ЗАПИСКИ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА
ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. А. М. ГОРЬКОГО
И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXVIII. Серия 4 1961

О НЕКОТОРЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ ПРИ УСЛОВИЯХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ТИПА*

Я. Л. Геронимус

§ 1. Через S назовем класс функций $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k z^k$, которые в области $|z|<1$ регулярны и удовлетворяют неравенству $|f(z)|<1$.

Пусть даны условия:

$$f(z_k)=w_k,\quad |z_k|,\ |w_k|<1,\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{1.1}$$

Пользуясь неравенством Жюлиа для угловой производной $D(f)$

$$\frac{1-|w|^2}{|1-w|^2}\cdot D(f)\geqslant\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2},\quad w=f(z),\quad D(f)=\lim_{z\to 1}\frac{f(z)-1}{z-1}, \tag{1.2}$$

легко получим неравенство

$$D(f)\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|w_k|^2}{|1-w_k|^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|z_k|^2}{|1-z_k|^2}. \tag{1.3}$$

Выясним прежде всего, в каком случае в нем имеет место знак равенства. Для этого рассмотрим уравнение

$$\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}=\lambda;\quad z=x+iy,\quad 0<\lambda<\infty; \tag{1.4}$$

приведя его к форме

$$\left(x-\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{\lambda+1}\right)^2,$$

мы видим, что оно является уравнением так называемого о р и ц и к л а, т. е. окружности, касающейся окружности $|z|=1$ изнутри в точке $z=1$ и имеющей в данном случае радиус $\rho=\frac{1}{\lambda+1}$; величину $\lambda=\frac{1}{\rho}-1$, т. е. разность между кривизной орицикла и кривизной основной окружности $|z|=1$, можно назвать и з б ы т о ч н о й к р и в и з н о й о р и ц и к л а**.

Знак равенства в неравенстве Жюлиа имеет место в том случае, когда угловая производная равна отношению избыточных кривизн орициклов, проходящих через точку z и, соответственно, через точку w; поэтому знак равенства в (1.3) имеет место в том случае, когда он имеет место в каждом неравенстве Жюлиа, т. е. в с л у ч а е п р о п о р ц и о н а л ь н о с т и и з б ы-

---

* Настоящая статья посвящена детальному исследованию некоторых неравенств, рассмотренных в [2].

** Названия «орицикл» и в дальнейшем «гиперцикл» связаны с интерпретацией геометрии Лобачевского в единичном круге; см. [1], гл. II, IV.

точных кривизн соответствующих орициклов, проходящих через точки z_k и w_k, $(k = 1, 2, \ldots, n)$; экстремальная функция $f^*(z)$ (как и в неравенстве Жюлиа) такова:

$$\frac{1-w}{1+w} = D(f) \cdot \frac{1-z}{1+z}, \quad w = f^*(z), \tag{1.5}$$

т. е. преобразует каждый орицикл в соответствующий ему орицикл*.

Рассмотрим теперь решение задачи при любых точках z_k и w_k, ограничиваясь для простоты случаем $n = 2$.

Построим функцию**

$$f_1(z) = \left\{\frac{f(z)-w_1}{1-\bar{w}_1 f(z)} \cdot \frac{1-\bar{w}_1}{1-w_1}\right\} : \left\{\frac{z-z_1}{1-\bar{z}_1 z} \cdot \frac{1-\bar{z}_1}{1-z_1}\right\}; \tag{1.6}$$

одновременно с $f(z)$ она, очевидно, принадлежит классу S и даже подклассу $S_1 \subset S$, для которого угловая производная $D(f)$ конечна, ибо при $z \to 1$ функции, стоящие в обеих скобках, стремятся к единице; как нетрудно видеть, мы имеем

$$D(f_1) + \frac{1-|z_1|^2}{|1-z_1|^2} = D(f) \cdot \frac{1-|w_1|^2}{|1-w_1|^2}. \tag{1.7}$$

Если $f_1(z)$ — произвольная функция класса S_1, то функция $f(z)$ принадлежит классу S_1 и удовлетворяет условию $f(z_1) = w_1$; положим

$$w_2' = f_1(z_2) = \left\{\frac{w_2-w_1}{1-\bar{w}_1 w_2} \cdot \frac{1-\bar{w}_1}{1-w_1}\right\} : \left\{\frac{z_2-z_1}{1-\bar{z}_1 z_2} \cdot \frac{1-\bar{z}_1}{1-z_1}\right\}, \quad |w_2'| < 1, \tag{1.8}$$

и построим новую функцию

$$f_2(z) = \left\{\frac{f_1(z)-w_2'}{1-\bar{w}_2' f_1(z)} \cdot \frac{1-\bar{w}_2'}{1-w_2'}\right\} : \left\{\frac{z-z_2}{1-\bar{z}_2 z} \cdot \frac{1-\bar{z}_2}{1-z_2}\right\}; \tag{1.9}$$

очевидно, $f_2(z) \in S_1$, причем

$$D(f_2) + \frac{1-|z_2|^2}{|1-z_2|^2} = D(f_1) \cdot \frac{1-|w_2'|^2}{|1-w_2'|^2}. \tag{1.10}$$

Из (1.7), (1.10) имеем

$$D(f) \cdot \frac{(1-|w_1|^2)(1-|w_2'|^2)}{|(1-w_1)(1-w_2')|^2} = \frac{1-|z_1|^2}{|1-z_1|^2} \cdot \frac{1-|w_2'|^2}{|1-w_2'|^2} + \frac{1-|z_2|^2}{|1-z_2|^2} + D(f_2).$$

Если $f_2(z)$ — произвольная функция класса S_1, то из (1.6), (1.9) найдем функцию $f(z) \in S_1$, удовлетворяющую условиям (1.1) при $n = 2$; при этом $D(f_2) \geqslant 0$, т. е. имеем неравенство

$$D(f)\frac{(1-|w_1|^2)(1-|w_2'|^2)}{|(1-w_1)(1-w_2')|^2} \geqslant \frac{1-|z_1|^2}{|1-z_1|^2} \cdot \frac{1-|w_2'|^2}{|1-w_2'|^2} + \frac{1-|z_2|^2}{|1-z_2|^2}, \tag{1.11}$$

куда вместо w_2' надо подставить его значение (1.8). Знак равенства будет иметь место при $D(f_2) = 0$, т. е. при $f_2(z) \equiv 1$; легко видеть из (1.6), (1.9), что экстремальная функция $f^*(z)$ имеет такую форму:

$$f^*(z) = \frac{\alpha z^2 + \beta z + \gamma}{\bar{\gamma} z^2 + \bar{\beta} z + \bar{\alpha}}, \tag{1.12}$$

т. е. подходит под следующий тип***:

$$f(z) = \frac{z(1-a_0-a_1+\bar{a}_0 a_1)(z+a_0\bar{a}_1) + (1-\bar{a}_0-\bar{a}_1+a_0\bar{a}_1)(a_0+a_1 z)}{z(1-a_0-a_1+\bar{a}_0 a_1)(\bar{a}_0 z+\bar{a}_1) + (1-\bar{a}_0-\bar{a}_1+a_0\bar{a}_1)(1+\bar{a}_0 a_1 z)}, \tag{1.13}$$

---

* См. [1], стр. 77—79.

** См., напр., [3], § 10.2.

*** См. [2], форм. (4.5).

где $a_0 = \alpha_0$, $a_1 = \frac{\alpha_1}{1 - |\alpha_0|^2}$ — параметры Шура функции $f(z)$; следовательно, справедливо неравенство

$$D(f) \geqslant \frac{|1 - a_0|^2}{1 - |a_0|^2} + \frac{|1 - \bar{a}_0 - \bar{a}_1 (1 - a_0)|^2}{(1 - |a_0|^2)(1 - |a_1|^2)}, \tag{1.14}$$

причем два неизвестных параметра a_0, a_1 найдем из двух условий

$$f(z_1) = w_1, \; f(z_2) = w_2.$$

Пусть, например, все четыре числа z_1, z_2, w_1, w_2 **вещественны** — тогда этим же свойством будут обладать и параметры a_0, a_1, т. е. будем иметь

$$D(f) \geqslant \frac{2(1 - a_0)}{(1 + a_0)(1 + a_1)}, \quad f^*(z) = \frac{z^2 + a_1(1 + a_0) z + a_0}{a_0 z^2 + a_1(1 + a_0) z + 1}; \tag{1.15}$$

отсюда легко найдем оба параметра a_0, a_1, ибо

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{z_1(w_2 - z_2^2)(1 - w_1) - z_2(w_1 - z_1^2)(1 - w_2)}{z_1(1 - w_1)(1 - z_2^2 w_2) - z_2(1 - w_2)(1 - z_1^2 w_1)}, \\ a_1(1 + a_0) &= \frac{z_1(w_1 - z_1^2)(1 - z_2^2 w_2) - (w_2 - z_2^2)(1 - z_1^2 w_1)}{z_1(1 - w_1)(1 - z_2^2 w_2) - z_2(1 - w_2)(1 - z_1^2 w_1)}. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Задачу также легко решить, если $z_2 = w_2 = 0$, а z_1, w_1 произвольны; в этом случае $a_0 = 0$, и мы имеем

$$D(f) \geqslant 1 + \frac{|1 - a_1|^2}{1 - |a_1|^2}, \quad f^*(z) = z \cdot \frac{z(1 - a_1) + a_1(1 - \bar{a}_1)}{\bar{a}_1(1 - a_1) z + 1 - \bar{a}_1}, \tag{1.17}$$

причем параметр a_1 надо найти из условия

$$z_1^2(1 - a_1) + a_1 z_1(1 - \bar{a}_1) = w_1[\bar{a}_1(1 - a_1) z_1 + 1 - \bar{a}_1]. \tag{1.18}$$

§ 2. Пусть теперь функция $w = f(z) \in S$ имеет на дуге $l_z = [e^{i\alpha'}, e^{i\alpha''}]$ окружности $|z| = 1$ непрерывные граничные значения $f(e^{i\theta}) = \lim\limits_{r \to 1-0} f(re^{i\theta})$, по модулю равные единице, т. е. отображает дугу l_z на дугу $l_w = [e^{i\beta'}, e^{i\beta''}]$ окружности $|w| = 1$; через L_z, L_w обозначим длины дуг l_z, l_w. Если $z_0 = e^{i\theta_0} \in l_z$, а $w_0 = e^{i\mu_0} \in l_w$, то, как показано в [2] (§ 8), мы имеем

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{w_0}{z_0} \left(\frac{d\mu}{d\theta}\right)_0 = \frac{w_0}{z_0} D(u), \tag{2.1}$$

где вспомогательная функция $u(\zeta)$ такова:

$$u(\zeta) = \frac{f(z_0 \zeta)}{w_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n z_0^n}{w_0} \zeta^n, \quad |\zeta| < 1. \tag{2.2}$$

Таким образом, если функция $f(z) \in S$ удовлетворяет условиям (1.1), то функция $u(\zeta) \in S$ удовлетворяет условиям

$$u\left(\frac{z_k}{z_0}\right) = \frac{w_k}{w_0}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n); \tag{2.3}$$

поэтому мы можем воспользоваться (1.3) с заменой z_k, w_k на $\frac{z_k}{z_0}$, $\frac{w_k}{w_0}$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Мы получим при условиях (1.1) неравенство

$$\left(\frac{d\mu}{d\theta}\right)_0 \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - |z_k|^2}{|z_0 - z_k|^2} : \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - |w_k|^2}{|w_0 - w_k|^2}; \tag{2.4}$$

интегрируя его, получим неравенство

$$L_w \geqslant L_z \cdot A_n, \quad A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1-|z_k|}{1+|z_k|} : \sum_{k=1}^{n} \frac{1+|w_k|}{1-|w_k|}. \tag{2.5}$$

Для получения точного неравенства запишем (2.4) в таком виде:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1-|w_k|^2}{1-2|w_k|\cos(\lambda_k-\mu)+|w_k|^2}\, d\mu \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1-|z_k|^2}{1-2|z_k|\cos(\alpha_k-\theta)+|z_k|^2}\, d\theta,$$

где мы положили

$$w_k = |w_k| e^{i\lambda_k}, \quad z_k = |z_k| e^{i\alpha_k}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n);$$

интегрируя это неравенство, найдем

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{\beta'}^{\beta''} \frac{1-|w_k|^2}{1-2|w_k|\cos(\lambda_k-\mu)+|w_k|^2}\, d\mu \geqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{\alpha'}^{\alpha''} \frac{1-|z_k|^2}{1-2|z_k|\cos(\alpha_k-\theta)+|z_k|^2}\, d\theta. \tag{2.6}$$

Если воспользоваться геометрическим значением ядра интеграла Пуассона, то мы видим, что сумма длин дуг окружности $|w|=1$, полученных проектированием дуги l_w из точек $\{w_k\}_1^n$, не меньше сумм длин дуг окружности, полученных проектированием дуги l_z из точек $\{z_k\}_1^n$ (при $n=1$, $z_1 = w_1 = 0$ получим лемму Лёвнера).

Выясним возможность равенства. Рассмотрим так называемый гиперцикл C_k, т. е. ту дугу окружности, проходящей через точки z_k, $e^{i\alpha'}$, $e^{i\alpha''}$, которая не выходит за пределы замкнутой области $|z| \leqslant 1$; обозначим через φ_k угол, под которым видна дуга l_z из точки z_k, через l'_{zk} длину дуги окружности $|z|=1$, в которую проектируется дуга l_z из точки z_k и через β_k угол этого гиперцикла с окружностью $|z|=1$; пользуясь элементарными свойствами углов, связанных с окружностью, получим:

$$2\varphi_k = l'_{zk} + \alpha'' - \alpha', \quad \beta_k = \pi - \varphi_k + \frac{\alpha''-\alpha'}{2}, \quad l'_{zk} = 2(\pi - \beta_k). \tag{2.7}$$

Нетрудно видеть, что эта формула справедлива при любом расположении точек z_k, $e^{i\alpha'}$, $e^{i\alpha''}$ при следующем условии: β_k является углом между двумя полупрямыми, проведенными через один из концов дуги l_z, причем одна полупрямая касается окружности $|z|=1$ и направлена в сторону дуги l_z, а вторая касается гиперцикла C_k и направлена внутрь окружности $|z|=1$ (см. фиг. 1).

Вводя соответствующий гиперцикл Γ_k, проходящий через точки w_k, $e^{i\beta'}$, $e^{i\beta''}$, мы имеем для него аналогичное равенство

$$l'_{wk} = 2(\pi - \gamma_k), \tag{2.8}$$

где l'_{wk} — длина дуги окружности $|w|=1$, в которую проектируется дуга l_w из точки w_k, а γ_k — угол гиперцикла Γ_k с окружностью $|w|=1$; мы имеем по (2.6):

$$L_w = \sum_{k=1}^{n} l'_{wk} \geqslant L_z = \sum_{k=1}^{n} l'_{zk}, \quad \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \beta_k, \tag{2.9}$$

т. е. сумма углов, образованных окружностью $|w|=1$ с гиперциклами, проходящими через концы дуги l_w и через заданные точки $\{w_k\}_1^n$, не больше суммы углов, образованных окружностью $|z|=1$ с гиперциклами, проходящими через концы дуги l_z и через заданные точки $\{z_k\}_1^n$.

Равенство, очевидно, имеет место тогда и только тогда, когда оно имеет место для каждой пары соответствующих слагаемых (2.9), т. е. при $\gamma_k=\beta_k$, $(k=1, 2, \ldots, n)$; иными словами, в том случае, когда соответствующие гиперциклы C_k и Γ_k, $(k=1, 2, \ldots, n)$

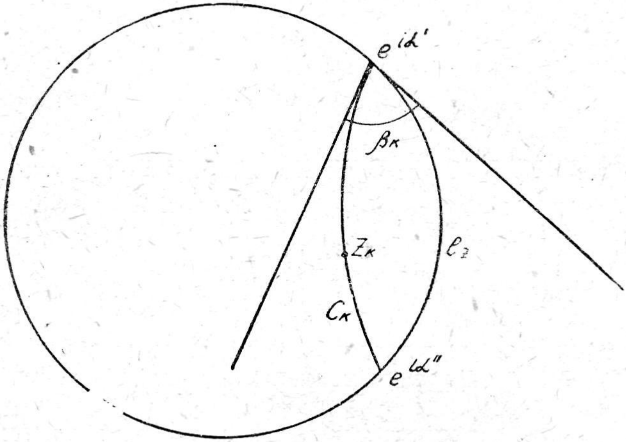

Рис. 1.

образуют одинаковые углы с окружностями $|z|=1$ и $|w|=1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Жюлиа. Геометрические принципы анализа, ч. I, М., 1936.

2. Я. Л. Геронимус. Применение ортогональных многочленов к изучению некоторых граничных свойств функций. «Зап. матем. отд. физ-матем. фак. ХГУ и Харьковск. матем. о-ва», т. XXVII (сер. 4) 1960.

3. J. Walsh. Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain, 1956, N J.