4\right)=0\Rightarrow n=2.\\
\left(1-n^2\right)M_1=0.\\
-n^2M_0=0.\qquad\qquad M_0=M_1=0;\quad n\neq 0\vee 1.
\end{array}\right.\\
\rho & \\
1 & \\
1/\rho & \\
1/\rho^2 &
\end{array}$$

Учитывая значения найденных величин $M_2 \neq 0$ и $M_1 = M_0 = 0$, получим частное решение уравнения $\tilde{R}_k(\rho) = A\rho^2 \sqrt{\frac{2}{H}} \frac{(-1)^{k+1}}{\mu_k^3}$. Кроме того, становится очевидным, что нетривиальное решение задачи при заданной неоднородности уравнения возможно только для индекса $n = 2$.

Общее решение неоднородного уравнения Бесселя теперь получим

$$R_k(\rho) = \overset{\circ}{R}_k(\rho) + \tilde{R}_k(\rho) = C_k \cdot I_2(\mu_k \rho) + \tilde{C}_k \cdot K_2(\mu_k \rho) - A\rho^2 \sqrt{\frac{2}{H}} \frac{(-1)^k}{\mu_k^3},$$

а функцию $\upsilon(\rho, z)$ запишем в виде

$$\upsilon(\rho, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ C_k \cdot I_2(\mu_k \rho) + \tilde{C}_k \cdot K_2(\mu_k \rho) - A\rho^2 \sqrt{\frac{2}{H}} \frac{(-1)^k}{\mu_k^3} \right\} \cdot Z_k(z).$$

Неизвестные постоянные C_k и $\tilde{C}_k$ находятся из граничных условий.

6. Определение постоянных C_k и $\tilde{C}_k$ для функции $\upsilon(\rho, z)$.

Сначала, учитывая ограниченность значения функции $\upsilon(0, z)$, запишем $\left|\upsilon(0,z)\right| \leq \sum\limits_k \left| C_k \cdot I_2(0) + \tilde{C}_k \cdot K_2(0) - 0 \right| \cdot \left| Z_k(z) \right| \leq \infty$; так как здесь $I_2(0) = 0$ и $K_2(0) = \infty$, то для ограниченности величины $\upsilon(0, z)$ требуется положить $\tilde{C}_k = 0$. Тогда значение функции $\upsilon(\rho, z)$ упростится

$$\upsilon(\rho, z) = \sum_k \left\{ C_k \cdot I_2(\mu_k \rho) - A\rho^2 \sqrt{\frac{2}{H}} \cdot \frac{(-1)^k}{\mu_k^3} \right\} \cdot Z_k(z).$$

Из второго граничного условия при $\rho = r$ получим

$$\upsilon(r, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ C_k I_2(\mu_k r) - Ar^2 \sqrt{\frac{2}{H}} \cdot \frac{(-1)^k}{\mu_k^3} \right\} Z_k(z) = Bz = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\gamma}_k Z_k(z),$$

$\tilde{\gamma}_k = const$, где

$$\tilde{\gamma}_k = \left(Bz, Z_k\right) = \int_0^H Bz \cdot \overline{Z}_k\left(z\right) dz = B\sqrt{\frac{2}{H}} \cdot \int_0^H \cos \mu_k z \cdot z dz =$$

$$= \frac{B}{\mu_k}\sqrt{\frac{2}{H}} \cdot \left\{ z \cdot \sin \mu_k z - \frac{\cos \mu_k z}{-\mu_k} \right\}\Bigg|_0^H = \frac{B}{\mu_k^2}\sqrt{\frac{2}{H}} \cdot \left(\left(-1\right)^k \cdot \mu_k H - 1\right).$$

Отсюда постоянная C_k оказывается равной

$$C_k = \left\{ \frac{B}{\mu_k^2}\sqrt{\frac{2}{H}} \cdot \left(\left(-1\right)^k \cdot \mu_k H - 1\right) + Ar^2\sqrt{\frac{2}{H}} \cdot \frac{\left(-1\right)^k}{\mu_k^3} \right\} \Big/ I_2\left(\mu_k r\right).$$

7. Окончательный вид решения задачи.

$$u\left(\rho, \varphi, z\right) = \frac{2}{H} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left[\frac{Ar^2}{\mu_k} + B \cdot \left(\mu_k H - \left(-1\right)^k\right) \right] \cdot \frac{I_2\left(\mu_k \rho\right)}{I_2\left(\mu_k r\right)} - \right.$$

$$\left. - \frac{A\rho^2}{\mu_k} \right\} \cdot \frac{\left(-1\right)^k}{\mu_k^2} \cdot \cos \mu_k z \cdot \sin 2\varphi; \qquad \mu_k = \frac{\pi}{2H}\left(2k+1\right) > 0.$$

Ряд сходится абсолютно и равномерно, и его общий член имеет порядок не менее $O\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$ при $k \to \infty$.

8. Проверка ответа по условиям задачи и по размерностям.

$$u\left(0, \varphi, z\right) = \frac{2}{H} \cdot \sum_k \left\{ [\ldots] \cdot \frac{I_2\left(0\right)}{I_2\left(\mu_k r\right)} - 0 \right\} \cdot \ldots = 0 \because I_2\left(0\right) = 0;$$

$$u\left(r, \varphi, z\right) = \frac{2}{H}\sum_k \left\{ \left[B \cdot \left(\mu_k H - \left(-1\right)^k\right) + \frac{Ar^2}{\mu_k} \right] \cdot 1 - \frac{Ar^2}{\mu_k} \right\} \cdot \frac{\left(-1\right)^k}{\mu_k^2} \cos \mu_k z \cdot \sin 2\varphi =$$

$$= \frac{2B}{H} \cdot \sum_k \left(\mu_k H \cdot \left(-1\right)^k - 1\right) \frac{\cos \mu_k z}{\mu_k^2} \sin 2\varphi = Bz \cdot \sin 2\varphi \because$$

$$\because \sum_{k=0}^{\infty} \left(\mu_k H \cdot \left(-1\right)^k - 1\right) \frac{\cos \mu_k z}{\mu_k^2} = \frac{1}{2} Hz.$$

$$u'_z\left(\rho, \varphi, 0\right) = 0 \because \left(\cos \mu_k z\right)' \Big|_{z=0} = 0; \qquad u\left(\rho, \varphi, H\right) = 0 \because \cos \mu_k H = 0.$$

Размерности различных величин найдем: из определения $\left[\mu_k\right] = \dfrac{1}{L}$ и $\left[\mu_k \cdot \rho, \quad \mu_k r, \quad \mu_k z\right] = 1$; из формул $\left[B\right] = \left[u\right] / L$ и $\left[A\right] = [u] / L^4$. Тогда размерности выполняются $\left[u\right] = \dfrac{1}{L}\left\{\left[\dfrac{\left[u\right]}{L} \cdot 1 + \dfrac{\left[u\right]}{L^4} \cdot L^2 \cdot L\right] \cdot 1 + \dfrac{\left[u\right]}{L^4} \cdot L^3\right\} \cdot L^2 \Rightarrow \left[u\right]$.

<u>**Задача 2.21.**</u> Решение симметричной стационарной задачи для уравнения Лапласа внутри отрезка цилиндра со смешанными граничными условиями, где по радиусу заданы условия Неймана.

$$\begin{cases} \Delta_3 u \equiv \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \dfrac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. & u = u\left(\rho, z\right). \\ \left|u\left(0, z\right)\right| < \infty, \quad u'_\rho\left(r, z\right) = 0; & 0 \le \rho \le r, \quad 0 \le \rho \le H. \\ u\left(\rho, 0\right) = 0, \quad u\left(\rho, H\right) = f\left(\rho\right). & \end{cases}$$

В симметричном случае нет зависимости от угла φ.

1–2. Разделение переменных и решение краевой задачи.

Пусть $u\left(\rho, z\right) = R\left(\rho\right) \cdot Z\left(z\right)$, где функцию $R\left(\rho\right)$ будем искать как решение в гильбертовом пространстве $L_2\left(0, r \middle| \rho\right)$ второй краевой задачи для оператора Бесселя

$$\begin{cases} \hat{D}_Б R \equiv \dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho \dfrac{d\,R}{d\rho}\right) + \left(\mu^2 - \dfrac{0^2}{\rho^2}\right) R\left(\rho\right) = \lambda R \equiv -\mu^2 R\left(\rho\right). \\ \left|R\left(0\right)\right| < \infty, \quad R'\left(r\right) = 0; \quad n = 0. \end{cases}$$

Получим собственные функции (ортонормированный базис) $\Re_k\left(\rho\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{r} \cdot \dfrac{J_0\left(\mu_k \rho\right)}{J_0\left(\mu_k r\right)} = \dfrac{\sqrt{2}}{r} \cdot \dfrac{J_0\left(\alpha_k^{(1)} \dfrac{\rho}{r}\right)}{J_0\left(\alpha_k^{(1)}\right)}$ и собственные значения (дискретный спектр) $\lambda_k = -\mu_k^2 = -\left(\alpha_k^{(1)} / r\right)^2 \le 0$. Здесь параметр $\mu_k = \alpha_k^{(1)} / r \ge 0$, где $\alpha_k^{(1)}$ – корни дисперсионного уравнения $J_1(\alpha) = -J_0'(\alpha) = 0$. Значения корней только возрастают $0 \le \alpha_k^{(1)} < \alpha_{k+1}^{(1)} < \dots$, причем $J_m\left(\alpha_k^{(1)}\right) \ne 0$ при $m \ne 1$.

Тогда разложение искомой функции в ряд Фурье–Бесселя по базису $R_k(\rho)$ имеет вид $u(\rho, z) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(z) \cdot R_k(\rho)$; для сходимости ряда необходимо $\lim_{k\to\infty} Z_k(z) = 0$ для коэффициента разложения (координаты).

Легко проверить, что $J_0(0) = 1$, поэтому рациональнее записывать разложение в ряд в виде

$$u(\rho, z) = Z_0(z) \cdot R_0(\rho) + \sum_{k=1}^{\infty} Z_k(z) R_k(\rho),$$

где $R_0(\rho) = \dfrac{\sqrt{2}}{r} = const > 0$, а значения коэффициентов $Z_0(z)$ и $Z_k(z)$ нужно определить.

3. Вывод дифференциального уравнения для функции $Z_k(z)$.

$$\Delta_3 u \equiv \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\left[\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR_k}{\partial\rho}\right)\right]\cdot Z_k + R_k Z_k''\right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left\{Z_k'' - \mu_k^2 \cdot Z_k(z)\right\} \cdot R_k(\rho) = Z_0'' \cdot R_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{Z_k'' - \mu_k^2 \cdot Z_k\right\} \cdot R_k = 0.$$

Координаты нулевого 0-вектора в любом базисе равны нулю:

$$Z_0''(z) = 0, \qquad Z_k'' - \mu_k^2 \cdot Z_k(z) = 0 \text{ при } k \ge 1.$$

4. Решение уравнений для функции $Z_0(z)$ и $Z_k(z)$.

$$Z_0(z) = C_0 z + \tilde{C}_0; \qquad C_0, \tilde{C}_0 = const.$$

Решение второго уравнения при $k \ge 1$ запишем так, чтобы на каждом из концов отрезка $0 \le z \le H$ одно из слагаемых обращалось в нуль, тогда

$$Z_k(z) = C_k \cdot \mathrm{sh}\mu_k z + \tilde{C}_k \cdot \mathrm{sh}\mu_k(H - z); \qquad C_k, \tilde{C}_k = const.$$

Решения, записанные в такой форме, всегда образуют линейно независимую пару; ее вронскиан $W\left(\mathrm{sh}\mu_{\mathrm{k}} z, \mathrm{sh}\mu_{\mathrm{k}}\left(H-z\right)\right)=-\mu_k \mathrm{sh}\mu_{\mathrm{k}} H \neq 0.$

Теперь решение задачи нужно искать в виде

$$u\left(\rho, z\right)=\left(C_0 z+\tilde{C}_0\right) R_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{C_k \cdot \mathrm{sh}\mu_k z+\tilde{C}_k \cdot \mathrm{sh}\mu_k\left(H-z\right)\right\} R_k\left(\rho\right).$$

5. Определение постоянных C_k и $\tilde{C}_k$ при $k \in \mathbb{Z}_0=\{0,1,2,3,\ldots\}$ из граничных условий по z.

$$u\left(\rho, 0\right)=\tilde{C}_0 \cdot R_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{0+\tilde{C}_k \cdot \mathrm{sh}\mu_k H\right\} \cdot R_k\left(\rho\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{C}_0=\tilde{C}_k=0 \text{ – как координаты при разложении нуля.}$$

$$u\left(\rho, H\right)=C_0 H \cdot R_0+\sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \mathrm{sh}\mu_k H \cdot R_k\left(\rho\right)=f\left(\rho\right) \quad \Big| \cdot R_0 \quad \Big| \cdot R_k\left(\rho\right).$$

После умножения скалярно на R_0 получим

$$C_0 H=\left(f, R_0\right)=\int_0^r f\left(\rho'\right) \cdot \bar{R}_0\left(\rho'\right) \cdot \rho' d\rho'=\frac{\sqrt{2}}{r} \int_0^r f\left(\rho'\right) \rho' d\rho',$$

а после умножения на $R_{k'}\left(\rho\right)$ получим

$$C_k \mathrm{sh}\mu_k H=\left(f, R_k\right)=\int_0^r f\left(\rho'\right) \cdot \bar{R}_k\left(\rho'\right) \cdot \rho' d\rho'=\frac{\sqrt{2}}{r} \int_0^r f\left(\rho'\right) \cdot \frac{J_0\left(\alpha_k^{(1)} \frac{\rho'}{r}\right)}{J_0\left(\alpha_k^{(1)}\right)} \cdot \rho' d\rho'.$$

Здесь везде опущен штрих над индексом. Отсюда искомые постоянные C_0 и C_k находятся в виде

$$C_0=\frac{\sqrt{2}}{rH} \cdot \int_0^r f\left(\rho'\right) \cdot \rho' d\rho', \quad C_k=\frac{\sqrt{2}}{r \cdot \mathrm{sh}\mu_k H} \int_0^r f\left(\rho'\right) \cdot \frac{J_n\left(\alpha_k^{(1)} \frac{\rho'}{r}\right)}{J_n\left(\alpha_k^{(1)}\right)} \cdot \rho' d\rho'.$$

6. Окончательный вид решения задачи.

$$u(\rho,z)=\frac{2}{r^2}\left\{\frac{z}{H}\cdot\int_0^r f(\rho')\cdot\rho' d\rho'+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^r f(\rho')\cdot J_0(\mu_k\rho')\rho' d\rho'\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\mathrm{sh}\mu_k z}{\mathrm{sh}\mu_k r}\cdot\frac{J_0(\mu_k\rho)}{J_0^2(\mu_k r)}\right\}=$$

$$=\frac{2}{r^2}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_0^r f(\rho')\frac{J_0(\mu_k\rho')}{J_0(\mu_k r)}\rho' d\rho'\right)\cdot\frac{\mathrm{sh}\mu_k z}{\mathrm{sh}\mu_k H}\cdot\frac{J_0(\mu_k\rho)}{J_0(\mu_k r)}=$$

$$=\int_0^r f(\rho')\cdot\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}\mu_k z}{\mathrm{sh}\mu_k H}\cdot R_k(\rho)\overline{R}_k(\rho')\right\}\cdot\rho' d\rho'=\int_0^r f(\rho')\cdot G(\rho,z;\rho')\cdot\rho' d\rho'.$$

Здесь функция Грина (источника) равна

$$G(\rho,z;\rho')=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}\mu_k z}{\mathrm{sh}\mu_k r}\cdot R_k(\rho)\overline{R}_k(\rho')=\frac{2}{r^2}\cdot\frac{z}{H}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}\mu_k z}{\mathrm{sh}\mu_k H}\cdot R_k(\rho)\overline{R}_k(\rho')=$$

$$=\frac{2}{r^2}\cdot\left\{\frac{z}{H}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}\mu_k z}{\mathrm{sh}\mu_k H}\cdot\frac{J_0(\mu_k\rho)\cdot J_0(\mu_k\rho')}{J_0^2(\mu_k r)}\right\},$$

где $\mu_0=0$ и $\mu_k=\alpha_k^{(1)}/r>0$ при $k\in\mathbb{N}$; поэтому $R_0(\rho)=\dfrac{\sqrt{2}}{r}=const$ и $R_k(\rho)=\dfrac{\sqrt{2}}{r}\cdot\dfrac{J_0(\mu_k\rho)}{J_0(\mu_k r)}$ – собственные функции задачи.

Здесь координаты: ρ – точки измерения, ρ' – точки источника; здесь обязательна инверсия точек ρ и ρ' в функции Грина $G(\rho,z|\rho')=G(\rho',z|\rho)$. Так как $\alpha_k^{(1)}\sim k$ при $k\to\infty$, то ряд сходится экспоненциально как $\sim e^{-\frac{\alpha_k^{(1)}}{r}(H-z)}$. Результаты интегрирования всегда дают дополнительный множитель μ_k в знаменателе, что значительно улучшает сходимость ряда. Разложение в ряд функции $u(\rho,z)$ сходится абсолютно и равномерно.

7. Проверка решения по условиям задачи и по размерностям.

$$\left|u(0,z)\right|<\infty \because R_k(0)=0 \quad \text{при } k\in N.$$

$$u'_\rho(r,z)=0\because \frac{\partial}{\partial\rho}J_0(\mu_k\rho)\bigg|_{\rho=r}=-\mu_k\cdot J_1\left(\alpha_k^{(1)}\right)=0.$$

$$u(\rho,0)=0\because \mathrm{sh}0=0.$$

$$u(\rho,H)=\int_0^r f(\rho')\cdot\left\{\sum_{k=0}^{\infty}R_k(\rho)\bar{R}_k(\rho')\right\}\cdot\rho' d\rho'=$$

$$=f(\rho)\because \sum_{k=0}^{\infty}R_k(\rho)\bar{R}_k(\rho')=\delta(\rho'-\rho)/\rho'.$$

Размерности величин: $[\mu_k r]=\left[\alpha\dfrac{\rho}{r}\right]=1$, $[\mu_k z]=\left[\alpha\dfrac{z}{r}\right]=1$; $[u]=[f]$, $\left[\int_0^r f\cdot R_k\cdot\rho d\rho\right]=[u]\cdot\dfrac{1}{L}L^2=[u]\cdot L$, $[G]=\left[\dfrac{2}{r^2}\{...\}\right]=\dfrac{1}{L^2}\cdot 1=\dfrac{1}{L^2}$; поэтому $\left[u(\rho,z)\right]=[f]\cdot[G]\cdot L^2=[u]\cdot\dfrac{1}{L^2}L^2\Rightarrow[u]$.

8. Расширенная постановка задачи для несимметричного случая (явная зависимость от угла φ).

В постановке нашей задачи добавим еще зависимость от угла φ и неоднородное граничное условие теперь равно $u(\rho,\varphi,H)=f(\rho)\cdot\cos n\varphi.$ Такую задачу легко упростить, отделив зависимость от угла по формуле $u(\rho,\varphi,z)=\upsilon(\rho,z)\cdot\cos n\varphi \ (n\in N)$. Новую функцию $\upsilon(\rho,z)$ можно разложить в ряд Фурье–Бесселя $\upsilon(\rho,z)=\sum_k Z_k(z)\cdot R_k(\rho)$, где орты разложения $R_k(\rho)$ находятся из задачи Штурма–Лиувилля с граничными условиями Неймана.

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{dR}{d\rho}\right)+\left(\mu^2-\dfrac{n^2}{\rho^2}\right)R(\rho)=0. & 0\le\rho\le r.\\ \left|R(0)\right|<\infty,\qquad R'(r)=0. & n\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

Решение этой краевой задачи известно:

$$\Re_k(\rho) = \frac{\sqrt{2}}{r}\left(1 - \frac{n^2}{\mu_k^2 r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{J_n(\mu_k \rho)}{J_n(\mu_k r)}$$

– базисные орты при разложении в ряд в гильбертовом пространстве $L_2(0, r \mid \rho)$. Здесь $\lambda_k = -\mu_k^2 = -\left(\beta_k^{(n)}/r\right)^2 < 0$ – спектр собственных значений краевой задачи, где множество $0 < \beta_k^{(n)} < \beta_{k+1}^{(n)} < \ldots$ – простые корни дисперсионного уравнения $J_n'(\beta) = 0$ при $k \in \mathbb{N}$. Отметим, что $\Re_n(0) = 0$ имеет n-кратный корень и $J_{n+1}'\left(\beta_k^{(n)}\right) \neq 0$.

Подставив разложение функции $\upsilon(\rho, z)$ в уравнение задачи, получим

$$\Delta_3 \upsilon = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d\Re_k}{d\rho} \right) - \frac{n^2}{\rho^2} \Re_k \right] \cdot Z_k + \Re_k Z_k'' \right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ Z_k'' - \mu_k^2 Z_k(z) \right\} \Re_k(\rho) = 0;$$

откуда найдем уравнение, решение которого удобно записать в виде

$$Z_k(z) = C_k \cdot \mathrm{sh}\mu_k z + \tilde{C}_k \cdot \mathrm{sh}\mu_k (H - z), \quad C_k, \tilde{C}_k = const.$$

Теперь разложение искомой функции $\upsilon(\rho, z)$ можно записать в явном виде

$$\upsilon(\rho, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ C_k \cdot \mathrm{sh}\mu_k z + \tilde{C}_k \cdot \mathrm{sh}\mu_k (H - z) \right\} \cdot \Re_k(\rho),$$

где коэффициенты C_k и $\tilde{C}_k$ находятся из граничных условий по переменной z; получим

$$\upsilon(\rho, 0) = 0 \Rightarrow \tilde{C}_k = 0, \quad \upsilon(\rho, H) = f(\rho) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_k \cdot \mathrm{sh}\mu_k H = (f, \Re_k) = \int_0^r f(\rho') \cdot \overline{\Re}(\rho') \rho' d\rho' \neq 0;$$

$$C_k = \frac{\sqrt{2}}{r}\left(1-\frac{n^2}{\mu_k^2 r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_0^r f(\rho')\frac{J_n(\mu_k\rho')}{J_n(\mu_k r)}\rho' d\rho' \Big/ \mathrm{sh}\mu_k H .$$

Общее решение задачи тогда запишем в виде

$$u(\rho,\varphi,z) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^r f(\rho')\cdot\overline{\Re}_k(\rho')\rho' d\rho'\right)\frac{\mathrm{sh}\mu_k z}{\mathrm{sh}\mu_k H}\cdot\Re_k(\rho)\cdot\cos n\varphi =$$

$$= \int_0^r f(\rho')\cdot G(\rho,z\,|\,\rho')\rho' d\rho'\cdot\cos n\varphi.$$

где функция Грина (источника) равна

$$G(\rho,z\,|\,\rho') = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{r^2-n^2/\mu_k^2}\cdot\frac{\mathrm{sh}\mu_\mathrm{k} z}{\mathrm{sh}\mu_\mathrm{k} H}\cdot\frac{J_n(\mu_\mathrm{k}\rho)\cdot J_n(\mu_\mathrm{k}\rho')}{J_k^2(\mu_\mathrm{k} r)}.$$

Исследования о сходимости ряда, а также проверки решения по условиям задачи и по размерностям совпадают с результатами, полученными выше для случая $n = 0$.

<u>**Задача 2.22.**</u> Два варианта упрощенного решения смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа внутри отрезка цилиндра.

$$\begin{cases}\Delta_3 u(\rho,\varphi,z) = 0. \\ u|_{\rho=r} = 0, \quad u|_{z=0} = 0, \quad u'_z|_{z=H} = A\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^2\cdot\cos 2\varphi.\end{cases} \qquad \begin{array}{l} u = u(\rho,\varphi,z). \\ 0\le\rho\le r, \quad 0\le z\le H, \\ 0\le\varphi<2\pi.\end{array}$$

Естественные граничные условия при $\rho = 0$ и по φ явно не записаны

$$\Delta_3 = \Delta_2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

1. Отделение зависимости от угла φ по формуле

$u(\rho,\varphi,z) = \upsilon(\rho,z)\cdot\cos 2\varphi.$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right)-\dfrac{4}{\rho^2}\upsilon+\dfrac{\partial^2\upsilon}{\partial z^2}=0. \\ \left|\upsilon(0,z)\right|<\infty, \qquad \upsilon(r,z)=0; \\ \upsilon(\rho,0)=0, \qquad \upsilon'_z(\rho,H)\equiv f(\rho)=A\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^2. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \upsilon=\upsilon(\rho,z). \\ 0\le\rho\le r,\quad 0\le z\le H. \\ A,r,H=const>0. \end{array}$$

2. Разделение переменных $\upsilon(\rho,z)=R(\rho)\cdot Z(z)$ и решение краевой задачи по переменной ρ (там оба граничных условия однородны).

Поставим краевую задачу вида

$$\begin{cases} \hat{D}_Б=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{d}{d\rho}\right)-\dfrac{4}{\rho^2}. \\ \left|R(0)\right|<\infty, \qquad R(r)=0. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \hat{D}_Б R=\lambda R(\rho),\quad R(\rho)\neq 0. \\ \lambda=-\mu^2\le 0. \end{array}$$

Здесь ортонормированный базис $R_k(\rho)=\dfrac{\sqrt{2}}{r}\cdot\dfrac{J_2(\mu_k\rho)}{J_3(\mu_k r)}$ – собственные функции краевой задачи и $(R_k,R_{k'})=\delta_{kk'}$. Спектр $\lambda_k=-\mu_k^2=-\left(\alpha_k^{(2)}/r\right)^2<0$ – собственные значения задачи, где $\alpha_k^{(2)}>0$ – простые корни уравнения $J_2(\alpha)=0$, здесь $J_3\left(\alpha_k^{(2)}\right)\neq 0.$

Разложение искомой функции в ряд представим в виде $\upsilon(\rho,z)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}Z_k(z)\cdot R_k(\rho)$; здесь необходимо $\lim\limits_{k\to\infty}Z_k(z)=0.$

3. Вывод дифференциального уравнения для функции $Z_k(z)$.

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right)-\frac{4}{\rho^2}\upsilon+\frac{\partial^2\upsilon}{\partial z^2}=\sum_k\left\{\left[\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR_k}{d\rho}\right)-\frac{4}{\rho^2}R_k\right]\cdot Z_k+R_kZ_k''\right\}=$$

$$=\sum_k\left\{\hat{D}_Б R_k\cdot Z_k+R_k\cdot Z_k''\right\}=\sum_k\left\{Z_k''-\mu_k^2\cdot Z_k(z)\right\}R_k(\rho)=0\Rightarrow Z_k''-\mu_k^2Z_k(z)=0.$$

$$\upsilon(\rho,0)=\sum_k Z_k(0)\cdot R_k(\rho)=0\Rightarrow Z_k(0)=0,$$

$$\upsilon_z'(\rho,H)=\sum_k Z_k'(H)\cdot R_k(\rho)=f(\rho)=A\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^2\Rightarrow Z_k'(H)=(f,R_k)=$$

$$=A\cdot\int_0^r\left(\frac{\rho}{r}\right)^2\cdot\bar{R}_k(\rho)\cdot\rho\,d\rho=\left[\alpha_k^{(2)}\frac{\rho}{r}=\mu_k\rho=x,\qquad \rho\Big|_0^r\Rightarrow x\Big|_0^\alpha\right]=$$

$$=\frac{Ar\sqrt{2}}{\alpha^4\cdot J_3(\alpha)}\cdot\int_0^r J_2(x)\cdot x^3d\,x=\frac{Ar\sqrt{2}}{\alpha^4\cdot J_3(\alpha)}\cdot x^3J_3(x)\Big|_0^\alpha=\frac{Ar\sqrt{2}}{\alpha_k^{(2)}}=\frac{A\sqrt{2}}{\mu_k}>0.$$

Теперь можно записать краевую задачу для функции $Z_k(z)$.

$$\begin{cases}Z_k''-\mu_k^2\cdot Z_k(z)=0. & \\ Z_k(0)=0,\quad Z_k'(H)=\dfrac{A\sqrt{2}}{\mu_k}. & 0\le z\le H.\end{cases}$$

4. Решение краевой задачи для функции $Z_k(z)$.

Общее решение уравнения для функции $Z_k(z)$ удобно записать в виде

$$Z_k(z)=C_k\cdot\text{sh}\mu_k z+\tilde{C}_k\cdot\text{sh}\mu_k(H-z);\quad C_k,\tilde{C}_k=const.$$

$$Z_k(0)=0+\tilde{C}_k\cdot\text{sh}\mu_k H=0\Rightarrow\tilde{C}_k=0;$$

$$Z_k'(H)=C_k\cdot\mu_k\text{ch}\mu_k H+0=\frac{A\sqrt{2}}{\mu_k}\Rightarrow C_k=\frac{A\sqrt{2}}{\mu_k}\Big/\text{ch}\mu_k H.$$

Таким образом, функция $Z_k(z)$ равна

$$Z_k(z)=\frac{A\sqrt{2}}{\mu_k^2}\cdot\frac{\text{sh}\mu_k z}{\text{ch}\mu_k H}\ge 0\quad\text{при}\quad z\in[0,H]$$

и удовлетворяет необходимому условию $\lim\limits_{k\to\infty}Z_k(z)=0.$

5. Окончательный вид решения задачи и исследование сходимости его ряда.

$$u(\rho,\varphi,z) = \upsilon(\rho,z)\cdot\cos 2\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} Z_k(z)\cdot R_k(\rho)\cdot\cos 2\varphi =$$

$$= \frac{2A}{r}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}\mu_k z}{\mu_k^2\cdot\mathrm{ch}\mu_\mathrm{k} H}\cdot\frac{J_2(\mathrm{sh}\mu_\mathrm{k}\rho)}{J_3(\mathrm{sh}\mu_\mathrm{k} r)}\cdot\cos 2\varphi;\quad \mu_k = \alpha_k^{(2)}/r > 0.$$

Исследование сходимости ряда: примем $\left|J_2(\mu_k\rho)\right| \approx \left|J_2(\mu_k r)\right| \approx \dfrac{1}{\sqrt{k}}$

и $\mu_k \approx \alpha_k^{(2)} \approx k$ при $k >> 1$; тогда $\dfrac{\mathrm{sh}\mu_\mathrm{k} z}{\mu_k^2\cdot\mathrm{ch}\mu_\mathrm{k} H} \approx \dfrac{1}{k^2}e^{-k(H-z)}$, $k >> 1$.

Полученный ряд сходится абсолютно и равномерно (правильно).

6. Проверка выполнения условий задачи и совпадения размерностей.

$$u\big|_{\rho=0} = 0 < \infty \because J_2(0) = 0,\quad u\big|_{\rho=r} = 0 \because J_2(\mu_k r) = J_2\left(\alpha_k^{(2)}\right) = 0.$$

$$u\big|_{z=0} = 0 \because \mathrm{sh}\,0 = 0,\qquad u'_z\big|_{z=H} = \frac{2A}{r}\sum_k\frac{J_2(\mu_k\rho)}{\mu_k\cdot J_3(\mu_k r)}\cos 2\varphi =$$

$$= A\left(\frac{\rho}{r}\right)^2\cdot\cos 2\varphi \because \sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_2\left(\alpha_k^{(2)}x\right)}{\alpha_k^{(2)}J_3\left(\alpha_k^{(2)}\right)} = \frac{1}{2}x^2\quad \text{при } x\in[0,1].$$

Размерности по условиям $[u] = Q$, $[A] = Q/L$, $[\mu_k] = 1/L$, поэтому размерности в ответе $\left[u(\rho,z,\varphi)\right] \equiv Q = \left([A]/L\right)\cdot L^2 \Rightarrow Q.$

7. Решение задачи с помощью функции Грина.

$$\upsilon(\rho,z) = \sum_k Z_k(z)\cdot R_k(\rho) = \sum_k C_k\cdot\mathrm{sh}\mu_k z\cdot R_k(\rho).$$

$$\upsilon'_z(\rho,H) = \sum_k C_k\mu_k\cdot\mathrm{ch}\mu_k H\cdot R_k(\rho) = f(\rho) \Rightarrow C_k = (f,R_k)/\mu_k\mathrm{ch}\mu_k H.$$

$$\upsilon(\rho,z) = \sum_k (f,R_k)\frac{\mathrm{sh}\mu_\mathrm{k} z}{\mu_\mathrm{k}\cdot\mathrm{ch}\mu_\mathrm{k} H}R_k(\rho) =$$

$$= \sum_k\left(\int_0^r f(\rho')\overline{R}_k(\rho')\rho' d\rho'\right)\frac{\mathrm{sh}\mu_k z}{\mu_k\cdot\mathrm{ch}\mu_k H}\cdot R_k(\rho) =$$

$$=\int_0^r f(\rho')\cdot\left\{\sum_k \frac{\mathrm{sh}\mu_k z}{\mu_k\cdot\mathrm{ch}\mu_k H}\cdot R_k(\rho)R_k'(\rho')\right\}\cdot\rho' d\rho' = \int_0^r f(\rho')G(\rho,z\,|\,\rho')\cdot\rho' d\rho',$$

где $G(\rho,z\,|\,\rho')=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}\mu_k z}{\mu_k\cdot\mathrm{ch}\mu_k H}R_k(\rho)\overline{R}_k(\rho')$ – функция Грина, для ядра которой необходимо получим $\lim_{k\to\infty}\frac{\mathrm{sh}\mu_k z}{\mu_k\cdot\mathrm{ch}\mu_k H}=0.$

Решая задачу с использованием функции Грина, получим предыдущий ответ.

$$\upsilon(\rho,z)=A\int_0^r\left(\frac{\rho'}{r}\right)^2 G(\rho,z\,|\,\rho')\rho' d\rho' =$$

$$=\frac{2A}{r^2}\sum_k\frac{\mathrm{sh}\mu_k z}{\mu_k\mathrm{ch}\mu_k H}\cdot\int_0^r\left(\frac{\rho'}{r}\right)^2 J_2(\mu_k\rho')\rho' d\rho'\cdot\frac{J_2(\mu_k\rho)}{J_3^2(\mu_k r)}=$$

$$=\frac{2A}{r^2}\sum_k\frac{\mathrm{sh}\mu_k z}{\mu_k\cdot\mathrm{ch}\mu_k H}\cdot\frac{J_3(\mu_k r)}{\mu_k\cdot J_3^2(\mu_k r)}\cdot J_2(\mu_k\rho)=$$

$$=\frac{2A}{r^2}\sum_k\frac{\mathrm{sh}\mu_k z}{\mu_k^2\cdot\mathrm{ch}\mu_k H}\cdot\frac{J_2(\mu_k\rho)}{J_3(\mu_k r)};\qquad \mu_k=\alpha_k^{(2)}/r>0.$$

8. Другой способ решения задачи. Приведение к однородным граничных условий по z.

$$\upsilon(\rho,z)=w(\rho,z)+\alpha(\rho)\cdot z+\beta(\rho).$$

$$\upsilon(\rho,0)=w(\rho,0)+0+\beta(\rho)=0\Rightarrow\beta(\rho)=0.$$

$$\upsilon_z'(\rho,H)=w_z'(\rho,H)+\alpha(\rho)+0=A\left(\frac{\rho}{r}\right)^2\Rightarrow\alpha(\rho)=A\left(\frac{\rho}{r}\right)^2>0.$$

$$\upsilon(\rho,z)=w(\rho,z)+Az\left(\frac{\rho}{r}\right)^2 \text{ – замена искомой функции.}$$

$$\left|\upsilon(\rho,0)\right|=\left|w(\rho,0)+0\right|<\infty\Rightarrow\left|w(0,z)\right|<\infty.$$

$$\upsilon(r,z)=w(r,z)+Az=0\Rightarrow w(r,z)=-Az.$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right)-\frac{4}{\rho^2}\upsilon+\frac{\partial^2\upsilon}{\partial z^2}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial w}{\partial\rho}\right)-\frac{4}{\rho^2}w+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+$$

$$+Az\cdot\frac{4}{r^2}-\frac{4}{\rho^2}Az\left(\frac{\rho}{r}\right)^2+0=0.$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial w}{\partial\rho}\right)-\dfrac{4}{\rho^2}w+\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0.\\ \left|w(0,z)\right|<\infty,\;\; w(r,z)=f(z)\equiv -Az;\\ w(\rho,0)=0,\;\; w'_z(\rho,H)=0.\end{cases}\qquad \begin{array}{c} w=w(\rho,z).\\ 0\le\rho\le r,\quad 0\le z\le H.\end{array}$$

$$u(\rho,\varphi,z)=\left\{Az\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^2+w(\rho,z)\right\}\cdot\cos 2\varphi.$$

9. Разделение переменных $w(\rho,z)=R(\rho)\cdot Z(z)$ и решение краевой задачи по переменной z.

$$\begin{cases}\hat{D}_z=\dfrac{d^2}{dz^2}.\\ Z(0)=Z'(H)=0.\end{cases}\qquad \begin{array}{l}\hat{D}_z Z=Z''=\lambda Z=-\mu^2 Z(z).\\ Z''+\mu^2 Z(z)=0.\end{array}$$

Решение этой задачи известно:

$$Z_k(z)=\sqrt{\frac{2}{H}}\cdot\sin\mu_k z,\qquad \mu_k=\frac{\pi(2k+1)}{2H}>0,\qquad k\in\mathbb{Z}_0.$$

$$w(\rho,z)=\sum_{k=0}^{\infty}R_k(\rho)\cdot Z_k(z).$$

10. Вывод дифференциального уравнения для функции $R_k(\rho)$.

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial w}{\partial\rho}\right)-\frac{4}{\rho^2}w+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=\sum_k\left\{\left[\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR_k}{d\rho}\right)-\frac{4}{\rho^2}R_k\right]\cdot Z_k+R_k\hat{D}_z Z_k\right\}=$$

$$=\sum_k\left\{\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR_k}{d\rho}\right)-\left(\mu_k^2+\frac{4}{\rho^2}\right)R_k\right\}Z_k=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR_k}{d\rho}\right)-\left(\mu_k^2+\frac{4}{\rho^2}\right)R_k(\rho)=0.$$

$$\left|w(0,z)\right|=\left|\sum_k R_k(0)Z_k(z)\right|<\infty\Rightarrow\left|R_k(0)\right|<\infty.$$

$$w(r,z)=\sum_k R_k(r)\cdot Z_k(z)=f(z)\equiv -Az\Rightarrow R_k(r)=\left(-Az,Z_k\right)=$$

$$=-A\sqrt{\frac{2}{H}}\cdot\int_0^H\sin\mu_k z\cdot zdz=\frac{A}{\mu_k}\sqrt{\frac{2}{H}}\left\{z\cdot\cos\mu_k\Big|_0^H-\int_0^H\sin\mu_k z\cdot dz\right\}=$$

$$=-\frac{A}{\mu_k}\sqrt{\frac{2}{H}}\frac{\cos\mu_k z}{\mu_k}\Bigg|_0^H=-\frac{A}{\mu_k^2}\sqrt{\frac{2}{H}}\cdot\cos\pi k=\frac{A}{\mu_k^2}\sqrt{\frac{2}{H}}\cdot(-1)^{k+1}.$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{dR_k}{d\rho}\right)-\left(\mu_k^2+\dfrac{4}{\rho^2}\right)R_k(\rho)=0.\\ \left|R_k(0)\right|<\infty,\qquad R_k(r)=\dfrac{A}{\mu_k^2}\sqrt{\dfrac{2}{H}}\cdot(-1)^{k+1}.\end{cases}$$

11. Решение задачи для функции $R_k(\rho)$.

$$R_k(\rho)=C_k\cdot I_2(\mu_k\rho)+\tilde{C}_k\cdot K_2(\mu_k\rho).$$

$$\left|R_k(0)\right|<\infty\Rightarrow\tilde{C}_k=0\because I_k(0)=0\quad\text{и}\quad K_2(0)=\infty.$$

$$R_k(r)=C_kI_2(\mu_k r)=\frac{A}{\mu_k^2}\sqrt{\frac{2}{H}}\cdot(-1)^{k+1}\Rightarrow C_k=\frac{A}{\mu_k^2}\sqrt{\frac{2}{H}}\cdot\frac{(-1)^{k+1}}{I_2(\mu_k r)}.$$

$$R_k(\rho)=\frac{A}{\mu_k^2}\sqrt{\frac{2}{H}}\cdot(-1)^{k+1}\frac{I_2(\mu_k\rho)}{I_2(\mu_k r)}\quad\text{при}\quad\rho\in[0,r].$$

12. Окончательный вид второй формы решения задачи и его исследование.

$$u(\rho,\varphi,z)=\left\{Az\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^2+w(\rho,r)\right\}\cdot\cos 2\varphi=$$

$$=A\left\{z\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^2-\frac{2}{H}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\mu_k^2}\cdot\frac{I_2(\mu_k\rho)}{I_2(\mu_k r)}\sin\mu_k z\right\}\cdot\cos 2\varphi.$$

Так как получается асимптота $\dfrac{I_2(\mu_k\rho)}{I_2(\mu_k r)} \approx e^{-\mu_k(r-\rho)}$ при $k \to \infty$, то ряд сходится экспоненциально, что обеспечивает абсолютную и равномерную его сходимость.

13. Проверка выполнения условий задачи и размерностей для второй формы решения.

$$u\big|_{\rho=0} = 0 < \infty \because I_2(0) = 0,$$

$$u\big|_{\rho=r} = A\left\{z - \frac{2}{H}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\mu_k^2}\cdot\sin\mu_k z\right\}\cos 2\varphi = 0 \because$$

$$\because \frac{\pi^2 z}{8H} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cdot\sin\frac{\pi z}{2H}(2k+1) \quad \text{при} \quad z\in[0,H].$$

$$u\big|_{z=0} = 0 \because \sin 0 = 0.$$

$$u'_z\big|_{z=H} = A\left(\frac{\rho}{r}\right)^2\cos 2\varphi \because (\sin\mu_k z)'\Big|_{z=H} = \mu_k\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) = 0.$$

Проверим совпадение размерностей в ответе. Пусть $[u]\equiv Q$ и $[A] = Q/L$, тогда $[u] = [A]\cdot\left\{L\cdot 1 + \dfrac{1}{L}\cdot L^2\right\} \Rightarrow Q.$

14. Вывод функции Грина для решения задачи во второй форме.

$$w(\rho,z) = \sum_k R_k(\rho)\cdot Z_k(z) = \sum_k C_k\cdot I_2(\mu_k\rho)\cdot Z_k(z).$$

$$w(r,z) = \sum_k R_k(r)\cdot Z_k(z) = \sum_k C_k\cdot I_2(\mu_k r)\cdot Z_k(z) = f(z) \equiv -Az \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_k\cdot I_2(\mu_k r) = (f, Z_k) \quad \text{и} \quad C_k = (f, Z_k)/I_2(\mu_k r).$$

$$w(\rho,z) = \sum_k C_k\cdot I_2(\mu_k\rho)\cdot Z_k(z) = \sum_k (f, Z_k)\frac{I_2(\mu_k\rho)}{I_2(\mu_k r)}Z_k(z) =$$

$$= \sum_k\left(\int_0^H f(\varsigma)\cdot\bar{Z}_k(\varsigma)\,d\varsigma\right)\frac{I_2(\mu_k\rho)}{I_2(\mu_k r)}\cdot Z_k(z) =$$

$$= \int_0^H f(\zeta)\cdot\left(\sum_k \frac{I_2(\mu_k\rho)}{I_2(\mu_2 r)}\overline{Z}_k(\zeta)\cdot Z_k(z)\right)d\zeta = \int_0^H f(\zeta)\cdot G(\rho,z|\zeta)\,d\zeta,$$

где $G(\rho,z|\zeta)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{I_2(\mu_k\rho)}{I_2(\mu_k r)}\overline{Z}_k(\zeta)\cdot Z_k(z)$ – функция Грина, для ядра которой необходимо $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{I_2(\mu_k\rho)}{I_2(\mu_k r)}=0$.

Для случая нашей задачи $f(z)=-Az$, поэтому получим

$$w(\rho.z) = -A\cdot\int_0^H \zeta\cdot\left(\sum_k \frac{I_2(\mu_k\rho)}{I_2(\mu_k r)}\overline{Z}_k(\zeta)\cdot Z_k(z)\right)d\zeta =$$

$$= -\frac{2A}{H}\cdot\sum_k\left(\int_0^H \sin\mu_k\zeta\cdot\zeta\,d\zeta\right)\cdot\frac{I_2(\mu_k\rho)}{I_2(\mu_k r)}\cdot\sin\mu_k z =$$

$$= -\frac{2A}{H}\cdot\sum_{k=o}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\mu_k^2}\frac{I_2(\mu_k\rho)}{I_2(\mu_k r)}\sin\mu_k z,\quad \mu_k=\frac{\pi}{2H}(2k+1)>0.$$

Окончательный ответ $u(\rho,\varphi,z)=A\cdot\left\{z\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^2+w(\rho,z)\right\}\cdot\cos 2\varphi$ совпадает с полученным ранее.

Задача 2.23. Смешанная краевая задача для уравнения Лапласа внутри отрезка цилиндра (разложение по функциям Бесселя).

$$\begin{cases}\Delta_3 u(\rho,\varphi,z)=0. & u=u(\rho,\varphi,z).\\ u\big|_{\rho=r}=0;\quad u'_z\big|_{z=0}=0,\quad u\big|_{z=H}=A\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^n\cdot\cos n\varphi. & n\in\mathbb{Z}_0.\end{cases}$$

1. Отделение зависимости от угла $u(\rho,\varphi,z)=\upsilon(\rho,z)\cos n\varphi$.

$$\begin{cases}\widehat{D}_Б\upsilon+\upsilon''_{zz}\equiv\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right)-\dfrac{n^2}{\rho^2}\upsilon+\dfrac{\partial^2\upsilon}{\partial z^2}=0. & \upsilon=\upsilon(\rho,z).\\ |\upsilon(0,z)|<\infty,\quad \upsilon(r,z)=0; & 0\le\rho\le r,\quad 0\le z\le H.\\ \upsilon'_z(\rho,0)=0,\quad \upsilon(\rho,H)=f(\rho)\equiv A\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^n. & \widehat{D}_Б=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{d}{d\rho}\right)-\dfrac{n^2}{\rho^2}.\end{cases}$$

2–3. Разделение переменных $\upsilon(\rho,z)=R(\rho)\cdot Z(z)$ и решение краевой задачи по переменной ρ.

Поставим краевую задачу в виде

$$\begin{cases}\hat{D}_Б R \equiv \dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{dR}{d\rho}\right)-\dfrac{n^2}{\rho^2}R=\lambda R(\rho). \\ \left|R(0)\right|<\infty, \quad R(r)=0.\end{cases} \qquad \lambda=-\mu^2\le 0.$$

Решение этой краевой задачи известно: $R_k(\rho)=\dfrac{\sqrt{2}}{r}J_n\left(\alpha_k^{(n)}\dfrac{\rho}{r}\right)\Big/J_{n+1}\left(\alpha_k^{(n)}\right)$ – множество ортонормированных собственных функций, $\lambda_k=-\mu_k^2=-\left(\alpha_k^{(n)}/r\right)^2<0$ – спектр задачи (множество собственных чисел). Здесь $0<\alpha_k^{(n)}<\alpha_{k+1}^{(n)}<\ldots$ – простые корни характеристического уравнения $J_n(\alpha)=0$, где $J_{n+1}\left(\alpha_k^{(n)}\right)\ne 0$.

Разложение искомой функции $\upsilon(\rho,z)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}Z_k(z)\cdot R_k(\rho)$, где $(R_k,R_{k'})=\delta_{kk'}$ и $Z_k(z)$ – координаты разложения.

4–5. Вывод и решение дифференциального уравнения для функции $Z_k(z)$.

$$\hat{D}_Б\upsilon+\upsilon''_{zz}=\sum_k\left\{\hat{D}_Б R_k\cdot Z_k+R_k\cdot Z''_k\right\}=$$
$$=\sum_k\left\{Z''_k-\mu_k^2\cdot Z_k\right\}R_k=0\Rightarrow Z''_k-\mu_n^2\cdot Z_k(z)=0.$$

Отсюда решение $Z_k(z)=C_k\cdot ch\mu_k z+\tilde{C}_n\cdot sh\mu_k z;\quad C_k,\tilde{C}_k=const.$

6. Определение постоянных C_k и $\tilde{C}_k$ из граничных условий по z.

$$\upsilon(\rho,z)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{C_k\cdot ch\mu_k z+\tilde{C}_k\cdot sh\mu_k z\right\}\cdot R_k(\rho).$$

$$\upsilon'_z(\rho,0)=\sum_k\left\{0+\mu_k\tilde{C}_k\right\}R_k=0\Rightarrow\tilde{C}_k=0.$$

$$\upsilon(\rho,H)=\sum_k C_k\cdot ch\mu H\cdot R_k(\rho)=f(\rho)\equiv$$

$$\equiv A\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \Rightarrow C_k\cdot ch\mu_k H=(f,R_k)=\left(A\left(\frac{\rho}{r}\right)^n,R_k\right)=$$

$$=A\cdot\int_0^r\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\cdot\bar{R}_k(\rho)\cdot\rho\, d\rho=$$

$$=\frac{A\sqrt{2}}{r^{n+1}J_{n+1}(\alpha)}\int_0^r J_n\left(\alpha\frac{\rho}{r}\right)\cdot\rho^{n+1}d\rho=\left[\alpha_k^{(n)}\frac{\rho}{r}=\mu_k\rho=x;\quad \rho\Big|_0^r\Rightarrow x\Big|_0^\alpha\right]=$$

$$=\frac{Ar\sqrt{2}}{\alpha^{n+1}\cdot J_{n+1}(\alpha)}\int_0^\alpha J_n(x)\cdot x^{n+1}dx=$$

$$=\frac{Ar\sqrt{2}}{\alpha^{n+1}\cdot J_{n+1}(\alpha)}\cdot x^nJ_{n+1}(x)\Big|_0^\alpha=\frac{Ar\sqrt{2}}{\alpha_k^{(n)}}=\frac{A\sqrt{2}}{\mu_k}>0,$$

$$C_k=\frac{A\sqrt{2}}{\mu_k}\Big/ch\mu_k H>0.$$

7. Окончательный вид решения задачи и его проверка.

$$u(\rho,\varphi,z)=\upsilon(\rho,z)\cdot\cos n\varphi=\frac{2A}{r}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{ch\mu_k z}{\mu_k\cdot ch\mu_k H}\frac{J_n(\mu_k\rho)}{J_{n+1}(\mu_k r)}\cos n\varphi;$$

$$\mu_k=\alpha_k^{(n)}\big/r>0.$$

Ряд сходится правильно; порядок общего члена $O\left(\frac{1}{k}e^{-\mu_k(H-z)}\right)$ при $k\to\infty$.

$$u(0,\varphi,z)=0<\infty\because J_n(0)=0,\quad u(r,\varphi,z)=0\because J_n\left(\alpha_k^{(n)}\right)=0;$$

$$u_z'(\rho,\varphi,0)=0\because(ch\mu_k z)'\big|_{z=0}=\mu_k\cdot sh0=0,$$

$$u(\rho,\varphi,H)=2A\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_n\left(\alpha_k^{(n)}\cdot\rho/r\right)}{\alpha_k^{(n)}\cdot J_{n+1}\left(\alpha_k^{(n)}\right)}\cos n\varphi=A\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\cdot\cos n\varphi.$$

Размерности: $[u]=\frac{[A]}{L}L$ при $[A]=[u]$ и $[\mu_k]=1/L$.

8. Вывод функции Грина (источника).

$$\upsilon(\rho,z)=\sum_k C_k\cdot ch\mu_k z\cdot R_k(\rho)=\sum_k (f,R_k)\frac{ch\mu_k z}{ch\mu_k H}R_k(\rho)=$$

$$=\sum_k\left(\int_0^r f(\rho')\bar R_k(\rho')\rho' d\rho'\right)\cdot\frac{ch\mu_k z}{ch\mu_k H}R_k(\rho)=$$

$$=\int_0^r f(\rho')\left(\sum_k\frac{ch\mu_k z}{ch\mu_k H}\bar R_k(\rho')\cdot R_k(\rho)\right)\rho' d\rho'\equiv$$

$$\equiv\int_0^r f(\rho')\cdot G(\rho,z|\rho')\cdot\rho' d\rho'.$$

$G(\rho,z;\rho')=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{ch\mu_k z}{ch\mu_k H}\bar R_k(\rho')\cdot R_k(\rho)$ – функция Грина; для ее ядра получим $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{ch\mu_k z}{ch\mu_k H}=0$.

<u>Задача 2.24.</u> Смешанная краевая задача для уравнения Пуассона внутри отрезка цилиндра (тригонометрическое разложение для второй краевой задачи Неймана).

$$\begin{cases}\Delta_3 u(\rho,\varphi,z)=A\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^n\cdot\sin n\varphi.\\ u\Big|_{\rho=r}=B\cdot\sin n\varphi;\quad u'_z\Big|_{z=0}=u'_z\Big|_{z=H}=0.\end{cases}\qquad \begin{array}{l}u=u(\rho,\varphi,z).\\ 0\le\rho\le r,\ 0\le z\le H,\\ 0\le\varphi<2\pi,\quad n\in\mathbb{N}.\end{array}$$

1. Отделение зависимости от углов $u(\rho,\varphi,z)=\upsilon(\rho,z)\cdot\sin n\varphi.$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right)-\dfrac{n^2}{\rho^2}\upsilon+\dfrac{\partial^2\upsilon}{\partial z^2}=A\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^n.\\ \left|\upsilon(0,z,)\right|<\infty,\ \upsilon(r,z)=B;\\ \upsilon'_z(\rho,0)=\upsilon'_z(\rho,H)=0.\end{cases}\qquad \begin{array}{l}\upsilon=\upsilon(\rho,z).\\ 0\le\rho\le r,\quad 0\le z\le H.\end{array}$$

2–3. Разделение переменных $\upsilon(\rho,z)=R(\rho)\cdot Z(z)$ и решение краевой задачи по переменной z.

Граничные условия по z однородны, поэтому можно поставить вторую краевую задачу Неймана.

$$Z'' + \mu^2 \cdot Z(z) = 0 \quad \text{при } Z'(0) = Z'(H) = 0 \text{ и } \lambda = -\mu^2 \le 0.$$

Решение этой задачи известно: $Z_0(z) = \frac{1}{\sqrt{H}}$ и $Z_k(z) = \sqrt{\frac{2}{H}} \cdot \cos \mu_k z$ – собственные функции и $\lambda_k = -\mu_k^2 = -\left(\frac{\pi k}{H}\right)^2 \le 0$ – собственные значения краевой задачи при $k \in \mathbb{Z}_0$. Собственные функции взаимно ортогональны $(Z_k, Z_{k'}) = \delta_{kk'}$ в гильбертовом пространстве $L_2(0, H|1)$.

В нашем случае искомое решение удобно записать

$$\upsilon(\rho, z) = \sum_{k=0}^{\infty} R_k(\rho) \cdot Z_k(z) = R_0(\rho) \cdot Z_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} R_k(\rho) Z_k(z).$$

Такой ряд сходится абсолютно и равномерно; при этом необходимо $\lim\limits_{k\to\infty} R_k(\rho) = 0$.

4. Вывод двух различных дифференциальных уравнений для функций $R_0(\rho)$ и $R_k(\rho)$.

$$\Delta_3 \upsilon = \Delta(R_0 Z_0) + \sum_k^{\infty} \Delta(R_k Z_k) = \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dR_0}{d\rho} \right) - \frac{n^2}{\rho^2} R_0 \right\} Z_0 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{d R_k}{d\rho} \right) - \frac{n^2}{\rho^2} R_k - \mu_k^2 R_k(\rho) \right\} \cdot Z_k(z) =$$

$$= A\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \equiv A\sqrt{H} \cdot \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \cdot Z_0.$$

Расписав отдельно коэффициенты разложения при ортах $Z_0(z)$ и $Z_k(z)$ при $k \in \mathbb{N}$, получим два различных уравнения для функций $R_0(\rho)$ и $R_k(\rho)$.

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{d R_0}{d\rho} \right) - \frac{n^2}{\rho^2} R_0(\rho) = A\sqrt{H} \cdot \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho^2 R_0'' + \rho R_0' - n^2 R_0(\rho) = A\sqrt{H}\cdot\rho^2\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \neq 0.$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR_k}{d\rho}\right) - \left(\mu_k^2 + \frac{n^2}{\rho^2}\right)R_k(\rho) = 0.$$

5. Решение дифференциальных уравнений для функций $R_0(\rho)$ и $R_k(\rho)$.

Решение однородного модифицированного уравнения Бесселя для функций $R_k(\rho)$ известно.

$$R_k(\rho) = C_k\cdot I_n(\mu_k\rho) + \tilde{C}_k\cdot K_n(\mu_k\rho); \qquad C_k, \tilde{C}_k = const.$$

Здесь $I_n(x)$ – модифицированная функция Бесселя и $K_n(x)$ – модифицированная функция Ханкеля (функция Макдональда).

При решении неоднородного уравнения Эйлера для функции $R_0(\rho)$ зпишем сначала решение соответствующего однородного уравнения.

$$R_0(\rho) = C_0\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n + \tilde{C}_0\cdot\left(\frac{r}{\rho}\right)^n; \qquad C_0, \tilde{C}_0 = const.$$

Для определения частного решения неоднородного уравнения Эйлера, соответствующего заданной неоднородности, сделаем замену переменной $\rho = e^x$.

$$R_\rho' = \frac{dR}{d\rho} = \frac{dR}{dx}\frac{dx}{d\rho} = R_x'/\rho_x' = R_x'\cdot e^{-x},$$

$$R_{\rho\rho}'' = \frac{d}{d\rho}R_\rho' = \frac{d}{dx}\left(R_x'\cdot e^{-x}\right)\cdot\frac{dx}{d\rho} = \left(R_{xx}''e^{-x} - R_x'e^{-x}\right)e^{-x} = \left(R_{xx}'' - R_x'\right)e^{-2x}.$$

$$\rho^2 R_{\rho\rho}'' + \rho R_\rho' - n^2 R(\rho) = R_{xx}'' - n^2 R(x) = A\sqrt{H}\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\rho^2 = \frac{A\sqrt{H}}{r^n}e^{x(n+2)}.$$

Частное решение уравнения $R_{xx}'' - n^2 R(x) = \dfrac{A\sqrt{H}}{r^n}e^{x(n+2)}$ следует искать в виде $\tilde{R}(x) = M\cdot e^{x(n+2)}$, где $M = const$ подлежит определению.

$$\tilde{R}''_{xx} - n^2\tilde{R}(x) = M\left((n+2)^2 - n^2\right)e^{x(n+2)} = 4M(n+1)e^{x(n+2)} = \frac{A\sqrt{H}}{r^n}e^{x(n+2)}$$

$$\Rightarrow M = \frac{A\sqrt{H}}{4(n+1)r^n} > 0.$$

Тогда искомое частное решение уравнения

$$\tilde{R}(x) = \frac{A\sqrt{H}}{4(n+1)r^n}e^{x(n+2)} \qquad \text{или} \qquad \tilde{R}(\rho) = \frac{A\sqrt{H}}{4(n+1)}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \rho^2.$$

Таким образом, общее решение неоднородного линейного уравнения

$$R_0(\rho) = C_0 \cdot \left(\frac{\rho}{r}\right)^n + \tilde{C}_0 \cdot \left(\frac{r}{\rho}\right)^n + \frac{A\sqrt{H}}{4(n+1)}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \rho^2,$$

здесь $n \in \mathbb{N}$ и $C_0, \tilde{C}_0 = const.$

6. Определение из граничных условий по переменной ρ постоянных C_k и $\tilde{C}_k$ при $k \in \mathbb{Z}_0$.

$$\upsilon(\rho, z) = R_0(\rho)\cdot Z_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} R_k(\rho)\cdot Z_k(z) =$$

$$= \left\{C_0 \cdot \left(\frac{\rho}{r}\right)^n + \tilde{C}_0 \cdot \left(\frac{r}{\rho}\right)^n + \frac{A\sqrt{H}}{4(n+1)}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \cdot \rho^2\right\} \cdot Z_0(z) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\left\{C_k \cdot I_n(\mu_k\rho) + \tilde{C}_k \cdot K_n(\mu_k\rho)\right\} \cdot Z_k(z).$$

Сначала потребуем ограниченности функции $\upsilon(\rho, z)$ при $\rho = 0$:

$$\left|\upsilon(0, z)\right| < \infty \Rightarrow \upsilon(0, z) = \left\{0 + \tilde{C}_0 \cdot \left(\frac{r}{\rho}\right)^n + 0\right\}\Big|_{\rho=0} \cdot Z_0 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\left\{C_k \cdot I_n(0) + \tilde{C}_k \cdot K_n(0)\right\} \cdot Z_k(z) = 0 < \infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{C}_0 = \tilde{C}_k = 0 \because I_n(0) = 0 \quad \text{и} \quad K_n(0) = \infty \qquad \text{при } n \in \mathbb{N}.$$

Теперь выражение для функции $\upsilon(\rho,z)$ будет

$$\upsilon(\rho,z)=\left\{C_0\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n+\frac{A\sqrt{H}}{4(n+1)}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\cdot\rho^2\right\}Z_0+\sum_{k=1}^{\infty}C_k\cdot I_n(\mu_k\rho)\cdot Z_k(z).$$

Оставшиеся неизвестными постоянные C_0 и C_k легко определяются из граничного условия при $\rho=r$.

$$\upsilon(r,z)=\left\{C_0+\frac{A\sqrt{H}}{4(n+1)}r^2\right\}\cdot Z_0+\sum_{k=1}^{\infty}C_k\cdot I_n(\mu_k r)\cdot Z_k(z)=$$

$$=B=B\sqrt{H}\cdot Z_0\Rightarrow C_0+\frac{A\sqrt{H}}{4(n+1)}r^2=B\sqrt{H}\quad \text{и}\quad C_k=0;$$

$$C_0=\left(B-\frac{Ar^2}{4(n+1)}\right)\sqrt{H}=const.$$

7. Окончательный вид решения задачи.

$$\upsilon(\rho,z)=\left\{\left(B-\frac{Ar^2}{4(n+1)}\right)\sqrt{H}\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n+\frac{A\sqrt{H}}{4(n+1)}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\cdot\rho^2\right\}\cdot Z_0=$$

$$=\left\{B-\frac{A(r^2-\rho^2)}{4(n+1)}\right\}\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n;$$

тогда $u(\rho,\varphi,z)=\upsilon(\rho,z)\cdot\sin n\varphi.$

8. Проверка полученного решения по всем условиям задачи и по размерностям.

$$u(0,\varphi,z)=0,\qquad u(r,\varphi,z)=B\cdot\sin n\varphi;\qquad u'_z(\rho,\varphi,0)=u'_z(\rho,\varphi,H)=0.$$

Чтобы убедиться в том, что полученное решение задачи удовлетворяет уравнению, перепишем решение в виде

$$\upsilon(\rho,z)=\left(B-\frac{Ar^2}{4(n+1)}\right)\left(\frac{\rho}{r}\right)^n+\frac{A\rho^2}{4(n+1)}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n$$

и подставим это выражение в уравнение

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right)-\frac{n^2}{\rho^2}\upsilon+\frac{\partial^2\upsilon}{\partial z^2}=\frac{\partial^2\upsilon}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\upsilon}{\partial\rho}-\frac{n^2}{\rho^2}\upsilon+0=$$

$$=\left\{\left(B-\frac{Ar^2}{4(n+1)}\right)\frac{n(n-1)}{\rho^2}+A\frac{(n+2)(n+1)}{4(n+1)}+\left(B-\frac{Ar^2}{4(n+1)}\right)\frac{n}{\rho^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{A(n+2)}{4(n+1)}-\frac{n^2}{\rho^2}\left(B-\frac{Ar^2}{4(n+1)}\right)-\frac{An^2}{4(n+1)}\right\}\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n=$$

$$=\left\{B\frac{n}{\rho^2}(n-1+1-n)-\frac{Anr^2}{4(n+1)\rho^2}(n-1+1-n)+\right.$$

$$\left.+\frac{A}{4(n+1)}\left((n+2)(n+1)+n+2-n^2\right)\right\}\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n=$$

$$=\left\{B\cdot 0-A\cdot 0+\frac{A}{4(n+1)}\cdot 4(n+1)\right\}\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^2=A\left(\frac{\rho}{r}\right)^2.$$

Проверим совпадение размерностей в условиях задачи и в формуле решения: $\left[u(\rho,\varphi,z)\right]\equiv Q$, $[A]=Q/L^2$, $[B]=Q$; $[u]\equiv Q=\left\{[B]+[A]\cdot L^2\right\}\cdot 1^n\Rightarrow Q.$

<u>Задача 2.25.</u> Смешанная краевая задача для уравнения Лапласа внутри отрезка цилиндра (постановка краевой задачи Неймана по функциям Бесселя).

$$\begin{cases}\Delta_3 u(\rho,\varphi,z)=0. & u=u(\rho,\varphi,z).\\ u'_\rho\big|_{\rho=r}=0;\quad u\big|_{z=0}\ A\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^n\cos n\varphi,\quad u\big|_{z=H}=0. & 0\le\rho\le r,\ 0\le z\le H,\\ & 0\le\varphi<2\pi,\quad n\in\mathbb{Z}_0.\end{cases}$$

1. Отделение зависимости от угла $u(\rho,\varphi,z)=\upsilon(\rho,z)\cdot\cos n\varphi.$

$$\begin{cases}\widehat{D}_Б\upsilon+\upsilon''_{zz}\equiv\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right)-\dfrac{n^2}{\rho^2}\upsilon+\dfrac{\partial^2\upsilon}{\partial z^2}=0. & \upsilon=\upsilon(\rho,z).\\ \left|\upsilon(0,z)\right|<\infty,\quad \upsilon'_\rho(r,z)=0; & 0\le\rho\le r,\quad 0\le z\le H.\\ \upsilon(\rho,0)=A\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^n,\quad \upsilon(\rho,H)=0. & \widehat{D}_Б\equiv\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{d}{d\rho}\right)-\dfrac{n^2}{\rho^2}.\end{cases}$$

2–3. Разделение переменных $\upsilon(\rho,z)=\Re(\rho)\cdot Z(z)$ и решение краевой задачи.

Будем решать краевую задачу Неймана по переменной ρ, где оба граничных условия однородны:

$$\widehat{D}_Б\upsilon+\upsilon''_{zz}=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\widehat{D}_Б\Re_k(\rho)\cdot Z_k(z)+\Re_k(\rho)\cdot Z''_k(z)\right\}=$$
$$=\sum_k\left\{Z''_k-\mu_k^2\cdot Z_k(z)\right\}\Re_k(\rho)=0.$$

Здесь $\widehat{D}_Б\Re_k\equiv\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{d\Re_k}{d\rho}\right)-\dfrac{n^2}{\rho^2}\Re_k=\lambda_k\Re_k=-\mu_k^2\Re_k(\rho)$ при $\left|\Re_k(0)\right|<\infty$ и $\Re'_k(r)=0$. Это вторая краевая задача в гильбертовом пространстве $L_2\left(0,r\middle|\rho\right)$, решение которой известно:

$\Re_k(\rho)=\dfrac{\sqrt{2}}{r}\left(1-\dfrac{n^2}{\beta_k^{(n)2}}\right)^{-1/2}\cdot J_n\left(\beta_k^{(n)}\dfrac{\rho}{r}\right)\Big/J_n\left(\beta_k^{(n)}\right)$ – собственные функции, составляющие ортонормированный базис $\left(\Re_k,\Re_{k'}\right)=\delta_{kk'}$, а $\lambda_k=-\mu_k^2=-\left(\beta_k^{(n)}/r\right)^2<0$ – собственные значения при $k\in\mathbb{N}$.

Здесь $\beta_k^{(n)}>0$ – простой k-тый корень дисперсионного уравнения $J'_n\left(\beta_k^{(n)}\right)=0$; при этом $\beta_k^{(n)}<\beta_{k+1}^{(n)}$ и $J_n\left(\beta_k^{(n)}\right)\neq0$. Ряд для функции $\upsilon(\rho,z)=\sum_{k=1}^{\infty}Z_k(z)\cdot\Re_k(\rho)$ сходится абсолютно и равномерно.

4–5. Вывод и решение дифференциального уравнения для функции $Z_k(z)$.

$$\Delta\upsilon=\sum_k\left\{Z''_k-\mu_k^2Z_k(z)\right\}\Re_k(\rho)=0\Rightarrow Z''_k-\mu_k^2\cdot Z_k(z)=0.$$

$$Z_k(z)=C_k\cdot sh\mu_k z+\tilde{C}_k\cdot sh\mu_k(H-z);\ C_k,\tilde{C}_k=const.$$

6. Определение постоянных C_k и $\tilde{C}_k$ из граничных условий по z.

$$\upsilon(\rho,z)=\sum_{k=1}^{\infty}Z_k(z)\cdot\Re_k(\rho)=\sum_k\left\{C_k\cdot sh\mu_k z+\tilde{C}_k\cdot sh\mu_k(H-z)\right\}\Re_k(\rho).$$

$$\upsilon(\rho,H)=\sum_k\left\{C_k\cdot sh\mu_k H+0\right\}\Re_k(\rho)=0\Rightarrow C_k=0.$$

$$\upsilon(\rho,0)=\sum_k\tilde{C}_k\cdot sh\mu_k H\cdot\Re_k(\rho)=A\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\Rightarrow\tilde{C}_k\cdot sh\mu_k H=\left(A\left(\frac{\rho}{r}\right)^n,\Re_k\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{r}(1-\ldots)^{-1/2}\cdot\frac{A}{J_n(\beta)}\cdot\int_0^r\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\cdot J_n\left(\beta_k^{(n)}\frac{\rho}{r}\right)\cdot\rho d\rho=\left[\beta_k^{(n)}\frac{\rho}{r}=\mu_k\rho=x\right]=$$

$$=\frac{Ar\sqrt{2}}{\beta^{n+2}\cdot J_n(\beta)}(1-\ldots)^{-1/2}\cdot\int_0^{\beta}J_n(x)\cdot x^{n+1}dx=\ldots\cdot x^{n+1}J_{n+1}(x)\Big|_0^{\beta}=$$

$$=\left[J_{n+1}(\beta)=\frac{n}{\beta}J_n(\beta)-J_n'(\beta)=\frac{n}{\beta}J_n(\beta)-0\right]=\frac{Ar\,n\sqrt{2}}{\beta_k^{(n)2}}\left(1-\frac{n^2}{\beta_k^{(n)2}}\right)^{-1/2}>0,$$

$$\tilde{C}_k=\frac{An\sqrt{2}}{\mu_k^2 r}\left(1-\frac{n^2}{\mu_k^2 r^2}\right)^{-1/2}\Big/ sh\mu_k H>0.$$

7. Окончательный вид решения задачи и его проверка.

$$u(\rho,\varphi,z)=\upsilon(\rho,z)\cos n\varphi=2A\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n}{\mu_k^2r^2-n^2}\frac{sh\mu_k(H-z)}{sh\mu_k H}\frac{J_n(\mu_k\rho)}{J_n(\mu_k r)}\cos n\varphi;$$

$$\mu_k=\beta_k^{(n)}\big/r>0.$$

Ряд сходится, так как общий член имеет порядок $O\left(\frac{1}{k^2}e^{-\mu_k z}\right)$ при $k\to\infty$.

$$u(0,\varphi,z)=0<\infty\because J_n(0)=0;\qquad u_\rho'(r,\varphi,z)=0\because J_n'\left(\beta_k^{(n)}\right)=0.$$

$$u(\rho,\varphi,0)=2A\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n}{\mu_k^2r^2-n^2}\frac{J_n(\mu_k\rho)}{J_n(\mu_k r)}\cos n\varphi=A\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\cdot\cos n\varphi\because$$

$$\because \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{\beta^2 - n^2} \frac{J_n(\beta\rho / r)}{J_n(\beta)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n, \qquad \beta \equiv \beta_k^{(n)} > 0;$$

$$u(\rho,\varphi,H) = 0 \because sh0 = 0.$$

Размерности сохраняются $[u] = [A]$.

<u>Задача 2.26.</u> Смешанная краевая задача для уравнения Лапласа внутри отрезка цилиндра (разложение по функциям Бесселя). Приведение радиальных граничных условий к однородным.

$$\begin{cases} \Delta_3 u(\rho,\varphi,z) = 0. \\ u'_\rho \big|_{\rho=r} = Az \cdot \sin n\varphi; \quad u\big|_{z=0} = u\big|_{z=H} = 0. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u = u(\rho,\varphi,z). \\ 0 \le \rho \le r, \quad 0 \le z \le H, \\ 0 \le \varphi < 2\pi, \quad n \in N. \end{array}$$

1. Отделение зависимости от угла $u(\rho,\varphi,z) = \upsilon(\rho,z) \cdot \sin n\varphi.$

$$\begin{cases} D'_Б \upsilon + \upsilon''_{zz} \equiv \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho \dfrac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right) - \dfrac{n^2}{\rho^2}\upsilon + \dfrac{\partial^2 \upsilon}{\partial z^2} = 0. & \upsilon = \upsilon(\rho,z). \\ |\upsilon(0,z)| < \infty, \quad \upsilon'_\rho(r,z) = Az; & 0 \le \rho \le r, \quad 0 \le z \le H. \\ \upsilon(\rho,0) = \upsilon(\rho,H) = 0. & \end{cases}$$

2. Приведение к однородным пары граничных условий по радиусу ρ.

$$\upsilon(\rho,z) = w(\rho,z) + \alpha(z) \cdot \left(\frac{\rho}{r}\right)^m + \beta(z),$$

где функция $\alpha(z)$, $\beta(z)$ и показатель $m \ge 2$ требуется определить.

$$|\upsilon(0,z)| = |w(0,z) + 0 + \beta(z)| < \infty \Rightarrow |w(0,z)| < \infty \quad \text{и} \quad \beta(z) = 0.$$

$$\upsilon'_\rho(r,z) = w'_\rho(r,z) + \alpha(z)\frac{m}{r} = Az \Rightarrow w'_\rho(r,z) = 0 \qquad \text{при } \alpha(z) = \frac{Ar}{m}z.$$

Следовательно, получаем $\upsilon(\rho,z) = w(\rho,z) + \dfrac{Ar}{m} z \cdot \left(\dfrac{\rho}{r}\right)^m.$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right)-\frac{n^2}{\rho^2}\upsilon+\frac{\partial^2\upsilon}{\partial z^2}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial w}{\partial\rho}\right)-\frac{n^2}{\rho^2}w+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\frac{Ar}{m}z\left(\frac{\rho}{r}\right)^m\frac{m^2}{\rho^2}-$$

$$-\frac{n^2}{\rho^2}\frac{Ar}{m}z\left(\frac{\rho}{r}\right)^m+0=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial w}{\partial\rho}\right)-\frac{n^2}{\rho^2}w+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\frac{m^2-n^2}{\rho^2}\frac{Ar}{m}z\left(\frac{\rho}{r}\right)^m=0.$$

Для упрощения уравнения выберем $m=n$, тогда окончательно

$$\upsilon(\rho,z)=w(\rho,z)+\frac{Ar}{n}z\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n.$$

Теперь пара граничных условий по z примет вид:

$$\upsilon(\rho,0)=0\Rightarrow w(\rho,0)=0;$$

$$\upsilon(\rho,H)=w(\rho,H)+\frac{Ar}{n}H\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n=0\Rightarrow w(\rho,H)=-\frac{Ar}{n}H\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\neq 0.$$

Очевидно, всегда следует выбирать показатель $m=n>0$, равный коэффициенту тригонометрической функции в условиях.

$$u(\rho,\varphi,z)=\upsilon(\rho,z)\cdot\sin n\varphi=\left\{\frac{Ar}{n}z\left(\frac{\rho}{r}\right)^n+w(\rho,z)\right\}\cdot\sin n\varphi.$$

Постановка задачи для функции $w(\rho,z)$ теперь будет:

$$\begin{cases}\hat{D}_Б w+w''_{zz}\equiv\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial w}{\partial\rho}\right)-\frac{n^2}{\rho^2}w+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0.\\ |w(0,z)|<\infty,\quad w'_\rho(r,z)=0;\\ w(\rho,0)=0,\quad w(\rho,H)=-A\frac{rH}{n}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n.\end{cases}\qquad \begin{array}{l} w=w(\rho,z).\\ 0\le\rho\le r,\quad 0\le z\le H.\\ \hat{D}_Б\equiv\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)-\frac{n^2}{\rho^2}.\end{array}$$

3. Разделение переменных $w(\rho,z)=\Re(\rho)\cdot Z(z)$ и решение краевой задачи по переменной ρ.

Здесь вторая краевая задача по ρ (задача Неймана) имеет вид:

$$\hat{D}_Б\Re_k=\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\Re_k}{d\rho}\right)-\frac{n^2}{\rho^2}\Re_k=\lambda_k\Re_k(\rho);\quad |\Re_k(0)|<\infty,\ \ \Re'_k(r)=0.$$

Ее решение в гильбертовом пространстве $L_2\left(0,r\middle|\rho\right)$ известно:

$$\Re_k\left(\rho\right)=\frac{\sqrt{2}}{r}\left(1-\frac{n^2}{\beta_k^{(n)2}}\right)^{-1/2}\cdot J_n\left(\beta_k^{(n)}\frac{\rho}{r}\right)\Big/J_n\left(\beta_k^{(n)}\right)-$$

собственные функции, составляющие ортонормированный базис $\left(\Re_k,\Re_{k'}\right)=\delta_{kk'}$; а $\lambda_k=-\mu_k^2=-\left(\beta_k^{(n)}/r\right)^2<0$ – собственные значения при $k\in\mathbb{N}$.

Здесь $\beta_k^{(n)}>0$ – простой k-тый корень дисперсионного уравнения $J_n'\left(\beta\right)=0$; при этом $\beta_k^{(n)}<\beta_{k+1}^{(n)}$ и $J_n\left(\beta_k^{(n)}\right)\neq 0$.

Ряд Фурье–Бесселя для функции $w\left(\rho,z\right)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}Z_k\left(z\right)\cdot\Re_k\left(\rho\right)$ сходится абсолютно и равномерно (правильно); при этом необходимо $\lim\limits_{k\to\infty}Z_k\left(z\right)=0.$

4–5. Вывод и общее решение дифференциального уравнения для функции $Z_k\left(z\right)$ (координаты разложения).

$$\Delta w=\sum_k\left\{Z_k''-\mu_k^2Z_k\left(z\right)\right\}\Re_k\left(\rho\right)=0\Rightarrow Z_k''-\mu_k^2\cdot Z_k\left(z\right)=0.$$

Общее решение уравнения для $Z_k\left(z\right)$ запишем в виде

$$Z_k\left(z\right)=C_k\cdot sh\mu_k z+\tilde{C}_k\cdot sh\mu_k\left(H-z\right);\quad C_k,\tilde{C}_k=const.$$

В полученном решении функции линейно независимы; они выбраны так, чтобы только одна из них обращалась в нуль для каждого граничного условия по аргументу z.

6. Определение постоянных C_k и $\tilde{C}_k$ из граничных условий по z.

$$w\left(\rho,z\right)=\sum_k Z_k\left(z\right)\cdot\Re_k\left(\rho\right)=\sum_k\left\{C_k\cdot sh\mu_k z+\tilde{C}_k\cdot sh\mu_k\left(H-z\right)\right\}\Re_k\left(\rho\right).$$

$$w\left(\rho,0\right)=\sum_k\left\{0+\tilde{C}_k\cdot sh\mu_k H\right\}\cdot\Re_k\left(\rho\right)=0\Rightarrow\tilde{C}_k=0.$$

$$w(\rho,H)=\sum_k C_k\cdot sh\mu_k H\cdot\Re_k(\rho)=-A\frac{Hr}{n}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_k\cdot sh\mu_k H=\left(-A\frac{Hr}{n}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n,\Re_k\right)=$$

$$=-A\frac{Hr}{n}\frac{\sqrt{2}}{r}\left(1-\frac{n^2}{\beta_k^{(n)2}}\right)^{-1/2}\cdot\frac{1}{J_n\left(\beta_k^{(n)}\right)}\cdot\int_0^r\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\cdot J_n\left(\beta_k^{(n)}\frac{\rho}{r}\right)\rho d\rho=$$

$$=\left[\beta_k^{(n)}\frac{\rho}{r}=\mu_k\rho=x\right]=$$

$$=-\frac{AHr^2\sqrt{2}}{n\beta^{n+2}J_n(\beta)}\cdot(1-\ldots)^{-1/2}\cdot\int_0^\beta J_n(x)\cdot x^{n+1}dx=\ldots\cdot x^{n+1}J_{n+1}(x)\Big|_0^\beta=$$

$$=\ldots\cdot\left[\frac{n}{\beta}J_n(\beta)-J_n'(\beta)=\frac{n}{\beta}J_n(\beta)-0\right]=-\frac{AHr^2\sqrt{2}}{\beta^2}\left(1-\frac{n^2}{\beta^2}\right)^{-1/2}=$$

$$==-\frac{AH\sqrt{2}}{\mu_k^2}\left(1-\frac{n^2}{\mu_k^2r^2}\right)^{-1/2}<0.$$

$$C_k=-\frac{AH\sqrt{2}}{\mu_k^2\cdot sh\mu_k H}\left(1-\frac{n^2}{\mu_k^2r^2}\right)^{-1/2}<0\qquad\text{при } \mu_k=\beta_k^{(n)}/r>0.$$

Таким образом, разложение функции $w(\rho,z)$ принимает вид:

$$w(\rho,z)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k\cdot sh\mu_k z\cdot\Re_k(\rho)=$$

$$=-A\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H\sqrt{2}}{\mu_k^2}\left(1-\frac{n^2}{\mu_k^2r^2}\right)^{-1/2}\frac{sh\mu_k z}{sh\mu_k H}\cdot\frac{\sqrt{2}}{r}\left(1-\frac{n^2}{\mu_k^2r^2}\right)^{-1/2}\frac{J_n(\mu_k\rho)}{J_n(\mu_k r)}=$$

$$=-2AHr\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k^2r^2-n^2}\frac{sh\mu_k z}{sh\mu_k H}\frac{J_n(\mu_k\rho)}{J_n(\mu_k r)};\quad \mu_k=\beta_k^{(n)}/r>0.$$

Ряд сходится абсолютно и равномерно (правильно), и его общий член имеет порядок $O\left(\frac{1}{k^2}\cdot e^{-\mu_k(H-z)}\right)$ при $k\to\infty$. Здесь сходимость в основном определяется отношением гиперболических функций.

7. Окончательный вид решения задачи и его проверка.

$$u(\rho,\varphi,z)=\left\{\frac{Ar}{n}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n+w(\rho,z)\right\}\cdot\sin n\varphi=$$

$$=\frac{AHr}{n}\left\{\frac{z}{H}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n-2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n}{\mu_k^2r^2-n^2}\,\frac{sh\mu_k z}{sh\mu_k H}\,\frac{J_n(\mu_k\rho)}{J_n(\mu_k r)}\right\}\cdot\sin n\varphi.$$

Сделаем проверку полученного решения по условиям задачи.

$$u(0,\varphi,z)=0<\infty\because J_n(0)=0\quad\text{при } n\in\mathbb{N}.$$

$$u'_\rho(r,\varphi,z)=AH\left\{\frac{z}{H}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n-1}-2r\sum_k\frac{\mu_k}{\mu_k^2r^2-n^2}\,\frac{sh\mu_k z}{sh\mu_k H}\,\frac{J'_n(\mu_k\rho)}{J_n(\mu_k r)}\right\}\Bigg|_{\rho=r}\sin n\varphi=$$

$$=Az\cdot\sin n\varphi\because J'_n(\mu_k r)=J'_n\left(\beta_k^{(n)}\right)=0.$$

$$u(\rho,\varphi,0)=0\because sh0=0.$$

$$u(\rho,\varphi,H)=\frac{AHr}{n}\left\{\left(\frac{\rho}{r}\right)^n-2\sum_k\frac{n}{\mu_k^2r^2-n^2}\,\frac{J_n(\mu_k\rho)}{J_n(\mu_k r)}\right\}\cdot\sin n\varphi=0\because$$

$$\because\left(\frac{\rho}{r}\right)^n=2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n}{\beta_k^{(n)}-n^2}\,\frac{J_n\left(\beta_k^{(n)}\rho/r\right)}{J_n\left(\beta_k^{(n)}\right)}.$$

Выполнение граничных условий периодичности очевидно, так как функции $\sin n\varphi$ и $(\sin n\varphi)'=n\cdot\cos n\varphi$ имеют период $2\pi/n$.

Сравним размерности в условиях задачи и в ответе:

$$\left[u(\rho,\varphi,z)\right]\equiv Q,\quad [A]=Q/L^2,\quad \left[\{\ldots\}\right]=1.$$

$$[u]=\left[AHr\cdot\{\ldots\}\cdot\sin n\varphi\right]\Rightarrow Q.$$

Важно отметить, что в стационарных задачах (эллиптического типа), когда разложение в ряд проводится по колеблющимся тригонометрическим функциям $\sin\mu_k z$ или $\cos\mu_k z$, то зависимость от радиуса ρ оказывается функцией монотонной $I_n(\mu_k\rho)$. Наоборот, если раскладывать по колеблющимся функциям Бесселя $J_n(\mu_k\rho)$, то зависимость от z описывается монотонными гиперболическими функциями $sh\mu_k z,\ ch\mu_k z$ или их комбинациями. При этом комбинация монотонных функций всегда имеет нулевой предел при $k \to \infty$ как необходимое условие сходимости ряда.

Задача 2.27. Краевая задача Дирихле для однородного уравнения Гельмгольца (уравнение амплитуд) внутри отрезка цилиндра.

$$\begin{cases} \Delta_3 u + æ^2 \cdot u(\rho,\varphi,z) = 0. \\ u\big|_{\rho=r} = 0; \quad u\big|_{z=0} = A\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^n \cdot cosn\varphi, \quad u\big|_{z=H} = 0. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u = u(\rho,\varphi,z). \\ 0 \le \rho \le r, \quad 0 \le z \le H, \\ 0 \le \varphi < 2\pi, \quad n \in \mathbb{N}. \\ A, æ = const > 0. \end{array}$$

Условия ограниченности при $\rho = 0$ и периодичности по φ явно не записаны.

1. Отделение зависимости от угла $u(\rho,\varphi,z) = \upsilon(\rho,z)\cdot\cos n\varphi$.

$$\begin{cases} \hat{D}_Б \upsilon + \upsilon''_{zz} + æ^2\upsilon \equiv \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right) - \dfrac{n^2}{\rho^2}\upsilon + \dfrac{\partial^2\upsilon}{\partial z^2} + æ^2\upsilon(\rho,z) = 0. \\ \left|\upsilon(0,z)\right| < \infty, \quad \upsilon(r,z) = 0; \qquad\qquad 0 \le \rho \le r, \quad 0 \le z \le H. \\ \upsilon(\rho,0) = A\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^n, \quad \upsilon(\rho,H) = 0. \qquad\qquad \hat{D}_Б \equiv \dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{d}{d\rho}\right) - \dfrac{n^2}{\rho^2}. \end{cases}$$

2–3. Разделение переменных $\upsilon(\rho,z) = R(\rho)\cdot Z(z)$ и решение краевой задачи по переменной ρ.

Поставим первую краевую задачу (задачу Дирихле)

$$\hat{D}_Б R \equiv \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) - \frac{n^2}{\rho^2}R = \lambda R(\rho); \quad \left|R(0)\right| < \infty, \quad R(r) = 0;$$

решение которой в гильбертовом пространстве $L_2\left(0,r\middle|\rho\right)$ известно:

$R_k(\rho) = \dfrac{\sqrt{2}}{r} J_n\left(\alpha_k^{(n)}\dfrac{\rho}{r}\right) \Big/ J_{n+1}\left(\alpha_k^{(n)}\right)$ – собственные функции, составляющие ортонормированный базис $(R_k, R_{k'}) = \delta_{kk'}$.

$\lambda_k = -\mu_k^2 = -\left(\alpha_k^{(n)}/r\right)^2 < 0$ – спектр собственных значений при $k \in \mathbb{N}$.

Здесь $\alpha_k^{(n)} > 0$ – простой k-тый корень дисперсионного уравнения $J_n(\alpha) = 0$; при этом $\alpha_k^{(n)} < \alpha_{k+1}^{(n)}$ и $J_{n+1}\left(\alpha_k^{(n)}\right) \neq 0$.

Ряд Фурье–Бесселя для функции $\upsilon(\rho, z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} Z_k(z) \cdot R_k(\rho)$ сходится абсолютно и равномерно; при этом необходимо $\lim\limits_{k\to\infty} Z_k(z)$.

4–5. Вывод и общее решение дифференциального уравнения для функции $Z_k(z)$ (координаты разложения).

$$\Delta\upsilon + æ^2 \cdot \upsilon(\rho, z) = \sum_k \left\{ \hat{D}_Б R_k \cdot Z_k + R_k \cdot Z_k'' + æ^2 R_k Z_k \right\} =$$

$$= \sum_k \left\{ Z_k'' - \left(\mu_k^2 - æ^2\right) Z_k \right\} R_k \equiv \sum_k \left\{ Z_k'' - \gamma_k^2 \cdot Z_k(z) \right\} R_k(\rho) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Z_k'' - \gamma_k^2 \cdot Z_k(z) = 0; \qquad \gamma_k^2 = \mu_k^2 - æ^2 > 0.$$

$$Z_k(z) = C_k \cdot sh\gamma_k z + \tilde{C}_k \cdot sh\gamma_k (H - z); \qquad C_k, \tilde{C}_k = const.$$

6. Определение постоянных C_k и $\tilde{C}_k$ из граничных условий по z.

$$\upsilon(\rho, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ C_k \cdot sh\gamma_k z + \tilde{C}_k \cdot sh\gamma_k (H - z) \right\} \cdot R_k(\rho);$$

$$\upsilon(\rho, H) = \sum_k \left\{ C_k \cdot sh\gamma_k H + 0 \right\} R_k(\rho) = 0 \Rightarrow C_k = 0.$$

$$\upsilon(\rho, 0) = \sum_k \tilde{C}_k \cdot sh\gamma_k H \cdot R_k(\rho) = A\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \Rightarrow \tilde{C}_k \cdot sh\gamma_k H = \left(A\left(\frac{\rho}{r}\right)^n, R_n \right) =$$

$$= A \cdot \int_0^r \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \cdot R_k(\rho) \rho d\rho = \frac{A\sqrt{2}}{\alpha^{n+1} \cdot J_{n+1}(\alpha)} \int_0^r J_n\left(\alpha \frac{\rho}{r}\right) \rho^{n+1} d\rho =$$

$$= \left[\alpha_k^{(n)} \frac{\rho}{r} = \mu_k \rho = x, \ \rho\Big|_0^r \Rightarrow x\Big|_0^\alpha \right] = \frac{Ar\sqrt{2}}{\alpha^{n+2} \cdot J_{n+1}(\alpha)} \int_0^\alpha J_n(x) \cdot x^{n+1} dx =$$

$$= \frac{Ar\sqrt{2}}{\alpha^{n+2} \cdot J_{n+1}(\alpha)} \cdot x^{n+1} J_{n+1}(x)\Big|_0^\alpha = \frac{Ar\sqrt{2}}{\alpha_k^{(n)}} = \frac{A\sqrt{2}}{\mu_k}; \qquad \tilde{C}_k = \frac{A\sqrt{2}}{\mu_k \cdot sh\gamma_k H} > 0.$$

7. Окончательный вид решения задачи и его проверка.

$$u(\rho,\varphi,z)=\upsilon(\rho,z)\cdot\cos n\varphi=\frac{2A}{r}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{sh\gamma_k(H-z)}{\mu_k\cdot sh\gamma_k H}\frac{J_n(\mu_k\rho)}{J_{n+1}(\mu_k r)}\cdot\cos n\varphi,$$

при $\gamma_k^2=\mu_k^2-æ^2=\left(\alpha_k^{(n)}/r\right)^2-æ^2>0.$

Ряд сходится абсолютно и равномерно; порядок его общего члена $O\left(\frac{1}{k}e^{-\gamma_k z}\right)$ при $k\to\infty$.

$$u(0,\varphi,z)=0<\infty\because J_n(0)=0;\quad u(r,\varphi,z)=0\because J_n\left(\alpha_k^{(n)}\right)=0.$$

$$u(\rho,\varphi,H)=0\because sh0=0;$$

$$u(\rho,\varphi,0)=\frac{2A}{r}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_n(\mu_k\rho)}{\mu_k\cdot J_{n+1}(\mu_k r)}\cos n\varphi=$$

$$=2A\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_n\left(\alpha_k^{(n)}\rho/r\right)}{\alpha_k^{(n)}\cdot J_{n+1}\left(\alpha_k^{(n)}\right)}\cos n\varphi=A\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\cdot\cos n\varphi.$$

Размерности: $[u]=\frac{[A]}{L}L$ при $[u]=[A]$ и $[\mu_k]=[\gamma_k]=1/L.$

8. Упрощенная краевая задача Дирихле для однородного уравнения Гельмгольца внутри круга от $0\le\rho\le r$, где имеется зависимость только от радиуса ρ и угла φ. Отделение зависимости от угла

$$\begin{cases}\Delta_2 u+æ^2u=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+æ^2u(\rho,\varphi)=0.\\ u\big|_{\rho=0}<\infty,\quad u\big|_{\rho=r}=A\cdot\cos n\varphi. \qquad 0\le\rho\le r,\quad 0\le\varphi<2\pi.\end{cases}$$

$$u(\rho,\varphi)=R(\rho)\cdot\cos n\varphi.$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{dR}{d\rho}\right)+\left(æ^2-\dfrac{n^2}{\rho^2}\right)R(\rho)=0.\\ \left|R(0)\right|<\infty,\quad R(r)=A.\end{cases}$$

Решение уравнения Бесселя для функции $R(\rho)$.

$$R(\rho) = C \cdot J_n(æ\rho) + \tilde{C} \cdot N_n(æ\rho); \quad C, \tilde{C} = const.$$

$$\left|R(0)\right| < \infty \Rightarrow \tilde{C} = 0 \because J_n(0) = 0 \quad \text{и} \quad N_n(0) = -\infty \quad \text{при } n = \pm 1, \ \pm 2, \ldots$$

$$R(r) = C \cdot J_n(ær) = A \Rightarrow C = A / J_n(ær) \neq 0.$$

Решение задачи будет

$$R(\rho) = A\frac{J_n(æ\rho)}{J_n(ær)} \quad \text{или} \quad u(\rho,\varphi) = A\frac{J_n(æ\rho)}{J_n(ær)} \cdot \cos n\varphi.$$

Полученное решение удовлетворяет всем условиям задачи и все размерности совпадают.

Задача 2.28. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа внутри кругового сектора конечной длины.

$$\begin{cases} \Delta_2 u \equiv \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0. & u = u(\rho,\varphi). \\ u\big|_{\rho=0} < \infty, \quad u\big|_{\rho=r} = A\varphi; & 0 \le \rho \le r, \\ u\big|_{\varphi=0} = u\big|_{\varphi=\alpha} = 0. & 0 \le \varphi \le \alpha. \end{cases}$$

1. Разделение переменных $u(\rho,\varphi) = R(\rho) \cdot \Phi(\varphi)$ и решение краевой задачи по переменной φ.

$$\hat{D}_\varphi = \frac{d^2}{d\varphi^2} \quad \text{и} \quad \Phi(0) = \Phi(\alpha) = 0.$$

Решение этой краевой задачи Дирихле известно.

$\Phi_k(\varphi) = \sqrt{\dfrac{2}{\alpha}} \cdot \sin \mu_k \varphi$ – ортонормированное множество собственных функций при $(\Phi_k, \Phi_{k'}) = \delta_{kk'}$;

$\lambda_k = -\mu_k^2 = -\left(\dfrac{k\pi}{\alpha}\right)^2 < 0$ – спектр собственных значений при $k \in \mathbb{N}$.

Поэтому решение задачи будем искать в виде разложения в ряд Фурье.

$$u(\rho,\varphi)=\sum_{k=1}^{\infty} R_k(\rho)\cdot\Phi_k(\varphi).$$

2. Вывод и решение уравнения для функции $R_k(\rho)$.

$$\Delta_2 u=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=\sum_k\left\{\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\,R_k}{d\rho}\right)\cdot\Phi_k+\frac{1}{\rho^2}R_k\Phi_k''\right\}=$$

$$=\sum_k\left\{\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\,R_k}{d\rho}\right)-\frac{1}{\rho^2}\mu_k^2R_{\text{k}}\right\}\Phi_k=0\Rightarrow$$

$\Rightarrow \rho^2R_k''+\rho R_k'-\mu_k^2R_k(\rho)=0$ – уравнение Эйлера, решение которого ищем в виде $R_k(\rho)=\rho^p$. Тогда

$$\rho^2\cdot p(p-1)\rho^{p-2}+\rho\cdot p\rho^{p-1}-\mu_k^2\rho^p=0\Rightarrow\ p=\pm\mu_k.$$

Откуда получим $R_k(\rho)=C_k\rho^{\mu_k}+\tilde{C}_ke^{-\mu_k}$ при $C_k;\tilde{C}_k=const.$ Теперь разложение будет

$$u(\rho,\varphi)=\sum_k\left\{C_k\rho^{\mu_k}+\tilde{C}_k\rho^{-\mu_k}\right\}\cdot\Phi_k(\varphi).$$

3. Определение постоянных C_k и $\tilde{C}_k$ из граничного условия по переменной ρ.

$$u\big|_{\rho=0}<\infty\Rightarrow\tilde{C}_k=0,\quad C_k\neq 0.$$

$$u\big|_{\rho=r}=\sum_k C_kr^{\mu_k}\cdot\Phi_k(\varphi)=f(\varphi)\equiv A\varphi\Rightarrow C_kr^{\mu_k}=(f,\Phi_k)=$$

$$=\int_0^{\alpha}f(\varphi')\cdot\bar{\Phi}_k(\varphi')d\varphi'\equiv f_k=const;$$

$$C_k=\frac{f_k}{r^{\mu_k}}=\frac{1}{r^{\mu_k}}\cdot\int_0^{\alpha}f(\varphi')\,\bar{\Phi}_k(\varphi')d\varphi'.$$

4. Составление функции Грина (источника).

$$u(\rho,\varphi)=\sum_k\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\mu_k}\cdot f_k\Phi_k(\varphi)=\int_0^{\alpha}f(\varphi')\cdot\left\{\sum_k\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\mu_k}\cdot\bar{\Phi}_k(\varphi')\,\Phi_k(\varphi)\right\}d\varphi'=$$

$$=\int_0^{\alpha}f(\varphi')\cdot\mathrm{G}(\rho,\varphi|\varphi')d\varphi',$$

где $G\left(\rho,\varphi\middle|\varphi'\right)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^{\mu_k}\cdot\Phi_k\left(\varphi\right)\cdot\bar{\Phi}_k\left(\varphi'\right)$ – функция Грина; здесь всегда имеем $\dfrac{\rho}{r}<1.$

5. Решение задачи по общей формуле с использованием функции Грина.

$$u\left(\rho,\varphi\right)=A\cdot\int\limits_0^{\alpha}G\left(\rho,\varphi\middle|\varphi'\right)\cdot\varphi'd\varphi'=\frac{2A}{\alpha}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\mu_k}\cdot\int\limits_0^{\alpha}\sin\mu_k\varphi'\cdot\varphi'd\varphi'=$$

$$=\left[\int\limits_0^{\alpha}\sin\mu_k\varphi'\cdot\varphi'd\varphi'=-\frac{1}{\mu_k}\cdot\int\limits_0^{\alpha}\varphi'\cdot d\cos\mu_k\varphi'=\right.$$

$$=-\frac{1}{\mu_k}\left(\varphi'\cdot\cos\mu_k\varphi'\Big|_0^{\alpha}-\int\limits_0^{\alpha}\cos\mu_k\varphi'\cdot d\varphi'\right)=$$

$$\left.=-\frac{1}{\mu_k}\cdot\left(\alpha\cdot\left(-1\right)^k-\frac{1}{\mu_k}\cdot\sin\mu_k\varphi'\Bigg|_0^{\alpha}\right)=\frac{\alpha}{\mu_k}\left(-1\right)^{k+1}\right]=$$

$$=\frac{2A}{\alpha}\cdot\sum_k\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\mu_k}\cdot\frac{\alpha}{\mu_k}\left(-1\right)^{k+1}\cdot\sin\mu_k\varphi=$$

$$=2A\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{k+1}}{\mu_k}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\mu_k}\cdot\sin\mu_k\varphi\quad\text{при }\mu_k=\frac{\pi k}{\alpha}>0.$$

6. Проверка решения по условиям задачи и по размерностям.

$$u\big|_{\rho=0}=0<\infty;\quad u\big|_{\varphi=0}=0\because\sin 0=0;\quad u\big|_{\varphi=\alpha}=0\because\sin\mu_k\alpha=\sin k\pi=0.$$

$$u\left(r,\varphi\right)=2A\cdot\sum_k\frac{\left(-1\right)^{k+1}}{\mu_k}\cdot1\cdot\sin\mu_k\varphi=$$

$$=\frac{2A\alpha}{\pi}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{k+1}}{k}\sin\frac{\pi k\varphi}{\alpha}=\frac{2A\alpha}{\pi}\frac{\pi\varphi}{2\alpha}=A\varphi.$$

Размерности: $\left[\varphi\right]=\left[\alpha\right]=\left[\mu_k\right]=1\Rightarrow\left[u\right]=\left[A\right].$

<u>ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ</u>

Решение задач математической физики в сферической системе координат

<u>Основные вопросы:</u> Сферическая система координат, вид оператора Лапласа Δ в этой системе. Уравнение (присоединенное уравнение) Лежандра и его решения – полиномы (присоединенные функции) Лежандра. Основные свойства этих функций – формула Родрига, рекуррентные соотношения, нули. Решение краевой задачи для присоединенного уравнения Лежандра; собственные функции и собственные значения, ортогональность и норма собственных функций.

Решение краевой задачи на поверхности единичной сферы; сферические функции и их свойства – ортогональность, вырождение собственных значений. Разложение в ряд по сферическим функциям. Шаровые функции (внутренние и внешние). Сферические волны.

Постановка задач математической физики в сферической системе координат. Примеры подробного решения разных типов таких задач.

<u>Литература:</u> [1] – Дополнение II (2), § 1 (1–7), § 2 (1, 2), § 3 (2, 3), § 4 (1, 2, 4, 5). [2] – гл. 15, § 2; гл. 16, § 1–3. [3] – гл. 16, § 1–4, 6, 8; гл. 21, § 1–4; гл. 22, § 1, 2. [4] – п. 131–134, 137, 156. [5] – гл. 4, № 179, 182, 185, 186; гл. 8, № 21, 29, 30.

Задание: [8] – № 119, 164, 175Д, 208, 210. [9] – гл. 4, № 123–125А; гл. 5, № 49, 50; гл. 6, № 93.

ТЕМА 3.1. Основные свойства присоединенных функций (полиномов) Лежандра; сферические и шаровые функции. Разложение в ряды по этим функциям

Функции Лежандра. Если в гильбертовом пространстве `$L_2\left(-1,+1\middle|1\right)$ для присоединенного оператора Лежандра $\hat{D}_k = \frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)\frac{d}{dx}\right) - \frac{k^2}{1-x^2}$ при $k \in \mathbb{Z}_0$ поставить первую краевую задачу Штурма-Лиувилля в виде

$$\hat{D}_k f = \lambda \cdot f\left(x\right) \quad \text{при } \left|f\left(\pm 1\right)\right| < \infty,$$

то для дискретного спектра собственных значений $\lambda_n = -n\left(n+1\right) \le 0$ при $n \in \mathbb{Z}_0$ получим невырожденное множество собственных функций $f_{nk}\left(x\right) = A \cdot P_{nk}\left(x\right)$, где $A = const \ne 0$ и

$$P_{nk}\left(x\right) = \left(1-x^2\right)^{k/2} \cdot P_n^{(k)}\left(x\right) = \frac{\left(1-x^2\right)^{k/2}}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^{n+k}}{d\,x^{n+k}}\left(x^2-1\right)^n -$$

формула Родрига для присоединенных функций Лежандра. Здесь фиксировано значение $k \le n$. В случае $k > n$ получим $P_{nk}\left(x\right) = 0$. Если $k = 0$, то получим полиномы Лежандра. Здесь, например,

$$P_0\left(x\right) = 1, \quad P_1\left(x\right) = x, \quad P_2\left(x\right) = \frac{1}{2}\left(3x^2-1\right), \quad P_3\left(x\right) = \frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right), \ldots$$

Четность (нечетность) присоединенных функций Лежандра выражается формулой $P_{nk}\left(-x\right) = (-1)^{n+k} \cdot P_{nk}\left(x\right)$. На концах интервала (–1,+1) получим $P_{nk}\left(\pm 1\right) = P'_{nk}\left(\pm 1\right) = 0$; однако $P_n\left(\pm 1\right) = (\pm 1)^n \ne 0$ при $k = 0$. Внутри этого интервала функция $P_{nk}\left(x\right)$ имеет $n-k$ простых корней. Приведем несколько важных формул

$$(2n+1)x \cdot P_{nk}\left(x\right) = (n+k) \cdot P_{n-1,k}\left(x\right) + (n+k-1) \cdot P_{n+1,k}\left(x\right),$$

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)\cdot P_n(x), \qquad \left|P_n(x)\right| \le 1 \text{ при } |x| \le 1,$$

$$P_{n,-k}(x) = (-1)^k \cdot \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \cdot P_{n,+k}(x).$$

В силу эрмитовости оператора Лежандра $\hat{D}_k$, различным собственным значениям λ_n (разным числам $n \in \mathbb{Z}_0$) соответствуют взаимно ортогональные собственные функции $f_{nk}(x) \not\equiv 0$ или

$$\left(f_{nk}, f_{mk}\right) \equiv \int_{-1}^{1} f_{nk}(x)\cdot \overline{f}_{mk}(x)\,dx = 0 \quad \text{при } n \ne m \quad \left(n, m \in \mathbb{Z}_0\right).$$

В этой формуле индекс k фиксирован.

Если выразить через норму постоянную $A = 1/\left\|P_{nk}\right\| = \sqrt{\dfrac{2n+1}{2}\dfrac{(n-k)!}{(n+k)!}}$,

то получим ортонормированный базис из функций $f_{nk}(x)$ в пространстве $L_2\left(-1,1\middle|1\right)$; теперь $\left(f_{nk}, f_{mk}\right) = \delta_{nm}$ при фиксированном k. Поэтому любая функция $F(x) \in L_2$ может быть единственным образом разложена в ряд Фурье–Лежандра $F(x) = \sum\limits_{n=k}^{\infty} C_{kn}\cdot f_{kn}(x)$, который внутри интервала $|x| < 1$ сходится абсолютно и равномерно (правильно); такой ряд можно дважды почленно дифференцировать. Коэффициенты разложения (координаты) определяются с помощью скалярного произведения

$$C_{nk} = \left(F, f_{nk}\right) \equiv \int_{-1}^{1} F(x)\cdot \overline{f}_{nk}(x)\,dx\,.$$

В случае $k = 0$ это выражение упрощается

$$C_n = \left(F, f_n\right) \equiv \sqrt{n+\frac{1}{2}}\cdot \int_{-1}^{1} F(x)\cdot \overline{P}_n(x)\,dx =$$

$$= \sqrt{n+\frac{1}{2}}\Big/(2n)!!\cdot \int_{-1}^{1} F^{(n)}(x)\cdot \left(1-x^2\right)^n dx.$$

В пространстве $L_2\left(0;1\middle|1\right)$ рассматривают задачу Штурма–Лиувилля для оператора $\hat{D}_0$ (при $k=0$) с граничными условиями $f(0)=0$ и $\left|f(1)\right|<\infty$; тогда получим спектр $\lambda_n=-2n(2n-1)<0$ при $n\in\mathbb{N}$ и ортонормированные собственные функции $f_n(x)=\sqrt{4n-1}\cdot P_{2n-1}(x)$.

Сферические функции. На поверхности единичной сферы $\rho=1$ найдем собственные значения и собственные функции оператора Лапласа Δ с самосопряженными граничными условиями. Оператор Δ в сферической системе координат (ρ,θ,φ) удобно записать

$$\Delta=\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\cdot\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\equiv$$

$$\equiv\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\tilde{\Delta}.$$

В системе координат $\rho=1,\ 0\le\theta\le\pi,\ \ 0\le\varphi\le2\pi$ (на единичной сфере) краевая задача Штурма–Лиувилля примет вид

$$\begin{cases}\tilde{\Delta}Y=\lambda\cdot Y(\theta,\varphi)\quad при\ \tilde{\Delta}=\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right)+\dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.\\ \left|Y(0,\varphi)\right|<\infty,\quad \left|Y(\pi,\varphi)\right|<\infty;\\ Y(\theta,0)=Y(\theta,2\pi),\quad Y'_\varphi(\theta,0)=Y'_\varphi(\theta,2\pi).\end{cases}$$

Здесь наложены естественные условия ограниченности по углам θ (широты вдоль меридианов) и естественные условия периодичности по углам φ (долготы вдоль параллелей).

Сделаем в уравнении $\tilde{\Delta}Y=\lambda\cdot Y(\theta,\varphi)$ замену $x=\cos\theta$ и разделим новые переменные $Y(\theta,\varphi)=Y(\arccos x,\varphi)=X(x)\cdot\Phi(\varphi)$. Тогда условия задачи примут вид:

$$\begin{cases}\left(1-x^2\right)\cdot\left\{\dfrac{1}{X}\cdot\dfrac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)\dfrac{dX}{dx}-\lambda\right)\right\}=-\dfrac{\Phi''}{\Phi}=k^2=const\ge0.\\ \left|X(\pm1)\right|<\infty;\quad \Phi(0)=\Phi(2\pi),\quad \Phi'(0)=\Phi'(2\pi).\end{cases}$$

Теперь можно поставить раздельно две упрощенные краевые задачи.

Для функции $X(x)$ получим

$$\hat{D}_k X \equiv \frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)\frac{dX}{dx}\right)-\frac{k^2}{1-x^2}X=\lambda X(x), \qquad \left|X(\pm 1)\right|<\infty.$$

Приняв здесь собственное число $\lambda_n=-n(n+1)\le 0 \quad (n\in\mathbb{Z}_0)$, будем иметь следующее решение $X_n(x)=B_1\cdot P_{nk}(x)=B_1\cdot P_{nk}(\cos\theta)$.

Для другой функции $\Phi(\varphi)$ краевая задача будет $\Phi''+k^2\cdot\Phi(\varphi)=0;$ $\Phi(0)=\Phi(2\pi),\ \Phi'(0)=\Phi'(2\pi)$. Здесь решение удобно записать в виде $\Phi_k(\varphi)=B_2e^{ik\varphi}$. Эти функции ортогональны по индексам $(\Phi_k,\Phi_{k'})=0$ при $k\neq k'$.

Окончательно решения искомой задачи можно записать

$$Y_{nk}(\theta,\varphi)=X_{nk}(\cos\theta)\cdot\Phi_k(\varphi)=B_1B_2\cdot P_{nk}(\cos\theta)\cdot e^{ik\varphi}.$$

Выразив постоянные B_1 и B_2 через соответствующие нормы, получим ортонормированную систему собственных функций (базис)

$$Y_{nk}(\theta,\varphi)\equiv Y_{nk}(\Omega)=\sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-1)!}{(n+1)!}}\cdot P_{nk}(\cos\theta)\cdot e^{ik\varphi}.$$

Эти функции называются элементарными сферическими гармониками (элементарными сферическими функциями); здесь для краткости обозначают $\Omega(\theta,\varphi)$. Можно проверить, что

$$Y_{nk}(\Omega)=0 \ \text{ при } k>n \qquad \text{и } Y_{n,-k}(\Omega)=(-1)^k\cdot Y^*_{n,+k}(\Omega).$$

Сферические функции ортонормированы по обоим индексам $(Y_{nk},Y_{n'k'})=\delta_{nn'}\cdot\delta_{kk'}$ (нельзя δ_{nk}), где индекс n соответствует переменной θ, а k – переменной φ. Каждое собственное значение $\lambda_n=-n(n+1)$ при $n\in\mathbb{Z}_0$ имеет $2n+1$ – кратное вырождение; т. е. каждому значению n соответствует $2n+1$ независимых и взаимно ортогональных собственных функций $Y_{nk}(\Omega)$ при $k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots,\pm n$.

Функцию $f(\theta,\varphi)\equiv f(\Omega)$, непрерывную на поверхности единичной сферы, можно разложить в двойной ряд по сферическим функциям $Y_{nk}(\theta,\varphi)\equiv Y_{nk}(\Omega)$; так как множество этих функций образует базис, получим

$$f(\Omega)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n}C_{nk}\cdot Y_{nk}(\theta,\varphi)\equiv\sum_{k,n}C_{nk}\cdot Y_{nk}(\Omega).$$

Такой ряд сходится абсолютно и равномерно и его можно дважды дифференцировать при $0\le 2\theta,\varphi\le 2\pi.$ Коэффициенты ряда C_{nk} (координаты) находятся с помощью скалярного произведения

$$C_{nk}=(f,Y_{nk})=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}f(\theta,\varphi)\cdot Y_{nk}^*(\theta,\varphi)\cdot\sin\theta\,d\theta\equiv\oiint_{\Omega}f(\Omega)\cdot Y_{nk}^*(\Omega)\,d\Omega;$$

$$d\Omega=\sin\theta\cdot d\theta\,d\varphi.$$

Иногда вводят общие сферические функции (не называемые элементарными) в виде суммы $Y_n(\Omega)=\sum\limits_{k=-n}^{n}B_{nk}\cdot Y_{nk}(\Omega)$, являющиеся линейной комбинацией всех элементарных гармоник $Y_{nk}(\Omega)$, соответствующих $2n+1$ раз вырожденному заданному значению собственного числа $\lambda_n=-n(n+1)\le 0$; здесь учитываются все возможные значения $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots,\pm n.$ Коэффициенты B_{nk} определяются по условиям конкретной задачи.

Решение задачи о собственных функциях на поверхности единичной сферы можно также записать через взаимно ортогональные (не нормированные) действительные (тессеральные, клеточные) функции $(k\le n\in\mathbb{Z}_0)$.

$$Y_{nk}^{(c)}(\theta,\varphi)=P_{nk}(\cos\theta)\cdot\cos k\varphi;\qquad Y_{nk}^{(s)}(\theta,\varphi)=P_{nk}(\cos\theta)\cdot\sin k\varphi.$$

Разложение заданной функции $f(\theta,\varphi)$ в ряд по тессеральным функциям оказывается более громоздким

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n}C_{nk}\cdot Y_{nk}(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}a_{n,0}\cdot P_n(\cos\theta)+\right.$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left(a_{nk}\cdot\cos k\varphi+b_{nk}\cdot\sin k\varphi\right)\cdot P_{nk}\left(\cos\theta\right)\Bigg\}.$$

Коэффициенты разложения здесь определяются через двойные интегралы по переменным θ и φ подобно разложениям в тригонометрический ряд Фурье.

Внутри шара радиуса $\rho=1$ проведем два единичных вектора $\vec{n}(\Omega)$ и $\vec{n}'(\Omega')$ из центра к поверхности. Выразим вектор $\vec{n}$ через сферические координаты $\vec{n}(\Omega)=\vec{i}\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi+\vec{j}\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi+\vec{k}\cdot\cos\theta$ и вектор $\vec{n}'(\Omega')$ аналогично. Угол $\gamma(\Omega,\Omega')$ между этими векторами определяется с помощью скалярного произведения

$$\left(\vec{n},\vec{n}'\right)=\cos\gamma\left(\Omega,\Omega'\right)=\cos\theta\cdot\cos\theta'+\sin\theta\cdot\sin\theta'\cdot\cos\left(\varphi-\varphi'\right).$$

Теперь можно получить формулу сложения для сферических (тессеральных) функций.

$$P_n\left(\cos\gamma\left(\Omega,\Omega'\right)\right)=\frac{4\pi}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n}Y_{nk}\left(\Omega\right)\cdot Y_{nk}^{*}\left(\Omega'\right)=P_n\left(\cos\theta\right)\cdot P_n\left(\cos\theta'\right)+$$
$$+2\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\cdot P_{nk}\left(\cos\theta\right)\cdot P_{nk}\left(\cos\theta'\right)\cdot\cos k\left(\varphi-\varphi'\right).$$

Здесь обозначено $\Omega=\Omega(\theta,\varphi)$, где θ – географическая широта, отсчитываемая вдоль меридианов от экватора к полюсам; φ – долгота, отсчитываемая вдоль параллелей от нулевого (гринвичского) меридиана направо и налево.

Шаровые функции. Найти функцию $u=u\left(\rho,\Omega\left(\theta,\varphi\right)\right)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа $\Delta u=0$ (или Пуассона $\Delta u=F\left(\rho,\Omega\right)$) внутри шара $0\le\rho\le r$ (или вне шара $0<r\le\rho<\infty$).

В простейшем случае постановка задачи будет

$$\Delta u=0,\quad u\big|_{\rho=r}=f\left(\theta,\varphi\right)\qquad\text{при } 0\le\rho\le r,\quad 0\le 2\theta,\varphi\le 2\pi.$$

Здесь обычно не записывают явно пять естественных граничных условий: ограниченность решения при $\rho=0,\ \theta=0,\ \theta=\pi,$ периодичность по φ искомой функции и ее производной.

Решение задачи будем искать в виде разложения в ряд по сферическим функциям $u(\rho,\Omega)=\sum\limits_{n,k} R_{nk}(\rho)\cdot Y_{nk}(\Omega)$; тогда получим

$$\Delta u=\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\cdot\tilde{\Delta}u=\frac{1}{\rho^2}\cdot\sum_{n,k}\left\{\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{dR_{nk}}{d\rho}\right)\cdot Y_{nk}+R_{nk}\cdot\tilde{\Delta}Y_{nk}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\rho^2}\cdot\sum_{n,k}\left\{\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{dR_{nk}}{d\rho}\right)-n(n+1)\cdot R_{nk}(\rho)\right\}\cdot Y_{nk}(\Omega)=0.$$

Здесь использовано уравнение $\tilde{\Delta}Y_{nk}=\lambda_n\cdot Y_{nk}(\Omega)$ при $\lambda_n=-n(n+1)\le 0.$ Тогда функция $R_{nk}(\rho)$ удовлетворяет уравнению Эйлера $\rho^2R''+2\rho\cdot R'-n(n+1)R(\rho)=0,$ общее решение которого $R_{nk}(\rho)=C_{nk}\cdot\rho^n+\tilde{C}_{nk}\cdot\rho^{-n-1},$ где C_{nk} и $\tilde{C}_{nk}$ – постоянные, определяемые из граничных условий.

Для внутренней задачи $0\le\rho\le r$ положим $\tilde{C}_{nk}=0,$ иначе решение не будет ограниченным при $\rho=0.$ Воспользовавшись затем граничным условием при $\rho=r$, получим $C_{nk}=f_{nk}\big/r^n$, где

$$f_{nk}=\left(f,Y_{nk}\right)=\oiint\limits_{\Omega}f(\Omega)\cdot Y_{nk}^*(\Omega)\,d\Omega=const.$$

Поэтому решение задачи внутри шара будет

$$u(\rho,\Omega)=\sum_{n,k}f_{nk}\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\cdot Y_{nk}(\Omega).$$

Решение внешней краевой задачи

$$\Delta u=0,\quad u\big|_{\rho=r}=f(\theta,\varphi)\quad \text{при } 0<r\le\rho<\infty$$

можно найти по аналогии:

$$u(\rho,\Omega)=\sum_{n,k}f_{nk}\cdot\left(\frac{r}{\rho}\right)^{n+1}\cdot Y_{nk}(\Omega).$$

Здесь обязательно выполняется нулевое условие на бесконечности $\lim\limits_{\rho\to\infty}u(\rho,\Omega)=0,$ так как отношение $\frac{r}{\rho}<1$.

Часто вводят внутренние (interier) и внешние (exterier) шаровые функции

$$u_{nk}^{(i)}(\rho,\Omega)=\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n}\cdot Y_{nk}(\Omega),\quad u_{nk}^{(e)}(\rho,\Omega)=\left(\frac{r}{\rho}\right)^{n+1}\cdot Y_{nk}(\Omega).$$

При решении задачи для уравнения Пуассона $\Delta u=F(\rho,\Omega)\not\equiv 0$ нужно ещё определить частное решение, соответствующее правой части этого уравнения. При решении задач с граничным условием второго рода (условие Неймана) $\left.\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|_{\rho=r}=f(\Omega)$ необходимо проверять выполнение условия разрешимости задачи $\oiint\limits_{S} f(r,\Omega)\,dS=\iiint\limits_{V} F(\rho,\Omega)\,dV$, где V – внутренность шара и S – его поверхность.

Сферические волновые функции. Пусть функция $u=u(\rho,\Omega)$ является амплитудой сферических волн $U(\rho,\Omega,t)=u(\rho,\Omega)\cdot e^{\pm i\omega t}$, расходящихся в свободном пространстве с частотой ω от шарового источника радиуса $\rho=r.$ Если зависимость от времени задана по гармоническому закону $e^{-i\omega t}$, то функция $u(\rho,\Omega)$ удовлетворяет задаче для уравнения амплитуд (уравнение Гельмгольца)

$$\Delta u+æ^{2}\cdot u(\rho,\Omega)=0,\quad \left.u\right|_{\rho=r}=f(\Omega)$$

при $æ=\frac{\omega}{c}=const>0$ – волновое число, $0<r\le\rho<\infty$ и $0\le 2\theta,\varphi\le 2\pi.$ Естественные граничные условия ограниченности по углу θ и периодичности по углу φ явно не записаны. Если для зависимости от времени принять $e^{-i\omega t}$, то на бесконечности амплитуда расходящихся сферических волн должна удовлетворять условию излучения Зоммерфельда $\lim\limits_{\rho\to\infty}\rho\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}-iæu\right)=0.$

Будем искать решение задачи в виде разложения в ряд по сферическим функциям $u(\rho,\Omega)=\sum\limits_{n,k}R_{nk}(\rho)\cdot Y_{nk}(\Omega);$ тогда

$$\Delta u+æ^2u(\rho,\Omega)=\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\cdot\tilde{\Delta}u+æ^2u=$$

$$=\sum_{n,k}\left\{\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{dR_{nk}}{d\rho}\right)\cdot Y_{nk}+\frac{1}{\rho^2}R_{nk}\cdot\tilde{\Delta}Y_{nk}+æ^2R_{nk}Y_{nk}\right\}=$$

$$=\sum_{n,k}\left\{\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{dR_{nk}}{d\rho}\right)+\left(æ^2-\frac{n(n+1)}{\rho^2}\right)R_{nk}\right\}Y_{nk}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow R''_{nk}+\frac{2}{\rho}R'_{nk}+\left(æ^2-\frac{n(n+1)}{\rho^2}\right)R_{nk}(\rho)=0.$$

Здесь использовано уравнение для сферических функций $\tilde{\Delta}Y_{nk}=\lambda_n\cdot Y_{nk}(\Omega)$ при $\lambda_n=-n(n+1)\le 0$ с граничными условиями по углу θ и условиями периодичности по углу φ. Если далее сделать замену в уравнении $R_{nk}(\rho)=\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\tilde{R}_{nk}(\rho)$, то для определения функции $\tilde{R}_{nk}(\rho)$ получим уравнение Бесселя $\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\tilde{R}_{nk}}{d\rho}\right)+\left(æ^2-\frac{\nu^2}{\rho^2}\right)\tilde{R}_{kn}(\rho)$ с индексом $\nu=n+\frac{1}{2}$, решение которого известно как $\tilde{R}_{nk}(\rho)=C_{nk}\cdot H_\nu^{(1)}(æ\rho)+\tilde{C}_{nk}\cdot H_\nu^{(2)}(æ\rho)$, где $C_{nk},\tilde{C}_{nk}=const$ и $H_\nu^{(i)}(æ\rho)$ – функции Ханкеля $i=1$ или $i=2$ (первого или второго рода) соответственно. Таким образом, получим

$$R_{nk}(\rho)=\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\tilde{R}_{nk}(\rho)=\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\left[C_{nk}\cdot H_\nu^{(1)}(æ\rho)+\tilde{C}_{nk}\cdot H_\nu^{(2)}(æ\rho)\right].$$

С помощью функций Ханкеля $H_\nu^{(1,2)}(æ\rho)$ наиболее удобно описывать процессы распространения гармонических колебаний.

Из физики известно, что плоские бегущие волны описываются функцией $A\cdot e^{i(\pm æ\rho-\omega t)}$ при $A=const$. На больших расстояниях от источника при $æ\rho\gg 1$ получим соответственно асимптотики для описания бегущих цилиндрических волн $H_\nu^{(1,2)}\left(æ\rho\right)\cdot e^{-i\omega t}\cong\dfrac{A}{\sqrt{\rho}}e^{i(\pm æ\rho-\omega t)}$ и для бегущих сферических волн $\sqrt{\dfrac{r}{\rho}}\cdot H_\nu^{(1,2)}\left(æ\rho\right)\cdot e^{-i\omega t}\cong\dfrac{A}{\rho}e^{i(\pm æ\rho-\omega t)}$. Очевидно, с ростом расстояния ρ наиболее быстро уменьшается амплитуда сферических волн (как бы от точечного источника). Показатель степени экспоненты вида $\left(+æ\rho-\omega t\right)$ соответствует уходящим (расходящимся) волнам, а показатель $\left(-æ\rho-\omega t\right)$ – приходящим (сходящимся). Так как по условию нашей задачи приходящие волны не возникают, то их амплитуда должна равняться нулю; поэтому коэффициент $\tilde{C}_{kn}=0$ при $H_\nu^{(2)}\left(æ\rho\right)$ – функции Ханкеля второго рода. Отметим, что, приняв зависимость от времени в виде $e^{+i\omega t}$, следует положить наоборот $C_{nk}=0$ и $\tilde{C}_{nk}\neq 0$.

Таким образом, амплитуда расходящихся сферических волн равна

$$u\left(\rho,\Omega\right)=\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\sum_{n,k}C_{nk}\cdot H_\nu^{(1)}\left(æ\rho\right)\cdot Y_{nk}\left(\Omega\right)\qquad\text{при } \nu=n+\frac{1}{2}.$$

Здесь коэффициент C_{nk} находится из граничного условия при $\rho=r$

$$u\big|_{\rho=r}=f\left(\Omega\right)=\sum_{n,k}C_{nk}\cdot H_\nu^{(1)}\left(ær\right)\cdot Y_{nk}\left(\Omega\right).$$

С помощью скалярного произведения получим

$$C_{nk}\cdot H_\nu^{(1)}\left(ær\right)=\left(f,Y_{nk}\right)\equiv f_{nk}=\oint\!\!\!\oint_{\Omega'}f\left(\Omega'\right)\cdot Y_{nk}^{*}\left(\Omega'\right)d\Omega',$$

$$C_{nk}=f_{nk}\big/H_\nu^{(1)}\left(ær\right).$$

Окончательный ответ задачи о величине амплитуды сферических волн, расходящихся от шара радиуса $\rho=r$, заряд на поверхности которого меняется по гармоническому закону с частотой ω, можно записать в виде

$$u\left(\rho,\Omega\right)=\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\sum_{n,k}f_{nk}\cdot\frac{H_\nu^{(1)}\left(æ\rho\right)}{H_\nu^{(1)}\left(ær\right)}\cdot Y_{nk}\left(\Omega\right)=$$

$$= \sqrt{\frac{r}{\rho}} \cdot \sum_{n,k} \frac{H_\nu^{(1)}(æ\rho)}{H_\nu^{(1)}(ær)} \cdot \left(\oiint_{\Omega'} f(\Omega') \cdot Y_{nk}^*(\Omega') d\Omega' \right) \cdot Y_{nk}(\Omega) =$$

$$= \sqrt{\frac{r}{\rho}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_\nu^{(1)}(æ\rho)}{H_\nu^{(1)}(ær)} \cdot \oiint_{\Omega'} f(\Omega') \cdot \left(\sum_{k=-n}^{n} Y_{nk}(\Omega) \cdot Y_{nk}^*(\Omega') \right) d\Omega' =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{h_n^{(1)}(æ\rho)}{h_n^{(1)}(ær)} \cdot \oiint_{\Omega'} f(\Omega') \cdot P_n\left(\cos\gamma(\Omega,\Omega')\right) d\Omega'.$$

Для сходимости ряда необходимо $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n \cdot C_n\right) = 0.$

При получении в ответе последнего выражения мы использовали формулу сложения сферических функций и перешли к «маленьким» сферическим функциям Ханкеля по формуле

$$h_n^{(1,\,2)}(x) \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2\,x}} \cdot H_{n+\frac{1}{2}}^{(1,2)} = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left(J_{n+\frac{1}{2}}(x) \pm i \cdot N_{n+\frac{1}{2}}(x) \right) = j_n(x) \pm i \cdot n_n(x).$$

Здесь $J_\nu(x)$ и $N_\nu(x)$ – обычные функции Бесселя и Неймана (иногда используют функцию Вебера $Y_\nu(x)$).

Только цилиндрические функции полуцелого индекса $\nu = n + \dfrac{1}{2}$ и их упрощения («маленькие» функции) могут быть выражены через комбинации элементарных функций; например,

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2\,x}} \cdot J_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-x)^n \cdot \left(\frac{d}{x \cdot d\,x} \right)^n \frac{\sin x}{x} \quad \text{при } n \in \mathbb{Z}_0 .$$

Здесь получим $j_0(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \sin x,$ $j_1(x) = \dfrac{1}{x^2}(\sin x - x \cdot \cos\, x),$

$j_2(x) = \dfrac{1}{x^3}\left((3 - x^2) \cdot \sin x - 3x \cdot \cos\, x\right)$ и т. д. Соответствующие формулы для $n_n(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2\,x}} \cdot N_{n+\frac{1}{2}}(x)$ получается из формулы для $j_n(x)$ после замены

$\sin x \to -\cos x$ и $\cos x \to \sin x$. Отметим также формулы $H_\nu^{(1,2)}(x) = e^{\mp i\pi\nu} \cdot H_{-\nu}^{(1,2)}(x)$ и $N_\nu(x) = (-1)^{n+1} \cdot J_{-\nu}(x)$ при $\nu = \pm n + \dfrac{1}{2}$.

Если «маленькие» сферические функции Бесселя $j_n(x)$, Неймана $n_n(x)$ и Ханкеля $h_n^{(1,2)}(x)$ обозначить единым символом $z_n(x)$, то для них можно получить общее уравнение и рекуррентные формулы

$$z_n'' + \frac{2}{x} z_n' + \left(1 - \frac{1}{x^2} \cdot n\ (n+1)\right) \cdot z_n(x) = 0,$$

$$n \cdot z_{n-1} - (n+1) \cdot z_{n+1} = (2n+1) z_n',$$

$$z_{n+1} + z_{n-1} = \frac{1}{x}(2n+1) \cdot z_n.$$

При больших значениях аргумента $x >> \nu^2 > 0$ (или $x >> 1$) «маленькие» функции Ханкеля имеют асимптотики $h_n^{(1,\,2)}(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}} \cdot H_{n+\frac{1}{2}}^{(1,2)}(x) \cong \mp \dfrac{i}{x} \cdot e^{\pm i\,x}$. Воспользовавшись этим асимптотическим представлением, можно показать, что амплитуда расходящихся сферических волн пропорциональна $u(\rho, \Omega) \approx A \cdot h_n^{(1)}(æ\rho) \cong \dfrac{A}{\rho} e^{iæ\rho}$ при $\rho >> 1$ и удовлетворяет на бесконечности условию излучения Зоммерфельда:

$$\lim_{\rho \to \infty} \rho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} - iæu\right) = A \lim_{\rho \to \infty} \rho \cdot \left(\frac{iæ}{\rho} e^{iæ\rho} - \frac{1}{\rho^2} e^{iæ\rho} - iæ \cdot \frac{1}{\rho} e^{iæ\rho}\right) =$$

$$= -A \cdot \lim_{\rho \to \infty} \frac{1}{\rho} e^{iæ\rho} = 0.$$

В заключение приведем несколько важных соотношений для функций Бесселя полуцелого порядка и других функций.

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2\,x}} \cdot J_{n+\frac{1}{2}}(x), \quad J_{\frac{1}{2}}(x) = N_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\,x}} \cdot \sin x,\ J_{-\frac{1}{2}}(x) =$$

$$= -N_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\,x}} \cdot \cos\,x.$$

$$H^{(1,\,2)}_{\frac{1}{2}}(x) = \mp i \cdot H^{(1,\,2)}_{-\frac{1}{2}}(x) = \mp i\sqrt{\frac{2}{\pi\, x}}\; e^{\pm ix} =$$

$$= J_{\frac{1}{2}}(x) \pm i \cdot N_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\, x}}\;(\sin x \mp i \cdot \cos x).$$

Все цилиндрические функции полуцелого порядка (индекса) $\nu = n + \frac{1}{2}$ при $n \in \mathbb{Z}$ легко выражаются через конечную комбинацию элементарных функций. Зная значение функций $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\, x}}\sin x$ и $J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\, x}}\cos x$, нужно использовать рекурентную формулу $J_{p+1}(x) = \frac{2p}{x} J_p(x) - J_{p-1}(x)$ при $\pm p = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$ и соответствие $N_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^{n+1} \cdot J_{-n-\frac{1}{2}}(x)$ при $n \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$J_{\pm\frac{1}{2}}(x) = \pm N_{\mp\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\, x}} \cdot \frac{\sin x}{\cos x},$$

$$J_{\pm\frac{3}{2}}(x) = \mp N_{\mp\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\, x}} \cdot \left(\pm\frac{1}{x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right),$$

$$J_{\pm\frac{5}{2}}(x) = \pm N_{\mp\frac{5}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\, x}} \cdot \left((\frac{3}{x^2} - 1) \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \mp \frac{3}{x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \right),$$

$$J_{\pm\frac{7}{2}}(x) = \mp N_{\mp\frac{7}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\, x}} \cdot \left(\pm(\frac{15}{x^3} - \frac{6}{x})\ \frac{\sin x}{\cos x} - (\frac{15}{x^2} - 1)\ \frac{\cos x}{\sin x} \right)$$

и т. д.

Используя выражения для функций Бесселя и Неймана, легко получить соответствующие функции Ханкеля $H^{(1,2)}_{\nu}(x) = J_{\nu}(x) \pm i \cdot N_{\nu}(x)$. Для получения сферических цилиндрических функций («маленьких» функций) достаточно воспользоваться их определением и известными значениями «больших» функций

$$h_n^{(1,\,2)}(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\cdot H^{(1,\,2)}_{n+\frac{1}{2}}(x)=j_n(x)\pm i\cdot n_n(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\cdot\left(J_{n+\frac{1}{2}}(x)\pm i\cdot N_{n+\frac{1}{2}}(x)\right)$$

и формулой соответствия $n_n(x)=(-1)^{n+1}\cdot j_{-n-1}(x)$ при $n\in\mathbb{Z}$.

Приведем также некоторые формулы, связанные с функциями Лежандра $P_{n\,k}(x)$ и сферическими функциями $Y_{n\,k}(\theta,\varphi)$.

$$P_0(x)=P_0(\cos\theta)=1,\quad P_1(x)=P_1(\cos\theta)=\cos\theta,$$

$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),\quad P_2(\cos\theta)=\frac{1}{4}(3\cos\ 2\theta+1),$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x),\quad P_3(\cos\ \theta)=\frac{1}{8}(5\cos\ 3\ \theta+3\cos\ \theta),$$

$$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)=\frac{1}{64}(35\cos\ 4\theta+20\cos\ 2\theta+9),$$

$$P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)=\frac{1}{128}(63\cos\ 5\theta+35\cos\ 3\theta+30\cos\ \theta).$$

$$P_{1,1}(x)=\sqrt{1-x^2}=\sin\theta,\quad P_{2,1}(x)=3x\sqrt{1-x^2}=\frac{3}{2}\sin 2\theta,$$

$$P_{2,2}(x)=3\left(1-x^2\right)=\frac{3}{2}\left(1-\cos 2\theta\right);$$

$$P_{3,1}(x)=\frac{3}{2}(5x^2-1)\sqrt{1-x^2}=\frac{3}{8}(5\cos\ 3\theta+\sin\theta),$$

$$P_{3,2}(x)=15(1-x^2)\ x=\frac{15}{4}(\cos\ \theta-\cos\ 3\theta),$$

$$P_{3,3}(x)=15(1-x^2)^{3/2}=\frac{15}{4}(3\sin\theta-\sin 3\theta).$$

$$P_{4,1}(x)=\frac{5}{2}(7x^2-3x)\sqrt{1-x^2}=\frac{5}{2}(7\cos^2\theta-3\cos\ \theta)\cdot\sin\theta,$$

$$P_{4,2}(x)=\frac{15}{2}(7x^2-1)(1-x^2)=\frac{15}{2}(7\cos^2\theta-1)\cdot\sin^2\theta,$$

$$P_{4,3}(x) = 105x(1-x^2)^{3/2} = 105\cos\ \theta \cdot \sin^3\theta,$$

$$P_{4,4}(x) = 105(1-x^2)^2 = 105\sin^4\theta,$$

$$P_{n,-k}(x) = (-1)^k \cdot \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \cdot P_{n,+k}(x) \text{ – замена знака.}$$

$$Y_{0,0}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}. \quad Y_{1,0}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\ \pi}}\cos\ \theta, \quad Y_{1,1}(\theta,\varphi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\ \pi}}\sin\theta \cdot e^{i\varphi}.$$

$$Y_{2,0}(\theta,\ \varphi) = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{\pi}} \cdot (3\cos\ 2\theta + 1), \quad Y_{2,1}(\theta,\ \varphi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\ \pi}} \cdot \sin 2\ \theta \cdot e^{i\varphi},$$

$$Y_{2,2}\left(\theta,\ \varphi\right) = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{2\ \pi}} \cdot \left(1 - \cos\ 2\ \theta\right) \cdot e^{2i\varphi}.$$

$$Y_{3,0}(\theta,\ \varphi) = \frac{1}{16}\sqrt{\frac{7}{\pi}} \cdot (5\cos\ 3\theta - 3\cos\ \theta),$$

$$Y_{3,1}(\theta,\ \varphi) = \frac{1}{32}\sqrt{\frac{21}{\pi}} \cdot (5\sin 3\theta + \sin\theta)\ e^{i\varphi},$$

$$Y_{3,2}\left(\theta,\varphi\right) = \frac{1}{16}\sqrt{\frac{105}{2\ \pi}} \cdot \left(\cos\theta - \cos 3\theta\right) e^{2i\varphi},$$

$$Y_{3,3}(\theta,\ \varphi) = \frac{1}{32}\sqrt{\frac{35}{\pi}} \cdot (5\sin\theta - \sin 3\theta)\ e^{3i\varphi}.$$

$$Y_{4,0}(\theta,\ \varphi) = \frac{3}{128\sqrt{\pi}}(35\cos\ 4\theta + 20\cos\ 2\theta + 9),$$

$$Y_{4,1}(\theta,\ \varphi) = \frac{3}{16}\sqrt{\frac{5}{\pi}} \cdot (7\cos^2\theta - 3) \cdot \sin 2\theta \cdot e^{i\varphi},$$

$$Y_{4,2}(\theta,\ \varphi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2\ \pi}} \cdot (7\cos^2\theta - 1) \cdot \sin^2\theta \cdot e^{2i\varphi},$$

$$Y_{4,3}(\theta,\ \varphi) = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{35}{\pi}} \cdot \cos\ \ \theta \cdot \sin^3\theta \cdot e^{3i\varphi}, \quad Y_{4,4}(\theta,\ \varphi) = \frac{3}{16}\sqrt{\frac{35}{2\ \pi}} \cdot \sin^4\theta \cdot e^{4i\varphi}.$$

$$Y_{5,\,0}\left(\theta,\ \varphi\right)=\frac{1}{2^8}\sqrt{\frac{11}{\pi}}\cdot\left(63\ \cos\ 5\theta+35\cos 3\theta+30\cos\theta\right),$$

$$Y_{5,1}(\theta,\varphi)=\frac{1}{2^4}\sqrt{\frac{11\cdot 15}{2\pi}}\cdot\left(21\cos^4\theta-14\cos^2\theta+1\right)\cdot\sin\theta\cdot e^{i\varphi},$$

$$Y_{5,2}\left(\theta,\ \varphi\right)=\frac{1}{8}\sqrt{\frac{105}{2\ \pi}}\cdot\left(7\ \cos^3\theta-\cos\ \theta\right)\cdot\sin^2\theta\cdot e^{2\,i\,\varphi},$$

$$Y_{5,3}\left(\theta,\ \varphi\right)=\frac{1}{2^5}\sqrt{\frac{11\cdot 35}{\pi}}\cdot\left(21\cos^2\theta-1\right)\cdot\sin^3\theta\cdot e^{3\,i\,\varphi},$$

$$Y_{5,4}(\theta,\varphi)=\frac{7}{2^4}\sqrt{\frac{11\cdot 35}{2\pi}}\cdot\cos\theta\cdot\sin^4\theta\cdot e^{4i\varphi},$$

$$Y_{5,5}(\theta,\varphi)=\frac{1}{2^5}\sqrt{\frac{7\cdot 11}{\pi}}\cdot\sin^5\theta\cdot e^{5i\varphi}.$$

$$Y_{n,\,-k}\left(\theta,\ \varphi\right)=\left(-1\right)^k\cdot Y^*_{n,\,+k}\left(\theta,\ \varphi\right)$$ – замена знака.

Решение задач для уравнения теплопроводности (переноса).

<u>**Задача 3.1.**</u> Решение задачи о нагревании холодного шара $0\le\rho\le r$, внутри которого источники тепла отсутствуют $F=0$, а нагревание происходит с поверхности $f\ne 0$.

$$\begin{cases}\Delta_3 u-\dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial u}{\partial t}=F=0. & u=u(\rho,\theta,\varphi,t).\\ u\big|_{\rho=r}=f(\Omega,t)\equiv At\cdot Y_{2,-1}(\Omega); & 0\le\rho\le r,\qquad 0\le 2\theta,\varphi\le 2\pi,\\ u\big|_{t=0}=0. & 0\le t<\infty.\qquad \Omega(\theta,\varphi).\end{cases}$$

Здесь явно не записаны пять естественных граничных условий – условия ограниченности при $\rho=0,\quad\theta=0,\quad\theta=\pi$ и оба условия периодичности по углу φ.

$$\Delta_3 \equiv \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\,\rho}\left(\rho^2\frac{\partial}{\partial\,\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\tilde{\Delta}\,,$$

где $\tilde{\Delta} \equiv \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right)+\dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$

Постоянная b – коэффициент температуропроводности.

1. Отделение зависимости от углов $\Omega(\theta,\varphi)$.

Разложим искомую функцию $u(\rho,\Omega(\theta,\varphi),t)$ в ряд по сферическим функциям

$$Y_{n\,k}(\Omega)\equiv Y_{n\,k}(\theta,\ \varphi)=\sqrt{\frac{2n+1}{4\ \pi}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}}\cdot P_{n\,k}(\cos\ \theta)\cdot e^{i\,k\,\varphi}.$$

Здесь $P_{n\,k}(x)=\dfrac{(1-x^2)^{k/2}}{2^n\cdot n!}\dfrac{d^{n+k}}{d\,x^{n+k}}(x^2-1)^n=(1-x^2)^{k/2}\cdot P_n^{(k)}(x)$ – присоединенные функции Лежандра; очевидно $P_{n\,k}(x)=0$ при $k>n$.

Решение задачи будем искать в виде

$$u(\rho,\Omega,\ t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n}u_{n\,k}(\rho,\ t)\cdot Y_{n\,k}(\theta,\ \varphi)\equiv\sum_{n,\,k}u_{n\,k}(\rho,\ t)\cdot Y_{n\,k}(\Omega).$$

Подставим этот двойной ряд в уравнение, тогда

$$\Delta_3 u-\frac{1}{b^2}\ \frac{\partial\,u}{\partial\,t}=\frac{1}{\rho^2}\ \frac{\partial}{\partial\,\rho}\left(\rho^2\frac{\partial\,u}{\partial\,\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\cdot\tilde{\Delta}\ u-\frac{1}{b^2}\ \frac{\partial\,u}{\partial\,t}=$$

$$=\sum_{n,\,k}\left\{\frac{1}{\rho^2}\ \frac{\partial}{\partial\,\rho}\left(\rho^2\frac{\partial\,u_{n\,k}}{\partial\,\rho}\right)\cdot Y_{n\,k}+\frac{1}{\rho^2}u_{n\,k}\cdot\tilde{\Delta}Y_{n\,k}-\frac{1}{b^2}\ \frac{\partial\,u_{n\,k}}{\partial\,t}\ Y_{n\,k}\right\}=$$

$$=\sum_{n,k}\left\{\frac{1}{\rho^2}\ \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial\,u_{nk}}{\partial\rho}\right)-\frac{n(n+1)}{\rho^2}u_{nk}-\frac{1}{b^2}\ \frac{\partial\,u_{nk}}{\partial\,t}\right\}\cdot Y_{n\,k}(\Omega)=0.$$

Здесь воспользовались уравнением $\tilde{\Delta}Y_{n\,k}=\lambda_n\cdot Y_{nk}=-n\ (n+1)\cdot Y_{nk}(\Omega)$, так как сферическая функция $Y_{n\,k}\ (\Omega)$ является собственной функцией оператора $\tilde{\Delta}$ и собственное число равно $\lambda_n=-n(n+1)\le 0$.

Так как заданное уравнение – однородное, то выражение в скобках $\{...\}=0$ или

$$\frac{1}{\rho^2}\ \frac{\partial}{\partial\,\rho}\ \left(\rho^2\frac{\partial\,u_{u\,k}}{\partial\,\rho}\right)-\frac{n\ (n+1)}{\rho^2}u_{n\,k}-\frac{1}{b^2}\ \frac{\partial}{\partial\,t}u_{n\,k}(\rho,\ t)=0.$$

Аналогично разложим в ряды по сферическим функциям оба заданных условия задачи

$$u\big|_{\rho=r}\equiv u(r,\Omega,t)=\sum_{n,k}u_{nk}(r,t)\cdot Y_{nk}(\Omega)=At\cdot Y_{2,-1}(\Omega),$$

где $u_{n\,k}(r,\ t)=A\ t\cdot\left(Y_{2,\,-1},\ Y_{n\,k}\right)=A\ t\cdot\delta_{n,\,2}\cdot\delta_{k,\,-1}$.

$$u\big|_{t=0}\ \equiv u\ (\rho,\ \Omega,\ 0)=\sum_{n,\,k}\ u_{n\,k}(\rho,\ 0)\cdot Y_{n\,k}\left(\Omega\right)=0\Rightarrow u_{n\,k}(\rho,\ 0)=0.$$

Итак, для упрощенной функции $u_{n\,k}(\rho,t)$, которая является коэффициентом разложения в ряд по сферическим функциям, получаем задачу только с двумя переменными ρ и t:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho^2}\ \dfrac{\partial}{\partial\,\rho}\left(\rho^2\dfrac{\partial\,u_{n\,k}}{\partial\,\rho}\right)-\dfrac{n\ (n+1)}{\rho^2}\ u_{n\,k}-\dfrac{1}{b^2}\ \dfrac{\partial\,u_{n\,k}}{\partial\,t}=0;\quad u_{n\,k}=u_{n\,k}(\rho,\ t).\\ \left|u_{n\,k}(0,t)\right|<\infty,\ \ u_{n\,k}(r,\ t)=A\ t\cdot\delta_{n,\,2}\cdot\delta_{k,\,-1};\quad u_{n\,k}(\rho,\ 0)=0.\end{cases}$$

Очевидно, если индексы $n\neq 2$ или $k\neq -1$, то уравнение и все условия равны нулю, поэтому и решение задачи оказывается тривиальным. Значит, от бесконечного количества членов $u_{n\,k}(\rho,\ t)$ останется только один отличный от нуля член $u_{2,\,-1}(\rho,\ t)\neq 0$, который в дальнейшем будем записывать просто $\tilde{u}(\rho,\ t)$. Условия задачи теперь будут

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho^2}\ \dfrac{\partial}{\partial\rho}\ \left(\rho^2\dfrac{\partial\,\tilde{u}}{\partial\,\rho}\right)-\dfrac{6}{\rho^2}\tilde{u}-\dfrac{1}{b^2}\ \dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial t}=0 & \tilde{u}=\tilde{u}(\rho,\ t).\\ & 0\le\rho\le r,\quad 0\le t<\infty.\\ |\tilde{u}(0,\ t)|<\infty,\ \ \tilde{u}(r,\ t)=A\ t;\ \ \tilde{u}(\rho,\ 0)=0. & n\,(n+1)=2\cdot 3=6.\end{cases}$$

А искомая функция $u(\rho,\ \Omega,\ t)$ примет вид:

$$u\ (\rho,\ \Omega,\ t)=\sum_{n,\,k}u_{n\,k}(\rho,\ t)\cdot Y_{n\,k}(\Omega)=\sum_{n,\,k}\left(\tilde{u}(\rho,\ t)\cdot\delta_{n,\,2}\cdot\delta_{k,\,-1}\right)\cdot Y_{n\,k}(\Omega)=$$

$$=\tilde{u}(\rho,\ t)\cdot Y_{2,\,-1}(\Omega)=-\tilde{u}\ (\rho,\ t)\cdot Y^{*}_{2,\,1}\ (\Omega).$$

Здесь использована известная формула $Y_{n,\,-k}(\Omega)=(-1)^{k}\cdot Y^{*}_{n,\,+k}(\Omega)$.

2. Преобразование уравнения для функции $\tilde{u}(\rho,\ t)$.

Легко проверить, что замена $\tilde{u}(\rho,t)=V(\rho,t)\cdot\sqrt{\dfrac{r}{\rho}}$ приведет первые два слагаемых нашего уравнения к уравнению Бесселя:

$$\frac{1}{\rho^{2}}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^{2}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\rho}\right)-\frac{n(n+1)}{\rho^{2}}\tilde{u}=\frac{1}{\rho^{2}}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^{2}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}\left(V\sqrt{\frac{r}{\rho}}\right)\right)-\frac{n(n+1)}{\rho^{2}}\cdot V\sqrt{\frac{r}{\rho}}=$$

$$=\frac{1}{\rho^{2}}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\sqrt{r\rho^{3}}\cdot\frac{\partial V}{\partial\rho}-\frac{1}{2}V\sqrt{r\rho}\right)-\frac{n\,(n+1)}{\rho^{2}}\cdot V\sqrt{\frac{r}{\rho}}=$$

$$=\frac{1}{\rho^{2}}\left(\sqrt{r\rho^{3}}\cdot\frac{\partial^{2}V}{\partial\rho^{2}}+\frac{3}{2}\sqrt{r\rho}\frac{\partial V}{\partial\rho}-\frac{1}{2}\sqrt{r\rho}\frac{\partial V}{\partial\rho}-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot V\right)-\frac{n\,(n+1)}{\rho^{2}}\cdot V\sqrt{\frac{r}{\rho}}=$$

$$=\left(\frac{\partial^{2}V}{\partial\rho^{2}}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho^{2}}\left(n^{2}+n+\frac{1}{4}\right)\cdot V\right)\sqrt{\frac{r}{\rho}}=$$

$$=\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{2}}{\rho^{2}}V\right)\cdot\sqrt{\frac{r}{\rho}}.$$

Очевидно, последняя дифференциальная форма соответствует оператору Бесселя $\hat{D}_{Б}=\dfrac{1}{x}\ \dfrac{d}{d\,x}\left(x\ \dfrac{d}{d\,x}\right)-\dfrac{\nu^{2}}{x^{2}}$ при $\nu=n+\dfrac{1}{2}$, поэтому задачу для функции $V(\rho,t)$ запишем

$$V = V(\rho,t).$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial V}{\partial\rho}\right) - \dfrac{\nu^2}{\rho^2}V - \dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial V}{\partial t} = 0. \\ \left|V(0,t)\right| < \infty, \quad V(r,t) = At; \quad V(\rho,0) = 0. \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 \le \rho \le r, \qquad 0 \le t < \infty. \\ \nu = n + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2} \quad \text{при } n = 2. \end{matrix}$$

Граничные и начальные условия не изменились.

3. Приведение граничных условий к однородным.

Введем новую функцию $w(\rho,t)$, для которой граничные условия сделаем однородными, по формуле $V(\rho,t) = w(\rho,t) + \alpha(t)\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^p + \beta(t)$; где коэффициенты $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ и показатель $p > 0$ можно подобрать. Действительно,

$$\left|V(0,t)\right| = \left|w(0,t) + \beta(t)\right| < \infty \Rightarrow \left|w(0,t)\right| < \infty \quad \text{при} \quad \beta(t) = 0.$$

$$V(r,t) = w(r,t) + \alpha(t) = At \Rightarrow w(r,t) = 0 \quad \text{при} \quad \alpha(t) = At.$$

Получается $V(\rho,t) = w(\rho,t) + At\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^p$; поэтому начальное условие $V(\rho,0) = w(\rho,0) = 0$ остается неизменимым.

Для определения показателя $p > 0$ используем уравнение

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) - \frac{\nu^2}{\rho^2}V - \frac{1}{b^2}\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial w}{\partial\rho}\right) + At\frac{p^2}{\rho^2}\left(\frac{\rho}{r}\right)^p -$$

$$-\frac{\nu^2}{\rho^2}\left(w + At\left(\frac{\rho}{r}\right)^p\right) - \frac{1}{b^2}\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{A}{b^2}\left(\frac{\rho}{r}\right)^p = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial w}{\partial\rho}\right) - \frac{\nu^2}{\rho^2}w -$$

$$-\frac{1}{b^2}\frac{\partial w}{\partial t} + At\cdot\frac{p^2-\nu^2}{\rho^2}\left(\frac{\rho}{r}\right)^2 - \frac{A}{b^2}\left(\frac{\rho}{r}\right)^p = 0.$$

Если принять показатель $p=\nu$, то уравнение для функции $w(\rho,\ t)$ при этом значительно упрощается, и получим $\upsilon(\rho,t)=w(\rho,t)+At\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^{\nu}$ при $\nu=n+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$. А задача теперь будет

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial w}{\partial\rho}\right)-\dfrac{\nu^2}{\rho^2}w-\dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial w}{\partial t}=\dfrac{A}{b^2}\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^{\nu}. \\ \left|w(0,t)\right|<\infty,\quad w(r,t)=0;\quad w(\rho,0)=0.\end{cases}\qquad \begin{matrix} w=w(\rho,\ t). \\ 0\le\rho\le r,\quad 0\le t<\infty. \\ \nu=n+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}.\end{matrix}$$

Связь первоначальной функции $u(\rho,\ \Omega,\ t)$ и полученной здесь $w(\rho,\ \Omega,\ t)$ оказывается равной

$$u(\rho,\ \Omega,\ t)=-\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\left\{A\ t\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^{5/2}+w\big(\rho,\ t\big)\right\}\cdot Y^{*}_{2,1}(\Omega).$$

4. Разделение переменных $w(\rho,\ t)=R(\rho)\cdot T(t)$ и решение краевой задачи по переменной ρ.

Для функции $R(\rho)$ можно поставить краевую задачу

$$\begin{cases}\hat{D}_Б R=\lambda R(\rho),\quad \text{где } \hat{D}_Б=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{d}{d\rho}\right)-\dfrac{\nu^2}{\rho^2}. \\ \left|R(0)\right|<\infty,\quad R(r)=0. \qquad\qquad \lambda=-\mu^2\le 0.\end{cases}$$

Оператор функции Бесселя приводит к уравнению

$$R''+\frac{1}{\rho}R'+\left(\mu^2-\frac{\nu^2}{\rho^2}\right)\ R\ (\rho)=0,$$

общее решение которого известно:

$$R(\rho)=C\cdot J_{\nu}(\mu\ \rho)+\tilde{C}\cdot N_{\nu}(\mu\ \rho),\qquad \text{где } \nu=\frac{5}{2} \text{ и } C,\ \tilde{C}=const.$$

Здесь $J_{\nu}(x)$ и $N_{\nu}(x)$ – функции Бесселя и Неймана соответственно.

Накладывая граничные условия, получим

$$|R(0)| < \infty \Rightarrow \tilde{C} = 0 \because J(0) = 0 \quad \text{и} \quad N_\nu(0) = -\infty.$$

$$R(r) = C \cdot J_\nu(\mu r) = 0 \Rightarrow \mu_m = \alpha_m^{(\nu)} \big/ r > 0, \qquad C \neq 0;$$

где $\alpha_m^{(\nu)} > 0$ – простые корни уравнения $J_\nu(\alpha) = 0$ и $m \in \mathbb{N}$.

Тогда получим $\lambda_m = -\mu_m^2 = -\left(\alpha_m^{(\nu)} / r\right)^2 < 0$ – множество собственных чисел (спектр задачи) и $R_m(\rho) = C \cdot J_\nu(\mu_m \rho) = C \cdot J_\nu(\alpha_m^{(\nu)} \dfrac{\rho}{r})$ – множество собственных функций оператора Бесселя $\hat{D}_Б$. Множитель $C \neq 0$ находим из условия нормировки на единицу собственной функции $R_m(\rho)$ и получим ортонормированный базис $R_m(\rho) = \dfrac{\sqrt{2}}{r} J_\nu \left(\alpha_m^{(\nu)} \dfrac{\rho}{r}\right) \Big/ J_{\nu+1}\left(\alpha_m^{(\nu)}\right)$, удовлетворяющий условиям ортогональности $\left(R_m, R_{m'}\right) = \delta_{m, m'}$. Теперь функцию $w(\rho, t)$ можно представить в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда Фурье–Бесселя

$$w(\rho, t) = \sum_{m=1}^{\infty} T_m(t)\, R_m(\rho),$$

где необходимо выполнение предела $\lim\limits_{m \to \infty} T_m(t) = 0$.

5. Постановка задачи для определения функции $T_m(t)$.

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial w}{\partial \rho}\right) - \frac{\nu^2}{\rho^2} w - \frac{1}{b^2} \frac{\partial w}{\partial t} =$$

$$= \sum_m \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{d R_m}{d\rho}\right) \cdot T_m - \frac{\nu^2}{\rho^2} R_m T_m - \frac{1}{b^2} R_m T_m' \right\} =$$

$$= -\frac{1}{b^2} \cdot \sum_m \left\{ T_m' R_m - b^2 \cdot \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d R_m}{d\rho}\right) - \frac{\nu^2}{\rho^2} R_m \right] T_m \right\} =$$

$$= -\frac{1}{b^2} \sum_m \left\{ T_m' + (\mu_m b)^2 \cdot T_m \right\} R_m = \frac{A}{b^2} \left(\frac{\rho}{r}\right)^\nu, \quad \nu = \frac{5}{2}.$$

Здесь использовано уравнение Бесселя в форме

$$\frac{1}{\rho}\ \frac{d}{d\,\rho}\left(\rho\ \frac{d\,R_m}{d\,\rho}\right)-\frac{\nu^2}{\rho^2}\ R_m \equiv \hat{D}_Б\,R_m=\lambda_m\ R_m(\rho),$$

где $\lambda_m=-\mu_m^2=-\left(\alpha_m^{(\nu)}/r\right)^2<0$.

Так как уравнение для функции $w(\rho,t)$ неоднородное, то его правую часть нужно разложить в ряд по функциям Бесселя

$$\sum_m\ \left\{\ T_m'+(\mu_m b)^2\cdot T_m\ \right\}\ R_m=-A\ \left(\frac{\rho}{r}\right)^\nu \equiv \sum_m\ \gamma_m(t)\cdot R_m(\rho),$$

где $\gamma_m(t)=-A\cdot\left(\left(\frac{\rho}{r}\right)^\nu,R_m\right)=A\cdot\int\limits_0^r\left(\frac{\rho}{r}\right)^\nu\cdot R_m(\rho)\rho\,d\rho=$

$$=\frac{-A\sqrt{2}}{r^{\nu+1}\cdot J_{\nu+1}(\alpha)}\cdot\int\limits_0^r J_\nu\left(\alpha_m^{(\nu)}\frac{\rho}{r}\right)\cdot\rho^{\nu+1}d\ \rho=$$

$$=\left[\alpha_m^{(\nu)}\frac{\rho}{r}=\mu_m\rho=x\ge 0\right]=\frac{-Ar\sqrt{2}}{\alpha^{\nu+2}\cdot J_{\nu+1}(\alpha)}\cdot\int\limits_0^\alpha J_\nu(x)x^{\nu+1}dx=$$

$$=\frac{-Ar\sqrt{2}}{\alpha^{\nu+2}\cdot J_{\nu+1}(\alpha)}\cdot x^{\nu+1}J_{\nu+1}(x)\Big|_0^\alpha=-\frac{Ar\sqrt{2}}{\alpha_m^{(\nu)}}=-\frac{A\sqrt{2}}{\mu_m}<0.$$

Здесь воспользовались рекуррентной формулой

$\frac{d}{d\,x}\left(x^p\cdot J_p(x)\right)=x^p\cdot J_{p-1}(x)$ или $\int J_{p-1}(x)x^p d\,x=x^p J_p(x)$ при $p=\nu+1$.

Легко находится и начальное условие для функции $T_m(t)$

$$w(\rho,0)=\sum_m\ T_m(0)\cdot R_m(\rho)=0\Rightarrow T_m(0)=0.$$

Итак, для функции $T_m(t)$ удается поставить задачу Коши

$$T_m'+(\mu_m\ b)^2\cdot T_m(t)=\gamma_m\equiv-\frac{A\sqrt{2}}{\mu_m};\quad T_m(0)=0.$$

6. Решение начальной задачи Коши для функции $T_m(t)$.

Соответствующее однородное уравнение $\overset{o}{T}{}'_m + (\mu_m b)^2 \cdot \overset{o}{T}_m(t) = 0$ или $\dfrac{d\overset{0}{T}_m}{\overset{0}{T}_m} = -(\mu_m\ b)^2 dt$ имеет решение $\overset{0}{T}_m(t) = C_m \cdot e^{-(\mu_m b)^2 t}$, где C_m – произвольная постоянная. Так как правая часть уравнения постоянная $\gamma_m = const$, то и частное решение $\tilde{T}_m(t)$ тоже следует искать в виде постоянной; поэтому

$$\tilde{T}'_m + (\mu_m\ b)^2 \cdot \tilde{T}_m = 0 + \left(\mu_m\ b\right)^2 \cdot \tilde{T}_m = \gamma_m \Rightarrow \tilde{T}_m = \gamma_m \,/\, (\mu_m\ b)^2 = -\frac{A\sqrt{2}}{b^2 \mu_m^3} < 0.$$

Следовательно, общее решение нашего линейного неоднородного уравнение получится

$$T_m(t) = \overset{0}{T}_m + \tilde{T}_m = C_m e^{-(\mu_m b)^2\, t} - \frac{A\sqrt{2}}{b^2 \mu_m^3}, \qquad C_m = const\,.$$

Начальное условие $T_m(0) = 0$ позволяет определить произвольную постоянную

$$T_m(t) = C_m - \frac{A\sqrt{2}}{b^2 \mu_m^3} = 0 \Rightarrow C_m = \frac{A\sqrt{2}}{b^2 \mu_m^3} > 0.$$

Окончательно решение задачи Коши для функции $T_m(t)$ будет

$$T_m(t) = -\frac{A\sqrt{2}}{b^2 \mu_m^3}\left(1 - e^{-(\mu_m\ b)^2 t}\right) < 0.$$

Так как значения последовательности корней функции Бесселя (составляют спектр собственных значений краевой задачи) возрастают неограниченно $\alpha_m^{(v)} \to \infty$ при $m \to \infty$, то выполняется необходимое условие $\lim\limits_{m\to\infty} T_m\ \left(t\right) = 0$ для сходимости разложения функции $w(\rho,\ t)$; там величины $T_m(t)$ играют роль координаты.

7. Окончательный вид решения для функции $u\ (\rho,\ \Omega,\ t)$.

Ранее было доказано, что

$$u(\rho,\ \Omega,\ t) = -\sqrt{\frac{r}{\rho}} \cdot \left\{ A\ t \cdot \left(\frac{\rho}{r}\right)^{5/2} + w(\rho,\ t) \right\} \cdot Y_{2,1}^{*}(\Omega).$$

где функция $w(\rho,\ t)$ представляется в виде ряда

$$w(\rho,\ t) = \sum_{m=1}^{\infty} T_m(t) \cdot R_m(\rho) = -\frac{2A}{b^2 r} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 - e^{-(\mu_m b)^2 t}\right) \frac{J_\nu(\mu_m\ \rho)}{\mu_m^3\ J_{\nu+1}(\mu_m\ r)}.$$

Поэтому окончательный вид решения задачи будет

$$u(\rho,\Omega,t) = -A\sqrt{\frac{r}{\rho}} \cdot \left\{ t \cdot \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\nu} - \frac{2}{b^2 r} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 - e^{-(\mu_m b)^2 t}\right) \frac{J_\nu(\mu_m \rho)}{\mu_m^3 J_{\nu+1}(\mu_m r)} \right\} \cdot Y_{2,1}^{*}(\Omega),$$

где $\nu = n + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ при $n = 2$, $\mu_m = \alpha_m^{(\nu)} / r > 0;\quad J_{\nu+1}(\alpha_m^{(\nu)}) \neq 0$. Здесь

$$Y_{2,1}^{*}(\Omega(\theta,\varphi)) = \sqrt{\frac{5}{4\pi} \cdot \frac{1!}{3!}} \cdot P_{2,1}(cos\theta) \cdot e^{-i\varphi},$$

$$P_{2,1}(x) = \frac{(1-x^2)^{1/2}}{2^2 \cdot 2!} \cdot \frac{d^3}{d\ x^3}(x^2 - 1)^2 = \frac{1}{8}\sqrt{1-x^2} \cdot \frac{d^3}{d\ x^3}(x^4 - 2x^2 + 1) =$$

$$= \frac{1}{8}\sqrt{1-x^2} \cdot 24x = 3x\sqrt{1-x^2} \Rightarrow P_{2,1}(\cos\theta) = \frac{3}{2}\sin 2\theta,$$

$$Y_{2,1}^{*}(\Omega(\theta,\varphi)) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{\pi}} \cdot \sin 2\theta \cdot e^{-i\varphi}.$$

Так как $\mu_m = \alpha_m^{(\nu)} / r \approx m$ при больших значениях $m >> 1$, то общий член ряда имеет порядок $O\left(\frac{1}{m^3}\right)$; значит ряд для функции $w(\rho, t)$ (также $u(\rho,\Omega,t)$) сходится абсолютно и равномерно.

8. Проверка полученного решения по условиям задачи и по размерностям.

Можно считать очевидным выполнение начального условия $u(\rho,\ \Omega,\ 0)=0,$ а также условий ограниченности при $\theta=0$ и $\theta=\pi.$ Также очевидно существование периода $T=2\ \pi$ для функции $e^{-i\varphi}$ и ее производной.

Легко проверяется граничное условие при $\rho=r$ на поверхности шара

$$u\big|_{\rho=r}=u(r,\ \Omega,\ t)=-A\ t\cdot Y_{2,\ 1}^{*}(\Omega)\because J_{\nu}(\mu_m\ r)=J_{\nu}\left(\alpha_m^{(\nu)}\right)=0.$$

Условие ограниченности решения в центре шара при $\rho\to 0$ тоже выполняется, так как $u(0,\ \Omega,\ t)=0.$ Действительно, при малых значениях радиуса $\rho\to 0$ в выражении для разрешающей функции $u(\rho,\ \Omega,\ t)$ слагаемое перед суммой в пределе равно $\lim\limits_{\rho\to 0}\sqrt{\dfrac{r}{\rho}}\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^{\nu}=0$ при $\nu=\dfrac{5}{2}.$ Для членов ряда предел общего члена тоже равен нулю $\lim\limits_{\rho\to 0}\sqrt{\dfrac{r}{\rho}}\cdot J_{\nu}(\mu_k\ \rho)=\lim\limits_{\rho\to 0}\sqrt{\dfrac{r}{\rho}}\cdot(\mu_m\ \rho)^{\nu}=0.$

Полученное решение удовлетворяет и уравнению задачи, но проверку не будем приводить как очень громоздкую.

Проверим полученное решение по размерностям. Пусть $[u]\equiv Q,$ $[A]=Q/T,$ $\left[b^2\right]=L^2/T,$ $[\mu_m]=1/L,$ $\left[\mu_m^2 b^2 t\right]=1.$ Тогда $[u]=[A]\cdot 1\cdot\left\{T\cdot 1+\dfrac{T}{L^2 L}L^3\right\}\Rightarrow Q.$

Замечание: Если в разных условиях задачи заданы сферические функции $Y_{nk}(\Omega)$ с различными индексами, то для упрощения решения следует разбить задачу на несколько самостоятельных с одинаковыми индексами в каждой.

<u>**Задача 3.2.**</u> Решение задачи общего вида для уравнения теплопроводности (переноса) внутри шара.

$$\begin{cases}\Delta_3 u-\dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial\ u}{\partial\ t}=F(\rho,\ \Omega,\ t). \\ u\big|_{\rho=r}=f(\Omega,\ t),\quad u\big|_{t=0}=g(\rho,\ \Omega).\end{cases}\qquad \begin{array}{c}u=u(\rho,\ \Omega(\theta,\ \varphi),\ t).\\ 0\le\rho\le r,\quad 0\le t<\infty.\end{array}$$

1. Отделение зависимости от углов $u(\rho,\Omega,t)=\sum\limits_{n,k} u_{n\,k}(\rho,t)\cdot Y_{n\,k}(\Omega)$ и постановка задачи для функции (координаты разложения) $u_{nk}(\rho,\ t)$.

$$\Delta_3\ u-\frac{1}{b^2}\frac{\partial\ u}{\partial\ t}=\sum_{n,\,k}\left\{\frac{1}{\rho^2}\quad\frac{\partial}{\partial\ \rho}\left(\rho^2\ \frac{\partial\ u_{n\,k}}{\partial\ \rho}\right)-\frac{n\ (n+1)}{\rho^2}u_{n\,k}-\frac{1}{b^2}\frac{\partial\ u_{n\,k}}{\partial\ t}\right\}Y_{n\,k}=$$

$$=F(\rho,\ \Omega,\ t)=\sum_{n,\,k}F_{n\,k}(\rho,\ t)\cdot Y_{n\,k}(\Omega),$$

где $F_{n\,k}(\rho,t)=(F,Y_{n\,k})=\oiint\limits_{\Omega'}F(\rho,\Omega',t)\cdot Y^*_{n\,k}(\Omega')d\Omega';$

$$d\ \Omega=\sin\theta\cdot d\theta\ d\varphi.$$

$$u\Big|_{\rho=r}=\sum_{n,\,k}u_{n\,k}(r,\ t)\ Y_{n\,k}(\Omega)=f(\Omega,\ t)=\sum_{n,\,k}f_{n\,k}(t)\cdot Y_{n\,k}(\Omega);$$

$$u\Big|_{t=0}=\sum_{n,\,k}u_{\ n\,k}(\rho,\ 0)\ Y_{n\,k}(\Omega)=g\ (\rho,\ \Omega)=\sum_{n,\,k}g_{n\,k}(\rho)\cdot Y_{n\,k}(\Omega).$$

Здесь $f_{n\,k}(t)=(f,\ Y_{n\,k})$ и $g_{n\,k}(\rho)=(g,\ Y_{n\,k})$.

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\ \dfrac{\partial\ u_{n\,k}}{\partial\rho}\right)-\dfrac{n\ (n+1)}{\rho^2}u_{n\,k}(\rho,\ t)-\dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial\ u_{n\,k}}{\partial\ t}=F_{nk}(\rho,\ t).\\ \left|u_{n\,k}(0,t)\right|<\infty,\quad u_{n\,k}(r,t)=f_{n\,k}(t);\qquad u_{nk}(\rho,\ 0)=g_{nk}(\rho).\end{cases}$$

$$u_{n\,k}=u_{n\,k}(\rho,\ t).\quad 0\le\rho\le r,\ 0\le t<\infty.$$

2. Приведение граничных условий к однородным.

$u_{n\,k}(\rho,\ t)=\upsilon_{n\,k}(\rho,\ t)+f_{n\,k}(t)\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^p$; показатель p выберем ниже.

$$\frac{1}{\rho^2}\quad\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial\ u_{n\,k}}{\partial\rho}\right)-\frac{n\ (n+1)}{\rho^2}\ u_{n\,k}-\frac{1}{b^2}\quad\frac{\partial\ u_{n\,k}}{\partial\ t}=$$

$$=\frac{1}{\rho^2}\quad\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\ \frac{\partial\ \upsilon_{nk}}{\partial\rho}\right)-\frac{n\ (n+1)}{\rho^2}\upsilon_{n\,k}-\frac{1}{b^2}\quad\frac{\partial\ \upsilon_{n\,k}}{\partial\ t}+$$

$$+f_{n\,k}(t)\cdot\frac{p\ (p+1)}{\rho^2}\ \left(\frac{\rho}{r}\right)^p-\frac{n\ (n+1)}{\rho^2}f_{n\,k}(t)\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^p-\frac{1}{b^2}\ \left(\frac{\rho}{r}\right)^p\cdot f'_{n\ k}(t)=$$

$$=F_{n\,k}(\rho,\ t).$$

Если выбрать показатель $p = n$ (как у соответствующей сферической функции), то уравнение упрощается и получим задачу

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 \dfrac{\partial\, \upsilon_{n\,k}}{\partial \rho}\right) - \dfrac{n\,(n+1)}{\rho^2}\upsilon_{n\,k} - \dfrac{1}{b^2}\,\dfrac{\partial \upsilon_{n\,k}}{\partial\, t} = \\ = \tilde{F}_{n\,k}(\rho, t) \equiv F_{nk}(\rho, t) + \dfrac{1}{b^2} f'_{nk}(t) \cdot \left(\dfrac{\rho}{r}\right)^n. \\ \left|\upsilon_{n\,k}(0, t)\right| < \infty, \quad \upsilon_{n\,k}(r,\, t) = 0; \\ \upsilon(\rho,\, 0) = \tilde{g}_{n\,k}(\rho) \equiv g_{n\,k}(\rho) - f_{n\,k}(0)\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^n. \end{cases}$$

$$\upsilon_{n\,k} = \upsilon_{n\,k}(\rho,\, t); \;\; 0 \le \rho \le r, \;\; 0 \le \mathrm{t} < \infty.$$

3. С помощью замены $\upsilon_{n\,k}(\rho,\, t) = \sqrt{\dfrac{r}{\rho}} \cdot w_{n\,k}(\rho,\, t)$ приведем уравнение задачи к уравнению Бесселя.

$$\frac{1}{\rho^2}\;\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2\;\frac{\partial\, \upsilon_{n\,k}}{\partial \rho}\right) - \frac{n\,(n+1)}{\rho^2}\upsilon_{n\,k}(\rho,\, t) =$$

$$= \left[\frac{1}{\rho}\;\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\;\frac{\partial\, w_{n\,k}}{\partial \rho}\right) - \frac{(n+\frac{1}{2})^2}{\rho^2}\; w_{n\,k}(\rho,\, t)\right]\cdot\sqrt{\frac{r}{\rho}}.$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\;\dfrac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\;\dfrac{\partial\, w_{n\,k}}{\partial \rho}\right) - \dfrac{\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2}{\rho^2} w_{n\,k} - \dfrac{1}{b^2}\;\dfrac{\partial\, w_{nk}}{\partial\, t} = \tilde{F}_{n\,k}(\rho,\, t)\cdot\sqrt{\dfrac{\rho}{r}}\,. \\ \left|w_{n\,k}(0,\, t)\right| < \infty, \;\; w_{n\,k}(r,\, t) = 0; \quad w_{n\,k}(\rho,\, 0) = \tilde{g}_{n\,k}(\rho)\cdot\sqrt{\dfrac{\rho}{r}}. \end{cases}$$

$$w_{n\,k} = w_{n\,k}(\rho,\, t). \qquad 0 \le \rho \le r, \quad 0 \le t < \infty.$$

4. Разложение функции $w_{n\,k}(\rho,\, t)$ в ряд Фурье–Бесселя.

$$w_{n\,k}(\rho,\, t) \equiv w(\rho,\, t) = \sum_{m=1}^{\infty} T_m(t)\cdot R_m(\rho).$$

Ниже индексы суммирования n и k будем часто опускать.

$$\hat{D}_Б R = \lambda\ R\ (\rho)\ ; \qquad \lambda = -\mu^2 \le 0, \qquad |R(0)| < \infty, \qquad R\ (r) = 0.$$

$$\hat{D}_Б = \frac{1}{\rho}\ \frac{d}{d\,\rho}\left(\rho\ \frac{d}{d\,\rho}\right) - \frac{\nu^2}{\rho^2} \quad \text{при } \nu = n + \frac{1}{2} \text{ и } n \in \mathbb{Z}_0 .$$

$$R_m(\rho) = A \cdot J_\nu\left(\alpha_m^{(\nu)}\ \frac{\rho}{r}\right), \ \text{где } A = \sqrt{2} \Big/ r \cdot J_{\nu+1}\left(\alpha_m^{(\nu)}\right) > 0.$$

$$\lambda_m = -\mu_m^2 = -\left(\alpha_m^{(\nu)} / r\right)^2 < 0 \quad \text{при } \nu = n + \frac{1}{2},\ m \in N.$$

$$(R_m,\ R_{m'}) = \int_0^r R_m\ (\rho) \cdot R_{m'}^*(\rho) \cdot \rho\ d\rho = \delta_{m\,m'} .$$

5. Вывод уравнения для функции $T_m(t)$ и его решение.

$$\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial}{\partial\rho}\ \left(\rho\ \frac{\partial w}{\partial\rho}\right) - \frac{\nu^2}{\rho^2}\ w - \frac{1}{b^2}\ \frac{\partial w}{\partial\,t} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\ \left\{ \left[\frac{1}{\rho}\ \frac{d}{d\rho}\ \left(\rho\ \frac{d\,R_m}{d\rho}\right) - \frac{\nu^2}{\rho^2}\ R_m \right] \cdot T_m - \frac{1}{b^2} R_m\ T'_m \right\} =$$

$$= -\frac{1}{b^2} \cdot \sum_m\ \left\{\ T'_m + (\mu_m\ b)^2 \cdot T_m\ \right\} \cdot R_m = \tilde{F}_{n\,k}(\rho,\ t)\sqrt{\frac{\rho}{r}} \equiv \sum_{m=1}^{\infty}\ \gamma_m(t) \cdot R_m(\rho)\ ;$$

$$\gamma_m(t) = \left(\ \tilde{F}_{nk}\sqrt{\frac{\rho}{r}},\ R_m\ \right) = \int_0^r\ \tilde{F}_{n\,k}(\rho',\ t)\sqrt{\frac{\rho'}{r}} \cdot R_m(\rho') \cdot \rho'\ d\rho'.$$

$$T'_m + æ_m^2 \cdot T_m(t) = -b^2 \gamma_m(t); \ \text{ здесь } æ_m = \mu_m b = b\alpha_m^{(\nu)} / r > 0.$$

$$T_m(t) = C_m e^{-æ_m^2 t} - b^2 \cdot \int_0^t \gamma_m(\tau) \cdot e^{-æ_m^2 (t-\tau)} d\tau; \qquad C_m = const.$$

$$w(\rho, t) = \sum_{m=1}^{\infty} T_m(t) \cdot R_m(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ C_m e^{-æ_m^2 t} - b^2 \cdot \int_0^t \gamma_m(\tau) \cdot e^{-æ_m^2 (t-\tau)} d\tau \right\} \cdot R(\rho).$$

6. Определение постоянной C_m из начального условия.

$$w(\rho,\ 0) = \sum_{m=1}^{\infty}\ C_m \cdot R_m(\rho) = \tilde{g}_{n\,k}(\rho)\ \sqrt{\frac{\rho}{r}} \Rightarrow C_m = \left(\ \tilde{g}_{n\,k}\sqrt{\frac{\rho}{r}},\ R_m\ \right) =$$

$$=\int_0^r \tilde{f}_{n\,k}(\rho')\,\sqrt{\frac{\rho'}{r}}\cdot R_m(\rho')\rho'\,d\rho'.$$

$$w(\rho,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\int_0^r \tilde{g}_{nk}(\rho')\sqrt{\frac{\rho'}{r}}R_m(\rho')\cdot\rho' d\rho'\cdot e^{-æ_m^2 t}-\right.$$

$$\left.-b^2\cdot\int_0^t \gamma_m(\tau)\cdot e^{-æ_m^2(t-\tau)}\cdot\left(\int_0^r \tilde{F}_{n\,k}(\rho',\ \tau)\sqrt{\frac{\rho'}{r}}\cdot R_m(\rho')\cdot\rho'\,d\rho'\right)d\tau\right\}R_m(\rho).$$

7. Упрощение полученного решения. Вычисление интегралов.

$$I_g\equiv\int_0^r \tilde{g}_{n\,k}(\rho')\sqrt{\frac{\rho'}{r}}\cdot R_m(\rho')\cdot\rho'\,d\rho'=\int_0^r g_{n\,k}(\rho')\cdot R_m(\rho')\frac{\rho'^{3/2}}{\sqrt{r}}d\rho'-$$

$$-f_{n\,k}(0)\cdot\int_0^r\left(\frac{\rho'}{r}\right)^n\cdot R_m(\rho')\frac{\rho'^{3/2}}{\sqrt{r}}d\rho'.$$

Здесь второй интеграл нетрудно вычислить:

$$\int_0^r\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\cdot R_m(\rho)\frac{\rho^{3/2}}{\sqrt{r}}d\rho=\frac{\sqrt{2}}{r^{\nu+1}}\int_0^r J_\nu\left(\alpha_m^{(\nu)}\ \frac{\rho}{r}\right)\rho^{\nu+1}d\rho\Big/J_{\nu+1}\left(\alpha_m^{(\nu)}\right)=$$

$$=\left[x=\alpha_m^{(\nu)}\frac{\rho}{r}\right]=\frac{r\sqrt{2}}{\alpha^{\nu+2}\cdot J_{\nu+1}(\alpha)}\cdot\int_0^\alpha J_\nu(x)\cdot x^{\nu+1}dx=$$

$$=\ldots\cdot J_{\nu+1}(x)\cdot x^{\nu+1}\Big|_0^r=\frac{r\ \sqrt{2}}{\alpha_m^{(\nu)}}>0.$$

$$I_g=\int_0^r g_{n\,k}(\rho')\cdot R_m(\rho')\frac{\rho'^{3/2}}{\sqrt{r}}d\rho'-\frac{r\sqrt{2}}{\alpha_m^{(\nu)}}f_{n\,k}(0).$$

$$I_F\equiv\int_0^r \tilde{F}_{n\,k}(\rho',\tau)R_m(\rho')\frac{\rho'^{3/2}}{\sqrt{r}}d\rho'=\int_0^r F_{n\,k}(\rho',\tau)\,R_m(\rho')\frac{\rho'^{3/2}}{\sqrt{r}}d\rho'+$$

$$+\frac{1}{b^2}f'_{n\,k}(\tau)\cdot\int_0^r\left(\frac{\rho'}{r}\right)^n\cdot R_m(\rho')\frac{\rho'^{3/2}}{\sqrt{r}}d\rho'=$$

$$=\int_0^r F_{n\,k}(\rho',\ \tau)\cdot R_m(\rho')\frac{\rho'^{3/2}}{\sqrt{r}}d\rho'+\frac{r\sqrt{2}}{b^2\alpha_m^{(\nu)}}f'_{n\,k}(\tau).$$

$$w(\rho,\ t)=\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\left[\int_0^r g_{n\,k}(\rho')\cdot R_m(\rho')\frac{\rho'^{3/2}}{\sqrt{r}}d\rho'-\frac{r\sqrt{2}}{\alpha_m^{(\nu)}}f_{n\,k}(0)\right]e^{-æ_m^2 t}-\right.$$

$$-\frac{1}{b^2}\int_0^t e^{-æ_m^2(t-\tau)}\times$$

$$\left.\times\left[\int_0^r F_{n\,k}(\rho',\ \tau)\cdot R_m(\rho')\frac{\rho'^{3/2}}{\alpha_m^{(\nu)}}d\rho'+\frac{r\sqrt{2}}{b^2\ \alpha_m^{(\nu)}}f'_{n\,k}(\tau)\right]d\tau\right\}R_m(\rho).$$

8. Упрощение общего вида решения; суммирование по индексу k.

$$u(\rho,\ \Omega,\ t)=\sum_{n,\,k}\left\{\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot w_{n\,k}(\rho,\ t)+f_{n\,k}(t)\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\right\}Y_{n\,k}(\Omega)=$$

$$=\sum_{n,\,k}\left\{\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\cdot f_{n\,k}(t)+\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\sum_m\left[\int_0^r g_{n\,k}\ R_{m\,n}\frac{\rho'^{3/2}}{\sqrt{r}}d\rho'\cdot e^{-æ_{mn}^2 t}-\right.\right.$$

$$-b^2\int_0^t e^{-æ_{mn}^2(t-\tau)}d\tau\int_0^r F_{n\,k}\cdot R_{m\,n}\frac{\rho'^{3/2}}{\sqrt{r}}d\rho'-$$

$$\left.\left.-\frac{r\sqrt{2}}{\alpha_m^{(\nu)}}\left[f_{nk}(0)e^{-æ_m^2 t}+\int_0^t f'_{nk}(\tau)e^{-æ_{mn}^2(t-\tau)}d\tau\right]\right]R_{mn}(\rho)\right\}Y_{nk}(\Omega)=$$

$$=\sum_{n,\,k}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\cdot\oiint_{\Omega'}f(\Omega',\ t)\cdot Y^*_{n\,k}(\Omega')\ d\Omega'\cdot Y_{n\,k}(\Omega)+$$

$$+\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\sum_{n,\,k,\,m}\int_0^r\rho'\ d\ \rho'\cdot\oiint_{\Omega'}g\ (\rho',\ \Omega')\cdot Y^*_{n\,k}(\Omega')\ d\Omega'\times$$

$$\times\sqrt{\frac{\rho'}{r}}\cdot R_{m\,n}(\rho')\cdot R_{m\,n}(\rho\cdot)\ Y_{n\,k}(\Omega)\,e^{-æ_{mn}^2 t}-$$

$$-b^2\sqrt{\frac{r}{\rho}}\sum_{n,k,m}\int_0^t e^{-æ_{mn}^2(t-\tau)}d\tau\times$$

$$\times\int_0^r\rho'\ d\rho'\oiint_{\Omega'}F(\rho',\ \Omega',\ \tau)\cdot Y^*_{n\,k}(\Omega')\ d\Omega'\cdot\sqrt{\frac{\rho'}{r}}\ R_{m\,n}(\rho')\ R_{m\,n}(\rho)\cdot Y_{n\,k}(\Omega)-$$

$$-\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\sum_{n,\,k,\,m}\frac{r\sqrt{r}}{\alpha_m^{(\nu)}}\left\{\oiint_{\Omega'} f(\Omega',\,0)\cdot Y^*_{n\,k}(\Omega')\,d\Omega'\cdot e^{-æ_{mn}^2 t}+\right.$$

$$\left.+\int_0^t e^{-æ_{mn}^2(t-\tau)}d\tau\,d\tau\oiint_{\Omega'} f_t'(\Omega',\,\tau)\,Y^*_{n\,k}(\Omega')\,d\,\Omega'\right\}R_{m\,n}(\rho)\,Y_{n\,k}(\Omega).$$

Если использовать формулу сложения сферических функций

$$\sum_{k=-n}^{n} Y_{n\,k}(\Omega)\cdot Y^*_{n\,k}(\Omega')==\frac{2n+1}{4\,\pi}P_n\left(\cos\gamma(\Omega,\,\Omega')\right),$$ получим

$$u\;(\rho,\,\Omega,\,t)=\oiint_{\Omega'} f(\Omega',\,t)\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\cdot\frac{2n+1}{4\,\pi}\,P_n(\cos\gamma)\right]\cdot d\Omega'+$$

$$+\sum_{n,\,m}\int_0^r\sqrt{\frac{\rho'}{\rho}}\,\rho'\,d\rho'\cdot\oiint_{\Omega'} g(\rho',\,\Omega')\,\frac{2n+1}{4\,\pi}\,P_n(\cos\gamma)d\Omega'\times$$

$$\times e^{-æ_{mn}^2 t}\cdot R_{mn}(\rho')R_{mn}(\rho)-b^2\sum_{n,m}\int_0^r\sqrt{\frac{\rho'}{\rho}}\rho' d\rho'\int_0^t e^{-æ_m^2(t-\tau)}d\tau\times$$

$$\times\oiint_{\Omega'} F(\rho',\Omega',\tau)\cdot\frac{2n+1}{4\,\pi}\,P_n\;(\cos\gamma)\;d\Omega'\cdot R_{m\,n}(\rho')\;R_{m\,n}(\rho)-$$

$$-\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\sum_{n,m}\frac{r\sqrt{2}}{\alpha_m^{(\nu)}}\left\{\oiint_{\Omega'} f(\Omega',0)\;\frac{2n+1}{4\pi}P_n(\cos\gamma)\;d\,\Omega'\cdot e^{-æ_{mn}^2 t}+\right.$$

$$\left.+\int_0^t e^{-æ_m^2(t-\tau)}d\tau\cdot\oiint_{\Omega'} f_t'\;(\Omega',\,\tau)\;\frac{2n+1}{4\,\pi}\,P_n(\cos\gamma)\;d\Omega'\right\}R_{n\,m}(\rho).$$

9. Упрощение интеграла для функции $f(\Omega,t)$ на сфере.

$$I_f\equiv\oiint_{\Omega'} f(\Omega',\,t)\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{4\,\pi}\,P_n(\cos\gamma)\cdot\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r\sqrt{2}}{\alpha_m^{(\nu)}}\;R_{mn}(\rho)\right]\cdot d\Omega'-$$

$$-\frac{1}{4\pi}r\sqrt{\frac{2r}{\rho}}\cdot\sum_{n,m}\frac{2n+1}{\alpha_m^{(\nu)}}\;\oiint_{\Omega'}\left\{\;f(\Omega',0)e^{-æ_{mn}^2 t}+\right.$$

$$\left.+\int_0^r e^{-æ_{mn}^2(t-\tau)}\cdot f_\tau'\;(\Omega',\tau)d\tau\right\}\cdot P_n(\cos\gamma)\cdot d\Omega'\cdot R_{m\,n}(\rho);$$

$$\{\ldots\} = f(\Omega',0)e^{-\text{æ}_{mn}^2 t} + \Big[\; f(\Omega',t)e^{+\text{æ}_{mn}^2 t} - f(\Omega',0) -$$

$$- \text{æ}_{mn}^2 \cdot \int_0^t f(\Omega',\tau)e^{+\text{æ}_{mn}^2 \tau} d\tau \; \Big] e^{-\text{æ}_{mn}^2 t} = f(\Omega',t) - \text{æ}_{mn}^2 \cdot \int_0^t f(\Omega',\tau) e^{-\text{æ}_{mn}^2 (t-\tau)} d\tau.$$

$$I_f = \frac{r}{4\pi}\sqrt{\frac{2r}{\rho}} \cdot \sum_{n,\,m} \frac{2n+1}{\alpha_m^{(\nu)}} \oiint_{\Omega'} \Big[\; f(\Omega',t) - f(\Omega',t) +$$

$$+ \text{æ}_{mn}^2 \cdot \int_0^t e^{-\text{æ}_{mn}^2 (t-\tau)} \cdot f(\Omega',\tau) d\tau \; \Big] \cdot P_n(\cos\ \gamma) \cdot R_{m\,n}(\rho)\ d\Omega' =$$

$$= \frac{r}{4\pi}\sqrt{\frac{2r}{\rho}} \cdot \sum_{n,\,m} \frac{2n+1}{\alpha_m^{(\nu)}} \oiint_{\Omega'} d\Omega' \times$$

$$\times \left[\text{æ}_{mn}^2 \cdot \int_0^t e^{-\text{æ}_{mn}^2 (t-\tau)} \cdot f(\Omega',\tau) d\tau \; \right] \cdot P_n(\cos\gamma) \cdot R_{m\,n}(\rho) =$$

$$= \frac{r}{4\pi}\sqrt{\frac{2r}{\rho}} \cdot \sum_{n,m} \frac{2n+1}{\alpha_m^{(\nu)}} \cdot \text{æ}_{mn}^2 \cdot \int_0^t e^{-\text{æ}_{mn}^2 (t-\tau)} d\tau \times$$

$$\times \oiint_{\Omega'} f(\Omega',\ \tau)\ P_n(\cos\gamma)\ d\Omega' \cdot R_{m\,n}(\rho)\ ;$$

$$R'_{m\,n}(r) \equiv \frac{d}{d\rho'} R_{m\,n}(\rho') \Big|_{\rho'=r} =$$

$$= \sqrt{2} \cdot J'_\nu \left(\alpha_m^{(\nu)}\ \frac{r}{r} \right) \frac{\alpha_m^{(\nu)}}{r} \Big/ r\, J_{\nu+1}\left(\alpha_m^{(\nu)}\right) = -\sqrt{2}\, \alpha_m^{(\nu)} \big/ r^2\, ;$$

$$J'_\nu\ (\alpha) = \frac{\nu}{\alpha} J_\nu(\alpha) - J_{\nu+1}(\alpha), \qquad \text{æ}_{mn}^2 = b\frac{\alpha_m^{(\nu)}}{r} > 0, \qquad \nu = n + \frac{1}{2}.$$

$$I_f = -rb^2\sqrt{\frac{r}{\rho}} \cdot \int_0^t d\tau \oiint_{\Omega'} f(\Omega',\ \tau) \times$$

$$\times \left[\sum_{n,m} \frac{2n+1}{4\pi} e^{-\text{æ}_{m\,n}^2 (t-\tau)} \cdot R_{mn}(\rho) \cdot R_{mn}(\rho') \cdot P_n(\cos\gamma) \right] \cdot d\Omega'.$$

10. Упрощение интегралов от функции $g\ (\rho,\ \Omega)$ и $F\ (\rho,\ \Omega,\ t)$. Введение функции Грина (источника).

$$u(\rho,\Omega,t)=\int_0^r\sqrt{\frac{\rho'}{\rho}}\rho' d\rho' \oint\!\!\oint_{\Omega'} g\left(\rho',\Omega'\right)\times$$

$$\times\left[\sum_{n,m}\frac{2n+1}{4\pi}e^{-æ_{mn}^2 t}\cdot R_{mn}(\rho)\cdot R_{mn}(\rho')\cdot P_n(\cos\gamma)\right]\cdot d\Omega'-$$

$$-b^2\int_0^t d\tau\int_0^r\sqrt{\frac{\rho'}{\rho}}\rho' d\rho'\oint\!\!\oint_{\Omega'}F\left(\rho',\Omega',\ \tau\right)\cdot\left[\sum_{n,m}\frac{2n+1}{4\pi}e^{-æ_{mn}^2(t-\tau)}\times\right.$$

$$\left.\times R_{m\,n}\left(\rho\right)\ R_{m\,n}\left(\rho'\right)\cdot P_n\left(\cos\gamma\right)\ \right]d\Omega'-$$

$$-b^2 r\sqrt{\frac{r}{\rho}}\int_0^t d\tau\oint\!\!\oint_{\Omega'}f\left(\Omega',\ \tau\right)\cdot\left[\sum_{n,m}\frac{2n+1}{4\pi}e^{-æ_{mn}^2(t-\tau)}\times\right.$$

$$\left.\times R_{m\,n}\left(\rho\right)\ R_{m\,n}\left(\rho'\right)\cdot P_n\left(\cos\gamma\right)\ \right]d\Omega'.$$

$$\int_0^r\rho'^2\ d\rho'\oint\!\!\oint_{\Omega'}\ldots\cdot d\Omega'\equiv\iiint_{V'}\ldots\cdot d\mathrm{V}';\qquad d\mathrm{V}'=\rho'^2 d\rho' d\Omega'.$$

$$dS'=r^2\cdot d\Omega';\quad d\Omega'=\sin\theta'\cdot d\theta'\cdot d\varphi'.$$

$$u(\rho,\Omega,t)=\iiint_V g(\rho',\Omega')\frac{1}{\sqrt{\rho\rho'}}\cdot\left[\frac{1}{4\pi}\sum_{n,m}\ (2n+1)e^{-æ_{mn}^2 t}\ \times\right.$$

$$\left.\times R_{mn}(\rho)\cdot R_{mn}(\rho')\cdot P_n(\cos\gamma)\ \right]\cdot dV'-$$

$$-b^2\int_0^t d\tau\left\{\iiint_{V'}F(\rho',\Omega',\tau)\frac{1}{\sqrt{\rho\rho'}}\cdot\left[\frac{1}{4\pi}\sum_{n,m}\ (2n+1)e^{-æ_{mn}^2(t-\tau)}\times\right.\right.$$

$$\left.\times R_{mn}(\rho)\cdot R_{mn}(\rho')\cdot P_n(\cos\gamma)\ \right]\cdot dV'+$$

$$+\oint\!\!\oint_{S'}f(\Omega',\tau)\frac{1}{\sqrt{\rho r}}\left[\frac{1}{4\pi}\sum_{n,m}\ (2n+1)e^{-æ_{mn}^2(t-\tau)}\times\right.$$

$$\left.\left.\times R_{mn}(\rho)\cdot R'_{mn}(r)\cdot P_n(\cos\gamma)\ \right]\cdot dS'\ \right\}.$$

$$\overset{0}{R}_{m\,n}(\rho)=\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot R_{m\,n}(\rho)=\frac{\sqrt{2}}{r}\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot J_{n+\frac{1}{2}}\left(\alpha_m^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\frac{\rho}{r}\right)\Bigg/J_{n+\frac{3}{2}}\left(\alpha_m^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right).$$

$$\overset{0}{R'}_{mn}(r)=-\sqrt{\frac{2}{r}}\;\;\frac{1}{r^2}\alpha_m^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}<0.$$

$$G(\rho,\rho';\gamma(\Omega,\Omega')\big|t)=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{\rho\rho'}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(2n+1)\cdot e^{-æ_{mn}^2t}\times$$

$$\times R_{mn}(\rho)\cdot R_{mn}(\rho')\cdot P_n(\cos\gamma)\equiv$$

$$\equiv\frac{1}{4\pi}\cdot\sum_{n,m}(2n+1)e^{-æ_{mn}^2t}\cdot\overset{0}{R}_{mn}(\rho)\cdot\overset{0}{R}_{mn}(\rho')\cdot P_n(\cos\gamma).$$

$$\overset{0}{R}_{mn}(\rho)=\frac{1}{r}\sqrt{\frac{2}{r}}\cdot j_n\left(\alpha_m^{(n+1/2)}\frac{\rho}{r}\right)\Bigg/j_{n+1}\left(\alpha_m^{(n+1/2)}\right);\qquad j_n(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\cdot j_{n+\frac{1}{2}}(x).$$

$$\left(\overset{0}{R}_{m\,n},\ \overset{0}{R}_{m'\,n}\right)=\int_0^r\overset{0}{R}_{m\,n}(\rho)\cdot\overset{0}{R}_{m'\,n}(\rho)\cdot\rho^2\,d\rho=\delta_{m\,m'}.$$

11. Окончательный вид решения и его проверка.

$M(\rho,\ \Omega)$ – точка измерения; $M'(\rho',\ \Omega')$ – точка источника.

$$u\,(M,\ t)=\iiint_{V'}g(M')\cdot G\big(M,\ M'\,\big|t\big)\,dV'-$$

$$-b^2\cdot\int_0^t d\tau\ \left\{\iiint_{V'}F(M',\ \tau)\cdot G\big(M,\ M'\,\big|t-\tau\big)\,dV'+\right.$$

$$\left.+\oint\!\!\oint_{S'}f(M',\ \tau)\cdot\frac{\partial}{\partial\,n'}\ G\,\big(M,M'\,\big|t-\tau\big)\,dS'\right\}.$$

Здесь $f(M',\ \tau)$ при $M'(\rho',\ \Omega')\,\big|_{\rho'=r}\in S'$; $\dfrac{\partial}{\partial\,n'}\ G(\ldots)=\dfrac{\partial}{\partial\rho'}G(\ldots)\,\big|_{\rho'=r}$.

$$G(M,M'\big|t)\equiv G(\rho,\Omega;\rho',\Omega'\big|t)=\frac{1}{4\pi}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(2n+1)\cdot e^{-æ_{mn}^2t}\times$$

$$\times\overset{0}{R}_{mn}(\rho)\cdot\overset{0}{R}_{mn}(\rho')\cdot P_n(\cos\gamma),$$

где $æ_{mn} = \dfrac{b}{r}\alpha_{mn}^{(\nu)}$, $\nu = n + \dfrac{1}{2}$; $P_n\left(\cos\gamma\ (\Omega,\Omega')\right)$ и здесь

$$\cos\gamma = \cos\theta\cdot\cos\theta' + \sin\theta\cdot\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi') = (\vec{n},\vec{n}').$$

Проверим правильность решения по условиям задачи.

$$u\ (M,\ t)\ \Big|_{\rho=r} = f(M) \because G\big(M,\ M'\ \big|t\big)\ \Big|_{\rho'=r} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho'}G\ \big(M,\ M'\ \big|t\big)\ \Big|_{\rho'=r} = -\frac{1}{b^2}\delta(M,\ M')\cdot\delta(t-\tau).$$

$$u\ (M,\ 0) = \iiint\limits_V g(M')\cdot\delta(M,\ M')\ dV' -$$

$$-b^2\cdot\left\{\int\limits_0^0\ldots\right\} = g(M) \because G\big(M, M'\ \big|0\big) = \delta(M,\ M').$$

Проверим соответствие размерностей в формуле ответа.

$$\left[u\ (M,t)\right] \equiv Q,\ \ [f] = [g] = Q,\ \ [F] = Q/L^2,$$

$$\left[b^2\right] = L^2/T,\ \ \left[\overset{0}{R}_m\right] = 1/L^{3/2},\ \ [G] = 1/L^3.$$

$$\left[u\ (M,\ t)\right] \equiv Q = [g]\cdot\frac{1}{L^3}\ L^3 + \frac{L^2}{T}\ T\cdot\left\{[F]\cdot\frac{1}{L^3}\cdot L^3 + [f]\cdot\frac{1}{L}\ \frac{1}{L^3}\ L^2\right\} \Rightarrow Q.$$

<u>Задача 3.3.</u> Решение однородного уравнения с однородными граничными условиями.

$$\begin{cases}\Delta_3 u - \dfrac{1}{b^2}\ \dfrac{\partial\ u}{\partial\ t} = 0. \\ u\big|_{\rho=r} = 0,\ \ u\big|_{t=0} = A\,f(\rho)\cdot Y_{3,\,-2}\ (\theta,\ \varphi).\end{cases} \qquad \begin{matrix} u = u\ (\rho,\ \Omega,\ t). \\ 0\le\rho\le r,\quad 0\le t<\infty. \\ \Omega(\theta,\varphi).\end{matrix}$$

1. $u\ (\rho,\ \Omega,\ t) = \sum\limits_{n,\,k} u_{n\,k}(\rho,\ t)\cdot Y_{n\,k}(\Omega).$

$$\Delta u - \frac{1}{b^2}\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n,k}\left\{\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\ \left(\rho^2\ \frac{\partial u_{n\,k}}{\partial\rho}\right) - \frac{n(n+1)}{\rho^2}u_{n\,k} - \frac{1}{b^2}\frac{\partial u_{n\,k}}{\partial t}\right\}Y_{n\,k}(\Omega) = 0.$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\dfrac{\partial u_{nk}}{\partial\rho}\right)-\dfrac{n(n+1)}{\rho^2}u_{nk}=\dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial u_{nk}}{\partial t}. \quad u_{n\,k}(\rho,t)=\upsilon(\rho,t)\cdot\delta_{n,3}\cdot\delta_{k,-2}.\\ \left|u_{n\,k}(0,\ t)\right|<\infty,\ u_{n\,k}(r,\ t)=0; \quad u_{n\,k}(\rho,0)=A\,f(\rho)\cdot\delta_{n,3}\cdot\delta_{k,-2}.\end{cases}$$

2. $\upsilon\ (\rho,\ t)=\sqrt{\dfrac{r}{\rho}}\cdot w\ (\rho,t).$

$$\frac{1}{\rho^2}\ \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\ \frac{\partial\ \upsilon}{\partial\rho}\right)-\frac{n\ (n+1)}{\rho^2}\upsilon-\frac{1}{b^2}\ \frac{\partial\ \upsilon}{\partial t}=$$

$$=\left[\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\ \frac{\partial\ w}{\partial\rho}\right)-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{\rho^2}\ w-\frac{1}{b^2}\ \frac{\partial\ w}{\partial t}\right]\cdot\sqrt{\frac{r}{\rho}}=0.$$

3. $w\ (\rho,\ t)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\ T_m(t)\cdot R_m(\rho).$

$$\hat{D}_Б\equiv\frac{1}{\rho}\ \frac{d}{d\rho}\left(\rho\ \frac{d}{d\rho}\right)-\frac{v^2}{\rho^2}\quad \text{при } n=3 \text{ и } v=n+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}.$$

$$\hat{\mathrm{D}}_Б\,R=\lambda\ R(\rho);\qquad |R(0)|<\infty,\qquad R(r)=0.$$

$$\lambda_m=-\mu_m^2=-\left(\alpha_m^{(v)}/r\right)^2<0;\qquad J_v\left(\alpha_m^{(v)}\right)=0\ \text{ и }\ J_{v+1}\left(\alpha_m^{(v)}\right)\neq 0.$$

$$R_m(\rho)=\frac{\sqrt{2}}{r}J_v(\mu_m\ \rho)/J_{v+1}(\mu_m\ r)\quad\text{при}\quad \mu_m=\alpha_m^{(v)}/r>0.$$

4. $\dfrac{1}{\rho}\ \dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\ \dfrac{\partial\ w}{\partial\rho}\right)-\dfrac{v^2}{\rho^2}\ w-\dfrac{1}{b^2}\ \dfrac{\partial\ w}{\partial t}=\sum\limits_m\left\{\hat{D}_Б\,R_m\cdot T_m-\dfrac{1}{b^2}\cdot R_m\ T_m'\right\}=$

$$=-\frac{1}{b^2}\cdot\sum_m\left\{T_m'+æ_{mn}^2T_m(t)\right\}R_m(\rho)=0,\qquad æ_m=\mu_m b=b\,\alpha_m^{(\nu)}/r>0.$$

5. $T_m'+æ_{mn}^2T_m(t)=0\Rightarrow T_m(t)=C_m\cdot e^{-æ_{mn}^2 t},\quad C_m=const.$

6. $u\ (\rho,\ \Omega,\ t)=u_{3,\ -2}(\rho,\ t)\cdot Y_{3,\ 2}^*(\Omega)=\upsilon\ (\rho,\ t)\cdot Y_{3,\ 2}^*(\Omega);$

$$u\left(\rho,\ \Omega,\ t\right)=0 \quad \text{при } n\neq 3 \text{ или } k\neq -2.$$

$$u\left(\rho,\ \Omega,\ t\right)=\sqrt{\frac{r}{\rho}}\, w\left(\rho,\ t\right)\cdot Y^{*}_{3,\ 2}\left(\Omega\right)=\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot Y^{*}_{3,\ 2}\left(\Omega\right)\cdot\sum_{m} T_m\left(t\right)\cdot R_m\left(\rho\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot Y^{*}_{3,\ 2}\left(\Omega\right)\cdot\sum_{m} C_m\cdot e^{-æ^2_{mn}t}\cdot R_m(\rho).$$

7. $$u\big|_{t=0}=\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot Y^{*}_{3,\ 2}\left(\Omega\right)\cdot\sum_{m} C_m\, R_m\left(\rho\right)=A f\left(\rho\right)\cdot Y^{*}_{3,\ 2}\left(\Omega\right).$$

$$\sum_{m} C_m\cdot R_m\left(\rho\right)=A f\left(\rho\right)\sqrt{\frac{\rho}{r}}\;\Bigg|\cdot R_{m'}.$$

$$C_m=\left(A f\left(\rho\right)\sqrt{\frac{\rho}{r}},\ R_m\right)=A\cdot\int_0^r f\left(\rho'\right) R^{*}_m\left(\rho'\right)\cdot\sqrt{\frac{\rho'}{r}}\,\rho'\, d\rho'.$$

8. $$u\left(\rho,\ \Omega,\ t\right)=A\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot Y^{*}_{3,\ 2}\left(\Omega\right)\cdot\sum_{m}\int_0^r f\left(\rho'\right) R^{*}_m\left(\rho'\right)\times$$

$$\times\sqrt{\frac{\rho'}{r}}\rho' d\rho'\cdot e^{-æ^2_{mn}t}\cdot R_m(\rho)=$$

$$=A Y^{*}_{3,\ 2}\left(\Omega\right)\cdot\int_0^r\sum_{m} e^{-æ^2_{mn}t} f\left(\rho'\right)\cdot R_m\left(\rho\right) R_m\left(\rho'\right)\cdot\sqrt{\frac{\rho'}{r}}\rho' d\rho'=$$

$$=A Y^{*}_{3,\ 2}\left(\Omega\right)\cdot\int_0^r f\left(\rho'\right)\left(\sum_{m} e^{-æ^2_{mn}t}\cdot R_m\left(\rho\right) R_m\left(\rho'\right)\sqrt{\frac{\rho'}{r}}\right)\cdot\rho' d\rho'=$$

$$=A\, Y^{*}_{3,\ 2}\left(\Omega\right)\cdot\int_0^r f\left(\rho'\right)\cdot G\left(\rho,\ \rho'\,\middle|\, t\right)\cdot\rho'\, d\rho',$$

$$G(\rho,\rho'|t)=\sum_{m=1}^{\infty} e^{-æ^2_{mn}t}\cdot R_m\left(\rho\right)\cdot R^{*}_m\left(\rho'\right)\sqrt{\frac{\rho'}{r}}$$ – функция Грина.

$$Y^{*}_{3,\ 2}\left(\theta,\ \varphi\right)=\sqrt{\frac{7}{4\pi}\cdot\frac{1!}{5!}}\cdot P_{3,\ 2}\left(\cos\theta\right)\, e^{-2i\varphi}=\frac{1}{16}\sqrt{\frac{105}{\pi}}\cdot\left(\cos\theta-\cos 3\theta\right)\cdot e^{-2i\varphi}.$$

$$9.\ u\big|_{\rho=0} < \infty \Rightarrow u\ \left(0,\ \Omega,\ t\right) = 0 \because R_m\left(0\right) = 0.\quad u\ \left(r,\Omega,t\right) = 0 \because R_m\left(r\right) = 0.$$

$$u\ \left(\rho,\ \Omega,\ 0\right) = A\ Y^*_{3,\ 2}\left(\Omega\right)\cdot\int_0^r f\left(\rho'\right)\cdot G\left(\rho,\ \rho'\ \middle|0\right)\cdot\rho'\ d\rho' =$$

$$= A\ Y^*_{3,\ 2}\left(\Omega\right)\cdot\int_0^r f\left(\rho'\right)\cdot\delta\left(\rho'-\rho\right)\ d\rho' == A f\left(\rho\right)\cdot Y^*_{3,\ 2}\left(\Omega\right).$$

$$\left[u\right] = Q,\quad \left[A\right] = Q,\quad \left[f\left(\rho\right)\right] = 1,\quad \left[R_m\left(\rho\right)\right] = \frac{1}{L},\quad \left[G\right] = \frac{1}{L^2},\quad \left[b^2\right] = \frac{L^2}{T},$$

$$\left[æ^2_{mn}t\right] = 1.\quad \left[u\right] \equiv Q = \left[A\right]\cdot\left[f\right]\cdot\left[G\right]\cdot L^2 = Q\cdot 1\cdot\frac{1}{L^2}\cdot L^2 \Rightarrow Q.$$

<u>Задача 3.4.</u> О симметричном нагревании холодного шара (нет зависимости от углов).

$$\begin{cases} \Delta_3 u - \dfrac{1}{b^2}\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = F\left(\rho,\ \Omega,\ t\right) \equiv A\ t. \\ \left|u\big|_{\rho=0}\right| < \infty,\ \ u\big|_{\rho=r} = f\left(\Omega,\ t\right) \equiv B\ t; \\ u\big|_{t=0} = g\ \left(\rho,\ \Omega\right) \equiv 0. \end{cases}\qquad \begin{matrix} u = u\ \left(\rho,\ \Omega\ ,\ t\right). \\ 0 \le \rho \le r,\ \ 0 \le t < \infty. \\ A,\ B,\ b = const > 0. \end{matrix}$$

$$\Delta_3 \equiv \frac{1}{\rho^2}\ \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\ \frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\ \Delta_\Omega \quad \text{при } \Delta_\Omega = 0.$$

$$\Delta_\Omega\ Y_{n\,k}\left(\Omega\right) = -n\left(n+1\right)\cdot Y_{\ n\,k}\left(\Omega\right) \equiv 0;\quad Y_{0,\ 0}\left(\Omega\right) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\ \text{при } n = k = 0.$$

1. Переход в уравнении к оператору Бесселя с помощью замены

$$u\ \left(\rho,\ t\right) = \sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\upsilon\ \left(\rho,\ t\right).$$

$$\frac{1}{\rho^2}\ \frac{\partial}{\partial\,\rho}\left(\rho^2\ \frac{\partial\,u}{\partial\,\rho}\right) - \frac{n\ \left(n+1\right)}{\rho^2}\ u - \frac{1}{b^2}\ \frac{\partial\,u}{\partial\,t} = \frac{1}{\rho^2}\ \frac{\partial}{\partial\,\rho}\left[\rho^2\frac{\partial}{\partial\,\rho}\left(\upsilon\sqrt{\frac{r}{\rho}}\right)\right] -$$

$$-\frac{n\ \left(n+1\right)}{\rho^2}\ \upsilon\sqrt{\frac{r}{\rho}} - \frac{1}{b^2}\ \frac{\partial\ \upsilon}{\partial\ t}\ \sqrt{\frac{r}{\rho}} = \left[\upsilon''_{\rho\,\rho} - \frac{1}{\rho}\ \upsilon'_\rho - \right.$$

$$-\frac{1}{4\rho^2}\upsilon-\frac{n(n+1)\upsilon}{\rho^2}-\frac{1}{b^2}\frac{\partial\,\upsilon}{\partial\,t}\Bigg]\sqrt{\frac{r}{\rho}}=$$

$$=\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\,\upsilon}{\partial\,\rho}\right)-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{\rho^2}\upsilon-\frac{1}{b^2}\frac{\partial\,\upsilon}{\partial\,t}\right]\cdot\sqrt{\frac{r}{\rho}}=$$

$$=\left[\hat{D}_Б\,\upsilon-\frac{1}{b^2}\frac{\partial\upsilon}{\partial t}\right]\cdot\sqrt{\frac{r}{\rho}}=At,$$

где $\hat{D}_Б=\dfrac{1}{\rho}\;\dfrac{d}{d\,\rho}\left(\rho\dfrac{d}{d\,\rho}\right)-\dfrac{\nu^2}{\rho^2}$ – оператор Бесселя при $\nu=n+\dfrac{1}{2}$ или $n=0$ и $\nu=\dfrac{1}{2}$.

Постановка задачи с оператором Бесселя.

$$\begin{cases}\hat{D}_Б\,\upsilon-\dfrac{1}{b^2}\;\dfrac{\partial\,\upsilon}{\partial t}\equiv\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\,\rho}\;\left(\rho\;\dfrac{\partial\,\upsilon}{\partial\rho}\right)-\dfrac{\nu^2}{\rho^2}\;\upsilon-\dfrac{1}{b^2}\;\dfrac{\partial\,\upsilon}{\partial\,t}=A\,t\;\sqrt{\dfrac{\rho}{r}};\;\;\nu=\dfrac{1}{2}.\\ \left|\upsilon\;(0,t)\right|<\infty,\;\;\upsilon(r,\;t)=B\;t; \qquad\qquad \upsilon=\upsilon\;(\rho,\mathrm{t}).\\ \upsilon(\rho,\;0)=0. \qquad\qquad 0\le\rho\le r,\;\;0\le t<\infty.\end{cases}$$

2. Приведение граничных условий к однородным с помощью замены

$$\upsilon\;(\rho,\;t)=w\;(\rho,\;t)+\alpha(t)\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^p+\beta(t).$$

$$\rho=0:\;\;\upsilon(0,\;t)=w\;(0,\;t)+0+\beta(t)<\infty\Rightarrow p>0,\;\;\beta(t)=0$$

$$\text{и}\;\left|w\;(0,t)\right|<\infty.$$

$$\rho=r:\;\;\;\upsilon(r,\;t)=w(r,t)+\alpha(t)=A\;t\Rightarrow\alpha(t)=A\;t\;\;\text{и}\;\;w\;(r,\;t)=0.$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\,\rho}\left(\rho\frac{\partial\upsilon}{\partial\,\rho}\right)-\frac{\nu^2}{\rho^2}\;\upsilon-\frac{1}{b^2}\frac{\partial\upsilon}{\partial t}=\frac{1}{\rho}\;\;\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\;\frac{\partial\,w}{\partial\,\rho}\right)-\frac{\upsilon^2}{\rho^2}\;w-\frac{1}{b^2}\;\;\frac{\partial\,w}{\partial\,t}+$$

$$+\frac{p^2-\nu^2}{\rho^2}\left(\frac{\rho}{r}\right)^p\cdot B\;t-\frac{B}{b^2}\;\left(\frac{\rho}{r}\right)^p=A\;t\sqrt{\frac{\rho}{r}}.$$

Примем $p = \nu = \dfrac{1}{2}$ и получим упрощенную задачу с однородными граничными условиями.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\ \dfrac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\ \dfrac{\partial w}{\partial \rho}\right) - \dfrac{\nu^2}{\rho^2}\ w - \dfrac{1}{b^2}\ \dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{1}{b^2}\ \left(A\, b^2 t + B\right)\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^{\nu} \quad \text{при } \nu = \dfrac{1}{2}. \\ \left| w\ (0,t)\ \right| < \infty, \quad w\ (r,t) = 0. \qquad\qquad w = w(\rho,t). \\ w\ (\rho,0) = 0. \qquad\qquad 0 \le \rho \le r,\ \ 0 \le t < \infty. \end{cases}$$

Здесь замены

$$u(\rho,t) = \sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot \upsilon(\rho,\ t) = \sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\left[w(\rho,t) + B\,t\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\nu}\right] = B\,t + \sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot w\ (\rho,t).$$

3. Разделение переменных и решение краевой задачи для оператора Бесселя $\hat{D}_Б$.

В функциональном пространстве разложение вектора будет $w\ (\rho,\ t) = \sum\limits_m T_m(t)\cdot R_m(\rho)$, где R_m – орты разложения и $\left(R_m,\ R_{m'}\right) = \delta_{m\, m'}$, а $T_m = \left(w,\ R_m\right)$ – обобщенные координаты; здесь необходимо $\lim\limits_{m\to\infty} T_m(t) = 0$.

Будем искать решение задачи в виде ряда Фурье–Бесселя $w\ (\rho,\ t) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} T_m(t)\cdot R_m(\rho)$, где $T_m(t) = \left(w, R_m\right) = \int\limits_0^r w\ (\rho,t)\cdot R_m^*(\rho)\,\rho\ d\rho.$

Поставим краевую задачу для оператора Бесселя:

$$\begin{cases} \hat{D}_Б\, R = \lambda\ R(\rho), \text{ где } \lambda = -\mu^2 \le 0. \\ \left|R(0)\ \right| < \infty,\ \ R(r) = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{dR}{d\rho}\right) + \left(\mu^2 - \dfrac{\nu^2}{\rho^2}\right) R(\rho) = 0. \\ \left|R(0)\ \right| < \infty,\ \ R(r) = 0. \end{cases}$$

Эта самосопряженная краевая задача имеет в гильбертовом пространстве $L_2\left(0,\ r\ |\rho\right)$ дискретный спектр собственных значений

$\lambda_m = -\mu_m^2 = -\left(\alpha_m^{(v)}/r\right)^2 < 0$ при $m \in \mathbb{N}$. Здесь $J_v(\mu_m\, r) = J_v\left(\alpha_m^{(v)}\right) = 0$ – дисперсионное уравнение и $\alpha_m^{(v)} > 0$ – его простые корни. Причем $J_p\left(\alpha_m^{(q)}\right) \neq 0$ при $p \neq q$.

Краевая задача имеет полное ортонормированное множество собственных векторов (базис из собственных функций, ортов) $R_m(\rho) = \dfrac{\sqrt{2}}{r} J_v(\mu_m\,\rho) / J_{v+1}(\mu_m\, r)$. Здесь

$$\left(R_m, R_{m'}\right) = \int_0^r R_m(\rho) \cdot R_{m'}^*(\rho) \cdot \rho\, d\rho = \delta_{m\,m'}.$$

Полученный ряд Фурье–Бесселя $w\,(\rho,\, t) = \sum_{m=1}^{\infty} T_m(t) \cdot R_m(\rho)$ сходится абсолютно и равномерно (правильно) к раскладываемой функции, и его можно дважды дифференцировать. Обобщенные коэффициенты разложения (координаты) находятся с помощью скалярного произведения $T_m(t) = \left(w, R_m\right)$. Здесь необходимо $\lim\limits_{m\to\infty} T_m(t) = 0$.

4. Постановка задачи для функции от времени (координаты) $T_m(t)$.

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial w}{\partial\rho}\right) - \frac{v^2}{\rho^2}\, w - \frac{1}{b^2}\ \frac{\partial w}{\partial t} = \sum_m \left\{\left[\frac{1}{\rho}\ \frac{d}{d\,\rho}\left(\rho\frac{d\,R_m}{d\,\rho}\right) - \frac{v^2}{\rho^2} R_m\right] \cdot T_m - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{b^2} T_m' \cdot R_m \right\} = -\frac{1}{b^2}\sum_m \left\{ T_m' + \left(\mu_m\, b\right)^2 T_m \right\} R_m = \frac{1}{b^2}\left(Ab^2 t + B\right)\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^v, \quad v = \frac{1}{2}.$$

$$\sum_m \left\{ T_m' + \left(\mu_m\, b\right)^2 \cdot T_m(t) \right\} R_m(\rho) = -\left(A\, b^2 t + B\right)\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^v =$$

$$= -\left(A\, b^2 t + B\right)\cdot \sum_m \gamma_m \cdot R_m(\rho), \quad \gamma_m = const,$$

$$\text{где } \gamma_m = \left(\left(\frac{\rho}{r}\right)^v,\, R_m\right) = \int_0^r \left(\frac{\rho}{r}\right)^v \cdot R_m^*(\rho)\cdot \rho\, d\rho =$$

$$=\left[\mu_m\ \rho=\alpha_m^{(v)}\frac{\rho}{r}\equiv x\ge 0,\ \ R_m\left(\rho\right)=\frac{\sqrt{2}}{r}\ \ J_v\left(x\right)/J_{v+1}\left(\alpha\right)\right]=$$

$$=\frac{r\sqrt{2}}{\alpha^{v+2}\cdot J_{v+1}\left(\alpha\right)}\cdot\int_0^{\alpha}J_v\left(x\right)\cdot x^{v+1}d\ x=$$

$$=\frac{r\sqrt{2}}{\alpha^{v+2}\cdot J_{v+1}\left(\alpha\right)}\cdot x^{v+1}J_{v+1}\left(x\right)\ \Bigg|_0^{\alpha}=\frac{r\sqrt{2}}{\alpha_m^{(v)}}=\frac{\sqrt{2}}{\mu_m}>0.$$

Из сравнения общих m-тых членов рядов получим искомое уравнения для функции времени:

$$\frac{d\ T_m}{d\ t}+\left(\mu_m\ b\right)^2\cdot T_m\left(t\right)=-\left(A\ b^2t+B\right)\ \gamma_m=-\left(A\ b^2t+B\right)\frac{\sqrt{2}}{\mu_m}.$$

К этому уравнению следует добавить начальное условие

$$w\ \left(\rho,\ 0\right)=\sum_m\ T_m\left(0\right)\cdot R_m\left(\rho\right)=0\Rightarrow T_m\left(0\right)=0,$$

если поставлена начальная задача Коши.

5. Решение задачи Коши для функции от времени $T_m\left(t\right)$.

$$\frac{d\ T_m}{d\ t}+\left(\mu_m\ b\right)^2\cdot T_m\left(t\right)=-\left(A\ b^2t+B\right)\frac{\sqrt{2}}{\mu_m},\qquad T_m\left(0\right)=0.$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения очевидно

$$\overset{0}{T}_m\left(t\right)=C_m e^{-\left(\mu_m\ b\right)^2t},\qquad C_m=const.$$

Частное решение неоднородного уравнения, в соответствии с его линейной правой частью будем искать в виде $\tilde{T}_m(t)=M\ t+N\ \ (M,N=const)$. Тогда

$$\tilde{T}_m'+\left(\mu_m\ b\right)^2\cdot\tilde{T}_m\left(t\right)=M+\left(\mu_m\ b\right)^2\cdot\left(M\ \ t+N\right)=-\left(A\ b^2t+B\right)\ \frac{\sqrt{2}}{\mu_m}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow M=-\frac{A\sqrt{2}}{\mu_m^3},\quad N=\frac{\sqrt{2}}{\mu_m^3\ b^2}\left(\frac{A}{\mu_m^2}-\frac{B}{\mu_m}\right),\ \tilde{T}_m\left(t\right)=-\frac{\sqrt{2}}{\mu_m^3\ b^2}\left(A\ b^2t-\frac{A}{\mu_m^2}+\frac{B}{\mu_m}\right).$$

$$T_m\left(t\right)=\overset{0}{T}_m\left(t\right)+\tilde{T}_m\left(t\right)=C_m\ e^{-\left(\mu_m\ b\right)^2t}-\frac{\sqrt{2}}{\mu_m^3\ b^2}\ \left(A\ b^2t-\frac{A}{\mu_m^2}+\frac{B}{\mu_m}\right).$$

Определив постоянную C_m из начального условия, получим решение задачи Коши

$$T_m(t) = \frac{-\sqrt{2}}{b^2\mu_m^3} \cdot \left[Ab^2 t + \left(B - \frac{A}{\mu_m^2} \right) \left(1 - e^{-(\mu_m b)^2 t} \right) \right].$$

6. Окончательный вид решения задачи:

$$w(\rho,t) = \sum_{m=1}^{\infty} T_m(t) \cdot R_m(\rho) =$$

$$= \frac{-2}{b^2 r} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ Ab^2 t + \left(B - \frac{A}{\mu_m^2} \right) \cdot \left(1 - e^{-(\mu_m b)^2 t} \right) \right\} \frac{J_{1/2}(\mu_m \rho)}{\mu_m^3 \cdot J_{3/2}(\mu_m r)}.$$

Теперь решение задачи будет:

$$u(\rho,t) = Bt + \sqrt{\frac{r}{\rho}} w(\rho,t) =$$

$$= Bt - \frac{2}{b^2\sqrt{r\rho}} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ Ab^2 t + \left(B - \frac{A}{\mu_m^2} \right) \cdot \left(1 - e^{-(\mu_m b)^2 t} \right) \right\} \times$$

$$\times \frac{J_{1/2}(\mu_m \rho)}{\mu_m^3 \cdot J_{3/2}(\mu_m r)}; \quad \mu_m = \alpha_m^{(1/2)} \big/ r > 0.$$

7. Проверка решения по условиям задачи и по размерностям.

$$\left| \, u\big|_{\rho=0} \right| < \infty \because \lim_{\rho \to 0} J_{1/2}(\mu_m \rho) \big/ \sqrt{\rho} = \lim_{\rho \to 0} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi \mu_m \rho}} \cdot \frac{\sin \mu_m \rho}{\sqrt{\rho}} \right) = \sqrt{\frac{2\mu_m}{\pi}} = const.$$

$$u\big|_{\rho=r} = Bt \because J_{1/2}(\mu_m r) = J_{1/2}\left(\alpha_m^{(1/2)} \right) = 0. \quad u\big|_{t=0} = 0.$$

Полученный в ответе ряд сходится не медленнее чем $\mathrm{O}\left(\dfrac{1}{m^3} \right)$ при $m \to \infty$, так как при больших номерах корней m получаем $\mu_m = \alpha_m^{(\nu)} \big/ r \cong m >> 1$.

Размерности формул тоже совпадают:

$$\left[u(\rho,\Omega,t) \right] \equiv Q, \ \left[A \right] = Q \big/ L^2 T, \ \left[B \right] = Q/T, \ \left[b^2 \right] = L^2 \big/ T.$$

$$\left[u\left(\rho,\Omega,t\right)\right]=\frac{Q}{T}T+\frac{T}{L^2\cdot L}\left\{\frac{Q}{L^2T}\frac{L^2}{T}T+\left(\frac{Q}{T}+\frac{Q}{L^2T}L^2\right)\right\}L^3\Rightarrow Q.$$

8. Переход от функций Бесселя к элементарным функциям.

Положительные корни нашего дисперсионного уравнения $J_{1/2}\left(\alpha\right)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi\alpha}}\cdot\sin\alpha=0$ равны $\alpha_m^{(1/2)}=\pi m>0$ при $m\in N$. Поэтому в формуле ответа задачи отношение функций Бесселя примет вид:

$$\frac{J_{1/2}\left(\alpha_m^{(1/2)}\dfrac{\rho}{r}\right)}{J_{3/2}\left(\alpha_m^{(1/2)}\right)}=\sqrt{\frac{r}{\rho}}\frac{\pi m\cdot\sin\dfrac{\pi m\rho}{r}}{\sin\pi m-\pi m\cdot\cos\pi m}=\left(-1\right)^{m+1}\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\sin\frac{\pi m\rho}{r}.$$

Теперь ответ задачи можно переписать в упрощенной форме:

$$u\left(\rho,t\right)=Bt+\frac{2}{b^2\rho}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\left\{Ab^2t+\left(B-\frac{A}{\mu_m^2}\right)\left(1-e^{-\left(\mu_m b\right)^2t}\right)\right\}\cdot\frac{\left(-1\right)^m}{\mu_m^3}\sin\mu_m\rho$$

при $\mu_m=\dfrac{\pi m}{r}>0.$

Если далее воспользоваться разложением в ряд Фурье

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{m+1}}{m^3}\sin\frac{\pi m\rho}{r}=\frac{\pi^3\rho}{12r}\left(1-\frac{\rho^2}{r^2}\right)\ \text{ при }\ 0\le\rho\le r,$$

то первый член суммы в ответе сворачивается и получаем

$$u\left(\rho,t\right)=Bt-\frac{1}{6}Ar^2t\left(1-\frac{\rho^2}{r^2}\right)+$$
$$+\frac{2}{b^2\rho}\sum_{m=1}^{\infty}\left(B-\frac{A}{\mu_m^2}\right)\left(1-e^{-\left(\mu_m b\right)^2t}\right)\cdot\frac{\left(-1\right)^m}{\mu_m^3}\sin\mu_m\rho$$

при $\mu_m=\dfrac{\pi m}{r}>0.$

Здесь все проверки по условиям задачи и по размерностям снова выполняются.

Задача 3.5. Изменение температуры шара $u(\rho,\Omega,t)$ происходит как за счет внутренних источников тепла плотностью $F(\rho,\Omega,t)$ при $0\le\rho\le r$, так и с поверхности $\rho=r$, где растет пропорционально времени $f(\Omega,t)$. Знак температуры в разных местах определяется знаком сферической функции $Y_{nk}(\Omega)$.

$$\begin{cases} \Delta_3 u - \dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial u}{\partial t} = F(\rho,\Omega,t) \equiv A\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^3 \cdot Y_{3,-1}(\Omega) \ . \\ u\big|_{\rho=r} = f(\Omega,t) \equiv Bt\cdot Y_{3,-1}(\Omega); \\ u\big|_{t=0} = 0. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u = u(\rho,\Omega,t). \\ 0\le\rho\le r,\ 0\le t<\infty. \\ 0\le 2\theta,\quad \varphi\le 2\pi. \\ A,B,b,r = const > 0. \end{array}$$

1. Отделение зависимости от углов

$$u(\rho,\Omega,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\ \sum_{k=-n}^{n} u_{nk}(\rho,t)\cdot Y_{nk}(\Omega).$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\dfrac{\partial u_{nk}}{\partial\rho}\right) - \dfrac{n(n+1)}{\rho^2}u_{nk} - \dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial u_{nk}}{\partial t} = F_{nk}(\rho)\ . \\ \left|u_{nk}(0,t)\right| < \infty, \quad u_{nk}(r,t) = \gamma_{nk}(t)\ ; \quad u_{nk}(\rho,0) = 0. \end{cases} \quad \begin{array}{l} .u_{nk} = u_{nk}(\rho,t)\ . \\ 0\le\rho\le r,\ 0\le t<\infty. \end{array}$$

Здесь $F_{nk}(\rho,t) = (F,Y_{nk}) \equiv A\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^3$, $\qquad \gamma_{nk}(t) = Bt\cdot\delta_{n,3}\cdot\delta_{k,-1}$, поэтому

положим $u_{nk}(\rho,t) = \upsilon(\rho,t)\cdot\delta_{n,3}\cdot\delta_{k,-1}$ и $\upsilon(\rho,t)=0$ при $n\ne 3$ или $k\ne -1$.

2. Введение оператора Бесселя $\hat{D}_Б = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{d}{d\rho}\right) - \dfrac{\nu^2}{\rho^2}$ после замены

$$\upsilon(\rho,t) = \sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\tilde{w}(\rho,t)$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial\tilde{w}}{\partial\rho}\right) - \dfrac{\nu^2}{\rho^2}\tilde{w} - \dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial\tilde{w}}{\partial t} = A\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^{\nu}, \\ \left|\tilde{w}(0,t)\right| < \infty, \quad \tilde{w}(r,t) = Bt; \quad \tilde{w}(\rho,0) = 0. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \tilde{w} = \tilde{w}(\rho,t)\ . \\ 0\le\rho\le r,\ 0\le t<\infty. \\ \nu = n + \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{2}. \end{array}$$

3. Приведение граничных условий к однородным получается при замене искомой функции $\tilde{w}(\rho,t) = w(\rho,t) + Bt \cdot \left(\dfrac{\rho}{r}\right)^{\nu}$. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial w}{\partial\rho}\right) - \dfrac{\nu^2}{\rho^2}w - \dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial w}{\partial t} = \left(A + \dfrac{B}{b^2}\right)\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^{\nu}, & w = w(\rho,t) \ . \\ \left|w(0,t)\ \right| < \infty, \quad w(r,t) = 0 \ ; \quad w(\rho,0) = 0. & \nu = \dfrac{7}{2}. \end{cases}$$

4. Разложение в ряд Фурье–Бесселя функции $w(\rho,t) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} T_m(t) \cdot R_m(\rho)$,

где $R_m(\rho) = \dfrac{\sqrt{2}}{r} \cdot J_\nu(\mu_m\rho) / J_{\nu+1}(\mu_m r) -$ множество ортонормированных собственных функций оператора Бесселя (базис) $\hat{D}_Б R = \lambda R(\rho)$ при $\left|R_m(0)\ \right| < \infty$ и $R_m(r) = 0$, где $\lambda_m = -\mu_m^2 = -\left(\alpha_m^{(\nu)}/r\right)^2 < 0 -$ собственные значения (спектр). Здесь $\alpha_m^{(\nu)} > 0 -$ простые корни функций Бесселя $J_\nu\left(\alpha_m^{(\nu)}\right) = 0$ и $J_{\nu+1}\left(\alpha_m^{(\nu)}\right) \neq 0$.

Подставляя ряд Фурье–Бесселя в уравнение задачи, получим

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial w}{\partial\rho}\right) - \frac{\nu^2}{\rho^2}w - \frac{1}{b^2}\frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{m=1}^{\infty}\left\{\hat{D}_Б R_m \cdot T_m - \frac{1}{b^2}R_m T_m'\right\} =$$

$$= -\frac{1}{b^2} \cdot \sum_m \left\{\ T_m' + (\mu_m b)^2 T_m\right\} R_m = \left(A + \frac{B}{b^2}\right) \cdot \left(\frac{\rho}{2}\right)^{\nu} =$$

$$= \left(A + \frac{B}{b^2}\right) \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m R_m(\rho) \ ,$$

где

$$\gamma_m = \left(\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\nu}, R_m\right) = \int_0^r \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\nu} R_m(\rho) \cdot \rho \, d\rho = \frac{\sqrt{2}}{\mu_m} = const > 0.$$

Получилась задача Коши для функции $T_m(t)$:

$$T_m' + (\mu_m b)^2 \cdot T_m(t) = -(Ab^2 + B)\frac{\sqrt{2}}{\mu_m}, \qquad T_m(0) = 0.$$

5. Решение неоднородного уравнения для задачи Коши находим

$$T_m(t) = -\left(Ab^2 + B\right)\frac{\sqrt{2}}{b^2 \mu_m}\left(1 - e^{-(\mu_m b)^2 t}\right).$$

6. Окончательный вид решения задачи.

$$w(\rho,t) = \sum_{m=1}^{\infty} T_m(t) R_m(\rho) = \frac{-2}{rb^2}\left(Ab^2 + B\right) \cdot \sum_{m=1}^{\infty}\left(1 - e^{-(\mu_m b)^2 t}\right) \cdot \frac{J_\nu(\mu_m \rho)}{\mu_m^3 J_{\nu+1}(\rho)(\mu_m r)}.$$

$$u(\rho,\Omega,t) = -u_{3,-1}(\rho,t) \cdot Y_{3,1}^*(\Omega) = -\upsilon(\rho,t) \cdot Y_{3,1}^*(\Omega) =$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{6\pi}} \cdot \left[Bt\left(\frac{\rho}{r}\right)^3 + \sqrt{\frac{r}{\rho}} \cdot w(\rho,t)\right] \cdot P_{3,1}(\cos\theta) \cdot e^{-i\varphi} =$$

$$= -\frac{1}{32}\sqrt{\frac{21}{\pi}}\left\{Bt \cdot \left(\frac{\rho}{r}\right)^3 -\right.$$

$$\left. -\frac{2}{rb^2} \cdot \left(Ab^2 + B\right)\sqrt{\frac{r}{\rho}} \cdot \sum_{m=1}^{\infty}\left(1 - e^{-(\mu_m b)^2 t}\right) \cdot \frac{J_\nu(\mu_m \rho)}{\mu^3{}_m \cdot J_{\nu+1}(\mu_m r)}\right\} \times$$

$$\times \left(5\sin 3\theta + \sin\theta\right) \cdot e^{-i\varphi}; \qquad \mu_m = \alpha_m^{(\nu)} \Big/ r, \quad \nu = \frac{7}{2}.$$

7. Проверка правильности решения по условиям задачи и по размерностям.

$$u\Big|_{\rho=r} = Bt \cdot Y_{3,-1}(\Omega); \quad u\Big|_{t=0} = 0.$$

$$\left[u(\rho,\Omega,t)\right] \equiv Q, \ \left[A\right] = Q/L^2, \ \left[B\right] = Q/T, \ \left[\mu_m\right] = 1/L, \ \left[b^2\right] = L^2/T.$$

$$\left[u\right] \equiv Q = \left\{\frac{Q}{T}T \cdot 1 + \frac{T}{L^2 \cdot L}\left(\frac{Q}{L^2}\frac{L^2}{T} + \frac{Q}{T}\right) \cdot 1 \cdot L^3\right\} \cdot 1 \Rightarrow Q.$$

<u>Задача 3.6.</u> Решение неоднородного уравнения теплопроводности с однородными условиями.

$$\begin{cases} \Delta_3 u - \dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial u}{\partial t} = F(\rho,\Omega,t) \equiv A\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^2\cdot Y_{2,-1}(\Omega). \\ u\big|_{\rho=r} = 0, \quad u\big|_{t=0} = 0. \end{cases} \qquad \begin{matrix} u = u(\rho,\Omega,t). \\ 0\le\rho\le r,\ 0\le t<\infty. \\ 0\le 2\theta,\varphi\le 2\pi. \end{matrix}$$

1. $u(\rho,\Omega,t) = \sum\limits_{n,k} u_{nk}(\rho,t)\cdot Y_{nk}(\Omega).$

$$\Delta_3 u - \frac{1}{b^2}\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n,k}\left\{\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial u_{nk}}{\partial\rho}\right) - \frac{n(n+1)}{\rho^2}u_{nk} - \frac{1}{b^2}\frac{\partial u_{nk}}{\partial t}\right\}\cdot Y_{nk} =$$

$$= A\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^2\cdot Y_{2,-1}(\Omega) = A\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^2\cdot\sum_{n,k}\delta_{n,2}\cdot\delta_{k,-1.}\cdot Y_{nk}\,;\ \upsilon(\rho,t) = u_{nk}\cdot\delta_{n,2}\cdot\delta_{k,-1.}.$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\dfrac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right) - \dfrac{6}{\rho^2}\upsilon - \dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial\upsilon}{\partial t} = A\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^2. \\ |\upsilon(0,t)| < \infty, \quad \upsilon(r,t) = 0, \quad \upsilon(\rho,0) = 0. \end{cases} \qquad \begin{matrix} \upsilon = \upsilon(\rho,t). \qquad n = 2. \\ \upsilon(\rho,t) \equiv 0 \text{ при} \\ n \ne 2 \text{ или } k \ne -1. \end{matrix}$$

2. $\upsilon(\rho,t) = \sqrt{\dfrac{r}{\rho}}\cdot w(\rho,t)\ ;\ \nu = n + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$ при $n = 2$.

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right) - \frac{6}{\rho^2}\upsilon - \frac{1}{b^2}\frac{\partial\upsilon}{\partial t} =$$

$$= \sqrt{\frac{r}{\rho}}\left\{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial w}{\partial\rho}\right) - \frac{(5/2)^2}{\rho^2}w - \frac{1}{b^2}\frac{\partial w}{\partial t}\right\} = A\left(\frac{\rho}{r}\right)^2.$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial w}{\partial\rho}\right) - \dfrac{\nu^2}{\rho^2}w - \dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial w}{\partial t} = A\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^{5/2}. \\ |w(0,t)| < \infty, \quad w(r,t) = 0, \quad w(\rho,0) = 0. \end{cases} \qquad w = w(\rho,t)\ .$$

3. $\hat{D}_Б = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{d}{d\rho}\right) - \dfrac{\nu^2}{\rho^2}\ ;\ \nu = \dfrac{5}{2};\ |R(0)| < \infty,\ R\ (r) = 0,$

$$w(\rho,t)=\sum_{m=1}^{\infty}T_m(t)\cdot R_m(\rho);\qquad R_m(\rho)=\frac{\sqrt{2}}{r}\cdot J_\nu\left(\alpha_m^{(\nu)}\frac{\rho}{r}\right)\Big/J_{\nu+1}\left(\alpha_m^{(\nu)}\right).$$

$$J_{\nu+1}\left(\alpha_m^{(\nu)}\right)\neq 0.\qquad \lambda_m=-\mu_m^2=-\left(\alpha_m^{(\nu)}/r\right)^2<0.$$

$\alpha_m^{(\nu)}>0-$ простые корни дисперсионного уравнения $J_\nu(\alpha)=0$.

4. $$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial w}{\partial\rho}\right)-\frac{\nu^2}{\rho^2}w-\frac{1}{b^2}\frac{\partial w}{\partial t}=\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\hat{D}_Б R_m\cdot T_m-\frac{1}{b^2}T'_m R_m\right\}=$$

$$=-\frac{1}{b^2}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\left\{T'_m+(\mu_m b)^2T_m\right\}\cdot R_m=A\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^{5/2}$$

$$T'_m+(\mu_m b)^2\cdot T_m(t)=\gamma_m\equiv -b^2A\cdot\left(\left(\frac{\rho}{r}\right)^{5/2},R_m\right)=-\frac{Ab^2\sqrt{2}}{\mu_m};\qquad T_m(0)=0.$$

5. $$T'_m+(\mu_m b)^2\cdot T_m(t)=-\frac{Ab^2\sqrt{2}}{\mu_m};\quad T_m(0)=0.$$

$$T_m(t)=C_m\cdot e^{-æ_m^2t}+\frac{\gamma_m}{æ_m^2},\quad æ_m=\mu_m b>0.$$

$$T_m(0)=C_m+\frac{\gamma_m}{æ_m^2}=0\Rightarrow C_m=-\frac{\gamma_m}{æ_m^2}.\qquad T_m(t)=\frac{\gamma_m}{æ_m^2}\cdot\left(1-e^{-æ_m^2t}\right).$$

6. $$w(\rho,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\gamma_m}{æ_m^2}\left(1-e^{-æ_m^2t}\right)\cdot R(\rho).$$

$$u(\rho,\Omega,t)=\upsilon(\rho,t)\cdot Y_{2,-1}(\Omega)=\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot w(\rho,t)\cdot Y_{2,-1}(\Omega)=$$

$$=\frac{2A}{r}\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\left(1-e^{-(\mu_m b)^2t}\right)\cdot\frac{J_{5/2}(\mu_m\rho)}{\mu_m^3\cdot J_{7/2}(\mu_m r)}\cdot Y_{2,-1}(\Omega);\qquad \mu_m=\alpha_m^{(5/2)}\big/r>0.$$

$$Y_{2,-1}(\Omega)=-Y_{2,1}^*(\theta,\varphi)=-\sqrt{\frac{5}{4\pi}\frac{1!}{3!}}\cdot P_{2,1}(\cos\theta)\cdot e^{-i\varphi}=$$

$$=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{6\pi}}\cdot\frac{3}{2}\sin 2\theta\cdot e^{-i\varphi}=-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{\pi}}\cdot\sin 2\theta\cdot e^{-i\varphi}.$$

7. Проверка решения по условиям и по размерностям.

$$u(0,\Omega,t)=0<\infty \because J_{5/2}(0)=0,$$

$$u(r,\Omega,t)=0<\infty \because J_{5/2}\left(\alpha_m^{(5/2)}\right)=0, \quad u(\rho,\Omega,0)=0.$$

$$\left[u(\rho,\Omega,t)\right]\equiv Q,\ \left[A\right]=Q/L^2,\ \left[\mu_m\rho\right]=\left[\alpha_m^{(5/2)}\frac{\rho}{r}\right]=1,\ \left[b^2\right]=L^2/T,$$

$$\left[\mu_m r\right]=1, \quad \left[æ_m\right]=\left[\mu_m b\right]=\left[\alpha_m^{(5/2)}\frac{b}{r}\right]=1/\sqrt{T}.$$

$$\left[u(\rho,\Omega,t)\right]\equiv Q=\left[\frac{A}{r}\right]\cdot 1\cdot L^3 \Rightarrow Q.$$

Задача 3.7. Решение неоднородного уравнения переноса с неоднородным граничным условием (обе неоднородности линейны по времени).

$$\begin{cases} \Delta_3 u-\dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial u}{\partial t}=F(\rho,\Omega,t)\equiv At\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^3\cdot Y_{3,-1}(\Omega). \\ u\big|_{\rho=r}=f(\Omega,t)\equiv Bt\cdot Y_{3,-1}(\Omega), \quad u\big|_{t=0}=0. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u=u(\rho,\Omega,t). \\ 0\le\rho\le r,\ 0\le t<\infty. \\ 0\le 2\theta,\varphi\le 2\pi. \end{array}$$

1. Отделение зависимости от углов $u(\rho,\Omega,t)=$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n}\tilde{u}_{nk}(\rho,t)\cdot Y_{nk}(\Omega) \ .$$

$$\Delta_3 u-\frac{1}{b^2}\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{n,k}\left\{\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial\tilde{u}_{nk}}{\partial\rho}\right)-\frac{n(n+1)}{\rho^2}\tilde{u}_{nk}-\frac{1}{b^2}\frac{\partial\tilde{u}_{nk}}{\partial t}\right\}\cdot Y_{nk}=$$

$$=F(\rho,\Omega,t)\equiv\sum_{n,k}\tilde{F}_{nk}(\rho,t)\cdot Y_{nk}(\Omega)=At\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^3\cdot Y_{3,-1}(\Omega),$$

$$u\big|_{\rho=r}=f(\Omega,t)\equiv\sum_{n,k}\tilde{f}_{nk}(t)\cdot Y_{nk}(\Omega)=Bt\cdot Y_{3,-1}(\Omega);$$

где $\tilde{F}_{nk}(\rho,t)=\left(At\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^3\cdot Y_{3,-1},\ Y_{nk}\right)=At\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^3\cdot\delta_{n,3}\cdot\delta_{k,-1},$

$$\tilde{f}_{nk}(t) = \left(Bt \cdot Y_{3,-1}, Y_{nk}\right) = Bt \cdot \delta_{n,3} \cdot \delta_{k,-1}.$$

$\tilde{u}_{nk}(\rho,t) = \tilde{u}(\rho,t)$ при $n = 3$ и $k = -1$; иначе $\tilde{u}_{nk}(\rho,t) = 0$.

$\tilde{f}_{nk}(t) = \tilde{f}(t)$ и $\tilde{F}_{nk}(\rho,t) = \tilde{F}(\rho,t)$ – аналогично

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial\rho}\right) - \dfrac{3\cdot 4}{\rho^2}\tilde{u} - \dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial t} = \\ \qquad = \tilde{F}(\rho,t) \equiv At\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^3. \\ \left|\tilde{u}(0,t)\right| < \infty, \quad \tilde{u}(r,t) = \tilde{f}(t) \equiv Bt. \\ \tilde{u}(\rho,0) = 0. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \tilde{u} = \tilde{u}(\rho,t). \\ 0 \le \rho \le r, \ 0 \le t < \infty. \end{array}$$

2. Сведение дифференциального оператора по ρ к оператору Бесселя

$$\hat{D}_Б = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d}{d\rho}\right) - \frac{\nu^2}{\rho^2} \ \text{заменой}\ \tilde{u}(\rho,t) = \sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\upsilon(\rho,t).$$

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\rho}\right) - \frac{n(n+1)}{\rho^2}\tilde{u} - \frac{1}{b^2}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t} = \sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\left\{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right) - \frac{\nu^2}{\rho^2}\upsilon - \frac{1}{b^2}\frac{\partial\upsilon}{\partial t}\right\} =$$

$$= \tilde{F}(\rho,t) \ \text{при}\ \nu = n + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \ \text{и}\ n = 3.$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right) - \dfrac{\nu^2}{\rho^2}\upsilon - \dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial\upsilon}{\partial t} = \tilde{F}(\rho,\Omega,t)\sqrt{\dfrac{\rho}{r}} = At\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^\nu. \\ \left|\upsilon(0,t)\right| < \infty, \quad \upsilon(r,t) = \tilde{f}(t) = Bt; \quad \upsilon(\rho,0) = 0. \end{cases} \qquad \upsilon = \upsilon(\rho,t).$$

3. Приведение граничных условий к однородным заменой

$$\upsilon(\rho,t) = w(\rho,t) + \tilde{f}(t)\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^\nu = w(\rho,t) + Bt\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^{7/2}.$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial w}{\partial\rho}\right) - \dfrac{\nu^2}{\rho^2}w - \dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial w}{\partial t} = F_0(\rho,t). \\ \left|w(0,t)\right| < \infty, \quad w(r,t) = 0; \quad w(\rho,0) = 0. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} w = w(\rho,t). \\ 0 \le \rho \le r, \ 0 \le t < \infty. \end{array}$$

Здесь $F_0\left(\rho,t\right)\equiv \tilde{F}\left(\rho,t\right)\sqrt{\dfrac{\rho}{r}}+\dfrac{1}{b^2}\tilde{f}'\left(t\right)\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^{v}=\left(At+\dfrac{B}{b^2}\right)\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^{v}$.

Связь функций $u\left(\rho,\Omega,t\right)$ и $w\left(\rho,t\right)$ получим в виде

$$u\left(\rho,\Omega,t\right)=\sum_{n,k}\tilde{u}_{nk}\left(\rho,t\right)\cdot Y_{nk}\left(\Omega\right)=\sum_{n,k}\left(\tilde{u}_{nk}\left(\rho,t\right)\cdot\delta_{n,3}\cdot\delta_{k,-1.}\right)\cdot Y_{nk}\left(\Omega\right)=$$

$$=\tilde{u}\left(\rho,t\right)\cdot Y_{3,-1}\left(\Omega\right)=\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\upsilon\left(\rho,t\right)\cdot Y_{3,-1}\left(\Omega\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\left[\tilde{f}\left(t\right)\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^{v}+w\left(\rho,t\right)\right]\cdot Y_{3,-1}\left(\Omega\right)=$$

$$=\left[At\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^{3}+\sqrt{\frac{\rho}{r}}\cdot w\left(\rho,t\right)\right]\cdot Y_{3,-1}\left(\Omega\right).$$

4. Разделение переменных для функции $w\left(\rho,t\right)$ и решение краевой задачи по переменной ρ.

$w\left(\rho,t\right)=R\left(\rho\right)\cdot T\left(t\right)-$фундаментальное решение. Где функцию $R\left(\rho\right)$ определим в гильбертовом пространстве $L_2\left(0,r\middle|\rho\right)$ из краевой задачи для оператора Бесселя и граничных однородных условий, полученных из условий рассматриваемой задачи:

$$\hat{D}_{Б}R=\lambda R\left(\rho\right),\qquad \lambda=-\mu^2<0\ ;\qquad\qquad \left|R\ \left(0\right)\right|<\infty,\ \ R\left(r\right)=0.$$

Получим $\lambda_m=-\mu_m^2=-\left(\alpha_m^{(v)}/r\right)^2<0-$дискретный спектр при $m\in\mathbb{N}$; это простые корни дисперсионного уравнения $J_v\left(\alpha\right)=0$. Каждому собственному числу λ_m (точнее номеру m) соответствует вектор-функция $R_m\left(\rho\right)=C\cdot J_v\left(\mu_m\rho\right)=C\cdot J_v\left(\alpha_m^{(v)}\dfrac{\rho}{r}\right)$; здесь $C=const>0$. Если вектор-функцию $R_m\left(\rho\right)$ нормировать на единицу, получим

$R_m(\rho)=\dfrac{\sqrt{2}}{r}\cdot J_\nu(\mu_m\rho)\big/J_{\nu+1}(\mu_m r)-$ ортогональный базис со скалярным произведением $(R_m,R_{m'})=\int\limits_0^r R_m(\rho)\cdot R_{m'}(\rho)\cdot\rho\,d\rho=\delta_{mm'}$.

Разложение функции $w(\rho,t)$ по базису $R_m(\rho)$ даст равномерно и абсолютно сходящийся ряд $w(\rho,t)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}T_m(t)\cdot R_m(\rho)$, который допускает двойное дифференцирование по обеим переменным. Для сходимости ряда необходимо, чтобы координата имела предел $\lim\limits_{m\to\infty}T_m(t)=0$.

5. Постановка задачи для функции $T_m(t)$.

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial w}{\partial\rho}\right)-\frac{\nu^2}{\rho^2}w-\frac{1}{b^2}\frac{\partial w}{\partial t}=\sum_m\left\{\hat{D}_Б R_m\cdot T_m-\frac{1}{b^2}R_m T'_m\right\}=$$

$$=-\frac{1}{b^2}\sum_m\left\{T'_m+(\mu_m b)^2\cdot T_m\right\}\cdot R_m=F_0(\rho,t).$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left\{T'_m+(\mu_m b)^2\cdot T_m\right\}R_m(\rho)=-b^2\cdot F_0(\rho,t)=-\left(Ab^2t+B\right)\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^\nu=$$

$$=-\left(Ab^2t+B\right)\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_m(t)\cdot R_m(\rho).$$

Здесь

$$\gamma_m=\left(\left(\frac{\rho}{r}\right)^\nu,\ R_m\right)=\int_0^r\left(\frac{\rho}{r}\right)^\nu\cdot R_m(\rho)\cdot\rho\,d\rho=\left[x=\alpha_m^{(\nu)}\frac{\rho}{r}\right]=$$

$$=\frac{r\sqrt{2}}{\alpha^{\nu+2}\cdot J_{\nu+1}(\alpha)}\cdot\int_0^\alpha J_\nu(x)\cdot x^{\nu+1}dx=\frac{\sqrt{2}}{\mu_m}>0.$$

Приравнивая обе стороны разложения, получим

$$T'_m+(\mu_m b)^2\cdot T_m(t)=-\left(Ab^2t+B\right)\cdot\gamma_m=-\left(Ab^2t+B\right)\frac{\sqrt{2}}{\mu_m}.$$

Подставляя в разложении функции $w(\rho,t)$ значение $t=0$, находим начальное условие $T_m(0)=0$.

6. Решение задачи Коши для функции $T_m(t)$.

$$T_m' + (\mu_m b)^2 \cdot T_m(t) = -\left(Ab^2 t + B\right)\frac{\sqrt{2}}{\mu_m}, \qquad T_m(0)=0.$$

Общее решение однородного уравнения очевидно $\mathring{T}_m(t) = C_m e^{-(\mu_m b)^2 t}$ при $C_m = const$. Частное решение неоднородного уравнения легко находится в форме двучлена $\tilde{T}_m(t) = -\frac{\sqrt{2}}{b^2\mu_m^3}\left(A\left(b^2 t - \frac{1}{\mu_m^2}\right)+B\right)$. Поэтому общее решение неоднородного уравнения равно

$$T_m(t) = \mathring{T}_m(t) + \tilde{T}_m(t) = C_m e^{-(\mu_m b)^2 t} - \frac{\sqrt{2}}{b^2\mu_m^3}\left(A\left(b^2 t - \frac{1}{\mu_m^2}\right)+B\right).$$

Использовав начальное условие задачи, получим ее частное решение.

$$T_m(t) = -\frac{\sqrt{2}}{b^2\mu_m^3}\left(Ab^2 t + \left(B - \frac{A}{\mu_m^2}\right)\cdot\left(1 - e^{-(\mu_m b)^2 t}\right)\right) < 0.$$

Так как приближенно $\mu_m = \alpha_m^{(v)}/r \cong m$ при $m \to \infty$, то выражение для $T_m(t)$ имеет оценку $\mathrm{O}\left(\frac{1}{m^3}\right)$ при $m >> 1$.

7. Окончательный вид решения задачи.

$$u(\rho,\Omega,t) = \sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\left\{Bt\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^v + w(\rho,t)\right\}\cdot Y_{3,-1}(\theta,\varphi) =$$

$$= \sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\left\{Bt\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^v - \frac{2}{rb^2}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\left[Ab^2 t + \left(B - \frac{A}{\mu_m^2}\right)\left(1 - e^{-(\mu_m b)^2 t}\right)\right]\times\right.$$

$$\left.\times\frac{J_v(\mu_m\rho)}{\mu^3{}_m\cdot J_v(\mu_m r)}\right\}\cdot Y_{2,-1}(\theta,\varphi).$$

Здесь $\nu = n + \dfrac{1}{2} = 3 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{2}$ и $\mu_m = \alpha_m^{(\nu)} \big/ r > 0.$

Приведем значение сферической функции в развернутом виде

$$Y_{3,-1}\left(\theta,\varphi\right) = -Y_{3,1}^{*}\left(\theta,\varphi\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{7}{3\pi}} \cdot P_{3,1}\left(\cos\theta\right) \cdot e^{-i\varphi} =$$

$$= -\frac{1}{32}\sqrt{\frac{21}{\pi}} \cdot \left(5\sin 3\theta + \sin\theta\right) \cdot e^{-i\varphi}.$$

8. Проверка решения по условиям задачи и по размерностям.

$$u\big|_{\rho=0} = 0 < \infty \because \sqrt{\frac{r}{\rho}} \cdot J_\nu(\mu_m \rho) \cong \rho^{\nu-1} \to 0 \text{ при } \rho \to 0 \text{ и } \nu = \frac{7}{2} > 1.$$

$$u\big|_{\rho=r} = \left\{Bt - 0\right\} \cdot Y_{3,-1}\left(\Omega\right) = Bt \cdot Y_{3,-1}\left(\Omega\right) \because J_\nu\left(\mu_m \rho\right) = J_\nu\left(\alpha_m^{(\nu)}\right) = 0.$$

$$u\big|_{t=o} = 0.$$

$$\left[u\left(\rho,\Omega,t\right)\right] \equiv Q,\ \left[A\right] = Q\big/L^2 T,\ \left[B\right] = Q/T,\ \left[b^2\right] = L^2/T,\ \left[\mu_m\right] = 1/L,$$

$$\left[\mu_m r\right] = 1,\quad \left[\mu_m b\right] = 1\big/\sqrt{T}.$$

$$\left[u\right] \equiv Q = 1 \cdot \left\{\left[B\right] \cdot T \cdot 1 + \frac{T}{L \cdot L^2}\left(\left[A\right] \cdot \frac{L^2}{T} \cdot T + \left[B\right] + \left[A\right] \cdot L^2\right) \cdot L^3\right\} \Rightarrow Q.$$

Задача 3.8. Решение уравнения переноса с неоднородным граничным условием смешанного типа.

$$\begin{cases} \Delta_3 u - \dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0. \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial n} + au\right)\Bigg|_{\rho=r} = f\left(\Omega,t\right). \\ u\big|_{t=0} = 0. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u = u\left(\rho,\Omega,t\right), \\ 0 \le \rho \le r, 0 \le t < \infty.\ \dfrac{\partial}{\partial n} = \dfrac{\partial}{\partial \rho}. \\ a,b = const > 0. \end{array}$$

1. Отделение зависимости от углов $u\left(\rho,\Omega,t\right) = \sum\limits_{n,k} \tilde{u}_{nk}\left(\rho,t\right) \cdot Y_{nk}\left(\Omega\right).$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\dfrac{\partial\tilde{u}_{nk}}{\partial\rho}\right)-\dfrac{n(n+1)}{\rho^2}\tilde{u}_{nk}-\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial\tilde{u}_{nk}}{\partial t}=0. \\ \left|\tilde{u}_{nk}(0,t)\right|<\infty,\ \left(\dfrac{\partial\tilde{u}_{nk}}{\partial\rho}+a\tilde{u}_{nk}\right)\Bigg|_{\rho=r}=\tilde{f}_{nk}(t). \qquad \tilde{u}_{nk}(t)=\tilde{u}_{nk}(\rho,t). \\ \tilde{u}_{nk}(\rho,0)=0. \end{cases}$$

Примем $f(\Omega,t)=At\cdot Y_{4,-3}(\Omega)$; тогда $\tilde{u}_{nk}(\rho)=\tilde{u}(\rho,t)\cdot\delta_{n,4}\cdot\delta_{k,-3}$ и $\tilde{f}_{nk}(t)=At\cdot\delta_{n,4}\cdot\delta_{k,-3}$. При $n\neq4$ или $k\neq-3$ решение задачи оказывается тривиальным $\tilde{u}(\rho,t)\equiv0$.

2. Приведение радиальной части уравнения к уравнению Бесселя.

Положим $\tilde{u}(\rho,t)=\sqrt{\dfrac{r}{\rho}}\cdot\upsilon(\rho,t)$, тогда

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\rho}\right)-\frac{n(n+1)}{\rho^2}\tilde{u}-\frac{1}{b^2}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}=\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\left\{\hat{D}_Б\upsilon-\frac{1}{b^2}\frac{\partial\upsilon}{\partial t}\right\}=0,$$

где $\hat{D}_Б=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{d}{d\rho}\right)-\dfrac{\nu^2}{\rho^2}$ при $\nu=n+\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{2}$ и $n=4$.

$$\left(\frac{\partial\tilde{u}_{nk}}{\partial n}+a\tilde{u}_{nk}\right)\Bigg|_{\rho=r}=\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial\rho}+\left(a-\frac{1}{2r}\right)\cdot\upsilon\right)\Bigg|_{\rho=r}=\tilde{f}_{nk}(t)=At.$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right)-\dfrac{\nu^2}{\rho^2}\upsilon-\dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial\upsilon}{\partial t}=0. \\ \left|\upsilon(0,t)\right|<\infty,\ \left(\dfrac{\partial\upsilon}{\partial\rho}+\left(a-\dfrac{1}{2r}\right)\cdot\upsilon\right)\Bigg|_{\rho=r}=\tilde{f}\ (t)=At. \\ \upsilon(\rho,0)=0. \end{cases}$$

$$\upsilon=\upsilon(\rho,t)\ ,\ \nu=\frac{9}{4}. \qquad 0\leq\rho\leq r,\ 0\leq t<\infty.$$

3. Приведем граничные условия к однородным заменой $\upsilon(\rho,t)=w(\rho,t)+\alpha(t)\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^{p}+\beta(t)$. Здесь коэффициенты $\alpha(t),\ \beta(t)$ и показатель $p=const\geq 0$ подбираются.

Из условия $\left|\upsilon(0,t)\right|<\infty$ примем $\beta(t)\equiv 0$, а при $\rho=r$ будет

$$\left.\left(\upsilon'_\rho+\left(a-\frac{1}{2r}\right)\cdot\upsilon\right)\right|_{\rho=r}=\left.\left(w'_\rho+\left(a-\frac{1}{2r}\right)\cdot w\right)\right|_{\rho=r}+\alpha(t)\cdot\left(\frac{p}{r}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{p-1}+\right.$$

$$\left.\left.+\left(a-\frac{1}{2r}\right)\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^{p}\right)\right|_{\rho=r}=\left.\left(w'_\rho+\left(a-\frac{1}{2r}\right)\cdot w\right)\right|_{\rho=r}+\alpha(t)\cdot\left(a-\frac{1}{r}\left(p-\frac{1}{2}\right)\right)=\tilde{f}(t).$$

Выберем $\left.\left(w'_\rho+\left(a-\dfrac{1}{2r}\right)\cdot w\right)\right|_{\rho=r}=0$ при

$$\alpha(t)=\tilde{f}(t)\Big/\left(a-\frac{1}{r}\left(p-\frac{1}{2}\right)\right)\quad\text{и}\quad p-ar\neq\frac{1}{2}-$$ условие Дини. Тогда

$$\upsilon(\rho,t)=w(\rho,t)+\left(\frac{\rho}{r}\right)^{p}\cdot\tilde{f}(t)\Big/\left(a-\frac{1}{r}\left(p-\frac{1}{2}\right)\right)=w(\rho,t)+\left(\frac{\rho}{r}\right)^{p}\cdot f_0(t).$$

Показатель $p\geq 0$ определяется из уравнения задачи

$$\hat{D}_Б\upsilon-\frac{1}{b^2}\frac{\partial\upsilon}{\partial t}=\hat{D}_Б w-\frac{1}{b^2}\frac{\partial w}{\partial t}+\tilde{f}_0(t)\cdot\hat{D}_Б\left(\frac{\rho}{r}\right)^{p}-\frac{1}{b^2}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{p}\cdot\tilde{f}'_0(t)=0,$$

$$\hat{D}_Б\left(\frac{\rho}{r}\right)^{p}=\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{p}\right)-\frac{\nu^2}{\rho^2}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{p}=\frac{p^2-\nu^2}{\rho^2}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{p}\rho^2.$$

Для упрощения выражения примем $p=\nu$, тогда окончательно получим замену

$$\upsilon(\rho,t)=w(\rho,t)+\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\nu}\cdot\tilde{f}_0(t)=w(\rho,t)+\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\nu}\cdot\tilde{f}_0(t)\Big/\left(a+\frac{n}{r}\right).$$

Здесь $ar+n\neq 0$ – условие Дини (иначе смешанная краевая задача решения не имеет).

Получим уравнение для функции $w(\rho,t)$:

$$\left(\hat{D}_Б-\frac{1}{b^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\upsilon=\left(\hat{D}_Б-\frac{1}{b^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(w+\tilde{f}_0(t)\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\nu}\right)=\left(\hat{D}_Б-\frac{1}{b^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)w+$$

$$+\tilde{f}_0(t)\cdot\hat{D}_Б\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\nu}-\frac{1}{b^2}\tilde{f}_0'(t)\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\nu}=0\Rightarrow\hat{D}_Б w-\frac{1}{b^2}\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{1}{b^2}\tilde{f}_0'(t)\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\nu};$$

здесь $\hat{D}_Б\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\nu}=0.$

Для начального условия получим выражение

$$\upsilon(\rho,0)=w(\rho,0)+\tilde{f}_0(t)\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\nu}=0\Rightarrow w(\rho,0)=-\tilde{f}_0(0)\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\nu}.$$

Окончательная постановка задачи для заданной функции $\tilde{f}(t)=At\quad\left(\tilde{f}(0)=0\right)$ имеет вид:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial w}{\partial\rho}\right)-\dfrac{\nu^2}{\rho^2}w-\dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial w}{\partial t}=\tilde{A}\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^{\nu}. & \\ \left|w(0,t)\right|<\infty,\quad \left.\left(w_\rho'+\left(a-\dfrac{1}{2r}\right)\cdot w\right)\right|_{\rho=r}=0; & \begin{array}{l}w=w(\rho,t).\\ 0\le\rho\le r,\ 0\le t<\infty.\end{array}\\ w(\rho,0)=0. & \end{cases}$$

Здесь опять $\nu=n+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}>0$ и $n=4$: $\tilde{A}=\frac{Ar}{ar+n}=\frac{Ar}{ar+4}>0.$

Укажем связь между первоначальной функцией $u(\rho,\Omega,t)$ и упрощенной функцией $w(\rho,t)$.

$$u(\rho,\Omega,t)=\tilde{u}(\rho,t)\cdot Y_{4,-3}(\Omega)=-\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\left[w(\rho,t)+\tilde{f}_0(t)\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\nu}\right]\cdot Y_{4,3}^*(\theta,\varphi)=$$

$$= -\sqrt{\frac{r}{\rho}} \cdot \left[w(\rho,t) + \tilde{A}t \cdot \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\nu} \right] \cdot Y^{*}_{4,3}(\theta,\varphi).$$

Как и выше, $\nu = n + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$ при $n = 4$ и $\tilde{A} = \frac{Ar}{ar+n} = \frac{Ar}{ar+4}$.

4. Разделение переменных $w(\rho,t) = \sum_{m=1}^{\infty} T_m(t) \cdot R_m(\rho)$ и решение краевой задачи для оператора $\hat{D}_Б$ с нашими граничными условиями.

Так как в уравнении задачи эрмитов (самосопряженный) только оператор Бесселя $\hat{D}_Б$, то можно поставить третью (смешанную) краевую задачу

$$\hat{D}_Б R = \lambda R(\rho) \text{ при } |R(0)| < \infty,\ R'_\rho + \left(a - \frac{1}{2r}\right) \cdot R(r) = 0 \text{ и } \lambda = -\mu^2 \le 0.$$

В гильбертовом пространстве $L_2(0,r|\rho)$ со скалярным произведением вида $(f,g) = \int_0^r f(\rho) \cdot \overline{g}(\rho) \cdot \rho\, d\rho$ ($\rho-$весовая функция), запишем эту задачу в развернутой форме.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{dR}{d\rho}\right) + \left(\mu^2 - \dfrac{\nu^2}{\rho^2}\right) \cdot R(\rho) = 0; & \nu = \dfrac{9}{2}. \\ |R(0)| < \infty, \quad \left(R'_\rho + \tilde{a} \cdot R\right)\Big|_{\rho=r} = 0. & \tilde{a} = a - \dfrac{1}{2r}. \end{cases}$$

Общее решение уравнения получим $R(\rho) = C \cdot J_\nu(\mu_m \rho) + \tilde{C} \cdot N_\nu(\mu_m \rho)$ при $C, \tilde{C} = const$. Условие в нуле дает $|R(0)| < \infty \Rightarrow \tilde{C} = 0$, так как функция Неймана $N_\nu(0) = -\infty$ при всех $\nu \in \mathbb{Z}$. Другое граничное условие приводит

$$\left(R'_\rho + \tilde{a} \cdot R\right)\Big|_{\rho=r} = C \cdot \left(\mu \cdot J'_\nu(\mu r) + \tilde{a} \cdot J_\nu(\mu r)\right) =$$

$$= \frac{1}{r} C \cdot \left(\mu r \cdot J'_\nu(\mu r) + ra \cdot J_\nu(\mu r)\right) = 0.$$

Здесь $C \neq 0$, поэтому $\beta \cdot J'_{\nu}(\beta) + r\tilde{a} \cdot J_{\nu}(\beta) = 0$ – дисперсионное (характеристическое) уравнение и его простые корни $\beta = \mu\, r$ будут $\beta_m^{(\nu)} > 0$ при $m \in \mathbb{N}$. Дискретный отрицательный спектр собственных значений получим $\lambda_m = -\mu_m^2 = -\left(\beta_m^{(\nu)}/r\right)^2 < 0$.

Собственные функции (векторы) краевой задачи равны $R_m(\rho) = C \cdot J_{\nu}(\mu_m \rho) = C \cdot J_{\nu}\left(\beta_m^{(\nu)} \dfrac{\rho}{r}\right)$ при $m \in \mathbb{N}$. Так как собственные векторы $R_m(\rho)$ ортогональны при различных собственных значениях λ_m (при разных индексах m), то их можно нормировать на единицу.

$$(R_m, R_m) = \|R_m\|^2 = \int_0^r \left|R_m(\rho)\right|^2 \cdot \rho\, d\rho = |C|^2 \cdot \int_0^r J_{\nu}^2\left(\beta_m^{(\nu)} \frac{\rho}{r}\right) \cdot \rho\, d\rho =$$

$$= \left[\beta_m^{(\nu)} \frac{\rho}{r} = x \geq 0,\ \ \rho\Big|_0^r \Rightarrow x\Big|_0^{\beta}\right] = |C|^2 \cdot \left(\frac{r}{\beta}\right)^2 \cdot \int_0^{\beta} J_{\nu}^2(x) \cdot x dx =$$

$$= \left|\frac{Cr}{\beta}\right|^2 \cdot \frac{x^2}{2}\left(J'^2_{\nu}(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) \cdot J_{\nu}^2(x)\right)\Bigg|_0^{\beta} = \frac{1}{2}|Cr|^2 \cdot \left(J'^2_{\nu}(\beta) + \left(1 - \frac{\nu^2}{\beta^2}\right) \cdot J_{\nu}^2(\beta)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}|Cr|^2 \cdot \left(\left(\frac{r\tilde{a}}{\beta}\right)^2 + \left(1 - \frac{\nu^2}{\beta^2}\right)\right) \cdot J_{\nu}^2(\beta) =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{Cr}{\beta}\right|^2 \cdot \left(\left(ra - \frac{1}{2}\right)^2 + \beta^2 + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2\right) \cdot J_{\nu}^2(\beta) =$$

$$= \frac{1}{2}|Cr|^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{\beta^2}(ra - n - 1) \cdot (ra + n)\right) \cdot J_{\nu}^2(\beta) = 1.$$

Откуда ортонормированный базис из собственных функций будет $\overset{0}{R}_m(\rho) = \overset{0}{R}_m(\rho)/\|R_m\|$ и $\left(\overset{0}{R}_m, \overset{0}{R}_{m'}\right) = \delta_{mm'}$ при $m, m' \in \mathbb{N}$. Значение $m = 0$ не учитывается, и тогда

$$R_m(\rho) = \frac{\sqrt{2}}{r}\left(1 + \frac{1}{\beta_m^{(\nu)^2}} \cdot (ra - n - 1)(ra + n)\right)^{-1/2} \cdot J_{\nu}\left(\beta_m^{(\nu)} \frac{\rho}{r}\right) \Big/ J_{\nu}\left(\beta_m^{(\nu)}\right).$$

Здесь $\beta_m^{(\nu)}>0$ – простой m-тый корень дисперсионного уравнения, но не корень функции Бесселя $J_\nu\left(\beta_m^{(\nu)}\right)\neq 0$.

Тогда разложение функции $w(\rho,t)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}T_m(t)\cdot R_m(\rho)$ по собственным векторам $R_m(\rho)$ (по базису) сходится абсолютно и равномерно (правильно) при всех $\rho\in[0,r]$ и $t\geq 0$ и его можно дважды дифференцировать (по Th Стеклова о разложении в ряд по собственным векторам оператора Штурма–Лиувилля). Отметим необходимое условие сходимости ряда $\lim\limits_{m\to\infty}T_m(t)=0$ по координате.

5. Вывод дифференциального уравнения для функции $T_m(t)$.

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial w}{\partial\rho}\right)-\frac{\nu^2}{\rho^2}w-\frac{1}{b^2}\frac{\partial w}{\partial t}=$$

$$=\sum_m\left\{\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\,R_m}{d\rho}\right)T_m-\frac{\nu^2}{\rho^2}R_mT_m-\frac{1}{b^2}R_mT'_m\right\}=$$

$$=\sum_m\left\{\hat{D}_Б R_m\cdot T_m-\frac{1}{b^2}R_mT'_m\right\}=\left[\hat{D}_Б R_m=\lambda_mR_m=-\mu_m^2R_m\right]=$$

$$=-\frac{1}{b^2}\sum_m\left\{T'_m+\left(\mu_mb\right)^2\cdot T_m\right\}\cdot R_m=\frac{1}{b^2}\tilde{f}'_0(t)\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\nu}=$$

$$=\frac{\tilde{A}}{b^2}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\nu}=\frac{1}{b^2}\frac{Ar}{ar+n}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\nu}.$$

Перепишем в более простом виде.

$$\sum_m\left\{T'_m+\left(\mu_mb\right)^2\cdot T_m(t)\right\}\cdot R_m(t)=-\tilde{A}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\nu}=\sum_m\gamma_m(t)\cdot R_m(\rho).$$

Значение координаты разложения $\gamma_m(t)$ найдем с помощью скалярного произведения

$$\gamma_m(t)=\left(-\tilde{A}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\nu},R_m\right)=-\frac{\tilde{A}}{r^{\nu}}\frac{\sqrt{2}}{r}\left(1+\frac{1}{\beta_m^{(\nu)2}}(ar-n-1)(ra+n)\right)^{-1/2}\times$$

$$\times\int_0^r J_\nu\left(\beta_m^{(\nu)}\frac{\rho}{r}\right)\cdot\rho^{\nu+1}\,d\rho\Big/J_\nu\left(\beta_m^{(\nu)}\right)=\left[\beta_m^{(\nu)}\frac{\rho}{r}=x\geq 0\right]=$$

$$=-\frac{\tilde{A}r\sqrt{2}}{\beta^{\nu+2}\cdot J_\nu(\beta)}(1+\ldots)^{-1/2}\cdot\int_0^\beta J_\nu(x)\cdot x^{\nu+1}dx=$$

$$=\frac{-\tilde{A}r\sqrt{2}}{\beta^{\nu+2}\cdot J_\nu(\beta)}(1+\ldots)^{-1/2}\cdot\beta^{\nu+1}\cdot J_{\nu+1}(\beta)=$$

$$=\frac{-\tilde{A}r\sqrt{2}}{\beta\cdot J_\nu(\beta)}(1+\ldots)^{-1/2}\cdot\left(\frac{\nu}{\beta}J_\nu(\beta)-J_\nu'(\beta)\right)=-\frac{\tilde{A}r\sqrt{2}}{\beta\cdot J_\nu(\beta)}(1+\ldots)^{-1/2}\times$$

$$\times\left(\frac{\nu}{\beta}J_\nu(\beta)-\left(-\frac{r\tilde{a}}{\beta}\right)\cdot J_\nu(\beta)\right)=-\frac{\tilde{A}r\sqrt{2}}{\beta^2}(1+\ldots)^{-1/2}\cdot(\nu+r\tilde{a})=$$

$$=-\frac{Ar^2\sqrt{2}}{\beta^2}(1+\ldots)^{-1/2}=stat.$$

Для функции $T_m(t)$ теперь получим неоднородное дифференциальное уравнение вида

$$T_m'+(\mu_m b)^2\cdot T_m(t)=-\frac{Ar^2\sqrt{2}}{\beta_m^{(\nu)2}}\left(1+\frac{1}{\beta_m^{(\nu)2}}(ar-n-1)\cdot(ra+n)\right)^{-1/2}<0.$$

6. Решение дифференциального уравнения для функции $T_m(t)$. Общее решение однородного уравнения $\overset{\circ}{T}_m(t)=C_m e^{-(\mu_m b)^2 t}$, где C_m – произвольная постоянная. Частное решение неоднородного уравнения для заданной стационарной правой части находим в виде постоянной

$$\tilde{T}_m(t)=-\frac{Ar^2\sqrt{2}}{\beta^2}(1+\ldots)^{-1/2}\Big/(\mu_m b)^2=$$

$$=-\frac{A\sqrt{2}}{b^2\mu_m^4}\left(1+\frac{1}{\beta_m^{(\nu)2}}(ar-n-1)\cdot(ra+n)\right)^{-1/2}<0.$$

Тогда общее решение неоднородного уравнения будет

$$T_m(t) = \overset{\circ}{T}_m(t) + \tilde{T}_m(t) = C_m e^{-(\mu_m b)^2 t} - \frac{A\sqrt{2}}{b^2 \mu_m^4}(1+\ldots)^{-1/2}.$$

$$w(\rho,t) = \sum_{m=1}^{\infty} T_m(t)\cdot R_m(\rho) = \sum_m \left\{ C_m e^{-(\mu_m b)^2 t} - \frac{A\sqrt{2}}{b^2 \mu_m^4}(1+\ldots)^{-1/2} \right\} R_m(\rho).$$

7. Определим постоянную C_m из начального условия задачи

$$w(\rho,0) = \sum_m \left\{ C_m - \frac{A\sqrt{2}}{b^2 \mu_m^4}(1+\ldots)^{-1/2} \right\} R_m(\rho) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_m = \frac{A\sqrt{2}}{b^2 \mu_m^4}(1+\ldots)^{-1/2} > 0.$$

$$w(\rho,t) = -\frac{A\sqrt{2}}{b^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_m^4}\left(1 - e^{-(\mu_m b)^2 t}\right)\cdot(1+\ldots)^{-1/2}\cdot R_m(\rho).$$

8. Окончательный вид решения задачи.

$$u(\rho,\Omega,t) = \sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\left\{ \tilde{f}_0(t)\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^{v} + w(\rho,t) \right\}\cdot Y_{4,-3}(\Omega) =$$

$$= -\left\{ \frac{r\,\tilde{f}(t)}{ar+n}\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n} + \sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot w(\rho,t) \right\}\cdot Y_{4,3}^{*}(\Omega) =$$

$$= -\left\{ \frac{r\,\tilde{f}\,(t)}{ar+n}\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n} - \sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\frac{A\sqrt{2}}{b^2}\sum_m \frac{1}{\mu_m^4}\left(1 - e^{-(\mu_m b)^2 t}\right)\times\right.$$

$$\left.\times(1+\ldots)^{-1/2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{r}(1+\ldots)^{-1/2}\cdot\frac{J_v(\mu_m\rho)}{J_v(\mu_m r)} \right\}\cdot Y_{4,3}^{*}(\Omega).$$

В нашем случае $n = 4$, $k = -3$ и $\tilde{f}\,(t) = At$ получим

$$u(\rho,\Omega,t) = \sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\left\{ \frac{Art}{ar+n}\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^{v} + \frac{2A}{rb^2}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\left(1 - e^{-(\mu_m b)^2 t}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(1 + \frac{(ar-n-1)(ra+n)}{\mu_m^2 r^2}\right)^{-1}\cdot\frac{J_v(\mu_m\rho)}{\mu_m^4\cdot J_v(\mu_m r)} \right\}\cdot Y_{4,3}^{*}(\theta,\varphi).$$

Ряд сходится не медленнее чем $\mathrm{O}\left(\dfrac{1}{m^4}\right)$ при всех значениях $\rho \in [0, r]$ и $0 < t < \infty$; сходимость правильная (абсолютная и равномерная). Здесь $\mu_m = \beta_m^{(v)} / r > 0$, где $\beta_m^{(v)} > 0 -$ простые корни характеристического уравнения $\beta \cdot J_v'(\beta) + \left(ra - \dfrac{1}{2}\right) \cdot J_v(\beta) = 0.$

Вычислим значение сферической функции

$$Y_{4,-3}(\theta,\varphi) = -Y_{4,3}^*(\theta,\varphi) = -\sqrt{\frac{9}{4\pi}\frac{1!}{7!}} \cdot P_{4,3}(\cos\theta) \cdot e^{-3i\varphi}.$$

При $x = \cos\theta$ присоединенная функция Лежандра

$$P_{4,3}(x) = \frac{\left(1-x^2\right)^{3/2}}{2^4 \cdot 4!} \frac{d^7}{dx^7}\left(x^2-1\right)^4 = \ldots \cdot \frac{d^7}{dx^7}\left(x^8 - 8x^6 + \ldots\right) =$$

$$= \frac{\left(1-x^2\right)^{3/2}}{2^4 \cdot 4!} \cdot 8! x = 7!! \cdot \ x\left(1-x^2\right)^{3/2} = 7!! \cdot \ \cos\theta \ \sin^3\theta.$$

Тогда

$$Y_{4,-3}(\theta,\varphi) = -\sqrt{\frac{9}{4\pi}\frac{1!}{7!}} \cdot 7!! \cdot \ \cos\theta \ \cdot \sin^3\theta \cdot e^{-3i\varphi} =$$

$$= -\frac{3}{8}\sqrt{\frac{35}{\pi}} \cdot \cos\theta \ \cdot \sin^3\theta \cdot e^{-3i\varphi}.$$

9. Проверка полученного решения по условиям задачи и по размерностям.

$$\left| u\big|_{\rho=0} \right| = 0 < \infty \because \sqrt{\frac{r}{\rho}} \cdot \left(\frac{\rho}{r}\right)^v = \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \to 0 \ \text{ и } \ \sqrt{\frac{r}{\rho}} \cdot J_v(\mu_m r) \cong (\mu_m \rho)^n \to 0$$

при $\rho \to 0$ и $n = 4$.

Перепишем ответ в упрощенном виде.

$$u(\rho,\Omega,t) = \left\{ \tilde{A}t \cdot \left(\frac{\rho}{r}\right)^n + \sum_{m=1}^{\infty} Q_m(t) \cdot \sqrt{\frac{r}{\rho}} \cdot J_v(\mu_m \rho) \right\} \cdot Y_{4,-3}(\Omega).$$

Здесь $\tilde{A} = \dfrac{Ar}{ar+n}$, $v = n + \dfrac{1}{2} = \dfrac{9}{2}$ при $n = 4$,

$$Q_m(t) = -\frac{2A}{rb^2}\left(1 - e^{\cdots}\right)\cdot\left(1+\ldots\right)^{-1} \Big/ \mu_m^4 J_v(\mu_m r).$$

Накладывая граничное условие при $\rho = r$, получим

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + au\right)\Bigg|_{\rho=r} = \left\{ \tilde{A}t\cdot\left[\frac{n}{r}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n-1} + a\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n}\right]\Bigg|_{\rho=r} + \right.$$

$$\left. +\sum_{m=1}^{\infty} Q_m(t)\cdot\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot J_v(\mu_m\rho)\right) + a\cdot\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot J_v(\mu_m\rho)\right]\Bigg|_{\rho=r}\right\}\cdot Y_{4,-3}(\Omega).$$

Здесь выражение в первой квадратной скобке даст

$$[\ldots]\Big|_{\rho=r} = \frac{n}{r} + a \Rightarrow \tilde{A}t\cdot\left(\frac{n}{r}+a\right) = At \neq 0.$$

Выражение во второй квадратной скобке даст

$$[\ldots]\Big|_{\rho=r} = \left[-\frac{1}{2\rho}\sqrt{\frac{r}{\rho}}J_v(\mu_m\rho) + \sqrt{\frac{r}{\rho}}\mu_m J_v(\mu_m\rho) + a\sqrt{\frac{r}{\rho}}J_v(\mu_m\rho)\right]\Bigg|_{\rho=r} =$$

$$= \mu_m J_v'(\mu_m\rho) + \left(a - \frac{1}{2r}\right)\cdot J_v(\mu_m r) =$$

$$= \left[\mu_m r \equiv \beta_m^{(v)}\right] = \frac{1}{r}\left(\beta\cdot J_v'(\beta) + r\tilde{a}\cdot J_v(\beta)\right) = 0$$

– дисперсионное уравнение, корни которого $\beta \equiv \beta_m^{(v)} = \mu_m r > 0$.

Таким образом, в ответе все слагаемые ряда обращаются в нули и остается выражение только от слагаемого вне ряда; поэтому выполняется условие $\left(u_\rho' + au\right)\Big|_{\rho=r} = At\cdot Y_{4,-3}(\Omega)$.

Проверим совпадения размерностей в условиях и в ответе. Пусть

$$\left[u(\rho,\Omega,t)\right] = Q,\ [A] = Q/LT,\ [a] = 1/L,\ \left[b^2\right] = L^2/T,\quad \left[\mu_m\rho\right] = 1,$$

$$\left[\left(\mu_m b\right)^2 t\right] = \frac{1}{L^2}\frac{L^2}{T}T = 1, \quad \left[\tilde{A}\right] = Q/T, \quad \left[1 + \frac{(ar+n)\cdot(ar-n-1)}{r^2\mu_m^2}\right] = 1.$$

$$\left[u(\rho,\Omega,t)\right] \equiv Q = 1\cdot\left\{\frac{Q}{T}\cdot T\cdot 1 + \frac{Q}{L\cdot T}\frac{T}{L\cdot L^2}\cdot 1\cdot L^4\right\} \Rightarrow Q.$$

10. Замечания о связи разных типов краевых задач.

Задача Неймана при $a = 0$: $J'_\nu(\beta) = 0 \Rightarrow \beta_m^{(\nu)} > 0 -$ простые корни; $\lambda_m = -\mu_m^2 = -\left(\beta_m^{(\nu)}/r\right)^2 \ \beta_m^{(\nu)} < 0 -$ дискретный спектр.

$$R_m(\rho) = \frac{\sqrt{2}}{r}\left(1 - \frac{n(n+1)}{\beta_m^{(\nu)2}}\right)^{-1/2} \cdot J_\nu(\mu_m\rho)/J_\nu(\mu_m r) - \text{орты базиса.}$$

Здесь $\tilde{a}^2r^2 - \nu^2 = \left(a - \frac{1}{2r}\right)^2\cdot r^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 = (ar-n-1)\cdot(ar+n) \Rightarrow$

$$\Rightarrow -n(n+1) \text{ при } a = 0; \ n(n+1) = \nu^2 - \frac{1}{4} > 0.$$

Задача Дирихле при $a = \infty$ $\left(\frac{1}{a} = 0\right)$: $J_\nu(\beta) = 0 \Rightarrow \beta_m^{(\nu)} > 0 -$ простые корни (их переобозначим $\alpha_m^{(\nu)} > 0$); $\lambda_m = -\mu_m^2 = -\left(\alpha_m^{(\nu)}/r\right)^2 < 0 -$ дискретный спектр. Преобразуем орты

$$R_m(\rho) = \frac{\sqrt{2}}{r}\left(1 + \frac{1}{\beta^2}\left(\tilde{a}^2r^2 - \nu^2\right)\right)^{-1/2} \cdot J_\nu\left(\beta\frac{\rho}{r}\right)\Big/J_\nu(\beta) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{r}\frac{\beta}{\sqrt{\tilde{a}^2r^2 + \beta^2 - \nu^2}} \cdot J_\nu\left(\beta\frac{\rho}{r}\right)\Big/\left(-\frac{\beta}{\tilde{a}r}J'_\nu(\beta)\right) =$$

$$= \left[-J'_\nu(x) = J_{\nu+1}(x) - \frac{\nu}{x}J_\nu(x)\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{r}\frac{\tilde{a}r}{\sqrt{\tilde{a}^2r^2 + \beta^2 - \nu^2}} \cdot J_\nu\left(\beta\frac{\rho}{r}\right)\Big/\left(J_{\nu+1}(\beta) - \frac{\nu}{\beta}J_\nu(\beta)\right) =$$

$$=\left[\tilde{a}=a-\frac{1}{2r}\to\infty\right]=\frac{\sqrt{2}}{r}\cdot J_v\left(\beta_m^{(v)}\frac{\rho}{r}\right)\Big/J_{v+1}\left(\beta_m^{(v)}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{r}\cdot J_v\left(\mu_m\rho\right)/J_{v+1}\left(\mu_m r\right).$$

Здесь при $a\to\infty$ дисперсионное уравнение станет $J_v\left(\beta\right)=0$, его корни $\beta_m^{(v)}>0$ переобозначим $\alpha_m^{(v)}$; тогда орт запишется в обычной форме

$$R_m\left(\rho\right)=\frac{\sqrt{2}}{r}\cdot J_v\left(\alpha_m^{(v)}\frac{\rho}{r}\right)\Big/J_{v+1}\left(\alpha_m^{(v)}\right),\text{ где }\mu_m=\alpha_m^{(v)}\big/r>0.$$

Решение задач для волнового уравнения (уравнения колебаний)

Задача 3.9. Решение задачи о колебаниях шара (вначале неподвижного), в котором колебания возбуждаются с поверхности и растут линейно со временем.

$$\begin{cases}\Delta_3 u-\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0.\\ \left|u\big|_{\rho=0}\right|<\infty,\quad u\Big|_{\rho=r}=At\cdot Y_{2,-1}\left(\Omega\right);\\ u\big|_{t=0}=u_t'\big|_{t=0}=0.\end{cases}\qquad \begin{array}{l}u=u\left(\rho,\Omega\left(\theta,\varphi\right),t\right).\\ 0\le\rho\le r,\ 0\le t<\infty.\\ A,a,r=const>0.\end{array}$$

Условия ограниченности амплитуды колебаний $u\left(\rho,\Omega,t\right)$ при $\theta=0$ и $\theta=\pi$ и ее периодичности по $\varphi\in\left[0,2\pi\right)$ явно не записаны. Постоянная $a>0-$скорость распространения волн, возбуждаемых внутри шара.

1. Отделение зависимости от углов

$$u\left(\rho,\Omega,t\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n}u_{nk}\left(\rho,t\right)\cdot Y_{nk}\left(\Omega\right)\ .$$

$$\Delta_3 u-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\sum_{n,k}\left\{\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial u_{nk}}{\partial\rho}\right)-\frac{n\left(n+1\right)}{\rho^2}u_{nk}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u_{nk}}{\partial t^2}\right\}\cdot Y_{nk}\left(\Omega\right)=0.$$

Здесь $\Delta_3 = \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\dfrac{\partial}{\partial\rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\tilde{\Delta}$, где

$$\tilde{\Delta} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

$$\tilde{\Delta}Y_{nk}(\Omega) = \lambda_n Y_{nk} = -n(n+1)\cdot Y_{nk}(\Omega) \ .$$

$$\left| u_{nk}\big|_{\rho=0} \right| < \infty, \quad u_{nk}\Big|_{\rho=r} = At\cdot Y_{2,-1}(\Omega) \Rightarrow u_{nk} = \tilde{u}(\rho,t)\cdot\delta_{n,2}\cdot\delta_{k,-1}.$$

$$u_{nk}(\rho,t) = 0 \quad \text{при } n \neq 2 \ \text{ или } \ k \neq -1.$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial\rho}\right) - \dfrac{6}{\rho^2}\tilde{u} - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t^2} = 0. \\ \left|\tilde{u}(0,t)\ \right| < \infty, \quad \tilde{u}(r,t) = At. \\ \tilde{u}(\rho,0) = \tilde{u}'_t(\rho,0) = 0. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \tilde{u} = \tilde{u}(\rho,t)\ . \\ 0 \le \rho \le r, \ 0 \le t < \infty. \end{array}$$

2. Переход к оператору Бесселя $\hat{D}_Б = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{d}{d\rho}\right) - \dfrac{\nu^2}{\rho^2}$ с помощью замены $\tilde{u}(\rho,t) = \sqrt{\dfrac{r}{\rho}}\cdot\upsilon(\rho,t)$.

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\rho}\right) - \frac{n(n+1)}{\rho^2}\tilde{u} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\left\{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right) - \frac{\nu^2}{\rho^2}\upsilon - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\upsilon}{\partial t^2}\right\} = 0.$$

Здесь $\nu = n + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$ при $n = 2$.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right) - \dfrac{\nu^2}{\rho^2}\upsilon - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2\upsilon}{\partial t^2} = 0. \\ \left|\upsilon(0,t)\ \right| < \infty, \quad \upsilon(r,t) = At. \\ \upsilon(\rho,0) = \upsilon'_t(\rho,0) = 0. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \upsilon = \upsilon(\rho,t)\ . \\ 0 \le \rho \le r, \ 0 \le t < \infty. \end{array}$$

3. Приведение граничных условий к однородным производится с помощью замены $\upsilon(\rho,t)=w(\rho,t)+\upsilon(r,t)\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^{\nu}$; что в нашей задаче будет $\upsilon(\rho,t)=w(\rho,t)+At\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^{5/2}$.

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial w}{\partial\rho}\right)-\dfrac{\nu^2}{\rho^2}w-\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0. & w=w(\rho,t).\\ \left|w(0,t)\right|<\infty,\quad w(r,t)=0. & 0\le\rho\le r,\ 0\le t<\infty;\\ w(\rho,0)=0,\ w_t'(\rho,0)=-A\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^{\nu}. & \nu=n+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}\ \text{при}\ n=2.\end{cases}$$

4. Разделение переменных $w(\rho,t)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}T_m(t)\cdot R_m(\rho)$ и решение краевой задачи для оператора Бесселя $\hat{D}_Б=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{d}{d\rho}\right)-\dfrac{\nu^2}{\rho^2}$ с граничными условиями первого рода Дирихле $\left|R(0)\right|<\infty$ и $R(r)=0$ на отрезке $0\le\rho\le r$.

$\lambda_m=-\mu_m^2=-\left(\alpha_m^{(5/2)}/r\right)<0$ – дискретный спектр собственных значений при $m\in\mathbb{N}$; здесь $\alpha_m^{(5/2)}>0$ – простые корни дисперсионного уравнения $J_{5/2}(\alpha)=0$. При этом $J_p(\alpha_m^{(q)})\ne 0$ в случае $p\ne q$.

$$R_m(\rho)=\frac{\sqrt{2}}{r}\cdot J_\nu(\mu_m\rho)\Big/J_{\nu+1}(\mu_m r)=\frac{\sqrt{2}}{r}\cdot J_{5/2}\left(\alpha_m^{(5/2)}\frac{\rho}{r}\right)\Big/J_{7/2}\left(\alpha_m^{(5/2)}\right)$$

– ортогональные базисные орты. Здесь

$$\left(R_m,R_{m'}\right)=\int\limits_0^r R_m(\rho)\cdot\bar{R}_{m'}(\rho)\cdot\rho\,d\rho=\delta_{mm'}\ \text{при}\ m,m'\in\mathbb{N}.$$

Для сходимости ряда по m необходимо $\lim\limits_{m\to\infty}T_m(t)=0$.

5. Постановка задачи Коши для функции $T_m\left(t\right)$ (координаты разложения).

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial w}{\partial\rho}\right)-\frac{\nu^2}{\rho^2}w-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=-\frac{1}{a^2}\cdot\sum_m\left\{\ T_m''+\left(\mu_m a\right)^2\cdot T_m\right\}\ R_m=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_m''+\left(\mu_m a\right)^2\cdot T_m\left(t\right)=0;$$

$$w\left(\rho,0\right)=\sum_m T_m\left(0\right)\cdot R_m\left(\rho\right)\Rightarrow T_m\left(0\right)=0.$$

$$w_t'\left(\rho,0\right)=\sum_m T_m'\left(0\right)\cdot R_m\left(\rho\right)=-A\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\nu}\Rightarrow T_m'\left(0\right)=\gamma_m=\left(-A\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\nu},R_m\right)=$$

$$=-A\cdot\int_0^r\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\nu}\cdot R_m\left(\rho\right)\cdot\rho\,d\rho=\frac{-A\sqrt{2}}{r^{\nu+2}\cdot J_{\nu+1}\left(\alpha\right)}\int_0^r J_\nu\left(\alpha_m^{(\nu)}\frac{\rho}{r}\right)\cdot\rho^{\nu+1}d\rho=$$

$$=\left[x=\alpha_m^{(\nu)}\frac{\rho}{r}\geq 0\right]=\frac{-Ar\sqrt{2}}{\alpha^{\nu+2}\cdot J_{\nu+1}\left(\alpha\right)}\cdot\int_0^{\alpha}J_\nu\left(x\right)\cdot x^{\nu+1}dx=$$

$$=\frac{-Ar\sqrt{2}}{\alpha^{\nu+2}\cdot J_{\nu+1}\left(\alpha\right)}\cdot x^{\nu+1}J_{\nu+1}\left(x\right)\Bigg|_0^{\alpha}=-\frac{Ar\sqrt{2}}{\alpha_m^{(\nu)}}=-\frac{A\sqrt{2}}{\mu_m}<0$$

при $\nu=\dfrac{5}{2}$.

6. Решение задачи Коши для функции $T_m\left(t\right)$.

Общее решение однородного уравнения будет $T_m\left(t\right)=C_m\cdot\sin\omega_m t+\tilde{C}_m\cdot\cos\omega_m t$. Здесь $C_m,\tilde{C}_m=const$ и $\omega_m=\mu_m a=\alpha_m^{(\nu)}\dfrac{a}{r}>0$ – собственные частоты колебаний.

$$T_m\left(0\right)=0+\tilde{C}_m=0\Rightarrow\tilde{C}_m=0;\qquad T_m'\left(0\right)=C_m\cdot\omega_m=\gamma_m\Rightarrow C_m=\frac{\gamma_m}{\omega_m}.$$

Таким образом, решение задачи Коши получим

$$T_m\left(t\right)=\frac{\gamma_m}{\omega_m}\sin\omega_k t=-\frac{A\sqrt{2}}{\omega_m\mu_m}\sin\omega_k t=-\frac{A\sqrt{2}}{a\mu_m^2}\sin\mu_m at.$$

7. Окончательный вид решения.

$$w\left(\rho,t\right)=\sum_{m=1}^{\infty}C_m\cdot\sin\mu_m at\cdot R_m\left(\rho\right)=\sum_m\left(-\frac{A\sqrt{2}}{a\mu_m^2}\right)\sin\mu_m at\cdot\frac{\sqrt{2}\cdot J_\nu\left(\mu_m\rho\right)}{r\cdot J_{\nu+1}\left(\mu_m r\right)}=$$

$$= -\frac{2A}{ar}\sum_m \frac{J_\nu(\mu_m\rho)}{\mu_m^{(\nu)}\cdot J_{\nu+1}(\mu_m r)}\cdot \sin\mu_m at.$$

$$u(\rho,\Omega,t) = \tilde{u}(\rho,t)\cdot Y_{2,-1}(\Omega) = \sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot \upsilon(\rho,t)\cdot Y_{2,-1}(\Omega) = \sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\left\{\quad w(\rho,t)+\right.$$

$$\left.+At\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^\nu\right\}\cdot Y_{2,-1}(\Omega) = \left\{At\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^3 + \sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot w(\rho,t)\right\}\cdot Y_{2,-1}(\Omega) =$$

$$= A\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\left\{t\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^\nu - \frac{2}{ar}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_\nu(\mu_m\rho)}{\mu_m^2 J_{\nu+1}(\mu_m r)}\cdot\sin\mu_m at\right\}\cdot Y_{2,-1}(\theta,\varphi).$$

Полученный ряд сходится абсолютно и равномерно (правильно), так как его общий член имеет оценку $\mathrm{O}\left(\frac{1}{m^2}\right)$ при $m\to\infty$.

8. Проверки выполнения условий задачи и совпадения размерностей.

$$u\big|_{\rho=0} = 0 < \infty \because \sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^\nu = \left(\frac{\rho}{r}\right)^3 \to 0$$

$$\text{и}\quad \sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot J_\nu(\mu_m r) \cong \rho^3 \to 0 \text{ при } \rho\to 0.$$

$$u\big|_{\rho=r} = At\cdot Y_{2,-1}(\theta,\varphi) \because J_\nu(0) = J_{5/2}(0) = 0;\qquad u\big|_{t=o} = 0 \because \sin 0 = 0.$$

$$u'_t\big|_{t=0} = A\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\left\{\left(\frac{\rho}{r}\right)^\nu - \frac{2}{r}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_\nu(\mu_m\rho)}{\mu_m^2 J_{\nu+1}(\mu_m r)}\right\}\cdot Y_{2,-1}(\Omega) = 0.$$

Размерности по условиям задачи: $\left[u(\rho,\Omega,t)\right] \equiv W$, $[A] = W/L$,

$$[a] = L/T,\ [\mu_m\rho] = \left[\alpha_m^{(\nu)}\frac{\rho}{r}\right] = 1,\ [\mu_m at] = \left[\alpha_m^{(\nu)}\frac{at}{r}\right] = 1;$$

$$\left[u(\rho,\Omega,t)\right] \equiv W = \frac{W}{T}\cdot 1\cdot\left\{T\cdot 1 + \frac{T}{L\cdot L}\cdot L^2\right\}\cdot 1 \Rightarrow W.$$

$$Y_{2,-1}(\Omega)\equiv Y_{2,-1}(\theta,\varphi)=-Y_{2,1}^{*}(\theta,\varphi)=-\sqrt{\frac{5}{4\pi}\cdot\frac{1!}{3!}}\,P_{2,1}(\cos\theta)\cdot e^{-i\varphi}=$$

$$=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{6\pi}}\cdot\frac{3}{2}\sin 2\theta\cdot e^{-i\varphi}=-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\cdot\sin 2\theta\cdot e^{-i\varphi}.$$

<u>Задача 3.10.</u> Решение уравнения колебаний шара, начальное положение которого задано.

$$\begin{cases}\Delta_3 u-\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0. \\ \left|u\big|_{\rho=0}\right|<\infty,\quad u\big|_{\rho=r}=0. \\ u\big|_{t=0}=A\cdot\dfrac{\rho}{r}\cdot Y_{1,-1}(\Omega),\quad u_t'\big|_{t=0}=0.\end{cases}\qquad \begin{array}{l} u=u(\rho,\Omega(\theta,\varphi),t)\ . \\ 0\le\rho\le r,\ 0\le t<\infty. \\ A,a,r=const>0.\end{array}$$

1. Отделение зависимости от углов $u(\rho,\Omega,t)=\sum\limits_{n,m}u_{nk}(\rho,t)\cdot Y_{nk}(\Omega)$.

Пусть $u_{nk}(\rho,t)=\tilde{u}(\rho,t)$ при $n=-k=1$; $u_{nk}(\rho,t)=0$ при $n\neq 1$ или $k\neq -1$.

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial\rho}\right)-\dfrac{n(n+1)}{\rho^2}\tilde{u}-\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t^2}=0. \\ \left|\tilde{u}(0,t)\right|<\infty,\quad \tilde{u}(r,t)=0. \\ \tilde{u}(\rho,0)=A\cdot\dfrac{\rho}{r},\quad \tilde{u}_t'(\rho,0)=0.\end{cases}\qquad \begin{array}{l}\tilde{u}=\tilde{u}(\rho,t)\ . \\ 0\le\rho\le r,\quad 0\le t<\infty. \\ n=1\quad и\quad n(n+1)=2.\end{array}$$

2. С помощью замены $\tilde{u}=\tilde{u}(\rho,t)=\upsilon(\rho,t)\cdot\sqrt{\dfrac{r}{\rho}}$ получим оператор

Бесселя $\hat{D}_Б=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{d}{d\rho}\right)-\dfrac{\nu^2}{\rho^2}$.

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\rho}\right)-\frac{n(n+1)}{\rho^2}\tilde{u}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t^2}=\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\left\{\hat{D}_Б\upsilon-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\upsilon}{\partial t^2}\right\}\equiv$$

$$\equiv\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\left\{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right)-\frac{\nu^2}{\rho^2}\upsilon-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\upsilon}{\partial t^2}\right\}=0 \quad \text{при } \nu=n+\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \ \text{ и } \ n=1.$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right)-\dfrac{\nu^2}{\rho^2}\upsilon-\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2\upsilon}{\partial t^2}=0. \\ \left|\upsilon(0,t)\right|<\infty, \quad \upsilon(r,t)=0. \\ \upsilon(\rho,0)=A\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^{3/2}, \quad \upsilon'_t(\rho,0)=0.\end{cases} \qquad \begin{array}{l}\upsilon=\upsilon(\rho,t). \\ 0\le\rho\le r, \ 0\le t<\infty.\end{array}$$

3. Граничные условия задачи заданы однородными.

4. Разделение переменных $\upsilon(\rho,t)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}T_m(t)\cdot R_m(\rho)$ и решение краевой задачи первого рода для оператора Бесселя $\hat{D}_Б$.

Краевая задача первого рода Дирихле:

$$\hat{D}_Б R=\lambda R(\rho) \quad \text{при} \quad \left|R(0)\right|<\infty \ \text{и} \ R(r)=0,\ \lambda=-\mu^2\le 0$$

имеет решение $R_m(\rho)=\dfrac{\sqrt{2}}{r}\cdot J_\nu(\mu_m\rho)\big/J_{\nu+1}(\mu_m r)$ при $\mu_m=\alpha_m^{(\nu)}\big/r>0$ и $\nu=\dfrac{3}{2}$. Базисные орты задачи взаимно ортогональны $(R_m,R_{m'})=\delta_{mm'}$ при $m,m'\in N$. Здесь $\lambda_m=-\mu_m^2=-\left(\alpha_m^{(\nu)}/r\right)^2<0-$ дискретный спектр собственных значений, где $\alpha_m^{(\nu)}>0-$простые корни дисперсионного уравнения $J_\nu(\alpha)=0$; однако $J_{\nu+1}\left(\alpha_m^{(\nu)}\right)\ne 0$.

Разложение Фурье–Бесселя для функции $\upsilon(\rho,t)$ сходится абсолютно и равномерно (правильно) и его можно дважды дифференцировать. Необходимое условие сходимости ряда $\lim\limits_{m\to\infty}T_m(t)=0$.

5. Вывод дифференциального уравнения для функции $T_m(t)$.

$$\hat{D}_Б\upsilon-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\upsilon}{\partial t^2}=\sum_m\left\{\hat{D}_Б R_k\cdot T_k-\frac{1}{a^2}R_k\cdot T_k''\right\}=$$

$$= -\frac{1}{a^2}\sum_m \left\{ T_m'' + (\mu_m a)^2 T_m \right\} \cdot R_m = 0 \Rightarrow T_m'' + \omega_m^2 \cdot T_m(t) = 0,$$

где $\omega_m = \mu_m a = \alpha_m^{(\nu)} \dfrac{a}{r} > 0 -$собственные частоты колебаний.

$$\upsilon(\rho,0) = \sum_m T_m(0) \cdot R_m(\rho) = A\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\nu} \text{ при } \nu = \frac{3}{2} \Rightarrow T_m(0) = \left(A\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\nu}, R_m \right) =$$

$$= A \cdot \int_0^r \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\nu} R_m(\rho) \cdot \rho \, d\rho = \left[x = \alpha_m^{(\nu)} \frac{\rho}{r} \right] = \frac{Ar\sqrt{2}}{\alpha^{\nu+2} \cdot J_{\nu+1}(\alpha)} \cdot \int_0^{\alpha} J_{\nu}(x) \cdot x^{\nu+1} dx =$$

$$= \frac{Ar\sqrt{2}}{\alpha^{\nu+2} \cdot J_{\nu+1}(\alpha)} \cdot x^{\nu+1} J_{\nu+1}(x) \Big|_0^{\alpha} = \frac{Ar\sqrt{2}}{\alpha_m^{(\nu)}} = \frac{A\sqrt{2}}{\mu_m} > 0.$$

Соответственно, получим $\upsilon_t'(\rho,0) = \sum\limits_m T_m'(0) \cdot R_m(\rho) = 0 \Rightarrow T_m'(0) = 0.$

Для определения функции $T_m(t)$ поставим задачу Коши

$$T_m'' + (\mu_m a)^2 T_m(t) = 0; \qquad T_m(0) = \frac{A\sqrt{2}}{\mu_m}, \quad T_m'(0) = 0.$$

6. Решение задачи Коши для функции $T_m(t)$. Общее решение уравнения будет $T_m(t) = C_m \cdot \cos\omega_m t + \tilde{C}_m \cdot \sin\omega_m t \quad (C_m, \tilde{C}_m = const)$. Накладывая начальные условия, получим $T_m'(0) = 0 + \tilde{C}_m\omega_m = 0 \Rightarrow \tilde{C}_m = 0$ и $T_m(0) = C_m = \dfrac{A\sqrt{2}}{\mu_m}$, поэтому $T_m(t) = \dfrac{A\sqrt{2}}{\mu_m} \cdot \cos\mu_m at$.

7. Окончательный вид решения задачи.

$$\upsilon(\rho,t) = \sum_m T_m(t) \cdot R_m(\rho) = \sum_m \frac{A\sqrt{2}}{\mu_m} \cos\mu_m at \cdot \frac{\sqrt{2}}{r} \frac{J_{\nu}(\mu_m\rho)}{J_{\nu+1}(\mu_m r)} =$$

$$= \frac{2A}{r} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_{\nu}(\mu_m\rho)}{\mu_m \cdot J_{\nu+1}(\mu_m r)} \cos\mu_m at \text{ при } \mu_m = \frac{\alpha_m^{(\nu)}}{r} > 0 \text{ и } \nu = \frac{3}{2}.$$

$$u(\rho,\Omega,t)=\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\upsilon(\rho,t)\cdot Y_{1,-1}(\theta,\varphi)=-\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\upsilon(\rho,t)\cdot Y^{*}_{1,1}(\theta,\varphi)=$$

$$=-\frac{2A}{r}\cdot\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_{\nu}(\mu_m\rho)}{\mu_m J_{\nu+1}(\mu_m r)}\cdot\cos\mu_m at\cdot Y^{*}_{1,1}(\theta,\varphi).$$

8. Проверка полученного решения по условиям и размерностям.

$$u\Big|_{\rho=0}=0<\infty \because J_{\nu}(0)=0 \text{ при } \nu=\frac{3}{2};\quad u\Big|_{\rho=r}=0\because J_{\nu}\left(\alpha_m^{(\nu)}\frac{r}{r}\right)=0.$$

$$u\Big|_{t=0}=2A\cdot\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_{3/2}\left(\alpha_m^{(3/2)}\dfrac{\rho}{r}\right)}{\alpha_m^{(3/2)}J_{5/2}\left(\alpha_m^{(3/2)}\right)}\cdot Y_{1,-1}(\theta,\varphi)=$$

$$=A\cdot\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot Y_{1,-1}(\Omega)\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^{3/2}=A\frac{\rho}{r}\cdot Y_{1,-1}(\theta,\varphi).$$

$$u'_t\Big|_{t=0}=0\because \sin 0=0.$$

$$\left[u(\rho,\Omega,t)\right]\equiv W,\ \left[A\right]=W,\ \left[a\right]=L/T,$$

$$\left[u(\rho,\Omega,t)\right]\equiv W=\frac{[A]}{L}\cdot 1\cdot\left[\frac{1}{\mu_m}\right]=\frac{W}{L}L\Rightarrow W.$$

<u>Задача 3.11.</u> Решение неоднородного волнового уравнения внутри шара.

$$\begin{cases}\Delta_3 u-\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=At\cdot S^{(i)}_{1,-1}(\rho,\Omega).\\ u\Big|_{\rho=0}<\infty,\quad u\Big|_{\rho=r}=0.\\ u\Big|_{t=0}=u'_t\Big|_{t=0}=0.\end{cases}$$

$$u=u(\rho,\Omega(\theta,\varphi),t).$$

$$0\le\rho\le r,\quad 0\le t<\infty.$$

$$S^{(i)}_{1,-1}(\rho,\Omega)=\frac{\rho}{r}\cdot Y_{1,-1}(\theta,\varphi)-$$

– внутренняя шаровая функция

1. $u(\rho,\Omega,t)=\sum\limits_{n,k}u_{nk}(\rho,t)\cdot Y_{nk}(\Omega).$

$$\Delta u-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\sum_{n,k}\left\{\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial u_{nk}}{\partial\rho}\right)-\frac{n(n+1)}{\rho^2}u_{nk}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u_{nk}}{\partial t^2}\right\}Y_{nk}(\Omega)=$$

$$= F\left(\rho,\Omega,t\right) = \sum_{n,k} F_{nk}\left(\rho,t\right)\cdot Y_{nk}\left(\Omega\right) = At\frac{\rho}{r}\cdot Y_{1,-1}\left(\Omega\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\rho}\right) - \frac{n\left(n+1\right)}{\rho^2}\tilde{u} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t^2} = \tilde{F}\left(\rho,t\right),$$

где $u_{nk}\left(\rho,t\right) = \tilde{u}\left(\rho,t\right)\cdot\delta_{n,1}\cdot\delta_{k,-1}$; $F_{nk}\left(\rho,t\right)$ – аналогично.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial\rho}\right) - \dfrac{n\left(n+1\right)}{\rho^2}\tilde{u} - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t^2} = \tilde{F}\left(\rho,t\right) \equiv At\dfrac{\rho}{r}. \\ \left|\tilde{u}\left(0,t\right)\right| < \infty,\ \ \tilde{u}\left(r,t\right) = 0,\ \ \tilde{u}\left(\rho,0\right) = 0,\ \ \tilde{u}'_t\left(\rho,0\right) = 0. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \tilde{u} = \tilde{u}\left(\rho,t\right). \\ n = 1. \end{array}$$

2–3. $\tilde{u}\left(\rho,t\right) = \sqrt{\dfrac{\rho}{r}}\cdot\upsilon\left(\rho,t\right)$.

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\rho}\right) - \frac{n\left(n+1\right)}{\rho^2}\tilde{u} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\left\{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right) - \frac{\nu^2}{\rho^2}\upsilon - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\upsilon}{\partial t^2}\right\} =$$

$$= At\frac{\rho}{r}, \qquad n = 1 \ \text{ и } \ \nu = n + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right) - \dfrac{\nu^2}{\rho^2}\upsilon - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2\upsilon}{\partial t^2} = At\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^{\nu}. \\ \left|\upsilon\left(0,t\right)\right| < \infty,\ \ \upsilon\left(r,t\right) = 0;\ \ \upsilon\left(\rho,0\right) = 0,\ \ \upsilon'_t\left(\rho,0\right) = 0; \quad \nu = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

4. $\upsilon\left(\rho,t\right) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} T_m\left(t\right)\cdot R_m\left(\rho\right)$. $\hat{D}_Б = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{d}{d\rho}\right) - \dfrac{\nu^2}{\rho^2}$.

$$\hat{D}_Б R = \lambda R\left(\rho\right),\ \ \lambda = -\mu^2;\ \ \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\,R}{d\rho}\right) + \left(\mu^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right)R\left(\rho\right) = 0.$$

$$\left|R\left(0\right)\right| < \infty, \quad R\left(r\right) = 0.$$

$$R_m\left(\rho\right) = \frac{\sqrt{2}}{r}\cdot J_\nu\left(\mu_m\rho\right)/J_{\nu+1}\left(\mu_m r\right) \ \text{ при } \ \mu_m = \alpha_m^{(\nu)}/r > 0 \ \text{ и } \ \nu = \frac{3}{2}.$$

$\lambda_m = -\mu_m^2 = -\left(\alpha_m^{(\nu)}/r\right)^2 < 0$. $J_\nu\left(\alpha_m^{(\nu)}\right) = 0$ и $J_{\nu+1}\left(\alpha_m^{(\nu)}\right) \neq 0$. $\lim\limits_{m\to\infty} T_m(t) = 0$.

5. $$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right) - \frac{\nu^2}{\rho^2}\upsilon - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\upsilon}{\partial t^2} = \sum_m\left\{\hat{D}_Б R_m \cdot T_m - \frac{1}{a^2}R_m \cdot T''_m\right\} =$$

$$= -\frac{1}{a^2}\sum_m\left\{\, T''_m + \omega_m^2 \cdot T_m\right\}\cdot R_m = At\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^\nu = At\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_m \cdot R_m(\rho).$$

$$\gamma_m = \left(\left(\frac{\rho}{r}\right)^\nu, R_m\right) = \int_0^r\left(\frac{\rho}{r}\right)^\nu R_m(\rho)\cdot\rho\, d\rho = \frac{\sqrt{2}}{\mu_m} > 0.$$

$$\begin{cases} T''_m + \omega_m^2 \cdot T_m(t) = -Aa^2\dfrac{\sqrt{2}}{\mu_m}t. \\ T_m(0) = 0, \quad T'_m(0) = 0. \end{cases} \qquad \omega_m = \mu_m a > 0.$$

6. $$T_m(t) = C_m \cdot \sin\omega_m t + \tilde{C}_m \cdot \cos\omega_m t - \frac{A\sqrt{2}}{\mu_m^3}t.\ \tilde{C}_m = 0,\ C_m = \frac{A\sqrt{2}}{a\mu_m^4} > 0.$$

$$T_m(t) = -\frac{A\sqrt{2}}{a\mu_m^4}\left(\omega_m t - \sin\omega_m t\right).$$

7. $$u(\rho,\Omega,t) = \tilde{u}(\rho,t)\cdot Y_{1,-1}(\Omega) = \sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\upsilon(\rho,t)\cdot Y_{1,-1}(\Omega) =$$

$$= -\frac{2A}{ar}\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\left(\omega_m t - \sin\omega_m t\right)\cdot\frac{J_\nu(\mu_m\rho)}{\mu_m^4\cdot J_{\nu+1}(\mu_m r)}\cdot Y_{1,-1}(\Omega)\ ,$$

где $\omega_m = \mu_m a$, $\mu_m = \alpha_m^{(\nu)}/r$, $\nu = \dfrac{3}{2}$, $Y_{1,-1}(\theta,\varphi) = -\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{3}{2\pi}}\sin 2\theta \cdot e^{-i\varphi}$.

8. $$u\big|_{\rho=0} = 0 < \infty \because \lim_{\rho\to 0}\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot J_{3/2}(\mu_m\rho) = 0, \quad u\big|_{\rho=r} = 0 \because J_{3/2}\left(\alpha_m^{(\nu)}\right) = 0.$$

$$u\big|_{t=0} = 0,\ \ u'_t\big|_{t=0} = 0.$$

$$\left[u(\rho,\Omega,t)\right] \equiv W,\quad [A] = W/L^2T,\quad [a] = L/T,\quad [\omega_m] = 1/T.$$

$$\left[u(\rho,\Omega,t)\right] \equiv W = \frac{W}{L^2T}\cdot\frac{T}{L^2}\cdot 1\cdot L^4 \Rightarrow W.$$

Задача 3.12. Решение неоднородного волнового уравнения внутри шара в симметричном случае (нет зависимости от углов).

$$\begin{cases} \Delta_3 u - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = At. & u = u(\rho,t). \\ \left|u\big|_{\rho=0}\right| < \infty, \quad u\Big|_{\rho=r} = 0; \quad u\big|_{t=0} = u'_t\big|_{t=0} = 0. & 0 \le \rho \le r,\ \ 0 \le t < \infty. \end{cases}$$

1–2. $u(\rho,\Omega,t) = \sqrt{\dfrac{r}{\rho}} \cdot \upsilon(\rho,t)$.

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sqrt{\frac{r}{\rho}} \cdot \left[\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) - \frac{\nu^2}{\rho^2}\upsilon - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\upsilon}{\partial t^2}\right] = At$$

при $\nu = \dfrac{1}{2}$, $\Delta_\Omega = 0$.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right) - \dfrac{\nu^2}{\rho^2}\upsilon - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2\upsilon}{\partial t^2} = \tilde{F}(\rho,t) = At\sqrt{\dfrac{\rho}{r}}. & \upsilon = \upsilon(\rho,t). \\ \left|\upsilon(0,t)\right| < \infty,\ \upsilon(r,t) = 0,\ \upsilon(\rho,0) = \upsilon'_t(\rho,0) = 0. & n = 0,\ \nu = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

3–4. $\upsilon(\rho,t) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} T_m(t) \cdot R_m(\rho)$. $\quad R_m(\rho) = \dfrac{\sqrt{2}}{r} \cdot J_\nu(\mu_m\rho) / J_{\nu+1}(\mu_m r)$.

$$\lambda_m = -\mu_m^2 = -\left(\alpha_m^{(\nu)}/r\right)^2 < 0.\ \ J_\nu\left(\alpha_m^{(\nu)}\right) = 0,\ \ J_{\nu+1}\left(\alpha_m^{(\nu)}\right) \ne 0.$$

5. $$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right) - \frac{\nu^2}{\rho^2}\upsilon - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\upsilon}{\partial t^2} =$$

$$= \sum_m \left\{\left[\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR_m}{d\rho}\right) - \frac{\nu^2}{\rho^2}R_m\right] \cdot T_m - \frac{1}{a^2}R_m \cdot T''_m\right\} =$$

$$= -\frac{1}{a^2}\sum_m \left\{ T''_m + (\mu_m a)^2 \cdot T_m\right\} \cdot R_m = At \cdot \sqrt{\frac{\rho}{r}}.$$

$$\sum_m \left\{ T''_m + (\mu_m a)^2 \cdot T_m\right\} \cdot R_m = -Aa^2 t \cdot \sqrt{\frac{\rho}{r}} = -Aa^2 t \cdot \sum_m \gamma_m \cdot R_m(\rho).$$

$$\gamma_m = \left(\sqrt{\frac{\rho}{r}}, R_m \right) = \int\limits_0^r \sqrt{\frac{\rho}{r}} \cdot R_m(\rho) \cdot \rho \, d\rho = \frac{\sqrt{2}}{r^{3/2} \cdot J_{3/2}(\alpha)} \cdot \int\limits_0^r J_{1/2}\left(\alpha \frac{\rho}{r} \right) \cdot \rho^{3/2} d\rho =$$

$$= \left[\alpha \frac{\rho}{r} = x \right] = \frac{r\sqrt{2}}{\alpha^{5/2} \cdot J_{3/2}(\alpha)} \cdot \int\limits_0^\alpha J_{1/2}(x) \cdot x^{3/2} dx =$$

$$= \frac{r\sqrt{2}}{\alpha^{5/2} \cdot J_{3/2}(\alpha)} \cdot \alpha^{3/2} \cdot J_{3/2}(\alpha) = \frac{r\sqrt{2}}{\alpha_m^{(1/2)}}.$$

$$\begin{cases} T_m'' + (\mu_m a)^2 \cdot T_m(t) = -Aa^2 t \cdot \gamma_m = -Aa^2 t \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\mu_m}, \quad \mu_m = \alpha_m^{(1/2)} \big/ r > 0. \\ T_m(0) = 0, \quad T_m'(0) = 0. \end{cases}$$

6. $T_m(t) = C_m \cdot \sin \mu_m t + \tilde{C}_m \cdot \cos \mu_m t + \tilde{T}_m(t).$

$$\tilde{T}_m(t) = M\,t + N, \ (M, N = const), \ \tilde{T}_m'' + (\mu_m a)^2 \cdot \tilde{T}_m = 0 + (\mu_m a)^2 \cdot \ (Mt + N) =$$

$$= -Aa^2 t \cdot \frac{\sqrt{2}}{\mu_m} \Rightarrow N = 0, \quad M = -\frac{A\sqrt{2}}{\mu_m^3}; \quad \tilde{T}_m(t) = -\frac{At\surd}{\mu_m^3}.$$

$$T_m(t) = C_m \cdot \sin \omega_m t + \tilde{C}_m \cdot \cos \omega_m t - \frac{At\sqrt{2}}{\mu_m^3}; \quad \omega_m = \mu_m a.$$

$$T_m(0) = 0 \Rightarrow \tilde{C}_m = 0, \qquad T_m'(0) = C_m \omega_m - \frac{A\sqrt{2}}{\mu_m^3} = 0 \Rightarrow C_m = \frac{A\sqrt{2}}{a\mu_m^4}.$$

$$T_m(t) = -\frac{A\sqrt{2}}{a\mu_m^4}\left(\mu_m at - \sin \mu_m at \right).$$

7. $u(\rho, t) = \sqrt{\dfrac{r}{\rho}} \cdot \upsilon(\rho, t) = \sqrt{\dfrac{r}{\rho}} \cdot \sum\limits_{m=1}^{\infty} T_m(t) \cdot R_m(\rho) =$

$$= -\frac{2A}{ar} \sqrt{\frac{r}{\rho}} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left(\mu_m at - \sin \mu_m at \right) \cdot \frac{J_\nu(\mu_m \rho)}{\mu_m^4 \cdot J_{\nu+1}(\mu_m r)}; \quad \nu = \frac{1}{2}.$$

8. $|u(0,t)| < \infty \because \lim\limits_{\rho \to 0} J_{1/2}(\mu_m \rho) \big/ \sqrt{\rho} = \sqrt{\dfrac{2\mu_m}{\pi}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow u(0,t) = -\frac{2A}{a} \sqrt{\frac{2}{\pi\, r}} \cdot \sum_m \left(\mu_m at - \sin \mu_m at \right) \cdot \frac{1}{\mu_m^{7/2} \cdot J_{3/2}(\mu_m r)} < \infty;$$

$$C_m = \mathrm{O}\left(1/m^{5/2}\right) \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

$$u(r,t) = 0 \because J_\nu\left(\mu_m r\right) = J_{1/2}\left(\alpha_m^{(1/2)}\right) = 0.$$

$$u(\rho,0) = 0, \qquad u_t'(\rho,0) = 0.$$

$$\left[u(\rho,t)\right] = \left[\upsilon(\rho,t)\right] \equiv W, \quad [A] = W/L^2T, \quad [a] = L/T.$$

$$\left[u(\rho,t)\right] \equiv W = \frac{W}{L^2T}\cdot\frac{T}{L}\cdot\frac{1}{L}\cdot 1\cdot L^4 \Rightarrow W.$$

<u>Задача 3.13.</u> Решение однородного волнового уравнения внутри шара в симметричном случае, если на поверхности происходят возмущения, линейные по времени.

$$\begin{cases} \Delta_3 u - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \\ \left|u\big|_{\rho=0}\right| < \infty, \quad u\Big|_{\rho=r} = At. \\ u\big|_{t=0} = u_t'\big|_{t=0} = 0. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u = u(\rho,t). \\ 0 \le \rho \le r, \ \ 0 \le t < \infty. \end{array}$$

1-2. $$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \ \text{ при } \Delta_{\theta,\varphi}\, u = 0.$$

$$u(\rho,t) = \sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\upsilon(\rho,t),$$

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sqrt{\frac{r}{\rho}}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right) - \frac{\nu^2}{\rho^2}\upsilon - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\upsilon}{\partial t^2}\right] = 0\,,\ \nu = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right) - \dfrac{\nu^2}{\rho^2}\upsilon - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2\upsilon}{\partial t^2} = 0. \\ \left|\upsilon(0,t)\right| < \infty, \ \ \upsilon(r,t) = At. \\ \upsilon(\rho,0) = \upsilon_t'(\rho,0) = 0. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \upsilon = \upsilon(\rho,t). \\ 0 \le \rho \le r, \ \ 0 \le t < \infty. \end{array}$$

3. $\upsilon(\rho,t) = w(\rho,t) + At \cdot \left(\dfrac{\rho}{r}\right)^{\nu}$;

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right]\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\nu} = \frac{\nu^2 - \dfrac{1}{4}}{\rho^2}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\nu} = 0 \quad \text{при} \ \ \nu = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial w}{\partial\rho}\right) - \dfrac{\nu^2}{\rho^2}w - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \\ \left|w(0,t)\right| < \infty, \ \ w(r,t) = 0. \qquad\qquad w = w(\rho,t). \\ w(\rho,0) = 0, \quad w_t'(\rho,0) = -A\sqrt{\dfrac{\rho}{r}}. \end{cases}$$

4. $w(\rho,t) = \sum\limits_m T_m(t)\cdot R_m(\rho)$. $\hat{D}_Б = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{d}{d\rho}\right) - \dfrac{\nu^2}{\rho^2}, \quad \nu = \dfrac{1}{2}.$

$$\hat{D}_Б R = \lambda R(\rho) \ \ \text{при} \ \left|R(0)\right| < \infty \ \ \text{и} \ \ R(r) = 0; \ \ \lambda = -\mu^2 \le 0.$$

$$R_m(\rho) = \frac{\sqrt{2}}{r}\cdot J_\nu(\mu_m\rho)/J_{\nu+1}(\mu_m r) \quad \text{при} \ \mu_m = \alpha_m^{(\nu)}/r > 0.$$

$$\lambda_m = -\mu_m^2 = -\left(\alpha_m^{(\nu)}/r\right)^2 < 0 \quad \text{при} \ m \in \mathbb{N}.$$

$$J_\nu\left(\alpha_m^{(\nu)}\right) = 0, \ \ J_{\nu+1}\left(\alpha_m^{(\nu)}\right) \ne 0. \qquad \lim_{m\to\infty} T_m(t) = 0.$$

5. $\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial w}{\partial\rho}\right) - \dfrac{\nu^2}{\rho^2}w - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \sum\limits_m\left\{\hat{D}_Б R_m\cdot T_m - \dfrac{1}{a^2}R_m T_m''\right\} =$

$$= -\frac{1}{a^2}\sum_m\left\{T_m'' + (\mu_m a)^2 T_m\right\}R_m = 0 \Rightarrow T_m'' + (\mu_m a)^2 T_m(t) = 0.$$

$$w(\rho,0) = \sum_m T_m(0)R_m(\rho) = 0 \Rightarrow T_m(0) = 0.$$

$$w_t'(\rho,0) = \sum_m T_m'(0)R_m(\rho) = -A\sqrt{\frac{\rho}{r}} \Rightarrow T_m'(0) = \left(-A\sqrt{\frac{\rho}{r}}, R_m\right) =$$

$$= -A\int_0^r \sqrt{\frac{\rho}{r}} R_m(\rho)\rho\, d\rho = -A\frac{\sqrt{2}}{\mu_m}.$$

$$T_m'' + \omega_m^2 \cdot T_m\left(t\right) = 0; \quad T_m\left(0\right) = 0; \quad T_m'\left(0\right) = -\frac{A\sqrt{2}}{\mu_m}; \qquad \omega_m = \mu_m a.$$

6. $T_m\left(t\right) = C_m \cdot \sin\omega_m t + \tilde{C}_m \cdot \cos\omega_m t. \quad C_m, \tilde{C}_m = const.$

$$T_m\left(0\right) = \tilde{C}_m = 0 \Rightarrow \tilde{C}_m = 0;$$

$$T_m'\left(0\right) = C_m\omega_m = -\frac{A\sqrt{2}}{\mu_m} \Rightarrow C_m = -\frac{A\sqrt{2}}{a\mu_m^2}.$$

$$T_m\left(t\right) = -\frac{A\sqrt{2}}{a\mu_m^2} \cdot \sin\mu_m a t.$$

7. $u\left(\rho,t\right) = \sqrt{\frac{r}{\rho}} \cdot \upsilon\left(\rho,t\right) = \sqrt{\frac{r}{\rho}} \cdot \left\{At\sqrt{\frac{\rho}{r}} + w\left(\rho,t\right)\right\} =$

$$= At + \sqrt{\frac{r}{\rho}} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} T_m\left(t\right) \cdot R_m\left(\rho\right) =$$

$$= At - \frac{2A}{ar}\sqrt{\frac{r}{\rho}} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_\nu\left(\mu_m\rho\right)}{\mu_m^2 \cdot J_{\nu+1}\left(\mu_m r\right)} \cdot \sin\mu_m a t; \qquad \mu_m = \frac{\alpha_m^{(\nu)}}{r}, \ \nu = \frac{1}{2}.$$

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \sin x, \ J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right).$$

$$u\left(\rho,t\right) = A \cdot \left\{t + \frac{2r}{a\rho} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin\mu_m\rho \cdot \sin\mu_m a t}{\mu_m \cdot \left(\mu_m r \cdot \cos\mu_m r - \sin\mu_m r\right)}\right\}.$$

8. $u\big|_{\rho=0} < \infty \because \lim_{\rho\to 0} J_{\frac{1}{2}}\left(\mu_m\rho\right)/\sqrt{\rho} = \sqrt{\frac{2\mu_m}{\pi}} = const.$

$$u\big|_{\rho=r} = At \because J_{\frac{1}{2}}\left(\mu_m r\right) = J_{\frac{1}{2}}\left(\alpha_m^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right) = 0. \quad u\big|_{t=0} = 0.$$

$$u_t'\Big|_{t=0} = A\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\left\{\sqrt{\frac{\rho}{r}} - 2\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_{\frac{1}{2}}\left(\alpha_m^{\left(\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{\rho}{r}\right)}{\alpha_m^{\left(\frac{1}{2}\right)}\cdot J_{\frac{3}{2}}\left(\alpha_m^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right)}\right\} = 0.$$

$$\left[u(\rho,t)\right]\equiv W,\quad [A]=W/T,\quad [a]=L/T.$$

$$\left[u(\rho,t)\right]\equiv W = \frac{W}{T}T + \frac{W}{T}\frac{T}{L}\frac{1}{L}\cdot 1\cdot L^2 \Rightarrow W.$$

<u>Задача 3.14.</u> Решение волнового уравнения с использованием разложения по полиномам Лежандра на интервале $(0,\, l)$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\left(l^2-x^2\right)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. & u = u(x,t). \\ u(0,t) = At, \quad \left|u(l,t)\right| < \infty. & 0\le x\le l,\ 0\le t<\infty. \\ u(x,0) = f(x), \quad u_t'(x,0) = g(x). & \end{cases}$$

1. Приведение граничных условий к однородным $u(x,t) = \upsilon(x,t) + At$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\left(l^2-x^2\right)\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x}\right) - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2} = 0. & \upsilon = \upsilon(x,t). \\ \upsilon(0,t) = 0, \quad \left|\upsilon(l,t)\right| < \infty. & 0\le x\le l,\ 0\le t<\infty. \\ \upsilon(x,0) = f(x), \quad \upsilon_t'(x,0) = \tilde{g}(x) \equiv g(x) - A. & \end{cases}$$

2. Разделение переменных $\upsilon(x,t) = X(x)\cdot T(t)$ и решение краевой задачи первого рода Дирихле по переменной x для оператора Лежандра.

$$\hat{D}_\Lambda = \frac{d}{dx}\left(\left(l^2-x^2\right)\frac{d}{dx}\right),\quad \hat{D}_\Lambda X = \lambda X(x),$$

$$\lambda \le 0,\quad X(0) = 0,\quad \left|X(l)\right| < \infty.$$

$$X_n(x) = C\cdot P_n\left(\frac{x}{l}\right) + \tilde{C}\cdot \mathrm{Q}_n\left(\frac{x}{l}\right) \text{ при } \lambda = -n\left(n+1\right) \le 0 \text{ и } n = 1, 2, 3, \ldots$$

$P_n\left(\xi\right)$ и $\mathrm{Q}_n\left(\xi\right)$ – функции Лежандра первого и второго рода соответственно.

$$X_n\left(l\right) = C\cdot P_n\left(1\right) + \tilde{C}\cdot \mathrm{Q}_n\left(1\right) < \infty \Rightarrow P_n\left(1\right) = 1, \quad \mathrm{Q}_n\left(1\right) = \infty \text{ и } \tilde{C} = 0.$$

$$X_n\left(0\right) = C\cdot P_n\left(0\right) = 0 \Rightarrow C \ne 0, \quad P_n\left(0\right) = 0 \text{ при } n = 2k-1 \text{ и } k = 1, 2, 3, \ldots;$$

$$X_{2k-1}\left(x\right) = C\cdot P_{2k-1}\left(\frac{x}{l}\right), \quad \lambda_k = -2k\cdot\left(2k-1\right) < 0 \text{ при } k \in \mathbb{N}.$$

$L_2\left(0,1\,|\,1\right)$ из $L_2\left(-1,1\,|\,1\right)$ – гильбертовы пространства.

$$\xi = \frac{x}{l}: \quad \left(P_{2k-1}, P_{2k'-1}\right) = \int_{-1}^{1} P_{2k-1}\left(\xi\right)\cdot P_{2k'-1}\left(\xi\right) d\xi =$$

$$= \left[P_m\left(-\xi\right) = \left(-1\right)^m P_m\left(\xi\right)\right] =$$

$$= 2\int_0^1 P_{2k-1}\left(\xi\right)\cdot P_{2k'-1}\left(\xi\right) d\xi \equiv 2\left(P_{2k-1}, P_{2k'-1}\right)\Big|_0^1 = 2\,\|\,P_{2k-1}\,\|^2\Big|_0^1 \cdot\delta_{kk'} = \frac{2}{4k-1}\delta_{kk'};$$

$$\left\|P_{2k-1}\right\|\Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{4k-1}} > 0; \text{ здесь } 2n+1 = 2\left(2k-1\right)+1 = 4k-1.$$

$$X_{2k-1}\left(x\right) = \sqrt{\frac{4k-1}{l}}\cdot P_{2k-1}\left(\frac{x}{l}\right) \text{ – нормировано на единицу.}$$

$$\upsilon\left(x,t\right) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k\left(t\right)\cdot X_{2k-1}\left(x\right).$$

3. Вывод и решение дифференциального уравнения для функции времени $T_k\left(t\right)$.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(l^2 - x^2\right)\frac{\partial\upsilon}{\partial x}\right) - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\upsilon}{\partial t^2} = \sum_k\left\{\hat{D}_\Lambda X_{2k-1}\cdot T_k - \frac{1}{a^2}X_{2k-1}\cdot T_k''\right\} =$$

$$= -\frac{1}{a^2}\sum_k\left\{T_k'' + \omega_k^2\cdot T_k\left(t\right)\right\}\cdot X_{2k-1} = 0, \quad \text{где } \omega_k^2 = 2k\left(2k-1\right)\cdot a^2 > 0.$$

$$T_k'' + \omega_k^2 \cdot T_k(t) = 0, \quad T_k(t) = M_k \cdot \cos\omega_k t + N_k \cdot \sin\omega_k t.$$

$$\upsilon(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \cdot X_{2k-1}(x) = \sum_k \{ M_k \cdot \cos\omega_k t + N_k \cdot \sin\omega_k t \} \cdot X_{2k-1}(x).$$

$$\upsilon(x,0) = \sum_k M_k \cdot X_{2k-1}(x) = f(x), \qquad M_k = (f, X_{2k-1}) =$$

$$= \sqrt{\frac{4k-1}{l}} \cdot \int_0^l f(x) \cdot P_{2k-1}\left(\frac{x}{l}\right) dx = \sqrt{l(4k-1)} \cdot \int_0^1 f(\xi l) \cdot P_{2k-1}(\xi) d\xi.$$

$$\upsilon_t'(x,0) = \sum_k N_k \omega_k \cdot X_{2n-1}(x) = \tilde{g}(x) \equiv g(x) - A, \qquad N_k \omega_k = (\tilde{g}, X_{2k-1}) =$$

$$= \sqrt{\frac{4k-1}{l}} \cdot \int_0^l \tilde{g}(x) \cdot P_{2k-1}\left(\frac{x}{l}\right) dx = \sqrt{l(4k-1)} \cdot \int_0^1 \tilde{g}(\xi l) \cdot P_{2k-1}(\xi) d\xi.$$

4. Окончательный вид решения задачи и введение функции Грина

$$\upsilon(x,t) = \sum_k \left\{ \cos\omega_k t \cdot \int_0^1 f(\xi l) \cdot P_{2k-1}(\xi) d\xi + \frac{\sin\omega_k t}{\omega_k} \cdot \int_0^1 \tilde{g}(\xi l) \cdot P_{2k-1}(\xi) d\xi \right\} \times$$

$$\times \sqrt{l(4k-1)}\, X_{2k-1}(x) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l f(x') \left[\sum_k \frac{\sin\omega_k t}{\omega_k} \frac{4k-1}{l} P_{2k-1}\left(\frac{x'}{l}\right) P_{2k-1}\left(\frac{x}{l}\right) \right] dx' +$$

$$+ \int_0^l \tilde{g}(x') \left[\sum_k \frac{\sin\omega_k t}{\omega_k} \cdot \frac{4k-1}{l} \cdot P_{2k-1}\left(\frac{x'}{l}\right) \cdot P_{2k-1}\left(\frac{x}{l}\right) \right] \cdot dx',$$

где $G(x, x' \mid t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\omega_k t}{\omega_k} \cdot X_{2k-1}(x) \cdot X_{2k-1}(x') =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\omega_k t}{\omega_k} \cdot \frac{4k-1}{l} \cdot P_{2k-1}\left(\frac{x'}{l}\right) \cdot P_{2k-1}\left(\frac{x}{l}\right)$$ – функция Грина.

Решение задачи $u(x,t) = At + \upsilon(x,t)$.

5. Проверка решения по условиям задачи и по размерностям.

$$u(0,t) = At + \upsilon(0,t) = At \because \upsilon(0,t) = 0,$$

$$G(0, x' \mid t) = 0, \qquad X_{2k+1}(0) = \sqrt{\frac{2k-1}{l}} P_{2k-1}(0) = 0.$$

$$u\left(l,t\right)=At+\upsilon\left(l,t\right)<\infty\because P_{2k-1}(1)=1,$$

и ряд сходится порядка $O\left(\frac{1}{k}\right)$ при $k\to\infty$.

$$u\left(x,0\right)=0+\int_0^l f(x')\cdot G_t'(x,x'\,|\,0)\,dx'+\int_0^l \tilde{g}(x')\cdot G(x,x'\,|\,0)\,dx'=$$

$$=\int_0^l f(x')\cdot\delta(x'-x)\,dx'=f(x)\because G_t'(x,x'\,|\,0)=\delta(x'-x),\quad G(x,x'\,|\,0)=0.$$

$$u_t'\left(x,0\right)=A+\int_0^l f(x')\cdot G_{tt}''(x,x'\,|\,0)\,d\,x'+\int_0^l \tilde{g}(x')\cdot G_t'(x,x'\,|\,0)\,d\,x'=$$

$$=A+\int_0^l \tilde{g}(x')\cdot\delta(x'-x)\,d\,x'=A+\tilde{g}(x)=g(x)\because$$

$$\because G_{tt}''(x,x'\,|\,0)=0,\quad G_t'(x,x'\,|\,0)=\delta(x'-x).$$

$$\left[u(x,t)\right]\equiv W,\quad \left[A\right]=W/T,\quad \left[f(x)\right]=W,\quad \left[g(x)\right]=W/T,\quad \left[a\right]=L/T,$$

$$\left[\omega_k\right]=\left[a\overset{o}{l}\cdot 2k(2k-1)\right]=1/T\quad\text{при}\quad \overset{o}{l}=1,\quad \left[G(x,x'\,|\,t)\right]=T/L.$$

$$\left[u(x,t)\right]=W=\frac{W}{T}T+\frac{1}{T}WT\frac{1}{L}L+\frac{W}{T}T\frac{1}{L}L\Rightarrow W.$$

При условии типа $u_x'(0,t)$ пропадает ортогональность.

<u>Задача 3.15.</u> Решение однородного уравнения колебаний шара со стационарными условиями.

$$\begin{cases}\Delta_3 u-\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0. & u=u\left(\rho,\Omega\left(\theta,\varphi\right),t\right).\\ u\,|_{\rho=0}<\infty,\quad u\,|_{\rho=r}=f\left(\Omega\right). & 0\le\rho\le r,\ 0\le 2\theta,\varphi\le 2\pi,\\ u\,|_{t=0}=u_t'\,|_{t=0}=0. & 0\le t<\infty.\end{cases}$$

1. Отделение зависимости от углов $u(\rho,\Omega,t)=\sum\limits_{n,k}u_{nk}(\rho,t)\cdot Y_{nk}(\Omega)$.

$$\Delta_3 u-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\sum_{n,k}\left\{\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial u_{nk}}{\partial\rho}\right)-\frac{n(n+1)}{\rho^2}u_{nk}-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial^2 u_{nk}}{\partial t^2}\right\}\cdot Y_{nk}=0.$$

$$u(r,\Omega,t)=\sum_{n,k}u_{nk}(r,t)\cdot Y_{nk}(\Omega)=f(\Omega)=\sum_{n,k}f_{nk}\cdot Y_{nk}(\Omega)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_{nk}(r,t)=\left(f,Y_{nk}\right)=f_{nk}=const.$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\dfrac{\partial u_{nk}}{\partial\rho}\right)-\dfrac{n(n+1)}{\rho^2}u_{nk}-\dfrac{1}{a^2}\cdot\dfrac{\partial^2 u_{nk}}{\partial t^2}=0. & u_{nk}=u_{nk}(\rho,t).\\ \left|u_{nk}(0,t)\right|<\infty,\quad u_{nk}(r,t)=f_{nk}. & 0\le\rho\le r,\quad 0\le t<\infty.\\ u_{nk}(\rho,0)=\dfrac{\partial}{\partial t}u_{nk}(\rho,0)=0. & \end{cases}$$

2. Переход к уравнению Бесселя с помощью замены $u_{nk}(\rho,t)=\sqrt{\dfrac{r}{\rho}}\cdot\upsilon_{nk}(\rho,t)$.

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial\upsilon_{nk}}{\partial\rho}\right)-\dfrac{\nu^2}{\rho^2}\upsilon_{nk}-\dfrac{1}{a^2}\cdot\dfrac{\partial^2\upsilon_{nk}}{\partial t^2}=0. & \upsilon_{nk}=\upsilon_{nk}(\rho,t).\\ |\,\upsilon_{nk}(0,t)\,|<\infty,\quad \upsilon_{nk}(r,t)=f_{nk}. & \\ \upsilon_{nk}(\rho,0)=\dfrac{\partial}{\partial t}\upsilon_{nk}(\rho,0)=0. & \end{cases}$$

3. Приведение граничных условий к однородным с помощью замены $\upsilon_{nk}(\rho,t)=f_{nk}\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^{\nu}+w_{nk}\cdot(\rho,t)$ при $\nu=n+\dfrac{1}{2}$.

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial w_{nk}}{\partial\rho}\right)-\dfrac{\nu^2}{\rho^2}w_{nk}-\dfrac{1}{a^2}\cdot\dfrac{\partial^2 w_{nk}}{\partial t^2}=0. & w_{nk}=w_{nk}(\rho,t).\\ |\,w_{nk}(0,t)\,|<\infty,\quad w_{nk}(r,t)=0. & \\ w_{nk}(\rho,0)=-f_{nk}\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^{\nu},\quad \dfrac{\partial}{\partial t}w_{nk}(\rho,0)=0. & \end{cases}$$

$$u_{nk}(\rho,\Omega,t)=\sum_{n,k}\left\{\left(\frac{\rho}{r}\right)^n f_{nk}+\sqrt{\frac{r}{\rho}}w_{nk}(\rho,t)\right\}\cdot Y_{nk}(\Omega).$$

4. Разделение переменных $w_{nk}(\rho,t)=\sum_{m=1}^{\infty}T_{nkm}(t)\cdot R_{nm}(\rho)$ и решение краевой задачи для оператора $\hat{D}_Б=\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d}{d\rho}\right)-\frac{\nu^2}{\rho^2}$.

$$\hat{D}_Б R=\lambda R(\rho) \quad \text{при} \quad \left|R(0)\right|<\infty,\; R(r)=0 \;\text{ и }\; \lambda=-\mu^2\le 0.$$

$R_{nm}(\rho)=\frac{\sqrt{2}}{r}J_\nu(\mu_m r)/J_{\nu+1}(\mu_m r)$ – собственные векторы (базисные орты) при $\nu=n+\frac{1}{2}$ и $\mu_m=\alpha_m^{(\nu)}/r>0.$ Здесь $J_\nu\left(\alpha_m^{(\nu)}\right)=0$ – дисперсионное уравнение и $J_{\nu+1}\left(\alpha_m^{(\nu)}\right)\ne 0$; $\alpha_m^{(\nu)}>0$ – простые корни.

$\lambda_{nm}=-\mu_m^2=-\left(\alpha_m^{(\nu)}/r\right)^2$ – собственные значения (дискретный спектр).

5. Вывод и решение дифференциального уравнения для функции $T_{nkm}(t)$.

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial w_{nk}}{\partial\rho}\right)-\frac{\nu^2}{\rho^2}w_{nk}-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial^2 w_{nk}}{\partial t^2}=\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\hat{D}_Б R_{nm}\cdot T_{nkm}-\frac{1}{a^2}\cdot R_{nm}T''_{nkm}\right\}=$$
$$=-\frac{1}{a^2}\cdot\sum_m\left\{T''_{nkm}+(\mu_m a)^2\cdot T_{nkm}\right\}\cdot R_{nm}=0.$$

$$T''_{nkm}+\omega_m^2\cdot T_{nkm}(t)=0, \qquad \omega_m=\mu_m a=\alpha_m^{(\nu)}\frac{a}{r}>0.$$

$$T_{nkm}(t)=C_{nkm}\cos\omega_n t+\tilde{C}_{nkm}\sin\omega_n t\,; \qquad C_{nkm},\tilde{C}_{nkm}=const.$$

$$w_{nk}(\rho,t)=\sum_m\left\{C_{nkm}\cos\omega_m t+\tilde{C}_{nkm}\sin\omega_m t\right\}\cdot R_{nm}(\rho).$$

6. Определение постоянных C_{nkm} и $\tilde{C}_{nkm}$ из начальных условий

$$\frac{\partial}{\partial t}w_{nkm}(\rho,0)=\sum_m\tilde{C}_{nkm}\omega_m\cdot R_{nm}(\rho)=0\Rightarrow\tilde{C}_{nkm}=0.$$

$$w_{nk}(\rho,0)=\sum_m C_{nkm}\cdot R_{nm}(\rho)=-f_{nk}\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\nu}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_{nkm}=-f_{nk}\cdot\left(\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\nu},R_{nm}\right)=-\frac{f_{nk}\sqrt{2}}{r^{\nu+1}J_{\nu+1}}\int_0^r J_{n+\frac{1}{2}}\left(\alpha\frac{\rho}{r}\right)\rho^{n+\frac{3}{2}}\cdot d\rho=$$

$$=-f_{nk}\frac{r\sqrt{2}}{J_{n+\frac{3}{2}}\cdot\alpha^{n+\frac{5}{2}}}\cdot\alpha^{n+\frac{3}{2}}\cdot J_{n+\frac{3}{2}}(\alpha)=-\frac{f_{nk}\sqrt{2}}{\mu_m}.$$

$$w_{nk}(\rho,t)=-\frac{2}{r}\cdot f_{nk}\cdot\sum_m\frac{J_\nu(\mu_m\rho)}{\mu_m J_{\nu+1}(\mu_m r)}\cdot\cos\mu_m at;\qquad \mu_m=\alpha_m^{(\nu)}/r>0.$$

7. Окончательный вид решения задачи.

$$u(\rho,\Omega,t)=\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\sum_{n,k}\left\{\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\nu}-\frac{2}{r}\sum_m\frac{J_\nu(\mu_m\rho)}{\mu_m J_{\nu+1}(\mu_m r)}\cdot\cos\mu_m at\right\}\cdot f_{nk}\cdot Y_{nk}(\Omega).$$

$$\sum_{k=-n}^{n}f_{nk}\cdot Y_{nk}(\Omega)=\sum_k\oiint_{\Omega'}f(\Omega')\cdot Y^*_{nk}(\Omega')\,d\Omega'\cdot Y_{nk}(\Omega)=$$

$$=\oiint_{\Omega'}f(\Omega')\cdot\left(\sum_{k=-n}^{n}Y_{nk}(\Omega)\cdot Y^*_{nk}(\Omega')\right)d\Omega'=\frac{2n+1}{4\pi}\cdot\oiint_{\Omega'}f(\Omega')\cdot P_n(\cos\gamma)\cdot d\Omega',$$

где $P_n(\cos\gamma)=\dfrac{4\pi}{2n+1}\cdot\sum\limits_{k=-n}^{n}Y_{nk}(\theta,\varphi)\cdot Y^*_{nk}(\theta',\varphi')$; $\quad d\Omega'=\sin\theta'\cdot d\theta'\cdot d\varphi'$;

$$\cos\gamma(\Omega,\Omega')=\cos\theta\cdot\cos\theta'+\sin\theta\cdot\sin\theta'\cdot\cos(\varphi-\varphi')=(\vec{n},\vec{n}').$$

$$u(\rho,\Omega,t)=\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\nu}-\frac{2}{r}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_\nu(\mu_m\rho)}{\mu_m J_{\nu+1}(\mu_m r)}\cdot\cos\mu_m at\right\}\times$$

$$\times\frac{2n+1}{4\pi}\cdot\oiint_{\Omega'}f(\Omega')\cdot P_n(\cos\gamma(\Omega,\Omega'))\cdot d\Omega'.$$

8. Проверка полученного решения по условиям задачи и по размерностям.

$$u\Big|_{\rho=0}=0<\infty\because\lim_{\rho\to0}\sqrt{\frac{r}{\rho}}J_\nu(\mu_m\rho)=\lim_{\rho\to0}\left(\rho^{-\frac{1}{2}}\cdot\rho^{n+\frac{1}{2}}\right)=0\ \text{ при } n>0;$$

$$n = 0 \Rightarrow u\Big|_{\rho=0} = \text{const}.$$

$$u\Big|_{\rho=r} = \sum_{n,k}\left\{1 - 2\cdot\sum_m \frac{J_\nu(\alpha)}{\alpha\cdot J_{\nu+1}(\alpha)}\cos\mu_m at\right\}\cdot f_{nk}Y_{nk}(\Omega) =$$

$$= \sum_{n,k} f_{nk}Y_{nk}(\Omega) = f(\Omega) \because J_\nu\left(\alpha_m^{(\nu)}\right) = 0.$$

$$u\Big|_{t=0} = \sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\sum_{n,k}\left\{\left(\frac{r}{\rho}\right)^\nu - 2\cdot\sum_m \frac{J_\nu(\alpha\rho/r)}{\alpha\cdot J_{\nu+1}(\alpha)}\cdot 1\right\}\cdot f_{nk}Y_{nk}(\Omega) = 0.$$

$$u_t^{'}\Big|_{t=0} = \sum_{n,k}\left\{0 + 2\sqrt{\frac{r}{\rho}}\frac{a}{r}\cdot\sum_m \frac{J_\nu(\alpha\rho/r)}{J_{\nu+1}(\alpha)}\sin 0\right\}\cdot f_{nk}Y_{nk}(\Omega) = 0.$$

$$\left[u(\rho,\Omega,t)\right] \equiv W,\quad [f] = W,\quad [a] = \frac{L}{T},\quad [\mu_m at] = \left[\frac{\alpha}{r}\cdot at\right] = \frac{1}{L}\frac{L}{T}T = 1.$$

$$[u] = W = 1\cdot\left\{1 + \frac{1}{L}L\right\}\cdot W \Rightarrow W.$$

<u>Задача 3.16.</u> Решение однородного уравнения колебаний со стационарным граничным условием.

$$\begin{cases} \Delta_3 u - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. & u = u\left(\rho,\Omega(\theta,\varphi),t\right). \\ u\Big|_{\rho=0} < \infty,\ u\Big|_{\rho=r} = A\cdot Y_{2,-2}(\Omega). & 0 \le \rho \le r,\quad 0 \le 2\theta,\ \varphi \le 2\pi. \\ u\Big|_{t=0} = u_t^{'}\Big|_{t=0} = 0. & 0 \le t \le \infty. \end{cases}$$

1. $u(\rho,\Omega,t) = \sum\limits_{n,k} u_{nk}(\rho,t)\cdot Y_{nk}(\Omega).$

$$\Delta_3 u - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{n,k}\left\{\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho^2\frac{\partial u_{nk}}{\partial\rho}\right) - \frac{n(n+1)}{\rho^2}u_{nk} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u_{nk}}{\partial t^2}\right\}Y_{nk} = 0.$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial\rho}\right)-\dfrac{n(n+1)}{\rho^2}\tilde{u}-\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t^2}=0. & \tilde{u}=\tilde{u}(\rho,t). \\ \left|\tilde{u}(0,t)\right|<\infty, \quad \tilde{u}(r,t)=A. & 0\le\rho\le r,\ 0\le t\le\infty. \\ \tilde{u}(\rho,0)=\tilde{u}_t'(\rho,0)=0. & n=2,\ k=-2. \end{cases}$$

Здесь $u_{nk}(\rho,t)=\tilde{u}_{nk}(\rho,t)$ при $n=-k=2$; $u_{nk}(\rho,t)=0$ при $n\ne 2$ или $k\ne -2$.

2. $\tilde{u}(\rho,t)=\sqrt{\dfrac{r}{\rho}}\cdot\upsilon(\rho,t)$ при $\nu=n+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$ и $n=2$.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right)-\dfrac{\nu^2}{\rho^2}\upsilon-\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2\upsilon}{\partial t^2}=0. & \upsilon=\upsilon(\rho,t). \\ \left|\upsilon(0,t)\right|<\infty, \quad \upsilon(r,t)=A. & 0\le\rho\le r,\ 0\le t<\infty. \\ \upsilon(\rho,0)=\upsilon_t'(\rho,0)=0. & \end{cases}$$

3. $\upsilon(\rho,t)=A\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^{\nu}+w(\rho,t).$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial w}{\partial\rho}\right)-\dfrac{\nu^2}{\rho^2}w-\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0. & w=w(\rho,t). \\ \left|w(0,t)\right|<\infty,\ w(r,t)=0. & \nu=\dfrac{5}{2}. \\ w(\rho,0)=-A\cdot\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^{\nu},\ w_t'(\rho,0)=0. & \end{cases}$$

4. $w(\rho,t)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}T_m(t)\cdot R_m(\rho).$ $\qquad R_m(\rho)=\dfrac{\sqrt{2}}{r}\dfrac{J_\nu(\mu_m\rho)}{J_{\nu+1}(\mu_m r)},$

$$\lambda_m=-\mu_m^2=-\left(\alpha_m^{(\nu)}/r\right)^2<0. \quad J_\nu\left(\alpha_m^{(\nu)}\right)=0, \quad J_{\nu+1}\left(\alpha_m^{(\nu)}\right)\ne 0.$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial w}{\partial\rho}\right)-\frac{\nu^2}{\rho^2}w-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=$$

$$=\sum_m\left\{\left[\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\,R_m}{d\rho}\right)-\frac{\nu^2}{\rho^2}R_m\right]\cdot T_m-\frac{1}{a^2}R_mT_m''\right\}=$$

$$=-\frac{1}{a^2}\sum_m\left\{T_m''+\left(\mu_m a\right)^2\cdot T_m\right\}R_m=0.$$

$$T_m''+\omega_m^2\cdot T_m\left(t\right)=0,\qquad \omega_m=\mu_m a=\alpha_m^{(\nu)}\frac{a}{r}>0.$$

$$T_m\left(t\right)=C_m\cdot\sin\omega_m t+\tilde{C}_m\cdot\cos\omega_m t;\qquad C_m,\tilde{C}_m=const.$$

$$w\left(\rho,t\right)=\sum_m T_m\left(t\right)\cdot R_m\left(\rho\right)=\sum_m\left\{C_m\cdot\sin\omega_m t+\tilde{C}_m\cos\omega_m t\right\}\cdot R_m\left(\rho\right).$$

5. $w_t'\left(\rho,0\right)=\sum_m C_m\omega_m\cdot R_m\left(\rho\right)=0\Rightarrow C_m\omega_m=0,\ C_m=0.$

$$w\left(\rho,0\right)=\sum_m\tilde{C}_mR_m\left(\rho\right)=-A\left(\frac{\rho}{r}\right)^\nu\Rightarrow\tilde{C}_m=\left(-A\left(\frac{\rho}{r}\right)^\nu,R_m\right)=$$

$$=\frac{-A\sqrt{2}}{r^{\nu+1}\cdot J_{\nu+1}\left(\alpha\right)}\int_0^r J_\nu\left(\alpha\frac{\rho}{r}\right)\cdot\rho^{\nu+1}d\rho=\left[\mu_m\rho=\alpha_m^{(\nu)}\frac{\rho}{r}=x\right]=$$

$$=\frac{-Ar\sqrt{2}}{\alpha^{\nu+2}\cdot J_{\nu+1}\left(\alpha\right)}\int_0^\alpha J_\nu\left(x\right)\cdot x^{\nu+1}dx=\frac{-Ar\sqrt{2}}{\alpha^{\nu+2}\cdot J_{\nu+1}\left(\alpha\right)}\cdot x^{\nu+1}J_{\nu+1}\left(x\right)\Big|_0^\alpha=$$

$$=-\frac{Ar\sqrt{2}}{\alpha_m^{(\nu)}}=-\frac{A\sqrt{2}}{\mu_m}<0,\qquad \nu=n+\frac{1}{2}=\frac{5}{2},\qquad n=2.$$

$$w\left(\rho,t\right)=-\frac{2A}{r}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_\nu\left(\mu_m\rho\right)}{\mu_m\cdot J_{\nu+1}\left(\mu_m r\right)}\cdot\cos\mu_m a\,t.$$

6. $u\left(\rho,\Omega,t\right)=u_{2,-2}\left(\rho,t\right)\cdot Y_{2,-2}\left(\Omega\right)=\tilde{u}\left(\rho,t\right)\cdot Y_{2,2}^*\left(\Omega\right)=$

$$=\sqrt{\frac{r}{\rho}}\,\upsilon\left(\rho,t\right)\cdot Y_{2,2}^*\left(\Omega\right)=\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\left\{A\left(\frac{\rho}{r}\right)^\nu+w\left(\rho,t\right)\right\}\cdot Y_{2,2}^*\left(\Omega\right)=$$

$$= A\left\{\left(\frac{\rho}{r}\right)^2 - \frac{2}{r}\sqrt{\frac{r}{\rho}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_{5/2}(\mu_m\rho)}{\mu_m\cdot J_{7/2}(\mu_m r)}\cos\mu_m at\right\}\cdot Y_{2,2}^*(\Omega).$$

7. $u\big|_{\rho=0} = 0 < \infty \because \lim\limits_{\rho\to 0}\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot J_{5/2}(\mu_m\rho) = 0.\qquad u\big|_{\rho=r} = At\cdot Y_{2,-2}(\Omega).$

$$u\big|_{t=0} = A\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\left\{\left(\frac{\rho}{r}\right)^{5/2} - \frac{2}{r}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_{5/2}(\mu_m\rho)}{\mu_m\cdot J_{7/2}(\mu_m r)}\right\}Y_{2,2}^*(\Omega) = 0.$$

$$u_t'\big|_{t=0} = 0.$$

$$\left[u(\rho,\Omega,t)\right] = [A] = W,\qquad [a] = L/T,\qquad [\mu_m r] = 1,\qquad [\mu_m at] = 1.$$

$$\left[u(\rho,\Omega,t)\right] = W\cdot\left\{1 + \frac{1}{L}\cdot 1\cdot L\right\} \Rightarrow W.$$

Задача 3.17. Решение уравнения колебаний со сложным граничным условием.

$$\begin{cases} \Delta_3 u - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. & u = u(\rho,\Omega(\theta,\varphi),t). \\ u\big|_{\rho=0} < \infty,\ u\big|_{\rho=r} = At^2\cdot Y_{3,-2}(\Omega). & 0\le\rho\le r,\quad 0\le 2\theta,\varphi\le 2\pi, \\ u\big|_{t=0} = u_t'\big|_{t=0} = 0. & 0\le t\le\infty. \end{cases}$$

1. $u(\rho,\Omega,t) = \sum\limits_{n,k} u_{nk}(\rho,t)\cdot Y_{nk}(\Omega).$

$$\Delta_3 u - \frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{n,k}\left\{\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial u_{nk}}{\partial\rho}\right) - \frac{n(n+1)}{\rho^2}u_{nk} - \frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial^2 u_{nk}}{\partial t^2}\right\}\cdot Y_{nk} = 0.$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\dfrac{\partial u_{nk}}{\partial\rho}\right) - \dfrac{n(n+1)}{\rho^2}u_{nk} - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u_{nk}}{\partial t^2} = 0. & \\ |u_{nk}(0,t)| < \infty,\quad u_{nk}(r,t) = At^2. & u_{nk} = u_{nk}(\rho,t). \\ u_{nk}(\rho,0) = 0,\quad \dfrac{\partial}{\partial t}u_{nk}(\rho,0) = 0. & \end{cases}$$

$u_{nk}(\rho,t)=\tilde u(\rho,t)$ при $n=3$ и $k=-2$; $u_{nk}(\rho,t)=0$ при $n\neq 3$ или $k\neq -2$.

2. $\tilde u(\rho,t)=\sqrt{\dfrac{r}{\rho}}\cdot \upsilon(\rho,t).$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right)-\dfrac{\nu^2}{\rho^2}\upsilon-\dfrac{1}{a^2}\cdot\dfrac{\partial^2\upsilon}{\partial t^2}=0. & \upsilon=n+\dfrac12=3+\dfrac12=\dfrac72,\ n=3.\\ |\upsilon(0,t)|<\infty, \quad \upsilon\,(r,t)=At^2. & \upsilon_{nk}=\upsilon_{nk}(\rho,t).\\ \upsilon(\rho,0)=0, \quad \dfrac{\partial}{\partial t}\upsilon(\rho,0)=0. & \end{cases}$$

3. $\upsilon(\rho,t)=w(\rho,t)+\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^{\nu}\cdot\upsilon(r,t)=w(r,t)+\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^{\nu}\cdot At^2.$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial w}{\partial\rho}\right)-\dfrac{\nu^2}{\rho^2}w-\dfrac{1}{a^2}\cdot\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\dfrac{2A}{a^2}\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^{\nu}, \qquad \nu=\dfrac72.\\ \left|\,w(0,t)\right|<\infty,\ \ w(r,t)=0.\\ w(\rho,0)=0,\ \ w_t'(\rho,0)=0.\end{cases}$$

4. $w(\rho,t)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}T_m(t)\cdot R_m(t).$

$$\hat D_{Б}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)-\frac{\nu^2}{\rho^2}\quad \text{при } |R(0)|<\infty \text{ и } R(r)=0.$$

$$R_m(\rho)=\frac{\sqrt2}{r}\cdot\frac{J_\nu(\mu_m\rho)}{J_{\nu+1}(\mu_m r)}\ \text{ и }\ \lambda_m=-\mu_m^2=-\left(\alpha_m^{(\nu)}/r\right)<0.$$

$$J_\nu\left(\alpha_m^{(\nu)}\right)=0 \text{ и } J_{\nu+1}\left(\alpha_m^{(\nu)}\right)\neq 0.$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial w}{\partial\rho}\right)-\frac{\nu^2}{\rho^2}w-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\sum_m\left\{\hat D_{Б}R_m\cdot T_m-\frac{1}{a^2}R_mT_m''\right\}=$$

$$= \sum_m \left\{ -\mu_m^2 R_m \cdot T_m - \frac{1}{a^2} R_m T_m'' \right\} = -\frac{1}{a^2} \sum_m \left\{ T_m'' + (\mu_m a)^2 T_m \right\} \cdot R_m = \frac{2A}{a^2} \left(\frac{\rho}{r} \right)^\nu;$$

$$\sum_m \left\{ T_m'' + \omega_m^2 T_m \right\} \cdot R_m = -2A \left(\frac{\rho}{r} \right)^\nu = -2A \sum_m \gamma_m R_m(\rho).$$

5. $T_m'' + \omega_m^2 T_m(t) = -2A\gamma_m, \quad \omega_m = \mu_m a = \alpha_m^{(\nu)} \dfrac{a}{r} > 0.$

$$\gamma_m = \left(\left(\frac{\rho}{r} \right)^\nu, R_m \right) = \int_0^r \left(\frac{\rho}{r} \right)^\nu \cdot R_m(\rho) \cdot \rho d\rho =$$

$$= \left[\mu_m \rho = \alpha_m^{(\nu)} \frac{\rho}{r} = x \right] = \frac{r\sqrt{2}}{\alpha^{\nu+2} \cdot J_{\nu+1}(\alpha)} \cdot \int_0^\alpha J_\nu(x) \cdot x^{\nu+1} dx =$$

$$= \frac{r\sqrt{2}}{\alpha^{\nu+2} \cdot J_{\nu+1}(\alpha)} \cdot x^{\nu+1} J_{\nu+1}(x) \Big|_0^\alpha = \frac{r\sqrt{2}}{\alpha_m^{(\nu)}} = \frac{\sqrt{2}}{\mu_m} > 0, \;\; \nu = \frac{7}{2}.$$

$$T_m'' + \omega_m^2 \cdot T_m(t) = -2A\gamma_m = -\frac{2A\sqrt{2}}{\mu_m} < 0.$$

$$T_m(t) = C_m \cos\omega_m t + \tilde{C}_m \sin\omega_m t - \frac{2A\sqrt{2}}{a^2 \mu_m^3}; \qquad C_m, \tilde{C}_m = const.$$

6. $w(\rho,0) = \sum\limits_m T_m(0) \cdot R_m(\rho) = 0 \Rightarrow T_m(0) = 0.$

$$w_t'(\rho,0) = \sum_m T_m'(0) \cdot R_m(\rho) = 0 \Rightarrow T_m'(0) = 0.$$

$$T_m'(0) = 0 + \tilde{C}_m \omega_m - 0 = 0 \Rightarrow \tilde{C}_m = 0.$$

$$T_m(0) = C_m - \frac{2A\sqrt{2}}{a^2 \mu_m^3} = 0 \Rightarrow C_m = \frac{2A\sqrt{2}}{a^2 \mu_m^3} > 0.$$

$$T_m(t) = -\frac{2A\sqrt{2}}{a^2 \mu_m^3} (1 - \cos\mu_m a t).$$

$$w(\rho,t) = \sum_m T_m(t) \cdot R_m(\rho) = -\frac{4A}{ra^2} \sum_{m=1}^\infty (1 - \cos\mu_m a t) \frac{J_\nu(\mu_m \rho)}{\mu_m^3 J_{\nu+1}(\mu_m r)}.$$

$$7. \quad u(\rho,\Omega,t)=\tilde{u}(\rho,t)\cdot Y_{3,-2}(\Omega)=\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\upsilon(\rho,t)\cdot Y_{3,-2}(\Omega)=$$

$$=\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\left\{w(\rho,t)+At^2\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\nu}\right\}\cdot Y_{3,-2}(\Omega)=$$

$$=A\left\{t^2\left(\frac{\rho}{r}\right)^3-\frac{4}{ra^2}\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}(1-\cos\mu_m at)\cdot\frac{J_\nu(\mu_m\rho)}{\mu_m^3 J_{\nu+1}(\mu_m r)}\right\}\cdot Y^*_{3,2}(\Omega)$$

при $\mu_m=\alpha_m^{(\nu)}/r>0$ и $\nu=\dfrac{7}{2}$.

$$8. \quad u(0,\Omega,t)=0<\infty\because\lim_{\rho\to0}\sqrt{\frac{r}{\rho}}J_\nu(\mu_m\rho)=0 \text{ при } \nu=\frac{7}{2}>1.$$

$$u(r,\Omega,t)=At^2\cdot Y^*_{3,2}(\Omega)\because J_\nu(\mu_m r)=J_\nu\left(\alpha_m^{(\nu)}\right)=0.$$

$$u(\rho,\Omega,0)=0, \qquad u'_t(\rho,\Omega,0)=0.$$

$$\left[u(\rho,\Omega,t)\right]\equiv W, \quad [A]=W/T^2, \quad [a]=L/T, \quad [\mu_m r]=[\mu_m at]=1.$$

$$\left[u(\rho,\Omega,t)\right]\equiv W=\frac{W}{T^2}\left\{T^2\cdot1+\frac{1}{L}\cdot\frac{T^2}{L^2}\cdot1\cdot L^3\right\}\Rightarrow W.$$

$$Y_{3,-2}(\Omega)=Y^*_{3,2}(\theta,\varphi)=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{7}{30\pi}}\cdot P_{3,2}(\cos\theta)\cdot e^{-2i\varphi}=$$

$$=\frac{1}{16}\sqrt{\frac{105}{2\pi}}\cdot(\cos\theta-\cos3\theta)\cdot e^{-2i\varphi}.$$

Задача 3.18. Определение напряженности электромагнитного поля, волны которого расходятся от заряженного шара радиуса $\rho=r$, если на поверхности шара заряды меняются со временем по гармоническому закону $e^{\pm i\omega t}$.

Поперечная составляющая электрического поля $E_\perp(\rho,\Omega,t)$ должна удовлетворять однородному волновому уравнению и граничному условию на поверхности шара

$$\Delta_3 E_\perp - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\cdot\frac{\partial E_\perp}{\partial t^2} = 0 \text{ и } E_\perp|_{\rho=r} = f(\Omega)\cdot e^{-i\omega t},$$

где ε и μ - параметры среды и ω – частота волн поля. Если записать $E_\perp(\rho,\Omega,t) = u(\rho,\Omega)\cdot e^{-i\omega t}$, то для определения амплитуды поля $u(\rho,\Omega)$ нужно поставить краевую задачу для однородного уравнения Гельмгольца

$$\begin{cases} \Delta_3 u + \text{æ}^2\cdot u(\rho,\Omega) = 0. & u = u(\rho,\Omega(\theta,\varphi)), \\ u|_{\rho=r} = f(\Omega). & 0 < r \le \rho < \infty, \end{cases}$$

где $\text{æ} = \dfrac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}$ – волновое число $\left(\operatorname{Im}\sqrt{\varepsilon\mu} > 0\right)$. На бесконечности амплитуда $u(\rho,\Omega)$ должна удовлетворять условию излучения Зоммерфельда $\lim\limits_{\rho\to\infty}\rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial\rho} - i\,\text{æ}u\right) = 0$. Стандартные условия на углы $\Omega(\theta,\varphi)$ явно записывать не будем.

1. Отделение зависимости от углов

$$u(\rho,\Omega(\theta,\varphi)) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n} R_{nk}(\rho)\cdot Y_{nk}(\Omega).$$

Для оператора Лапласа в сферических координатах $\Delta_3 = \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\dfrac{\partial}{\partial\rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\cdot\tilde{\Delta}$ угловая часть имеет вид: $\tilde{\Delta} = \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$. Поэтому сферическая функция $Y_{nk}(\Omega(\theta,\varphi))$ удовлетворяет уравнению $\tilde{\Delta}Y_{nk}(\Omega) = \lambda_n\cdot Y_{nk}(\Omega)$. Здесь $\lambda_n = -n(n+1) \le 0$ – собственные значения, а собственные функции равны

$$Y_{nk}(\Omega(\theta,\varphi)) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\cdot\frac{(n-k)!}{(n+k)!}}\cdot P_{nk}(\cos\theta)\cdot e^{ik\varphi},$$

где $P_{nk}\left(x\right)=\frac{\left(1-x^2\right)^{k/2}}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{d^{n+k}}{dx^{n+k}}\left(x^2-1\right)^n$ при $x=\cos\theta$ – присоединенная функция Лежандра. Сферические функции взаимно ортогональны

$$\left(Y_{nk},Y_{n'k'}\right)=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}Y_{nk}\left(\theta,\varphi\right)\cdot Y^*_{n'k'}\left(\theta,\varphi\right)\cdot\sin\theta d\theta=\delta_{nn'}\cdot\delta_{kk'}.$$

Перепишем уравнение Гельмгольца в развернутом виде.

$$\Delta_3 u+æ^2u=\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\tilde{\Delta}u+æ^2u=$$

$$=\sum_{n,k}\left\{\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{dR_{nk}}{d\rho}\right)Y_{nk}+\frac{1}{\rho^2}R_{nk}\tilde{\Delta}Y_{nk}+æ^2R_{nk}Y_{nk}\right\}=$$

$$=\sum_{n,k}\left\{\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{dR_{nk}}{d\rho}\right)+\left(æ^2-\frac{n\left(n-1\right)}{\rho^2}\right)R_{nk}\right\}Y_{nk}=0.$$

Граничное условие на поверхности сферы $\rho=r$ тоже преобразуем

$$u\,|_{\rho=r}\equiv u\left(r,\Omega\right)=\sum_{n,k}R_{nk}\left(r\right)\cdot Y_{nk}\left(\Omega\right)=f\left(\Omega\right)=\sum_{n,k}f_{nk}\cdot Y_{nk}\left(\Omega\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{nk}\left(r\right)=\left(f,Y_{nk}\right)\equiv f_{nk}=\oiint_{\Omega'}f\left(\Omega'\right)\cdot Y^*_{nk}\left(\Omega'\right)d\Omega'=const,$$

где $d\Omega'=\sin\theta'\cdot d\theta' d\varphi'$.

Поэтому задачу для функции $R_{nk}\left(\rho\right)$ получим

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho^2\dfrac{dR_{nk}}{d\rho}\right)+\left(æ^2-\dfrac{n\left(n+1\right)}{\rho^2}\right)R_{nk}\left(\rho\right)=0,\\ R_{nk}\left(r\right)=f_{nk}; \qquad 0<r\le\rho<\infty.\end{cases}$$

2. Переход к оператору Бесселя $\hat{D}_Б=\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d}{d\rho}\right)-\frac{\nu^2}{\rho^2}$ с помощью замены $R_{nk}\left(\rho\right)=\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\tilde{R}_{nk}\left(\rho\right)$.

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{dR_{nk}}{d\rho}\right)+\left(æ^2-\frac{n(n+1)}{\rho^2}\right)R_{nk}(\rho)=$$

$$=\sqrt{\frac{r}{\rho}}\left\{\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\tilde{R}_{nk}}{d\rho}\right)+\left(æ^2-\frac{\nu^2}{\rho^2}\right)\tilde{R}_{nk}(\rho)\right\}=0 \quad \text{при } \nu=n+\frac{1}{2}.$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{d\tilde{R}_{nk}}{d\rho}\right)+\left(æ^2-\dfrac{\nu^2}{\rho^2}\right)\tilde{R}_{nk}(\rho)=0. & \tilde{R}_{nk}=\tilde{R}_{nk}(\rho).\\ \tilde{R}_{nk}(r)=f_{nk}\,,\ \ \tilde{R}_{nk}(\rho)|_{\rho\to\infty}=0. & 0<r\le\rho<\infty.\end{cases}$$

3. Решение краевой задачи для функции $R_{nk}(\rho)=\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\tilde{R}_{nk}(\rho)$.

$$R_{nk}(\rho)=\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\tilde{R}_{nk}(\rho)=\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot\left[A_{nk}\cdot H_\nu^{(1)}(æ\rho)+B_{nk}H_\nu^{(2)}(æ\rho)\right],$$

где $A_{nk},B_{nk}=const$ и $H_\nu^{(1,2)}(x)$ – функция Ханкеля первого и второго рода соответственно. Их асимптотики равны $H_\nu^{(1,2)}(x)\cong\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot e^{\pm i\left(x-\frac{\pi}{4}(2\nu+1)\right)}$ при $|x|>>1$ $\left(|x|>>\nu^2>0\right)$.

4. Определение постоянных амплитуд A_{nk} и B_{nk} из граничных условий.

Выражение для $R_{nk}(\rho)$ описывает распространение бегущих волн (не стоячих). В задаче принята зависимость от времени в виде $e^{-i\omega t}$, поэтому на больших расстояниях от источника $\rho\to\infty$ асимптотика дает

$$R_{nk}(\rho)\cdot e^{-i\omega t}\Rightarrow\sqrt{\frac{r}{\rho}}\cdot H_\nu^{(1,2)}(æ\rho)\cdot e^{-i\omega t}\cong\frac{1}{\rho}\exp\big(i(-\omega t\pm æ\rho-...)\big).$$

Значит, комбинация $H_\nu^{(1)}(æ\rho)\cdot e^{-i\omega t}$ описывает волны, расходящиеся от источника, и, наоборот, комбинация $H_\nu^{(2)}(æ\rho)\cdot e^{-i\omega t}$ – волны приходящие. Для случая $e^{+i\omega t}$ все получилось бы наоборот. В нашей задаче отсутствуют приходящие волны, поэтому постоянная $B_{nk} = 0$ и выражение для функции амплитуд $u(\rho, \Omega)$ принимает вид:

$$u(\rho, \Omega) = \sqrt{\frac{r}{\rho}} \cdot \sum_{n,k} A_{nk} \cdot H_\nu^{(1)}(\text{æ}\rho) \cdot Y_{nk}(\Omega).$$

Постоянная A_{nk} находится из условия на поверхности заряженного шара (по заданным источникам)

$$u(r, \Omega) = \sum_{n,k} A_{nk} \cdot H_\nu^{(1)}(\text{æ} r) \cdot Y_{nk}(\Omega) = f(\Omega) = \sum_{n,k} f_{nk} \cdot Y_{nk}(\Omega) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{nk} = f_{nk} / H_\nu^{(1)}(\text{æ} r) = (f, Y_{nk}) / H_\nu^{(1)}(\text{æ} r).$$

Подставляя значения величины A_{nk} в сумму для функции $u(\rho, \Omega)$, получим

$$u(\rho, \Omega) = \sqrt{\frac{r}{\rho}} \cdot \sum_{n,k} f_{nk} \frac{H_\nu^{(1)}(\text{æ}\rho)}{H_\nu^{(1)}(\text{æ} r)} \cdot Y_{nk}(\Omega).$$

Интересно отметить, что распространение плоских волн в пространстве описывается функцией $C \cdot e^{i(\pm \text{æ}\rho - \omega t)}$ или $C \cdot \cos(\pm \text{æ}\rho - \omega t)$. Здесь волны исходят от плоскости, заполненной источниками, и амплитуда C – постоянная.

Для описания распространения цилиндрических волн получим функцию $H_\nu^{(1)}(\text{æ}\rho) \cdot e^{-i\omega t} \cong \frac{C}{\sqrt{\rho}} \cdot e^{i(\pm \text{æ}\rho - \omega t)}$ на больших расстояниях от источника $\rho >> 1$. Здесь источник – заряженная линия и амплитуда $\frac{C}{\sqrt{\rho}} \to 0$ при $\rho \to \infty$. Для сферических волн получим $\sqrt{\frac{r}{\rho}} \cdot H_\nu^{(1)}(\text{æ}\rho) \cdot e^{-i\omega t} \cong \frac{C}{\rho} \cdot e^{i(\pm \text{æ}\rho - \omega t)}$; теперь имеется только один точечный источник, и поэтому амплитуда убывает особенно быстро $\frac{C}{\rho} \to 0$ при $\rho \to \infty$.

5. Окончательный вид решения задачи.

Если в выражении для искомой функции $u(\rho,\Omega)$ перейти к сферическим «маленьким» функциям Ханкеля по формуле $H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}\cdot h^{(1)}_n(x)$ при $n+\dfrac{1}{2}=\nu$, а затем учесть значение коэффициента

$$f_{nk}=(f,Y_{nk})=\oiint\limits_{\Omega'} f(\Omega')\cdot Y^*_{nk}(\Omega')d\Omega', \qquad d\Omega'=\sin\theta'\cdot d\theta' d\varphi';$$

то после простых преобразований получим

$$u(\rho,\Omega)=\sum_{n,k} f_{nk}\frac{h^{(1)}_n(æ\rho)}{h^{(1)}_n(ær)}\cdot\oiint\limits_{\Omega'} f(\Omega')\cdot Y^*_{nk}(\Omega')d\Omega'\cdot Y_{nk}(\Omega)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^{(1)}_n(æ\rho)}{h^{(1)}_n(ær)}\cdot\oiint\limits_{\Omega'} f(\Omega')\left(\sum_{k=-n}^{n} Y^*_{nk}(\Omega')\cdot Y_{nk}(\Omega)\right)d\Omega'.$$

Для суммы по индексу k используем формулу сложения сферических функций

$$P_n(\cos\gamma(\Omega,\Omega'))=\frac{4\pi}{2n+1}\cdot\sum_{k=-n}^{n} Y^*_{nk}(\Omega')\cdot Y_{nk}(\Omega),$$

где $\cos\gamma(\Omega,\Omega')=(\vec{n},\vec{n}')=\cos\theta\cdot\cos\theta'+\sin\theta\cdot\sin\theta'\cdot\cos(\varphi-\varphi')$, тогда окончательно получим

$$u(\rho,\Omega)=\frac{1}{4\pi}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\cdot\frac{h^{(1)}_n(æ\rho)}{h^{(1)}_n(ær)}\cdot\oiint\limits_{\Omega'} f(\Omega')\cdot P_n(\cos\gamma(\Omega,\Omega'))\cdot d\Omega'.$$

Ряд сходится правильно, если выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty}(n\cdot C_n)=0$ и $C_n=\oiint\limits_{\Omega'}\ldots=O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ при $n\to\infty$.

Напряженность поперечной составляющей электрического поля теперь равна $E_\perp(\rho,\Omega,t)=u(\rho,\Omega)\cdot e^{-i\omega t}$. Для напряженности магнитного поля $H_\perp(\rho,\Omega,t)$ получается аналогичная формула.

6. Проверка полученного решения по условию задачи и по размерностям.

$$u(r,\Omega)=1\cdot\sum_{n,k} f_{nk}\cdot 1\cdot Y_{nk}(\Omega)=\sum_{n,k}(f,Y_{nk})\cdot Y_{nk}(\Omega)=f(\Omega).$$

При большом значении ρ (вдали от шара), использовав асимптотику функции Ханкеля, приближенно получим $u(\rho,\Omega)\approx h_n^{(1)}(æ\rho)\approx \dfrac{1}{\rho}e^{iæ\rho}$ для произвольного значения n. Проверим выполнение условия Зоммерфельда

$$\lim_{\rho\to\infty}\rho\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}-i\,æ u\right)=\lim_{\rho\to\infty}\rho\left(\frac{iæ}{\rho}\cdot e^{iæ\rho}-\frac{1}{\rho^2}\cdot e^{iæ\rho}-iæ\cdot\frac{1}{\rho}\cdot e^{iæ\rho}\right)=$$

$$=-\lim_{\rho\to\infty}\frac{1}{\rho}\cdot e^{iæ\rho}=0;\quad \operatorname{Im}æ\geq 0.$$

Условие Зоммерфельда для расходящихся сферических волн на бесконечности соответствует граничному условию при $\rho\to\infty$.

Запишем размерности всех заданных величин. Пусть $[u]\equiv W$, тогда

$$[f]=[f_{nk}]=W,\qquad [æ]=\left[\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}\right]=\frac{1}{T}\cdot\frac{T}{L}\cdot 1=\frac{1}{L},\qquad [æ\rho]=1.$$

Размерности в ответе получим $\left[u(\rho,\Omega)\right]\equiv W=[f_{nk}]\Rightarrow W$.

Решение стационарных задач

<u>Задача 3.19.</u> Первая краевая задача о решении внутри шара уравнения Лапласа с неоднородным граничным условием Дирихле.(в общем виде).

$$\begin{cases}\Delta_3 u=0. & u=u(\rho,\Omega(\theta,\varphi)).\\ u|_{\rho=r}=f(\Omega). & 0\leq\rho\leq r,\ 0\leq 2\theta,\varphi\leq 2\pi.\end{cases}$$

Естественные граничные условия ограниченности решения при $\rho=0$, $\theta=0$, $\theta=\pi$ и условия периодичности по φ явно не записаны.

1. Отделим зависимость от углов с помощью разложения в двойной ряд по сферическим функциям $u(\rho,\Omega)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=-n}^{n}R_{nk}(\rho)\cdot Y_{nk}(\Omega)$, где сферическая

функция равна $Y_{nk}\left(\Omega\left(\theta,\varphi\right)\right)=\sqrt{\dfrac{2n+1}{4\pi}\cdot\dfrac{\left(n-k\right)!}{\left(n+k\right)!}}\cdot P_{nk}\left(\cos\theta\right)e^{ik\varphi}$ при $n\geq|k|$.

Тогда получим

$$\Delta_3 u=\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\cdot\tilde{\Delta}u=\frac{1}{\rho^2}\sum_{n,k}\left\{\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{d\,R_{nk}}{d\rho}\right)\cdot Y_{nk}+R_{nk}\cdot\tilde{\Delta}Y_{nk}\right\}=$$

$$=\left[\tilde{\Delta}=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2};\quad\tilde{\Delta}_{nk}Y_{nk}=-n\left(n+1\right)Y_{nk}\right]=$$

$$=\frac{1}{\rho^2}\sum_{n,k}\left\{\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{d\,R_{nk}}{d\rho}\right)-n\left(n+1\right)R_{nk}\right\}Y_{nk}=0.$$

2. Получаем уравнение Эйлера второго порядка относительно радиуса

$$\rho^2R''_{nk}+2\rho\cdot R'_{nk}-n\left(n+1\right)R_{nk}\left(\rho\right)=0,$$

решение которого известно $R_{nk}\left(\rho\right)=C_{nk}\rho^n+\tilde{C}_{nk}\rho^{-n-1};\quad C_{nk},\tilde{C}_{nk}=const$.

3. Для получения внутри сферы ограниченного решения задачи следует положить постоянную $\tilde{C}_{nk}=0$, а постоянную $C_{nk}\neq0$ определим из заданного граничного условия

$$u\,|_{\rho=r}\equiv u\left(r,\Omega\right)=\sum_{n,k}C_{nk}r^nY_{nk}\left(\Omega\right)=f(\Omega)\Rightarrow C_{nk}r^n=\left(f,Y_{nk}\right)\equiv f_{nk}=$$

$$=\oint\!\!\!\oint_{\Omega'}f\left(\Omega'\right)Y^*_{nk}\left(\Omega'\right)d\Omega';\quad d\Omega'=\sin\theta'd\theta'd\varphi';\quad C_{nk}=f_{nk}/r^n.$$

Теперь решение задачи можно записать

$$u\left(\rho,\Omega\right)=\sum_{n,k}f_{nk}\left(\frac{\rho}{r}\right)^nY_{nk}\left(\Omega\right)=\sum_{n,k}f_{nk}\;u^{(i)}_{nk}\left(\rho,\Omega\right).$$

Здесь $u^{(i)}_{nk}\left(\rho,\Omega\right)=\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^nY_{nk}\left(\Omega\right)$ – внутренняя шаровая функция (interier).

Решение нашей задачи описывает распределение внутри шара напряженности статического поля произвольной физической природы, когда на поверхности сферы задано распределение источников поля $u\,|_{\rho=r}=f\left(\Omega\right)$.

При решении внешней краевой задачи $r \le \rho < \infty$ получим окончательное выражение в виде $u(\rho,\Omega) = \sum_{n,k} f_{nk} \cdot \left(\frac{r}{\rho}\right)^{n+1} \cdot Y_{nk}(\Omega)$. Здесь внешняя шаровая функция (exterier) равна $u_{nk}^{(e)}(\rho,\Omega) = \left(\frac{r}{\rho}\right)^{n+1} \cdot Y_{nk}(\Omega)$. Коэффициент $f_{nk} = (f, Y_{nk})$ одинаков для внутренних и для внешних функций.

Введем функцию Грина на примере внутренней задачи. Подставим интеграл для функции f_{nk} в формулу решения.

$$u(\rho,\Omega) = \sum_{n,k} \left(\oiint_{\Omega'} f(\Omega') Y_{nk}^*(\Omega') d\Omega' \right) \cdot \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \cdot Y_{nk}(\Omega) =$$

$$= \oiint_{\Omega'} f(\Omega') \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \cdot \sum_{k=-n}^{n} Y_{nk}(\Omega) \cdot Y_{nk}^*(\Omega') \right) d\Omega' =$$

$$= \oiint_{\Omega'} f(\Omega') \cdot \tilde{G}(\rho,\Omega,\Omega') d\Omega'.$$

Теперь воспользуемся формулой сложения сферических функций, тогда

$$\tilde{G}(\rho,\Omega,\Omega') = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \cdot \sum_{k=-n}^{n} Y_{nk}(\Omega) \cdot Y_{nk}^*(\Omega') =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \cdot \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \cdot P_n\left(\cos\gamma(\Omega,\Omega')\right),$$

где $\cos\gamma(\Omega,\Omega') = \cos\theta \cdot \cos\theta' + \sin\theta \cdot \sin\theta' \cdot \cos(\varphi - \varphi')$.

Воспользуемся далее производящей функций для полиномов Лежандра $P_n(\cos\gamma)$

$$F(z,\cos\gamma) = \left(1 - 2z \cdot \cos\gamma + z^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\gamma) \cdot z^n \quad \text{при } |z| = \frac{\rho}{r} < 1.$$

Из этой формулы уже легко получается нужная

$$2z \cdot \frac{\partial F}{\partial z} + F = \frac{1 - z^2}{\left(1 - 2z \cdot \cos\gamma + z^2\right)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \cdot P_n(\cos\gamma) \cdot z^n ,$$

с помощью которой можно просуммировать ряд для функции $\tilde{G}\left(\rho,\Omega,\Omega'\right)$.

Получим $\tilde{G}\left(\rho,\Omega,\Omega'\right)=\dfrac{r}{4\pi}\cdot\dfrac{r^2-\rho^2}{\left(r^2-2r\rho\cdot\cos\gamma+\rho^2\right)^{3/2}}$, где функция углов

$\gamma=\gamma\left(\Omega,\Omega'\right)$ уже приведена выше.

Подставляя полученное выражение в интеграл по углам, окончательно находим решение задачи

$$u\left(\rho,\Omega\right)=\frac{r}{4\pi}\left(r^2-\rho^2\right)\cdot\oiint\limits_{\Omega'}\frac{f\left(\Omega'\right)d\Omega'}{\left(r^2-2r\rho\cdot\cos\gamma+\rho^2\right)^{3/2}}.$$

Это выражение называется интегралом Пуассона и является решением первой краевой задачи (задачи Дирихле) для внутренности сферы. Аналогичный интеграл для краевой задачи вне сферы получится заменой $\rho\to r$, и наоборот, он по форме отличается только знаком от нашего выражения .

<u>Задача 3.20.</u> Приведение к однородным граничных условий для трех основных стационарных задач в сферической системе координат. Пусть функция $u=u\left(\rho,\Omega\left(\theta,\varphi\right)\right)$ и $0\le\rho\le r,\quad 0\le 2\theta,\varphi\le 2\pi$.

1. Первая краевая задача Дирихле.

$$\Delta_3 u=F_1\left(\rho,\Omega\right)\ \text{ и }\ u\,|_{\rho=r}=f_1\left(\Omega\right).$$

Если сделать замену искомой функции

$u\left(\rho,\Omega\right)=\upsilon\left(\rho,\Omega\right)+\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^2\cdot f_1\left(\Omega\right)$, получим

$$\Delta_3\upsilon=\tilde{F}_1\equiv F_1\left(\rho,\Omega\right)-\frac{1}{r^2}\left(\tilde{\Delta}f_1\left(\Omega\right)+6f_1\left(\Omega\right)\right)\quad\text{и}\quad\upsilon\,|_{\rho=r}=0.$$

2. Вторая краевая задача Неймана.

$$\Delta_3 u=F_2\left(\rho,\Omega\right)\ \text{ и }\ \left.\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|_{\rho=r}=f_2\left(\Omega\right).$$

После замены $u(\rho,\Omega)=\upsilon(\rho,\Omega)+\dfrac{\rho^2}{2r}\cdot f_2(\Omega)$ получим

$$\Delta_3\,\upsilon=\tilde{F}_2\equiv F_2(\rho,\Omega)-\frac{1}{2r}\Big(\tilde{\Delta}f_2(\Omega)-6f_2(\Omega)\Big)\quad\text{и}\quad\left.\frac{\partial\upsilon}{\partial\rho}\right|_{\rho=r}=0.$$

3. Третья смешанная краевая задача.

$$\Delta_3\,u=F_3(\rho,\Omega)\quad\text{и}\quad\left.\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}+\text{æ}u\right)\right\|_{\rho=r}=f_3(\Omega),\qquad \text{æ}=const\,.$$

После замены $u(\rho,\Omega)=\upsilon(\rho,\Omega)+\dfrac{\rho^2 f_3(\Omega)}{r(\text{æ}r+2)}$ получим

$$\Delta_3\upsilon=\tilde{F}_3\equiv F_3(\rho,\Omega)-\frac{\tilde{\Delta}f_3(\Omega)+6f_3(\Omega)}{r(\text{æ}r+2)}\quad\text{и}\quad\left.\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial\rho}+\text{æ}\,\upsilon\right)\right\|_{\rho=r}=0\,.$$

Задача 3.21. Решение первой краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа внутри шара.

$$\begin{cases}\Delta_3 u=0. & u=u\big(\rho,\Omega(\theta,\varphi)\big).\\ u\big|_{\rho=r}=f(\Omega)\equiv A\cdot Y_{3,-2}(\Omega). & 0\le\rho\le r,\quad 0\le 2\theta,\varphi\le 2\pi.\end{cases}$$

1. Отделение зависимости от углов $u(\rho,\Omega)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=-n}^{n}R_{nk}(\rho)\cdot Y_{nk}(\Omega)$

и постановка задачи для функции от радиуса.

$$\Delta_3\,u=\frac{1}{\rho^2}\cdot\sum_{n,k}\left\{\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{d\,R_{nk}}{d\rho}\right)\cdot Y_{nk}+\tilde{\Delta}Y_{nk}\cdot R_{nk}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\rho^2}\sum_{n,k}\left\{\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{d\,R_{nk}}{d\rho}\right)-n(n+1)\cdot R_{nk}\right\}Y_{nk}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\rho^2R''_{nk}+2\rho R'_{nk}-n(n+1)\cdot R_{nk}=0\quad\text{при }\tilde{\Delta}Y_{nk}=-n(n+1)\cdot Y_{nk}(\Omega).$$

$$u\big|_{\rho=r}=\sum_{n,k}R_{nk}(r)Y_{nk}(\Omega)=A\cdot Y_{3,-2}(\Omega)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{nk}(r)=\big(A\cdot Y_{3,-2},Y_{nk}\big)=A\cdot\delta_{n,3}\cdot\delta_{k,-2}.$$

$R_{nk}(\rho) \equiv R(\rho) \neq 0$ при $n = 3$ и $k = -2$; $R_{nk}(\rho) = 0$ при $n \neq 3$ или $k \neq -2$.

$$\begin{cases} \rho^2 R'' + 2\rho R' - 3\cdot 4\cdot R(\rho) = 0. \\ |\,R(0)\,| < \infty, \qquad R(r) = A. \end{cases} \qquad 0 \le \rho \le r.$$

2. Решение краевой задачи для уравнения Эйлера на отрезке.

$$R(\rho) = C\rho^3 + \tilde{C}\rho^{-4}; \qquad C, \tilde{C} = const.$$

$$|\,R(0)\,| < \infty \Rightarrow \tilde{C} = 0; \qquad R(r) = C\cdot r^3 = A \Rightarrow C = A / r^3.$$

$$R(\rho) = A\left(\frac{\rho}{r}\right)^3.$$

3. Окончательный вид решения задачи.

$$u(\rho, \Omega(\theta,\varphi)) = R(\rho)\cdot Y_{3,-2}(\Omega) = A\left(\frac{\rho}{r}\right)^3 \cdot Y^*_{3,-2}(\theta,\varphi) = A\cdot u^{(i)}_{3,-2}(\rho,\Omega),$$

где $u^{(i)}_{3,-2}(\rho,\Omega)$ – внутренняя (interier) шаровая функция. Здесь сферическая функция

$$Y_{3,-2}(\Omega) = Y^*_{3,2}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{7}{4\pi}\frac{1!}{5!}}\cdot P_{3,2}(\cos\theta)\cdot e^{-2i\varphi} =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{7\cdot 15}{2\pi}}\cos\theta\cdot\sin^2\theta\cdot e^{-2i\varphi} = \frac{1}{16}\sqrt{\frac{105}{4\pi}}(\cos\theta - \cos 3\theta)\cdot e^{-2i\varphi}$$

$$u(\rho, \Omega(\theta,\varphi)) = \frac{A}{16}\left(\frac{\rho}{r}\right)^3\sqrt{\frac{105}{2\pi}}(\cos\theta - \cos 3\theta)\cdot e^{-2i\varphi}.$$

4. Проверка решения по условиям задачи и по размерностям. $u(0,\Omega) = 0 < \infty$ при $\rho \to 0$. Ограниченность решения при $\theta = 0$ и π и его периодичность по φ очевидны.

$$u(\rho,\Omega)\Big|_{\rho=r} = u^{(i)}_{3,-2}(\rho,\Omega)\Big|_{\rho=r} = A\cdot Y_{3,-2}(\Omega).$$

Размерности по условию задачи: $\left[u(\rho,\Omega)\right] \equiv Q$, поэтому $[A] = Q$, $\left[Y_{nk}(\Omega)\right] = 1$.

$$\left[u(\rho,\Omega)\right]=\left[A\cdot u_{3,-2}^{(i)}(\rho,\Omega)\right]=\left[A\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^3 Y_{3,2}^{*}(\Omega)\right]=Q\cdot 1\cdot 1=Q.$$

5. Решение аналогичной внешней краевой задачи Дирихле.

$$\begin{cases}\Delta_3 u=0. & u=u(\rho,\Omega(\theta,\varphi)).\\ u\big|_{\rho=r}=f(\Omega)\equiv A\cdot Y_{3,-2}(\Omega). & 0<r\le\rho<\infty,\quad 0\le 2\theta,\varphi\le 2\pi.\end{cases}$$

Внешняя задача решается аналогично и получается :

$$u(\rho,\Omega)=A\cdot u_{3,-2}^{(e)}(\rho,\Omega)=A\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^4 Y_{3,2}^{*}(\Omega).$$

Здесь $u_{nk}^{(e)}(\rho,\Omega)=\left(\frac{r}{\rho}\right)^{n+1}\cdot Y_{nk}(\Omega)$ – внешняя (exterier) шаровая функция.

<u>Задача 3.22.</u> Решение второй краевой задачи Неймана для уравнения Лапласа внутри шара.

$$\begin{cases}\Delta_3 u=0. & u=u(\rho,\Omega(\theta,\varphi)).\\ \dfrac{\partial u}{\partial\rho}\Big|_{\rho=r}=f(\Omega)\equiv A\cdot Y_{3,-2}(\Omega). & 0\le\rho\le r,\quad 0\le 2\theta,\varphi\le 2\pi.\end{cases}$$

1. $u(\rho,\Omega)=\sum\limits_{n,k}R_{nk}(\rho)\cdot Y_{nk}(\Omega).$

$$\Delta_3\, u=\frac{1}{\rho^2}\sum_{n,k}\left\{\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{d\,R_{nk}}{d\rho}\right)-n(n+1)\cdot R_{nk}\right\}Y_{nk}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\rho^2 R_{nk}''+2\rho R_{nk}'-n(n+1)\cdot R_{nk}(\rho)=0.$$

$$\frac{\partial u}{\partial\rho}\Big|_{\rho=r}=\sum_{n,k}R_{nk}'(r)\cdot Y_{nk}(\Omega)=A\cdot Y_{3,-2}(\Omega)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{nk}'(r)=\left(A\cdot Y_{3,-2},Y_{nk}\right)=A\cdot\delta_{n,3}\cdot\delta_{k,-2}.$$

$R_{nk}(\rho)\equiv R(\rho)\ne 0$ при $n=3$ и $k=-2$; $R_{nk}(\rho)=0$ при $n\ne 3$ или $k\ne -2$.

$$\begin{cases}\rho^2 R''+2\rho R'-3\cdot 4\cdot R(\rho)=0.\\ \left|R(0)\right|<\infty,\ R'(r)=A.\end{cases}\qquad 0\le\rho\le r.$$

2. $R(\rho) = C\rho^3 + \tilde{C}\rho^{-4}; \qquad C, \tilde{C} = const$.

$$|R(0)| < \infty \Rightarrow \tilde{C} = 0; \qquad R'(r) = 3C \cdot r^2 = A \Rightarrow C = A/3r^2.$$

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}\Big|_{\rho=r} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=-n}^{n}{}' C_{nk} n \cdot r^{n-1} Y_{nk}(\Omega) = f(\Omega) \Rightarrow n \neq 0.$$

Знак $\sum\limits_{k}{}'$ обозначает отсутствие нулевого слагаемого при $Y_{0,0}(\Omega) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi}} = const$. Получим $R(\rho) = \dfrac{1}{3} A \cdot r \left(\dfrac{\rho}{r}\right)^3$.

3. $u(\rho, \Omega(\theta, \varphi)) = R(\rho) \cdot Y_{3,-2}(\Omega) + C = \dfrac{1}{3} Ar \left(\dfrac{\rho}{r}\right)^3 \cdot Y^*_{3,2}(\Omega) + C =$

$= A \cdot u^{(i)}_{3,-2}(\rho, \Omega) + C$, где $u^{(i)}_{3,-2}(\rho, \Omega)$ – внутренняя (interier) шаровая функция. Аддитивная постоянная C в задачах Неймана не определяется.

4. Для разрешимости второй краевой задачи Неймана для уравнения Пуассона $\Delta u = F(\rho, \Omega)$ и $\dfrac{\partial u}{\partial \rho}\Big|_{\rho=r} = f(\Omega)$ внутри области V с границей S должно выполняться дополнительное условие

$$\iiint\limits_V \Delta u \cdot dV = \iiint\limits_V F(\rho, \Omega) \cdot dV = \oiint\limits_S \frac{\partial u}{\partial \rho} \cdot dS = \oiint\limits_S f(\Omega) \cdot dS.$$

В нашей задаче $F(\rho, \Omega) = 0$ и $dV = \rho^2 dS\, d\Omega, \quad dS = r^2 d\Omega,$ поэтому

$$\iiint\limits_V \Delta u \cdot dV = 0 = \oiint\limits_S f(\Omega) \cdot dS \Rightarrow Ar^2 \sqrt{4\pi} \oiint\limits_S Y_{0,0}(\Omega) \cdot Y^*_{3,-2}(\Omega) d\Omega =$$

$$= Ar^2 \sqrt{4\pi}\, \delta_{3,0} \delta_{-2,0} = 0 \quad \text{– условие выполняется.}$$

Все остальные условия тоже выполняются и размерности совпадают.

5. Решение аналогичной внешней краевой задачи Неймана.

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0. & u = u(\rho, \Omega(\theta, \varphi)). \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\rho=r} = f(\Omega) \equiv A \cdot Y_{3,-2}(\Omega). & 0 < r \leq \rho < \infty, \quad 0 \leq 2\theta, \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

Здесь $\dfrac{\partial}{\partial n} = +\dfrac{\partial}{\partial \rho}$ и решение будет

$$u(\rho,\Omega) = -\frac{1}{4}Ar\left(\frac{r}{\rho}\right)^4 \cdot Y_{3,-2}(\Omega) + C = -\frac{1}{4}Ar \cdot u^{(e)}_{3,-2}(\rho,\Omega),$$

где $u^{(e)}_{3,-2}(\rho,\Omega)$ – внешняя $(exterier)$ шаровая функция.

Здесь аддитивная постоянная $C = 0$ согласно условию $u\Big|_{\rho=\infty} = 0$. Все условия задачи выполняются и размерности совпадают.

Внешние задачи Дирихле, Неймана и смешанная для уравнения Пуассона $\Delta u = F(\rho,\Omega)$ решаются только при выполнение условия $\lim\limits_{\rho\to\infty} F(\rho,\Omega) = 0$.

<u>Задача 3.23.</u> Решение первой краевой задачи Дирихле для уравнения Пуассона внутри шара.

$$\begin{cases} \Delta_3 u = F(\rho,\Omega) \equiv A\rho^2(r-\rho)\cdot Y_{3,-2}(\Omega). & u = u(\rho,\Omega). \\ u\Big|_{\rho=r} = 0. & 0 \le \rho \le r,\ 0 \le 2\theta,\varphi \le 2\pi. \end{cases}$$

Естественные граничные условия ограниченности при $\rho = 0,\ \theta = 0$, $\theta = \pi$ и периодичности по φ явно не записаны.

Оператор Лапласа в сферичной системе координат имеет вид:

$$\Delta_3 = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2\frac{\partial}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\tilde{\Delta}; \qquad \tilde{\Delta} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

1. Разделение переменных и разложение по сферическим функциям $u(\rho,\Omega) = \sum\limits_{n,k} R_{nk}(\rho)\cdot Y_{nk}(\Omega)$. Здесь

$$\tilde{\Delta}Y_{nk} = -n(n+1)Y_{nk}(\Omega) \quad \text{и} \quad Y_{nk}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}}\cdot P_{nk}(\cos\theta)e^{ik\varphi}.$$

$$\Delta_3 u = \frac{1}{\rho^2}\sum_{n,k}\left\{\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{dR_{nk}}{d\rho}\right) - n(n+1)\cdot R_{nk}(\rho)\right\}\cdot Y_{nk}(\Omega) = F(\rho,\Omega) \equiv$$

$$\equiv \sum_{n,k} F_{nk}(\rho)\cdot Y_{nk}(\Omega),$$

где

$$F_{nk}(\rho) = \left(F, Y_{nk}\right) = A\rho^2(r-\rho)\cdot\left(Y_{3,-2}, Y_{nk}\right) \equiv A\rho^2(r-\rho)\cdot\delta_{n,3}\cdot\delta_{k,-2}.$$

$$\rho^2 R''_{nk} + 2\rho R'_{nk} - n(n+1)\cdot R_{nk}(\rho) = \rho^2\cdot F_{nk}(\rho) \equiv A\rho^4(r-\rho)\cdot\delta_{n,3}\cdot\delta_{k,-2}.$$

$R_{nk}(\rho) = R(\rho) \neq 0$ при $n = 3$ и $k = -2$; $R_{nk}(\rho) = 0$ при $n \neq 3$ или $k \neq -2$.

$$\begin{cases} \rho^2 R'' + 2\rho R' - 3\cdot 4\cdot R(\rho) = A\rho^4(r-\rho). \\ \left|R(0)\right| < \infty, \ R(r) = 0. \end{cases} \qquad 0 \le \rho \le r.$$

2. Решение неоднородного дифференциального уравнения Эйлера.

Сделав замену $\rho = e^x$, получим

$$R'_\rho = \frac{dR}{d\rho} = \frac{dR}{dx}\frac{dx}{d\rho} = \frac{dR}{dx}\Big/\frac{d\rho}{dx} = R'_x\cdot e^{-x}, \qquad R''_{\rho\rho} = \left(R''_{xx} - R'_x\right)e^{-2x}.$$

$$R''_{xx} + R'_x - 12R(x) = A\left(re^{4x} - e^{5x}\right).$$

Решение соответствующего однородного уравнения Эйлера ищем в виде $\overset{\circ}{R}(x) = e^{\alpha x}$, где показатель α находится из характеристического уравнения $P_2(\alpha) = \alpha^2 + \alpha - 12 = 0$ и равен $\alpha_1 = 3$ и $\alpha_2 = -4$ (здесь $\alpha_1 \neq \alpha_2$ – корни разные). Общее решение однородного уравнения получим $\overset{\circ}{R}(\rho) = C\rho^3 + \tilde{C}\rho^{-4}$ $\quad \left(C,\ \tilde{C} = const\right)$.

Частное решение дифференциального уравнения здесь находится по виду правой части $\tilde{R}(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{5x}$. Постоянные C_1 и C_2 определим подстановкой в неоднородное уравнение и получим $\tilde{R}(x) = \frac{1}{2}A\left(\frac{1}{4}re^{4x} - \frac{1}{9}e^{5x}\right)$.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения равно

$$R(\rho) = \overset{\circ}{R}(\rho) + \tilde{R}(\rho) = C\rho^3 + \tilde{C}\rho^{-4} + \frac{1}{2}A\left(\frac{1}{4}r\rho^4 - \frac{1}{9}\rho^5\right).$$

Использовав граничные условия, получим $\left|R(0)\right| < \infty \Rightarrow \tilde{C} = 0$ и $R(r) = 0 \Rightarrow C = -\dfrac{5}{72}Ar^2$. Поэтому

$$R(\rho) = \frac{-A}{72}\rho^3\left(5r^2 - 9r\rho + 4\rho^2\right) = \frac{-A}{72}\rho^3\left(r-\rho\right)\left(5r - 4\rho\right) < 0.$$

3. Окончательный вид решения задачи.

$$u(\rho,\Omega) = R(\rho)\cdot Y^*_{3,2}(\theta,\varphi) =$$

$$= -\frac{A\rho^3}{72}(r-\rho)\cdot(52 - 4\rho)\cdot\frac{1}{4}\sqrt{\frac{105}{4\pi}}\cdot\cos\theta\cdot\sin^2\theta\cdot e^{-2i\varphi} =$$

$$= -\frac{A}{3\cdot 32}\sqrt{\frac{35}{6\pi}}\cdot\rho^3\left(r-\rho\right)\cdot\left(5r-4\rho\right)\cdot\sin^2\theta\cdot\cos\theta\cdot e^{-2i\varphi}.$$

4. Проверка решения по условиям задачи и по размерностям.

$$u(0,\Omega) = 0 < \infty; \quad u(r,\Omega) = 0.$$

Выполнение всех условий по углам θ и φ очевидно.

$$\left[u(\rho,\Omega)\right] \equiv Q, \ \ [A] = Q/L^5; \quad [u] = [A]\cdot L^5 \Rightarrow Q.$$

Внешняя задача при $0 < r \le \rho < \infty$ не имеет физического смысла, так как функция $F(\rho,\Omega) = \infty$ при $\rho \to \infty$.

<u>Задача 3.24.</u> Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона внутри шара, когда один из корней характеристического уравнения вырожденный.

$$\begin{cases} \Delta_3 u = F(\rho,\Omega) \equiv A\rho\cdot(r-\rho)\cdot Y_{3,-2}(\Omega). & u = u\big(\rho,\Omega(\theta,\varphi)\big). \\ u\big|_{\rho=r} = 0. & 0 \le \rho \le r, \quad 0 \le 2\theta,\varphi \le 2\pi. \end{cases}$$

1. $u(\rho,\Omega) = \sum\limits_{n,k} R_{nk}(\rho)\cdot Y_{nk}(\Omega).$

$$\Delta_3 u = \frac{1}{\rho^2}\sum_{n,k}\left\{\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{d\,R_{nk}}{d\rho}\right) - n(n+1)\cdot R_{nk}(\rho)\right\}\cdot Y_{nk}(\Omega) = F(\rho,\Omega) =$$

$$=\sum_{nk} F_{nk}(\rho)\cdot Y_{nk}(\Omega);$$

$$F_{nk}(\rho)=\left(F,Y_{nk}\right)=A\rho(r-\rho)\cdot\delta_{n,3}\cdot\delta_{k,-2}$$

$$\rho^2 R''_{nk}+2\rho R'_{nk}-n(n+1)R_{nk}(\rho)=\rho^2\cdot F_{nk}(\rho)\equiv A\rho^3\cdot(r-\rho)\cdot\delta_{n,3}\cdot\delta_{k,-2}.$$

$R_{nk}(\rho)\equiv R(\rho)\neq 0$ при $n=3$ и $k=-2$; $\quad R_{nk}=0$ при $n\neq 3$ или $k\neq -2$.

$$\begin{cases}\rho^2 R''+2\rho R'-12R(\rho)=A\rho^3(r-\rho).\\ \left|R(0)\right|<\infty,\ \mathrm{R}(r)=0. \qquad\qquad 0\leq\rho\leq r.\end{cases}$$

2. $R(\rho)=\rho^\alpha=e^{\alpha x}$ при $\rho=e^x$. $\quad R'_\rho(\rho)=R'_x(x)\cdot e^{-x}$,

$$R''_{\rho\rho}(\rho)=\left(R''_{xx}-R'_x\right)\cdot e^{-2x},$$

$$R''_{xx}+R'_x-12R(x)=A\left(re^{3x}-e^{4x}\right)\ -\ \text{уравнение Эйлера,}$$

$$\mathring{R}''_{xx}+\mathring{R}'_x-12\mathring{R}(x)=0,\ \mathrm{P}_2(\alpha)=\alpha^2+\alpha-12=0\Rightarrow\alpha_1=3,\ \alpha_2=-4.$$

$$\mathring{R}(x)=Ce^{3x}+\tilde{C}e^{-4x}=C\rho^3+\tilde{C}\rho^{-4};\qquad C,\tilde{C}=\text{const}.$$

Так как корень $\alpha_1=3$ характеристического уравнения $P_2(\alpha)=0$ оказывается вырожденным – он совпадает с одной из степеней правой части уравнения $F(\rho,\Omega)$, то частное решение дифференциального уравнения Эйлера будем искать в виде;

$$\tilde{R}(x)=M\,xe^{3x}+N\,e^{4x}\quad\text{при}\quad M,N=\text{const}.$$

$$\tilde{R}''_{xx}+\tilde{R}'_x-12\tilde{R}(x)=7Ne^{3x}+8Me^{4x}=$$

$$=A\left(re^{3x}-e^{4x}\right)\Rightarrow M=\frac{1}{7}Ar,\qquad N=-\frac{1}{8}A;$$

$$\tilde{R}(x)=A\left(\frac{1}{7}r\,xe^{3x}-\frac{1}{8}e^{4x}\right)=\frac{A\rho^3}{56}\left(8r\cdot\ln\rho-7\rho\right);$$

$$R(\rho)=\mathring{R}(\rho)+\tilde{R}(\rho)=C\rho^3+\tilde{C}\rho^{-4}+\frac{A\rho^3}{56}\left(8r\cdot\ln\rho-7\rho\right);$$

$$\left|R(0)\right| < \infty \Rightarrow \tilde{C} = 0 \quad \because \quad \lim_{\rho\to 0}\left(\rho^3 \cdot \ln\rho\right) = 0,$$

$$R(r) = Cr^3 + \frac{Ar^4}{56}\left(8\ln r - 7\right) = 0 \Rightarrow C = \frac{Ar}{56}\left(7 - 8\ln r\right),$$

$$R(\rho) = \overset{\circ}{R}(\rho) + \tilde{R}(\rho) = C\rho^3 + \frac{A\rho^3}{56}\left(8r\cdot\ln\rho - 7\rho\right).$$

$$R(\rho) = \frac{A\rho^3}{56}\left\{7(r-\rho) + 8r\ln\frac{\rho}{r}\right\}.$$

3. $u(\rho,\Omega) = R(\rho)\cdot Y_{3,-2}(\Omega) =$

$$= \frac{A\rho^3}{32}\sqrt{\frac{15}{14\pi}}\left\{7(r-\rho) + 8r\cdot\ln\frac{\rho}{r}\right\}\cdot\sin^2\theta\cdot\cos\theta\cdot e^{-2i\varphi}.$$

4. $u(0,\Omega) = 0 < \infty$ при $\lim\limits_{\rho\to 0}\left(\rho^3\cdot\ln\dfrac{\rho}{r}\right) = 0;$ $\qquad u(r,\Omega) = 0.$

$$\left[u(\rho,\Omega)\right] = Q, \quad [\mathrm{A}] = Q/L^4 \;\Rightarrow\; [u] = [A]\cdot L^4 \Rightarrow Q.$$

Задача 3.25. Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона внутри шара (при наличии и отсутствии вырожденных корней в характеристическом уравнении).

$$\begin{cases} \Delta_3 u = F(\rho,\Omega) \equiv A(r-\rho)\cdot Y_{2,-1}(\Omega). & u = u\left(\rho,\Omega(\theta,\varphi)\right). \\ u\big|_{\rho=0} = 0. & 0\le\rho\le r,\quad 0\le 2\theta,\varphi\le 2\pi. \end{cases}$$

1. $u(\rho,\Omega) = \sum\limits_{n,k} R_{nk}(\rho)Y_{nk}(\Omega).$

$$\Delta_3 u = \frac{1}{\rho^2}\sum_{n,k}\left\{\frac{d}{d\rho}(\rho^2\frac{dR_{nk}}{d\rho}) - n(n+1)\cdot R_{nk}(\rho)\right\}\cdot Y_{nk}(\Omega) =$$

$$= F(\rho,\Omega) = A(r-\rho)\cdot Y_{2,-1}(\Omega) = \sum_{n,k} F_{nk}(\rho)Y_{nk}(\Omega).$$

$$F_{nk}(\rho) = (F, Y_{nk}) = A(r-\rho)\,(Y_{2,-1}, Y_{nk}) = A(r-\rho)\cdot\delta_{n,2}\cdot\delta_{k,-1}.$$

$$\rho^2 R''_{nk} + 2\rho R'_{nk} - n(n+1)\cdot R_{nk}(\rho) = \rho^2 \cdot F_{nk}(\rho) = A\rho^2(r-\rho)\cdot\delta_{n,2}\cdot\delta_{k,-1}.$$

$R_{nk}(\rho) = R(\rho) \neq 0$ при $n = 2$ и $k = -1$; $R_{nk}(\rho) = 0$ при $n \neq 2$ или $k \neq -1$ – здесь уравнение и условия одновременно превращаются в нули.

$$\begin{cases} \rho^2 R'' + 2\rho\, R' - 6R(\rho) = A\rho^2(r-\rho). \\ |R(0)| < \infty, \qquad R(r) = 0. \end{cases} \qquad 0 \le \rho \le r.$$

2. Пусть $\rho = e^x$, тогда $R'_\rho(\rho) = R'_x(x)e^{-x}$, $R''_{\rho\rho}(\rho) = (R''_{xx} - R'_x(x))e^{-2x}$ и получим уравнение Эйлера:

$$R''_{xx} + R'_x - 6R(x) = Ae^{2x}(r - e^x),$$

$$\overset{\circ}{R}''_{xx} + \overset{\circ}{R}'_x - 6\overset{\circ}{R}(x) = 0 \text{ и } \overset{\circ}{R}(x) = e^{\alpha x}.$$

Тогда $P_2(\alpha) = \alpha^2 + \alpha - 6 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 2, \alpha_2 = -3$ – решения характеристического уравнения.

$$\overset{\circ}{R}(x) = Ce^{2x} + \tilde{C}e^{-3x} \text{ при } C, \tilde{C} = \text{const}.$$

Здесь корень $\alpha_1 = 2$ характеристического уравнения $P_2(\alpha) = 0$ совпадает с одним из показателей в правой части уравнения Эйлера – это однократное вырождение, поэтому частное решение будем искать в виде $\tilde{R}(x) = Mxe^{2x} + Ne^{3x}$ при $M, N = \text{const}$:

$$\tilde{R}''_{xx} + \tilde{R}_x - 6\tilde{R}(x) = 5Me^{2x} + 6Ne^{3x} =$$

$$= Are^{2x} - Ae^{3x} \Rightarrow M = \frac{1}{5}Ar, \quad N = -\frac{1}{6}A.$$

$$\tilde{R}(x) = \frac{1}{5}Arxe^{2x} - \frac{1}{6}Ae^{3x}.$$

$$R(x) = \overset{\circ}{R}(x) + \tilde{R}(x) = Ce^{2x} + \tilde{C}e^{3x} + \frac{A}{30}(6rxe^{2x} - 5e^{3x}) = C\rho^2 + \tilde{C}\rho^{-3} +$$

$$+\frac{A}{30}(62\rho^2\cdot\ln\rho - 5\rho^3),$$

$$|R(0)| < \infty \Rightarrow \tilde{C} = 0 \text{ и } \lim_{\rho\to 0}(\rho^2\cdot\ln\rho) = 0.$$

$$R(r)=Cr^2+\frac{Ar^3}{30}(6\ln r-5)=0\Rightarrow C=\frac{Ar}{30}(5-6\ln r).$$

$$R(\rho)=\frac{Ar\rho^2}{30}(5-6\ln r)+\frac{A\rho^2}{30}(6r\ln\rho-5\rho)=\frac{A\rho^2}{30}\left\{5(r-\rho)+6r\cdot\ln\frac{\rho}{r}\right\}.$$

3. $u(\rho,\Omega(\theta,\varphi))=R(\rho)\cdot Y_{2,-1}(\Omega)=$

$$=-\frac{A\rho^2}{30}\left\{5(r-\rho)+6r\ln\frac{\rho}{r})\right\}\cdot Y^*_{2,1}(\theta,\varphi).$$

$$Y_{2,-1}(\theta,\varphi)=-Y^*_{2,1}(\theta,\varphi)=-\sqrt{\frac{5}{4\pi}\frac{1!}{3!}}\cdot P_{2,1}(\cos\theta)\cdot e^{-i\varphi}=-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin 2\theta\cdot e^{-i\varphi}.$$

$$Y^{(c,s)}_{2,-1}(\theta,\varphi)=\mp\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin 2\theta\cdot{}^{\cos}_{\sin}\,\varphi,$$

$$u(\rho,\Omega)=\frac{-A\rho^2}{8\sqrt{30\pi}}\left\{5(r-\rho)+6r\ln\frac{\rho}{r}\right\}\sin 2\theta\cdot e^{-i\varphi}.$$

4. $u(0,\Omega)=0<\infty$ и $\lim\limits_{\rho\to 0}(\rho^2\ln\frac{\rho}{r})=0$; $u(r,\Omega)=0$.

$$\left[u(\rho,\Omega)\right]=Q,\ \left[A\right]=Q/L^3;\quad \left[u\right]=\left[A\right]\cdot L^3\Rightarrow Q.$$

5. Рассмотрим задачу, аналогичную предыдущей, но без совпадения корней в характеристическом уравнении.

$$\begin{cases}\Delta_3 u=F(\rho,\Omega)\equiv A\rho(r-\rho)Y_{2,-1}(\Omega). \\ u\big|_{\rho=r}=0.\end{cases}\qquad \begin{array}{l}u=u(\rho,\Omega(\theta,\varphi)).\\ 0\le\rho\le r,\quad 0\le 2\theta,\varphi\le 2\pi.\end{array}$$

$$u(\rho,\Omega)=\sum_{n,k}R_{nk}(\rho)Y_{nk}(\Omega)..\quad R_{nk}(\rho)=R(\rho)\neq 0\ \text{ при } n=2 \text{ и } k=-1;$$

$$R_{nk}(\rho)=0\ \text{ при } n\neq 2\ \text{ или } k\neq -1.$$

$$\begin{cases}\rho^2R''+2\rho R'-6R(\rho)=A\rho^3(r-\rho).\\ \left|R(0)\right|<\infty,\qquad R(r)=0.\end{cases}$$

$$R(\rho)=R(e^x)\ \text{ при } \rho=e^x,\quad R''_{xx}+R'_x-6R(x)=Are^{3x}-Ae^{4x}.$$

$$\mathring{R}'' + \mathring{R}' - 6\mathring{R}(x) = 0, \quad \mathring{R}(x) = e^{\alpha x},$$

$$P_2(\alpha) = \alpha^2 + \alpha - 6 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = -3.$$

$\mathring{R}(x) = Ce^{2x} + \tilde{C}e^{-3x}$ – совпадение корней и степеней отсутствует (нет вырождения).

$$\tilde{R}(x) = Me^{3x} + Ne^{4x} \text{ при } M, N = \text{const}.$$

$$\tilde{R}'' + \tilde{R} - 6\tilde{R}(x) = 6Me^{3x} + 14Ne^{4x} = Are^{3x} - Ae^{4x} \Rightarrow M = \frac{1}{6}Ar, \quad N = -\frac{A}{14}.$$

$$R(\rho) = \mathring{R}(\rho) + \tilde{R}(\rho) = Ce^{2x} + \tilde{C}e^{-3x} + \frac{1}{6}Are^{3x} - \frac{1}{14}Ae^{4x} =$$

$$= C\rho^2 + \tilde{C}\rho^{-3} + \frac{1}{6}Ar\rho^3 - \frac{1}{14}A\rho^4.$$

$$|R(0)| < \infty \Rightarrow \tilde{C} = 0, \qquad R(\rho) = C\rho^2 + \frac{A\rho^3}{42}(7r - 3\rho).$$

$$R(r) = r^2(C + \frac{2A}{21}r^2) = 0 \Rightarrow C = -\frac{2A}{21}r^2 < 0.$$

$$R(\rho) = -\frac{2Ar^2}{21}\rho^2 + \frac{A\rho^3}{42}(7r - 3\rho) = -\frac{A\rho^2}{8 \cdot 21}(r - \rho)(4r - 3\rho).$$

$$Y_{2,-1}(\theta, \varphi) = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin 2\theta \cdot e^{-i\varphi}.$$

$$u\big(\rho, \Omega(\theta, \varphi)\big) = \frac{A\rho^2}{7 \cdot 32}\sqrt{\frac{5}{6\pi}}(r - \rho)(4r - 3\rho) \cdot \sin 2\theta \cdot e^{-i\varphi}.$$

$$u(0, \Omega) = 0 \text{ и } u(r, \Omega) = 0.$$

$$\big[u(\rho, \Omega)\big] = Q, \qquad \big[A\big] = Q\big/L^4 \Rightarrow \big[u\big] = \big[A\big] \cdot L^4 \Rightarrow Q.$$

Так как в правой части заданного уравнения $\Delta_3 u = F(\rho, \Omega)$ функция $F(\rho, \Omega)$ неограниченно возрастает при $\rho \to \infty$, то соответствующая внешняя задача при $0 < r \le \rho < \infty$ не имеет физического смысла.

Задача 3.26. Решение второй краевой задачи Неймана для уравнения Пуассона внутри шара. Разрешимость задачи.

$$\begin{cases} \Delta_3 u = F(\rho,\Omega) = A(r-\rho)\cdot Y_{3,-2}(\Omega). \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=r} = 0. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u = u(\rho,\Omega(\theta,\varphi)). \\ 0 \le \rho \le r, \quad 0 \le 2\theta, \varphi \le 2\pi. \end{array}$$

1. $u(\rho,\Omega) = \sum\limits_{n,k} R_{nk}(\rho)\cdot Y_{nk}(\Omega)$.

$$\Delta_3 u = \frac{1}{\rho^2}\sum_{n,k}\left\{\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{dR_{nk}}{d\rho}\right) - n(n+1)R_{nk}(\rho)\right\}Y_{nk}(\Omega) =$$

$$= F(\rho,\Omega) \equiv \sum_{n,k} F_{nk}(\rho)Y_{nk}(\Omega).$$

$$F_{nk}(\rho) = (F, Y_{nk}) = A(r-\rho)(Y_{nk}, Y_{3,-2}) = A(r-\rho)\cdot\delta_{n,3}\cdot\delta_{k,-2}.$$

$$R_{nk}(\rho) = R(\rho) \ne 0 \quad \text{при} \quad n = 3 \text{ и } k = -2; \quad R_{nk}(\rho) = 0 \quad \text{при}$$

$$n \ne 3 \text{ или } k \ne -2.$$

$$\begin{cases} \rho^2 R'' + \rho R' - 12\cdot R(\rho) = \rho^2\cdot F_{3,-2}(\rho) \equiv A\rho^2(r-\rho). \\ |R(0)| < \infty, \quad R'(r) = 0. \end{cases} \qquad 0 \le \rho \le r.$$

2. Пусть $\rho = e^x$, тогда $R'_\rho(\rho) = R'_x(x)e^{-x}$, $R''_{\rho\rho}(\rho) = (R''_{xx} - R'_x(x))e^{-2x}$;

$$R''_{xx} - R'_x + 12R(x) = Ae^{2x}\cdot(r - e^x).$$

$$\mathring{R}''_{xx} + \mathring{R}'_x - 12\mathring{R}(x) = 0, \quad \mathring{R}(x) = e^{\alpha x}, \quad P_2(\alpha) = \alpha^2 + \alpha - 12 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 3 \text{ и}$$

$$\alpha_2 = -4. \qquad \mathring{R}(x) = Ce^{3x} + \tilde{C}e^{-4x}.$$

$$\tilde{R}(x) = Me^{2x} + Nxe^{3x}, \quad \tilde{R}''_{xx} + \tilde{R}'_x - 12\tilde{R} = -6Me^{2x} + 7Ne^{3x} = Are^{2x} - Ae^{3x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = -\frac{1}{6}Ar, \quad N = -\frac{1}{7}A.$$

$$\tilde{R}(x) = -\frac{1}{6}Are^{2x} - \frac{1}{7}Axe^{3x}.$$

$$R(x) = \mathring{R}(x) + \tilde{R}(x) = Ce^{3x} + \tilde{C}e^{-4x} - \frac{1}{6}Are^{2x} - \frac{1}{7}Axe^{3x}.$$

$$R(\rho) = C\rho^3 + \tilde{C}\rho^{-4} - \frac{1}{6}Ar\rho^2 - \frac{1}{7}A\rho^3 \ln\rho .$$

$$\left|R(0)\right| < \infty \Rightarrow \tilde{C} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\rho\to 0}(\rho^3 \cdot \ln\rho) = 0 .$$

$$R(\rho) = \rho^3 (C - \frac{1}{7}A\ln\rho) - \frac{1}{6}Ar\rho^3 .$$

$$R'(\rho) = \rho(3\,C\rho - \frac{3}{7}A\rho\cdot\ln\rho - \frac{A}{21}(7r + 3\rho)) .$$

$$R'(r) = 0 \Rightarrow C = \frac{A}{21}\left(\frac{10}{3} + 3\ln r\right).$$

$$R(\rho) = -\frac{1}{6}A\rho^2 \cdot (r - \frac{20}{21}\rho) - \frac{1}{7}A\rho^3 \cdot \ln\frac{\rho}{r} .$$

3. $u(\rho,\Omega) = R(\rho)\cdot Y_{3,-2}(\Omega)$;

$$Y_{3,-2}(\theta,\varphi) = {Y^*}_{3,2}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{7}{4\pi}\frac{1!}{5!}} P_{3,2}(\cos\theta)\cdot e^{-2i\varphi} =$$

$$= \frac{1}{8}\sqrt{\frac{105}{2\pi}}\sin\theta\cdot\sin 2\theta\cdot e^{-2i\varphi} .$$

$$u(\rho,\Omega(\theta,\varphi)) = -\frac{1}{8}A\sqrt{\frac{7!!}{2\pi}}\cdot\rho^2 \times$$

$$\times\left[\frac{1}{6}(r - \frac{20}{21}\rho) + \frac{1}{7}\rho\cdot\ln\frac{\rho}{r}\right]\sin\theta\cdot\sin 2\theta\cdot e^{-2i\varphi} + const.$$

Задачи Неймана решаются с точностью до произвольной аддитивной постоянной.

4. $u(0,\rho) = 0 < \infty \because \lim\limits_{\rho\to 0}\rho^3 = \lim\limits_{\rho\to 0}(\rho^3 \ln\frac{\rho}{r}) = 0$.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|_{\rho=r} = 0 \because R'(\rho) = -\frac{1}{3}A\rho(r-\rho) - \frac{3}{7}A\rho^2\ln\frac{\rho}{r} \quad \text{и} \quad R'(r) = 0 .$$

$$\left[u(\rho,\Omega)\right] \equiv Q, \qquad \left[A\right] = Q/L^3, \qquad \left[R(\rho)\right] = \left[A\right]L^3 .$$

$$\left[u\right] = \left[R(\rho)\right] = \left[A\right]\cdot L^3 = \frac{Q}{L^3}L^3 \Rightarrow Q .$$

Для разрешимости второй краевой задачи Неймана $\Delta_3 u = F(\rho,\Omega)$ и $u'_\rho\big|_{\rho=r} = f(\Omega)$ внутри области V с границей S необходимо выполнение дополнительного условия

$$\iiint_V \Delta_3 u \cdot dV = \oiint_S \frac{\partial u}{\partial \rho} dS \quad \text{или} \quad \iiint_V F(\rho,\Omega)\cdot dV = \oiint_S f(\Omega)\cdot dS\,.$$

В нашем случае $f(\Omega)=0$ и необходимо доказать равенство нулю интеграла от функции $F(\rho,\Omega)$. Проверим это

$$\iiint_V F(\rho,\Omega)\cdot dV = A\cdot \iiint_V (r-\rho)\cdot Y_{3,-2}(\Omega)\rho^2 d\rho\cdot d\Omega =$$

$$= A\int_0^r \left(r\rho^2-\rho^3\right)d\rho\cdot \oiint_\Omega Y_{3,-2}(\Omega)d\Omega =$$

$$= A\sqrt{4\pi}\frac{r^4}{12}(Y_{3,-2},Y_{nk}) = \frac{1}{6}Ar^4\sqrt{\pi}\cdot\delta_{3,n}\cdot\delta_{-2,0} = 0\,.$$

Здесь использовано $Y_{0,0}(\Omega) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi}}$ и $dV = \rho^2 d\rho\cdot d\Omega = = \rho^2 d\rho\cdot\sin\theta\cdot d\theta\cdot d\varphi$.

<u>Задача 3.27.</u> Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа внутри шара, если на его поверхности задано граничное условие $f(\theta) = A\cdot\cos^2\theta$ (не зависит от долготы φ).

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0. \\ u\big|_{\rho=r} = f(\theta) \equiv A\cos^2\theta. \end{cases} \qquad u = u(\rho,\theta). \quad 0\le\rho\le r,\quad 0\le\theta\le\pi.$$

1. $u(\rho,\theta) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} R_n(\rho)\cdot Y_{n,0}(\theta,\varphi)$. $\quad \tilde{\Delta}Y_{n,0} = -n(n+1)\cdot Y_{n,o}(\theta,\varphi)$.

$$Y_{n,0}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}}\cdot P_n(\cos\theta)\,.$$

$$\Delta_3 u = \frac{1}{\rho^2}\sum_n \left\{\, (\rho^2 R'_n)' - n(n+1)\cdot R_n(\rho)\right\}\cdot Y_{n,0}(\theta,\varphi) = 0\,.$$

$$\rho^2 R''_n + 2\rho R'_n - n(n+1)\cdot R_n(\rho) = 0\,.$$

2. $R_n(\rho) = C_n \rho^n + \tilde{C}_n \rho^{-n-1}; \qquad C_n, \tilde{C}_n = const.$

$$R_n(0) < \infty \Rightarrow \tilde{C}_n = 0 \quad \text{и} \quad R_n(\rho) = C_n \rho^n.$$

3. $u(\rho,\theta) = \sum_n C_n \rho^n \cdot Y_{n,o}(\theta,\varphi).$

$$u(r,\theta) = \sum_n C_n r^n \cdot Y_{n,0}(\theta,\varphi) = f(\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_n \cdot r^n = (f, Y_{n,0}) = \oiint_\Omega f(\theta) Y^*_{n,0}(\theta,\varphi) \cdot d\Omega =$$

$$= A\sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} P_n(\cos\theta) \cdot \cos^2\theta \cdot \sin\theta \cdot d\theta =$$

$$= \left[x = \cos\theta\right] = A\sqrt{\pi(2n+1)} \cdot 2 \cdot \int_0^1 P_n(x) \cdot x^2 dx =$$

$$= A\sqrt{\pi(4m+1)} \int_0^1 P_{2m}(x) \cdot x^2 dx \cdot \delta_{n,2m} =$$

$$= A\sqrt{\pi(4m+1)} \cdot I_m \cdot \delta_{n,2m}; \quad m \in \mathbb{Z}_0.$$

$P_{2m}(-x) = +P_{2m}(x)$, $P_{2m+1}(0) = 0$ и $I_m = 0$ при $m \geq 2$ – из условий ортогональности полиномов Лежандра.

$$I_0 = 2\int_0^1 P_0(x) \cdot x^2 dx = \frac{2}{3} \quad \text{при } P_0(x) = 1;$$

$$I_2 = 2\int_0^1 P_2(x) \cdot x^2 dx = \int_0^1 (3x^4 - x^2) dx = \frac{4}{15} \quad \text{при } P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1).$$

$$C_0 = A\sqrt{\pi} \cdot I_0 = \frac{2}{3} A\sqrt{\pi}; \qquad C_2 = A\sqrt{5\pi} \cdot I_2 = \frac{4A}{15}\sqrt{5\pi}.$$

4. $u(\rho,\theta) = C_0 \cdot Y_{0,0}(\theta,\varphi) + C_2 \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 \cdot Y_{2,0}(\theta,\varphi) = \frac{2}{3} A\sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi}} +$

$$+ \frac{4A}{15} \cdot \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 \cdot \sqrt{5\pi} \cdot \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \cdot \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1) = \frac{1}{3} A \left\{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 (3\cos^2\theta - 1)\right\}.$$

5. $u(0,\theta)=\dfrac{1}{3}A<\infty$, $u(r,\theta)=A\cdot\cos^2\theta$. $\left[u(\rho,\theta)\right]\equiv Q$, $\left[u\right]=\left[A\right]=Q$.

Задача 3.28. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа внутри верхнего полушария, если на поверхности полусферы граничное значение равно $A>0$, а на основании полушария граничное значения равно нулю.

$$\begin{cases}\Delta_3 u=0. & u=u(\rho,\theta).\\ u\big|_S=f(\rho,\theta). & 0\le\rho\le r,\quad 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Здесь функция $u=u(\rho,\theta)$ от долготы φ не зависит.

S – поверхность полушария, где $f(\rho,\theta)=\begin{cases}A & \rho=r,\quad 0\le\theta<\dfrac{\pi}{2}.\\ \quad\text{при} & \\ 0 & 0\le\rho\le r,\quad \theta=\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

Для упрощения решения задачи дополним заданную полусферу S до полной сферы $\tilde{S}$. Тогда получим условие

$$u\big|_{\tilde{S}}=\tilde{f}(\rho,\theta)=\begin{cases}+A & & \rho=r,\quad 0\le\theta<\pi/2.\\ 0 & \text{при} & 0\le\rho\le r,\quad \theta=\pi/2\\ -A & & \rho=r,\quad \pi/2\le\theta\le\pi\end{cases}\Bigg]=\sigma-$$

– здесь σ дополнительное нижнее полушарие, отображение верхнего полушария в плоскости $\theta=\dfrac{\pi}{2}$.

1. $u(\rho,\theta)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}R_n(\rho)\cdot Y_{n,0}(\theta,\varphi)$. $\qquad \tilde{\Delta}Y_{n,0}=-n(n+1)\cdot Y_{n,0}(\theta,\varphi)$.

$$Y_{n,0}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}}\cdot P_n(\cos\theta).$$

$$\Delta_3 u=\frac{1}{\rho^2}\sum_n\left\{\left(\rho^2R_n'\right)'-n(n+1)R_n(\rho)\right\}\cdot Y_{n,0}(\theta,\varphi)=0.$$

$$\rho^2R_n''+2\rho R_n'-n(n+1)R_n(\rho)=0.$$

2. $R_n(\rho) = C_n \rho^n + \tilde{C}_n \rho^{-n-1}; \qquad C_n, \tilde{C}_n = const.$

$$R_n(0) < \infty \Rightarrow \tilde{C}_n = 0 \quad \text{и} \quad R_n(\rho) = C_n \rho^n.$$

3. $u(\rho,\theta) = \sum\limits_n C_n \rho^n \cdot Y_{n,0}(\theta,\varphi).$

$$u\big|_{\tilde{S}} = u(r,\theta) = \sum_n C_n r^n \cdot Y_{n,0}(\theta,\varphi) = \tilde{f}(\theta) \Rightarrow \quad C_n r^n = (f, Y_{n,0}) =$$

$$= \oiint_\Omega \tilde{f}(\theta) \cdot Y^*_{n,0}(\theta,\varphi) d\Omega = \sqrt{\pi(2n+1)} \int_0^\pi \tilde{f}(\theta) \cdot P_n(\cos\theta) \cdot \sin\theta \cdot d\theta =$$

$$= \left[x = \cos\theta \right] = \sqrt{\pi(2n+1)} \int_{-1}^1 \tilde{f}(x) \cdot P_n(x) dx = \left[P_n(-x) = (-1)^n \cdot P_n(x) \right] =$$

$$= \sqrt{\pi(2n+1)}\ A\,(1-(-1)^n) \cdot \int_0^1 P_n(x) dx.$$

Воспользовавшись известной рекуррентной формулой

$$(2n+1) P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) \quad \text{при} \quad |x| \le 1,$$

вычислим интеграл и получим

$$C_n r^n = A \sqrt{\pi(2n+1)} \cdot \left(1-(-1)^n\right) \cdot \left. \frac{P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)}{2n+1} \right|_0^1 = \left[P_{n-1}(1) = P_{n+1}(1) = 1 \right] =$$

$$= \frac{A\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n+1}} \left(1-(-1)^n\right) \cdot \left(P_{n-1}(0) - P_{n+1}(0) \right) = \frac{2A\sqrt{\pi}}{\sqrt{4m+3}} \left(P_{2m}(0) - P_{2m+2}(0) \right) \delta_{n,2m-1}$$

при $m \in \mathbb{Z}_0$.

Воспользовавшись известным значением $P_{2m}(0) = (-1)^m \dfrac{(2m-1)!!}{(2m)!!}$, получим

$$P_{2m}(0) - P_{2m+2}(0) = P_{2m}(0) \cdot \left(1 + \frac{2m+1}{2m+2} \right) = P_{2m}(0) \cdot \frac{4m+3}{2m+2}.$$

$$C_{2m+1} \cdot r^{2m+1} = \frac{2A\sqrt{\pi}}{\sqrt{4m+3}} \frac{4m+3}{2\left(m+1\right)} P_{2m}(0) = \frac{A\sqrt{\pi(4m+3)}}{m+1} P_{2m}(0).$$

4. $$u(\rho,\theta)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A\sqrt{\pi(4m+3)}}{m+1}\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^{2m+1}\cdot P_{2m}(0)\cdot\sqrt{\frac{4m+3}{4\pi}}\cdot P_{2m+1}(\cos\theta)=$$

$$=A\sum_{m}\frac{4m+3}{2(m+1)}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{2m+1}\cdot P_{2m}(0)\cdot P_{2m+1}(\cos\theta)=$$

$$=A\sum_{m}\frac{4m+3}{2(m+1)}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{2m+1}\cdot(-1)^{m}\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot P_{2m+1}(\cos\theta)=$$

$$=A\sum_{m}(-1)^{m}\cdot(4m+3)\frac{(2m-1)!!}{(2m+2)!!}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{2m+1}P_{2m+1}(\cos\theta).$$

5. $u(0,\theta)=0<\infty;$ $\qquad u(\rho,\frac{\pi}{2})=0 \because P_{2m+1}(\cos\theta)\big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=0.$

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2}A\sum_{m=0}^{\infty}\frac{4m+3}{m+1}\cdot P_{2m}(0)\cdot P_{2m+1}(\cos\theta)=A.$$

$$u(r,0)=\frac{1}{2}A\sum_{m=0}^{\infty}\frac{4m+3}{m+1}\cdot P_{2m}(0)=A.$$

$$\left[u(\rho,\theta)\right]\equiv Q,\quad [u]=[A]=Q.$$

Задача 3.29. Решение смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа внутри шара.

$$\begin{cases}\Delta_3 u=0.\\[2mm] \left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial\rho}+æu\right)\right|_{\rho=r}=f(\theta)=\begin{cases}A\cos\theta & \text{при}\quad 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}.\\[2mm] 0 & \text{при}\quad \dfrac{\pi}{2}<\theta\le\pi.\end{cases} & \begin{matrix}0\le\rho\le r.\\ 0\le\theta\le\pi.\end{matrix}\end{cases}$$

$u=u(\rho,\theta)$ и от φ не зависит. A, $æ$ $=const>0$.

1. $u(\rho,\theta)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}R_n(\rho)\cdot Y_{n,0}(\theta,\varphi).$ $\qquad \tilde{\Delta}Y_{n,0}=-n(n+1)\cdot Y_{n,0}(\theta,\varphi).$

$$Y_{n,0}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}}\cdot P_n(\cos\theta).$$

$$\Delta_3 u = \frac{1}{\rho^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left(\rho^2 R_n'\right)' - n(n+1)\cdot R_n(\rho)\right\}\cdot Y_{n,0}(\theta,\varphi) = 0.$$

$$\rho^2 R_n'' + 2\rho R_n' - n(n+1)\cdot R_n(\rho) = 0.$$

2. $R_n(\rho) = C_n\rho^n + \tilde{C}_n\rho^{-n-1};\quad C_n, \tilde{C}_n = \text{const.}\qquad R_n(0) < \infty \Rightarrow \tilde{C}_n = 0$ и $R_n(\rho) = C_n\rho^n$.

3. $u(\rho,\theta) = \sum\limits_n C_n\,\rho^n\cdot Y_{n,0}(\theta,\varphi)$.

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial\rho} + æu\right)\right|_{\rho=r} = \sum_n C_n(n\,r^{n-1} + ær^n)\cdot Y_{n,0}(\theta,\varphi) = r^{n-1}\cdot Y_{n,0}(\theta,\varphi) =$$

$$= \sum_n C_n(n + ær)r^{n-1}\cdot Y_{n,0}(\theta,\varphi) = f(\theta).$$

$$C_n(n + ær)r^{n-1} = (f, Y_{n,o}) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}}\cdot\oiint_{\Omega} f(\theta)\cdot P_n(\cos\theta)\cdot\sin\theta\cdot d\theta\cdot d\varphi =$$

$$= A\sqrt{\pi(2n+1)}\cdot\int_0^{\pi/2} P_n(\cos\theta)\cdot\cos\theta\cdot\sin\theta\cdot d\theta =$$

$$= \left[\cos\theta = x\right] = A\sqrt{\pi(2n+1)}\int_0^1 P_n(x)\,x\,dx.$$

В известной формуле $P_n(x) = \dfrac{1}{2n+1}\left(P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x)\right)$ сначала заменим индексы $n \to n+1$, потом заменим $n \to n-1$. Затем воспользуемся рекуррентной формулой $(2n+1)\,x\,P_n(x) = (n+1)\,P_{n+1}(x) + n\,P_{n-1}(x)$, в которую и внесем результаты подстановок. В результате получим

$$(2n+1)\,x\,P_n(x) = \frac{n+1}{2n+3}\left(P_{n+2}'(x) - P_n'(x)\right) + \frac{n}{2n-1}\left(P_n'(x) - P_{n-2}'(x)\right).$$

Теперь наш интеграл легко вычисляется

$$I_n = \int_0^1 P_n(x)\cdot x dx =$$

$$= -\frac{1}{2n+1}\left\{\frac{n+1}{2n+3}(P_{n+2}(0) - P_n(0)) + \frac{n}{2n-1}(P_n(0) - P_{n-2}(0))\right\}\cdot\delta_{n,2m}.$$

Здесь при $x = 1$ получаем $P_n(1) = 1$ и все разности обращаются в нули, а значения при $x = 0$ из-за члена $P_{n-2}(x)$ приходится рассматривать отдельно при $n = 0$, $n = 1$ и далее при четных $n \geq 2$ (так как $P_{2n+1}(0) = 0$); поэтому там остается только номер $n = 2m$ при $m \in \mathbb{N}$. Воспользовавшись известными значениями $P_{2m}(0) = (-1)^m \dfrac{(2m-1)!!}{(2m)!!}$, получим

$$I_n = \frac{-1}{4m+1}\left\{\frac{2m+1}{4m+3}\left(P_{2m+2}(0) - P_{2m}(0)\right) + \frac{2m}{4m-1}\left(P_{2m}(0) - P_{2m-2}(0)\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{4m+1}\left\{\frac{2m+1}{4m+3}\cdot\left(\frac{2m+1}{2m+2}+1\right) - \frac{2m}{4m-1}\cdot\left(1+\frac{2m}{2m-1}\right)\right\}\cdot P_{2m}(0) =$$

$$= \frac{1}{4m+1}\left\{\frac{2m+1}{4m+3}\cdot\frac{4m+3}{2m+2} - \frac{2m}{4m-1}\cdot\frac{4m-1}{2m-1}\right\}\cdot P_{2m}(0) = \frac{-P_{2m}(0)}{(2m-1)\cdot(2m+2)} =$$

$$= (-1)^{m+1}\cdot\frac{(2m-3)!!}{(2m+2)!!} \quad \text{при } m \in \mathbb{N}.$$

$$C_{2m} = A\sqrt{\pi(4m+1)}\cdot\frac{(-1)^{m+1}}{(2m + æ r)\cdot r^{2m-1}}\cdot\frac{(2m-3)!!}{(2m+2)!!} \quad \text{при} \quad n = 2m \geq 2.$$

Значение коэффициентов C_0 и C_1 приходится вычислять непосредственно через интегралы

$$n = 0: \qquad C_0 \cdot æ r \cdot \frac{1}{r} = A\sqrt{\pi}\int_0^1 P_0(x)x\,dx = A\sqrt{\pi}\int_0^1 x\,dx = A\sqrt{\pi}\,\frac{1}{2} \Rightarrow C_0 = \frac{A\sqrt{\pi}}{2æ}.$$

$$n = 1: \qquad C_1\cdot(1 + æ r)\cdot 1 = A\sqrt{3\pi}\int_0^1 P_1(x)\,dx =$$

$$= A\sqrt{3\pi}\int_0^1 x^2\,dx = A\sqrt{\frac{\pi}{3}} \Rightarrow C_1 = \frac{A}{1+æ r}\sqrt{\frac{\pi}{3}}.$$

4. $u(\rho,\theta) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n\cdot\rho^n\cdot Y_{n,0}(\theta,\varphi) =$

$$= C_0\cdot Y_{0,0}(\theta,\varphi) + C_1\cdot\rho\cdot Y_{1,0}(\theta,\varphi) + \sum_{n=2}^{\infty} C_n\cdot\rho^n\cdot Y_{n,0}(\theta,\varphi) =$$

$$= C_0\frac{1}{\sqrt{4\pi}} + C_1\rho\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cdot P_1(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{\infty} C_{2m}\rho^{2m}\sqrt{\frac{4m+1}{4\pi}}\cdot P_{2m}(\cos\theta) =$$

$$=\frac{1}{2}Ar\left\{\frac{1}{2ær}+\frac{\rho}{r}\frac{\cos\theta}{ær+1}-\sum_{m=1}^{\infty}\left(-\frac{\rho^2}{r^2}\right)^m\frac{4m+1}{2m+ær}\frac{(2m-3)!!}{(2m+2)!!}P_{2m}(\cos\theta)\right\}.$$

Ряд сходится при $\rho<r$ абсолютно и равномерно (правильно).

5. $u(0,\theta)=\dfrac{1}{4æ}A<\infty,\quad u(\rho,\theta)\equiv Q,\quad [A]=Q/L,\quad [æ]=1/L,$

$$\left[\frac{\rho}{r}\right]=1.\qquad [u]=[A]\cdot L\cdot\left\{\frac{1}{[ær]}+\left[\frac{\rho}{r}\right]\frac{1}{[ær+1]}+\left[\frac{\rho^2}{r^2}\right]\right\}\Rightarrow Q.$$

<u>Задача 3.30.</u> Решение в общем виде задачи Дирихле для уравнения Пуассона внутри шара.

$$\begin{cases}\Delta_3 u=F(\rho,\Omega).\\ u\big|_{\rho=r}=f(\Omega).\end{cases}$$

$$u=u(\rho,\Omega(\theta,\varphi)).$$
$$0\le\rho\le r,\quad 0\le 2\theta,\varphi\le 2\pi.$$
$$\Delta_3=\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\tilde{\Delta}.$$

1. Разделение переменных и постановка задачи для радиальной функции $R_{nk}(\rho)$.

$$u(\rho,\Omega)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n}R_{nk}(\rho)\cdot Y_{nk}(\Omega)=R_{0,0}(\rho)\frac{1}{\sqrt{4\pi}}+\sum_{k=-1}^{1}R_{1,k}(\rho)\cdot Y_{1,k}(\Omega)+\ldots$$

$$Y_{nk}(\Omega)=\sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}}\cdot P_{nk}(\cos\theta)\cdot e^{ik\varphi},\qquad \begin{matrix}n=0,1,2,3\ldots\\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots,n.\end{matrix}$$

$$\tilde{\Delta}Y_{nk}=-n(n+1)\cdot Y_{nk}(\Omega).\qquad \tilde{\Delta}=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta})+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

$$F(\rho,\Omega)=\sum_{n,k}F_{nk}(\rho)Y_{nk}(\Omega);\quad F_{nk}(\rho)=(F,Y_{nk})=\oint\!\!\!\oint_{\Omega'}F(\rho,\Omega')Y_{nk}^*(\Omega')\,d\Omega'.$$

$$f(\Omega)=\sum_{nk}f_{nk}\cdot Y_{nk}(\Omega);\qquad f_{nk}=\left(f,Y_{nk}\right)=\oint\!\!\!\oint_{\Omega'}f(\Omega')\cdot Y_{nk}^*(\Omega')\cdot d\Omega'=\text{const}.$$

$$\Omega(\theta,\varphi),\quad \Omega'(\theta',\varphi').\qquad d\Omega=\sin\theta\,d\theta d\varphi.$$

$$\Delta_3 u=\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho})+\frac{1}{\rho^2}\tilde{\Delta}u=\frac{1}{\rho^2}\sum_{n,k}\left\{\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{dR_{nk}}{d\rho}\right)\cdot Y_{nk}+R_{nk}\cdot\tilde{\Delta}Y_{nk}\right\}=$$

$$= \frac{1}{\rho^2}\sum_{n,k}\left\{\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{d\,R_{nk}}{d\rho}\right) - n(n+1)\cdot R_{nk}(\rho)\right\}\cdot Y_{nk}(\Omega) = F(\rho,\Omega) =$$

$$= \sum_{n,k} F_{nk}(\rho)\cdot Y_{nk}(\Omega). \qquad F_{nk}(\rho) = \left(F, Y_{nk}\right).$$

$$\begin{cases} \rho^2 R''_{nk} + 2\rho R'_{nk} - n(n+1)\cdot R_{nk}(\rho) = \rho^2\cdot F_{nk}(\rho). \\ \left|R_{nk}(0)\right| < \infty, \quad R_{nk}(r) = f_{nk}. \end{cases}$$

2. Решение краевой задачи для функции $R_{nk}(\rho)$ методом вариации произвольных постоянных.

Однородное $\overset{\circ}{R}_{nk}(\rho) \sim \rho^{\alpha}; \quad \alpha(\alpha-1) + 2\alpha - n(n+1) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_+ = n, \quad \alpha_- = -n-1; \quad C_{nk}, \tilde{C}_{nk} = \mathrm{const}.$$

$$\overset{\circ}{R}_{nk}(\rho) = C_{nk}\rho^n + \tilde{C}_{nk}\rho^{-n-1}; \quad C_{nk}, \tilde{C}_{nk} = \mathrm{const}.$$

Неоднородное

$$\tilde{R}_{nk}(\rho) = C_{nk}(\rho)\rho^n + \tilde{C}_{nk}(\rho)\rho^{-n-1}; \quad C_{nk}(\rho), \tilde{C}_{nk}(\rho) \neq \mathrm{const}.$$

$$\begin{cases} C'_{nk}(\rho)\cdot\rho^n + \tilde{C}'_{nk}(\rho)\cdot\rho^{-n-1} = 0. \\ C'_{nk}(\rho)\cdot n\rho^{n-1} - \tilde{C}'_{nk}(\rho)\cdot(n+1)\rho^{-n-2} = F_{nk}(\rho). \end{cases}$$

Вронскиан $W = \begin{vmatrix} \rho^n & \rho^{-n-1} \\ n\rho^{n-1} & -(n+1)\rho^{-n-2} \end{vmatrix} = -\dfrac{2n+1}{\rho^2} \neq 0.$

$W = \Delta -$ определитель системы уравнений

$$C'_{nk}(\rho) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & \rho^{-n-1} \\ F_{nk} & -(n+1)\rho^{-n-2} \end{vmatrix} = -\frac{F_{nk}}{\Delta}\rho^{-n-1} = +\frac{F_{nk}(\rho)}{2n+1}\rho^{-n+1}.$$

$$\tilde{C}'_{nk}(\rho) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \rho^n & 0 \\ n\rho^{n-1} & F_{nk} \end{vmatrix} = +\frac{F_{nk}}{\Delta}\rho^n = -\frac{F_{nk}(\rho)}{2n+1}\rho^{n+2}.$$

$$C_{nk}(\rho) = M_{nk} + \int_{\rho_1}^{\rho}\frac{F_{nk}(\rho')}{2n+1}\rho'^{\,-n+1}\cdot d\rho'.$$

$$\tilde{C}_{nk}(\rho) = N_{nk} - \int_{\rho_2}^{\rho}\frac{F_{nk}(\rho')}{2n+1}\rho'^{\,n+2}\cdot d\rho'; \qquad M_{nk}, N_{nk} = const.$$

$$R_{nk}(\rho)=M_{nk}\rho^{n}+N_{nk}\rho^{-n-1}+\rho^{n}\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\frac{F_{nk}(\rho')}{2n+1}\rho'^{\,-n+1}\cdot d\rho'-$$

$$-\rho^{-n-1}\int\limits_{\rho_2}^{\rho}\frac{F_{nk}(\rho')}{2n+1}\rho'^{\,n+2}\cdot d\rho'=M_{nk}\rho^{n}+N_{nk}\rho^{-n-1}+\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\frac{F_{nk}(\rho')\rho'}{2n+1}\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^{n}d\rho'-$$

$$-\int\limits_{\rho_2}^{\rho}\frac{F_{nk}(\rho')\rho'}{2n+1}\cdot\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^{n}\cdot d\rho'.$$

$$R_{nk}(0)=M_{nk}\cdot 0+N_{nk}\cdot\frac{1}{0}+0^{n}\cdot\int\limits_{\rho_1}^{0}\ldots-0^{-n-1}\cdot\int\limits_{\rho_2}^{0}\ldots<\infty\Rightarrow N_{nk}=0,\quad \rho_2=0.$$

$$R_{nk}(r)=M_{nk}r^{n}+\int\limits_{\rho_1}^{r}\frac{F_{nk}(\rho')\cdot\rho'}{2n+1}\left(\frac{r}{\rho'}\right)^{n}d\rho'-\int\limits_{0}^{r}\frac{F_{nk}(\rho')\cdot\rho'}{2n+1}\left(\frac{\rho'}{r}\right)^{n}d\rho'=f_{nk};$$

$$M_{nk}=\frac{1}{r^{n}}f_{nk}+\frac{1}{r^{n}}\cdot\int\limits_{0}^{r}\frac{F_{nk}(\rho')\cdot\rho'}{2n+1}\left(\frac{\rho'}{r}\right)^{n+1}d\rho'\Rightarrow\rho_1=r.$$

$$R_{nk}(\rho)=\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n}\cdot f_{nk}+\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n}\cdot\int\limits_{0}^{r}\frac{F_{nk}(\rho')\cdot\rho'}{2n+1}\cdot\left(\frac{\rho'}{r}\right)^{n+1}d\rho'+$$

$$+\int\limits_{r}^{\rho}\frac{F_{nk}(\rho')\cdot\rho'}{2n+1}\cdot\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^{n}d\rho'-\int\limits_{0}^{\rho}\frac{F_{nk}(\rho')\cdot\rho'}{2n+1}\cdot\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^{n+1}d\rho'=$$

$$=\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n}\cdot f_{nk}+\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n}\cdot\int\limits_{0}^{\rho}\ldots+\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n}\cdot\int\limits_{\rho}^{r}\ldots-\int\limits_{0}^{\rho}\ldots-\int\limits_{\rho}^{r}\ldots=$$

$$=\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n}\cdot f_{nk}+\int\limits_{0}^{\rho}\frac{F_{nk}(\rho')\cdot\rho'}{2n+1}\cdot\left[\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n}\cdot\left(\frac{\rho'}{r}\right)^{n+1}-\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^{n+1}\right]d\rho'+$$

$$+\int\limits_{\rho}^{r}\frac{F_{nk}(\rho')\cdot\rho'}{2n+1}\cdot\left[\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n}\cdot\left(\frac{\rho'}{r}\right)^{n+1}-\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^{n}\right]d\rho'=$$

$$=\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n}\cdot f_{nk}+\int\limits_{0}^{\rho}\frac{F_{nk}(\rho')\cdot\rho'^{2}}{2n+1}\cdot\rho^{n}\cdot\rho'^{n}\cdot\left(\frac{1}{r^{2n+1}}-\frac{1}{\rho^{2n+1}}\right)d\rho'+$$

$$+\int\limits_{\rho}^{r}\frac{F_{nk}(\rho')\cdot\rho'^{2}}{2n+1}\cdot\rho^{n}\cdot\rho'^{n}\cdot\left(\frac{1}{r^{2n+1}}-\frac{1}{\rho'^{2n+1}}\right)d\rho'.$$

3. Запись функции Грина (источника) для решения радиальной функции $R_{nk}(\rho)$.

$$R_{nk}(\rho)=\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\cdot f_{nk}+\int_0^r F_{nk}(\rho')\cdot\tilde{G}_n(\rho,\rho'\,|\,r)\cdot\rho'^2 d\rho';$$

где

$$\tilde{G}_n(\rho,\rho'\,|\,r)=\begin{cases}\dfrac{-1}{(2n+1)\rho}\cdot\left(\dfrac{\rho'}{\rho}\right)^n\cdot\left[1-\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^{2n+1}\right] & \\ \dfrac{-1}{(2n+1)\rho'}\cdot\left(\dfrac{\rho}{\rho'}\right)^n\cdot\left[1-\left(\dfrac{\rho'}{r}\right)^{2n+1}\right] & \end{cases}\quad \text{при}\quad \begin{array}{l}0\le\rho'\le\rho<r,\\ 0<\rho\le\rho'\le r.\end{array}$$

$$\tilde{G}_n(\rho,\rho'\,|\,r)=\tilde{G}_n(\rho',\rho\,|\,r)\text{ – симметрия.}$$

4. Составление формулы решения задачи и ее упрощение.

$$u(\rho,\Omega)=\sum_{n,k}\left\{f_{nk}\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n+\int_0^r F_{nk}(\rho')\cdot\tilde{G}_n(\rho,\rho'\,|\,r)\cdot\rho'^2 d\rho'\right\}\cdot Y_{nk}(\Omega)=$$

$$=\sum_{n,k}\left\{\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\cdot\oiint\limits_{\Omega'} f(\Omega')\cdot Y_{nk}^*(\Omega')d\Omega'+\right.$$

$$\left.+\int_0^r\tilde{G}_n(\rho,\rho'\,|\,r)\oiint\limits_{\Omega'}F(\rho',\Omega')\cdot Y_{nk}^*(\Omega')d\Omega'\rho'^2 d\rho'\right\}Y_{nk}(\Omega)=$$

$$=\oiint\limits_{\Omega'} f(\Omega')\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\sum_{k=-n}^{n}Y_{nk}(\Omega')Y_{nk}^*(\Omega')\right]d\Omega'+$$

$$+\int_0^r\rho'^2 d\rho'\oiint\limits_{\Omega'}F(\rho',\Omega')\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{G}_n(\rho,\rho'\,|\,r)\sum_{k=-n}^{n}Y_{nk}(\Omega)Y_{nk}^*(\Omega')\right]d\Omega'.$$

Используем формулу сложения сферических функций

$$\sum_{k=-n}^{n}Y_{nk}(\Omega)\cdot Y_{nk}^*(\Omega')=\frac{2n+1}{4\pi}P_n\left(\cos\gamma(\Omega,\Omega')\right),$$

где $\cos\gamma=(\vec{n},\vec{n}')=\cos\theta\cdot\cos\theta'+\sin\theta\cdot\sin\theta'\cdot\cos(\varphi-\varphi')$. Тогда формула решения имеет вид:

$$u(\rho,\Omega)=\frac{1}{4\pi}\oiint\limits_{\Omega'} f(\Omega')\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\left(\frac{\rho}{r}\right)^n P_n(\cos\gamma)\right]d\Omega'+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{V'} F(\rho',\Omega')\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\cdot\tilde{G}_n(\rho,\rho'\,|\,r)\cdot P_n(\cos\gamma)\right]\cdot dV';$$

где $d\Omega'=\sin\theta'\cdot d\theta' d\varphi'$ и $dV'=\rho'^2 d\rho'\cdot d\Omega'$.

5. Суммирование рядов по индексу n с помощью производящей функции для полиномов Лежандра.

$$F(z,t)\equiv\frac{1}{\sqrt{1-2tz+z^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(t)\cdot z^n \ -$$

– производящая функция для полиномов Лежандра при $|z|<1$ и $-1\le t\le 1$, а ее следствие

$$2z\cdot\frac{\partial F}{\partial z}+F=\frac{1-z^2}{\left(1-2tz+z^2\right)^{3/2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\cdot z^n\cdot P_n(t).$$

Теперь можно свернуть суммы по индексу n в формуле решения задачи.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\cdot P_n(\cos\gamma)=\frac{r\cdot\left(r^2-\rho^2\right)}{\left(r^2-2\rho r\cdot\cos\gamma+\rho^2\right)^{3/2}}\quad \text{при } \rho<r.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\cdot\tilde{G}_n(\rho,\rho'\,|\,r)\cdot P_n(\cos\gamma)=$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{1}{\rho}\cdot\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^n-\frac{\rho}{r}\cdot\left(\frac{\rho'\rho}{r^2}\right)^n\right]\cdot P_n(\cos\gamma) \\ -\dfrac{1}{\rho}\cdot\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^n-\frac{\rho'}{r}\cdot\left(\frac{\rho\rho'}{r^2}\right)^n\right]\cdot P_n(\cos\gamma)\end{cases}\quad \text{при}\ \begin{matrix}0\le\rho'\le\rho<r\\ 0<\rho\le\rho'\le r\end{matrix}=$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{1}{\rho}\cdot\left[\dfrac{1}{\sqrt{1-2\dfrac{\rho'}{\rho}\cos\gamma+\dfrac{\rho'^2}{\rho^2}}}-\dfrac{\rho}{r}\dfrac{1}{\sqrt{1-2\dfrac{\rho\rho'}{r^2}\cos\gamma+\dfrac{\rho^2\rho'^2}{r^4}}}\right] \\ -\dfrac{1}{\rho'}\cdot\left[\dfrac{1}{\sqrt{1-2\dfrac{\rho}{\rho'}\cos\gamma+\dfrac{\rho^2}{\rho'^2}}}-\dfrac{\rho'}{r}\dfrac{1}{\sqrt{1-2\dfrac{\rho\rho'}{r^2}\cos\gamma+\dfrac{\rho^2\rho'^2}{r^4}}}\right]\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{-1}{\sqrt{\rho^2-2\rho'\rho\cos\gamma+\rho'^2}}+\dfrac{\dfrac{1}{\rho}\cdot\dfrac{\rho}{r}\cdot r^2}{\sqrt{r^4-2r^2\rho\rho'\cos\gamma+\rho^2\rho'^2}}\\ \dfrac{-1}{\sqrt{\rho^2-2\rho'\rho\cos\gamma+\rho'^2}}+\dfrac{\dfrac{1}{\rho'}\cdot\dfrac{\rho'}{r}\cdot r^2}{\sqrt{r^4-2r^2\rho\rho'\cos\gamma+\rho^2\rho'^2}}\end{cases}=$$

$$=\frac{r}{\sqrt{r^4-2r^2\rho\rho'\cos\gamma+\rho^2\rho'^2}}-\frac{1}{\sqrt{\rho^2-2\rho'\rho\cos\gamma+\rho'^2}}.$$

Здесь разница формул в интервалах $0\le\rho'\le\rho$ и $\rho\le\rho'\le r$ несущественна.

Теперь окончательный вид для функции Грина получим

$$G(\rho,\Omega\,;\rho',\Omega'\,|\,r)=\frac{1}{4\pi}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\cdot\tilde{G}_n(\rho,\rho'\,|\,r)\cdot P_n\left(\cos\gamma(\Omega,\Omega')\right)=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{r}{\sqrt{r^4-2r^2\rho\rho'\cos\gamma+\rho^2\rho'^2}}-\frac{1}{\sqrt{\rho^2-2\rho'\rho\cos\gamma+\rho'^2}}\right\}.$$

Функция Грина (источника) обладает свойством перестановочности координат точки источника $M'(\rho',\Omega')$ и точки наблюдения (измерения) $M(\rho,\Omega)$. Здесь $r=\mathrm{const}$ – радиус шара.

$$G(\rho,\Omega;\rho',\Omega'\,|\,r)=G(\rho',\Omega';\rho,\Omega\,|\,r).$$

6. Вычисление значений нормальной производной от функции Грина $\left.\dfrac{\partial G}{\partial\rho'}\right|_{\rho'=r}$ на поверхности сферы.

$$4\pi\cdot\frac{\partial G}{\partial\rho'}=\frac{r\cdot\left(-2r^2\rho\cdot\cos\gamma+2\rho^2\rho'\right)}{-2\left(r^4-2r^2\cdot\rho\rho'\cdot\cos\gamma+\rho^2\rho'^2\right)^{3/2}}-$$

$$-\frac{-2\rho\cdot\cos\gamma+2\rho'}{-2\left(\rho^2-2\rho\rho'\cdot\cos\gamma+\rho'^2\right)^{3/2}}=$$

$$= \frac{r\cdot\left(r^2\rho\cdot\cos\gamma - \rho'\rho^2\right)}{\left(r^4 - 2r^2\cdot\rho\rho'\cdot\cos\gamma + \rho^2\rho'^2\right)^{3/2}} + \frac{-\rho\cdot\cos\gamma + \rho'}{\left(\rho^2 - 2\rho\rho'\cdot\cos\gamma + \rho'^2\right)^{3/2}}.$$

$$4\pi\cdot\left.\frac{\partial G}{\partial\rho'}\right|_{\rho'=r} = \frac{r\cdot r\left(\rho r\cdot\cos\gamma - \rho^2\right)}{r^2\left(r^2 - 2r\rho\cdot\cos\gamma + \rho^2\right)^{3/2}} + \frac{-\rho\cdot\cos\gamma + r}{\left(\rho^2 - 2\rho r\cdot\cos\gamma + r^2\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\left(r^2 - \rho^2\right)/r}{\left(r^2 - 2r\rho\cdot\cos\gamma + \rho^2\right)^{3/2}}.$$

7. $$u(\rho,\Omega) = \oiint\limits_{S'} f(\Omega')\cdot\frac{\partial}{\partial\rho'}G(\rho,\Omega;\rho',\Omega'\,|\,r)\,dS' +$$

$$+\iiint\limits_{V'} F(\rho',\Omega')\cdot G(\rho,\Omega;\rho',\Omega'\,|\,r)\,dV' =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\cdot\oiint\limits_{\Omega'} f(\Omega')\cdot\frac{r\left(r^2 - \rho^2\right)}{\left(r^2 - 2r\rho\cdot\cos\gamma + \rho^2\right)^{3/2}}\,d\Omega' +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\cdot\iiint\limits_{V_0'} F(\rho',\Omega')\cdot\left[\frac{r}{\sqrt{r^4 - 2r^2\cdot\rho\rho'\cdot\cos\gamma + \rho^2\rho'^2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho\rho'\cdot\cos\gamma + \rho'^2}}\right]\cdot dV'.$$

Здесь $V' > V_0'$ - область, где имеются источники и функция $F(\rho,\Omega) \neq 0$ и обозначено $dS' = r^2\cdot d\Omega',\quad dV' = \rho'^2 d\rho'\cdot d\Omega',\quad d\Omega' = \sin\theta'\cdot d\theta'\cdot d\varphi'.$

8. Проверка окончательной формулы решения по условиям задачи и по размерностям.

Известно, что многие граничные значения функции Грина сводятся к δ-функциям; так

$$\frac{\partial}{\partial\rho'}G(r,\Omega\;;r,\Omega'\,|\,r) = \delta(\Omega,\Omega'), \qquad G(r,\Omega\;;\rho',\Omega'\,|\,r) = 0;$$

$$\Delta_3 G = \delta(\rho,\Omega\;;\rho',\Omega'); \qquad \Delta_3\left.G'_{\rho'}\right|_{\rho'=r} = 0.$$

При этом окончательные одномерные множители, на которые раскладываются значения δ-функций в криволинейных координатах, должны делиться на соответствующие коэффициенты Ламе. Поэтому

$$\delta(r,\Omega;\rho',\Omega') \equiv \delta(\rho'-r)\cdot\delta(\theta'-\theta)\cdot\delta(\varphi'-\varphi)/\rho'^2\cdot\sin\theta',$$

$$\delta(\Omega,\Omega') \equiv \delta(\theta'-\theta)\cdot\delta(\varphi'-\varphi)/\sin^2\theta'.$$

Теперь можно легко проверить, что полученное решение задачи полностью удовлетворяет первоначально поставленным условиям

$$\Delta_3 u(\rho,\Omega) = \oint\!\!\oint_{S'} f(\Omega')\cdot\Delta_3 G'_{\rho'}(\rho,\Omega;\rho',\Omega'\,|\,r)\cdot dS' +$$

$$+\iiint_{V_0'} F(\rho',\Omega')\cdot\Delta_3 G(\rho,\Omega;\rho',\Omega'\,|\,r)\cdot dV' =$$

$$= \oint\!\!\oint_{S'} f(\Omega')\cdot 0\cdot dS' + \iiint_{V_0'} F(\rho',\Omega')\cdot\delta(\rho,\Omega;\rho',\Omega')\cdot dV' =$$

$$= 0 + F(\rho,\Omega) = F(\rho,\Omega).$$

$$u(\rho,\Omega)\Big|_{\rho=r} = \oint\!\!\oint_{S'} f(\Omega')\cdot\frac{\partial}{\partial\rho'}G(\rho,\Omega;\rho',\Omega'\,|\,\rho)\Big|_{\rho=r}\cdot dS' +$$

$$+\iiint_{V_0'} F(\rho',\Omega')\cdot G(\rho,\Omega;\rho',\Omega'\,|\,\rho)\Big|_{\rho=r}\cdot dV' =$$

$$= \oint\!\!\oint_{S'} f(\Omega')\cdot\delta(\Omega,\Omega')\cdot dS' + \iiint_{V_0'} F(\rho',\Omega')\cdot 0\cdot dV' = f(\Omega).$$

Проверим совпадение всех размерностей в формуле ответа.

$$\left[u(\rho,\Omega)\right] \equiv Q, \quad \left[f(\Omega)\right] = Q, \quad \left[F(\rho,\Omega)\right] = Q/L^2, \quad \left[G(\ldots)\right] = 1/L,$$

$$\left[d\Omega\right] = 1, \quad \left[dS\right] = L^2, \quad \left[dV\right] = L^3.$$

$$\left[u(\rho,\Omega)\right] \equiv Q = [f]\cdot\frac{1}{L}\cdot[G]\cdot L^2 + [F]\cdot[G]\cdot L^3 =$$

$$= Q\cdot\frac{1}{L}\cdot\frac{1}{L}\cdot L^2 + \frac{Q}{L^2}\cdot\frac{1}{L}\cdot L^3 \Rightarrow Q.$$

Основная литература

1. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А Самарский. – Изд. 5-е, стер. – М. : Наука, 1977. – 734 с.

2. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции / В. Я. Арсенин. – Изд. 3-е, перераб. и доп. – М. : Наука, 1984. – 383 с.

3. Кошляков Н. С. Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. – М. : Высш. шк., 1970. – 710 с.

4. Смирнов В. И. Курс высшей математики / В. И. Смирнов. – Изд. 9-е, испр. – М. : Наука, 1974. – т. 3(2). – 672 с.

5. Кручкович Г. И. Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики / Г. И. Кручкович ; под ред. Г. И. Кручковича и др. : – Высш. шк., 1973. – 512 с.

6. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления / Н. Е. Кочин. – Изд. 8-е – М. : Издан. АН СССР, 1961. – 428 с.

7. Борисенко А. И. Векторный анализ и начала тензорного исчисления / А. И. Борисенко, И. Е. Тарапов. – Изд. 2-е, доп. – М. : Высш. шк., 1963. – 264 с.

8. Смирнов М. М. Задачи по уравнениям математической физики / М. М. Смирнов. – Изд. 3-е, доп. – М. : Наука, 1975. – 127 с.

9. Будак Б. М. Сборник задач по математической физике / Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов. – Изд. 3-е. – М. : Наука, 1980. – 686 с.

Навчальне видання

Кондратьєв Борис Вікторович
Лесік Ніна Іванівна

**РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ
МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ
У КРИВОЛІНІЙНИХ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ**

Навчально-методичний посібник
для студентів 3-го курсу
фізичного та радіофізичного факультетів

(Рос. мовою)

Коректор *С. В. Гончарук*
Комп'ютерне верстання *Н. І. Лесік, О. Б. Кондратьєва*
Макет обкладинки *І. М. Дончик*

Формат 60х84/16. Ум. друк. арк. 12,30. Тираж 100 пр. Зам. № 44/14.

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.2009

Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна
Тел. 705-24-32