УДК 519

Л. А. САХНОВИЧ

О СИНГУЛЯРНЫХ ЯВНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ МКдФ

Модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза (МКдФ) имеет следующие две формы;

$$R_t = -\frac{1}{4} R_{xxx} + \frac{3}{2} |R|^2 R_x; \tag{0.1}$$

$$R_t = -\frac{1}{4} R_{xxx} - \frac{3}{2} |R|^2 R_x. \tag{0.2}$$

Хорошо известны [1] N-солитонные решения уравнения (0.2). Уравнение (0.1) не имеет N-солитонных решений [1]. В данной статье методом обратной спектральной задачи [2, 3] построены классы явных решений уравнения (0.1). Далее в этих классах выделены подклассы решений (0.1), которые преобразование Миуры [4] переводит в N-солитонные решения уравнения Кортевега-де Фриза (КдФ):

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{0.3}$$

Поведение сингулярностей построенных решений во многом аналогично поведению горбов соответствующих N-солитонных решений уравнений КдФ (0.3).

Существенную роль в статье играет выяснение связи между спектральными данными и данными рассеяния вспомогательных линейных задач, сопоставляемых уравнениям МКдФ и КдФ.

§ 1. Построение явных решений уравнения МКдФ

1. Уравнению (0.1) поставим в соответствие вспомогательную линейную систему:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = izJH(x, t)w, \quad w(0, t, z) = E_2, \tag{1.1}$$

где

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad H(x, t) = JA^{-1}(x, t)\, jA(x, t), \tag{1.2}$$

при этом матрица $A(x, t)$ определяется соотношениями

$$j\frac{\partial A}{\partial x} = -\xi A, \qquad A(0, t) = U^*, \tag{1,3}$$

$$\xi = \begin{bmatrix} 0 & R(x, t) \\ -\overline{R(x, t)} & 0 \end{bmatrix}, \quad j = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1.4}$$

Функцию Вейля—Титчмарша $v(t, z)$ системы (1.1) при $\operatorname{Im} z > 0$ введем с помощью неравенства

$$\int\limits_0^\infty [1, iv^*(t, z)]\, w^*(x, t, z) H(x, t) w(x, t, z) \begin{bmatrix} 1 \\ -iv(t, z) \end{bmatrix} dx < \infty. \tag{1.5}$$

Из [2] следует

Лемма 1.1. *Пусть $R(x, t)$ — решение уравнения (0.1), а $v(t, z)$ — функция Вейля—Титчмарша соответствующей системы (1.1)—(1.4). Тогда $v(t, z)$ удовлетворяет уравнению Риккати*

$$\frac{dv}{dt} = \left(-z^3 - z^2 \operatorname{Im} R_0 - \frac{z}{2}|R_0|^2 + \frac{z}{2}\operatorname{Re} b_0 + \frac{1}{4}a_0 i + \frac{1}{4}\operatorname{Im} c_0\right) +$$
$$+ \left(-2z^2 \operatorname{Re} R_0 - z \operatorname{Im} b_0 + \frac{1}{2}\operatorname{Re} c_0\right)v + \tag{1.6}$$
$$+ \left(-z^3 + z^2 \operatorname{Im} R_0 - \frac{z}{2}|R_0|^2 - \frac{z}{2}\operatorname{Re} b_0 + \frac{1}{4}a_0 i - \frac{1}{4}\operatorname{Im} c_0\right)v^2,$$

где приняты обозначения

$$R_0(t) = R(0, t),\ a_0(t) = R_x(0, t)\overline{R(0, t)} - R(0, t)\overline{R_x(0, t)}, \tag{1.7}$$
$$b_0(t) = R_x(0, t),\ c_0(t) = R_{xx}(0, t) - 2|R(0, t)|^2 R(0, t). \tag{1.8}$$

2. Остановимся на случае, когда

$$v_0(z) = v(0, z) = i + \sum_{k=1}^{N} \beta_{k,0}/(z - \alpha_{k,0}), \tag{1.9}$$

где $\alpha_{k,0} \neq \alpha_{l,0}$ $(k \neq l)$; $\operatorname{Im}\alpha_{k,0} < 0$. Будем искать решение уравнения (1.6) в виде

$$v(t, z) = i + \sum_{k=1}^{N} \beta_k(t)/[z - \alpha_k(t)], \tag{1.10}$$

где $\alpha_k(t) \neq \alpha_l(t)$ $(k \neq l)$; $\operatorname{Im}\alpha_k(t) < 0$. Подставляя (1.10) в уравнение (1.6), получаем

$$\sum_{k=1}^{N} \beta_k = -\overline{R}_0, \qquad 2i\sum_{k=1}^{N} \alpha_k\beta_k = \overline{b}_0 + \overline{R}_0^2, \tag{1.11}$$

$$4\left(\sum_{k=1}^{N} \beta_k\alpha_k^2\right) - 2\overline{b}_0\overline{R}_0 - 2|R_0|^2\overline{R}_0 + 2i(\operatorname{Im}\overline{R}_0)^2 = \overline{c}_0, \tag{1.12}$$

$$\alpha_k' = \left(-\alpha_k^3 + \alpha_k^2 \operatorname{Im} R_0 - \frac{\alpha_k}{2}|R_0|^2 - \frac{\alpha_k}{2}\operatorname{Re} b_0 + \frac{1}{4}a_0 i - \frac{1}{4}\operatorname{Im} c_0\right)\beta_k, \tag{1.13}$$

$$\beta_k' = \varphi_k(\alpha, \beta, R_0, b_0, c_0), \quad 1 \leqslant k \leqslant N, \tag{1.14}$$

где $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N]$; $\beta = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N]$. Конкретный вид функций φ_k нам не понадобится и мы его из-за громоздкости опускаем. Решая систему (1.11)—(1.14) с неизвестными α, β, R_0, b_0, c_0 методом последовательных приближений, выводим

Утверждение 1.1. При достаточно малом T $(0 \leqslant t \leqslant T)$ уравнение (1.6) имеет одно и только одно решение вида (1.10), удовлетворяющее условию (1.9).

Приводя к общему знаменателю, перепишем (1.9) в виде

$$v(t, z) = i p_2(t, z)/p_1(t, z). \tag{1.15}$$

Обозначив через $\nu_k(t)$ корни $p_2(t, z)$, имеем

$$p_1(t, z) = \prod_{k=1}^{N} [z - \alpha_k(t)], \qquad p_2(t, z) = \prod_{k=1}^{N} [z - \nu_k(t)]. \tag{1.16}$$

Запишем теперь разложение в окрестности $z = \infty$:

$$p_2(t, z)/p_1(t, z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(\alpha, \nu)/z^m, \quad a_0(\alpha, \nu) = 1. \tag{1.17}$$

Из интерполяционной формулы Лагранжа

$$p_2(t, z)/p_1(t, z) = 1 + \sum_{k=1}^{N} \left\{ \left[p_2(t, z) \Big/ \frac{\partial}{\partial z} p_1(t, z) \right]_{z=\alpha_k(t)} \right\} \Big/ [z - \alpha_k(t)]$$

и равенства

$$\beta_k(t) = i \left[p_2(t, z) \Big/ \frac{\partial}{\partial z} p_1(t, z) \right]_{z=\alpha_k(t)} \tag{1.18}$$

вытекает соотношение

$$a_m(\alpha, \nu) = -i \sum_{k=1}^{N} \alpha_k^{m-1}(t)\, \beta_k(t). \tag{1.19}$$

3. Обозначим через $\sigma_{k,N}(\alpha)$ элементарную симметрическую форму N переменных $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N]$ веса k. Из (1.13) и (1.17)—(1.19) выводим, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sigma_{k,N}(\alpha) = -i \Big\{ & [\sigma_{k+3,N}(\nu) - \sigma_{k+3,N}(\alpha)] + [(\operatorname{Im} R_0)\sigma_{k+2,N}(\nu) + \\ & + i(\operatorname{Re} R_0)\sigma_{k+2,N}(\alpha)] + \frac{1}{2}[(|R_0|^2 + \operatorname{Re} b_0)\sigma_{k+1,N}(\nu) - \\ & - i(\operatorname{Im} b_0)\sigma_{k+1,N}(\alpha)] + \frac{1}{4}[(a_0 i - \operatorname{Im} c_0)\sigma_{k,N}(\nu) - i(\operatorname{Re} c_0)\sigma_{k,N}(\alpha)] \Big\}, \\ & 1 \leqslant k \leqslant N. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Аналогично получаем соотношения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sigma_{k,N}(\nu) = -i \Big\{ & [\sigma_{k+3,N}(\alpha) - \sigma_{k+3,N}(\nu)] - [i(\operatorname{Re} R_0)\sigma_{k+2,N}(\nu) + \\ & + (\operatorname{Im} R_0)\sigma_{k+2,N}(\alpha)] - \frac{1}{2}[|R_0|^2 - \operatorname{Re} b_0)\sigma_{k+1,N}(\alpha) + \\ & + i(\operatorname{Im} b_0)\sigma_{k+1,N}(\nu)] + \frac{1}{4}[(a_0 i + \operatorname{Im} c_0)\sigma_{k,N}(\alpha) + \\ & + i(\operatorname{Re} c_0)\sigma_{k,N}(\nu)] \Big\}. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Заметим, что $\sigma_{m,N} = 0$ при $m > N$.

4. Введем теперь многочлен

$$Q(iz) = (-1)^N [\overline{p_1(\bar{z})}\, p_2(z) + p_1(z)\, \overline{p_2(\bar{z})}]. \qquad (1.22)$$

Существенную роль в дальнейшем играет

Лемма 1.1. *Если $v(t, z)$ имеет вид (1.15) и удовлетворяет системе (1.11)—(1.14), то коэффициенты многочлена $Q(iz)$ не зависят от t.*

Доказательство. Дифференцируя обе части (1.22) и учитывая соотношения (1.20), (1.21), выводим, что $\frac{\partial}{\partial t} Q(t, iz) = 0$, откуда следует утверждение леммы.

Положим теперь

$$\varkappa_k(t) = p_1(t, -\lambda_k)/\overline{p_1(t, -\bar{\lambda}_k)}, \quad \eta_k(t) = p_2(t, -\lambda_k)/\overline{p_2(t, -\bar{\lambda}_k)}, \qquad (1.23)$$

где $\lambda_k = i\omega_k$, а ω_k — корень многочлена $Q(z)$.

Лемма 1.2. *Справедливы равенства*

$$\varkappa_k(t) = \varkappa_k(0) \exp(2\omega_k^3 t), \quad \eta_k(t) = \eta_k(0) \exp(2\omega_k^3 t). \qquad (1.24)$$

Доказательство. Полагая $\varkappa(t, \lambda) = p_1(t, \lambda)/p_2(t, \lambda)$ и пользуясь равенствами (1.20)—(1.22), имеем

$$\frac{d}{dt} \varkappa(t, \lambda) = 2i\lambda^3 \varkappa(t, \lambda) - i\Big[\lambda^3 + \lambda^2 \operatorname{Im} R_0 + \frac{\lambda}{2}(|R_0|^2 + \operatorname{Re} b_0) + \frac{1}{4}(a_0 i - \operatorname{Im} c_0)\Big] Q(-i\lambda)/\overline{p_1(-\bar{\lambda})}^2,$$

откуда следует первая из формул (1.23). Аналогично доказывается вторая формула (1.23).

5. Опишем теперь процедуру построения $R(x, t)$ по $v(t, z)$ [2]. Для этого положим

$$r(t, \lambda) = \frac{1}{\pi}[\operatorname{Im} v(t, \lambda) - 1], \qquad k(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} r(t, \lambda)\, d\lambda \qquad (1.25)$$

и введем в $L^2(0, \zeta)$ оператор

$$S_\zeta g = 2g(x) + \int_0^\zeta g(u)\, k(x-u, t)\, du. \qquad (1.26)$$

Тогда оператор S_ζ^{-1} имеет вид

$$S_\zeta^{-1} g = \frac{1}{2} g(x) + \int_0^\zeta g(u)\, \Gamma_\zeta(x, u, t)\, du, \qquad (1.27)$$

причем справедливо равенство

$$\frac{1}{2} k(x-u, t) + 2\Gamma_\zeta(x, u, t) + \int_0^\zeta k(x-v, t)\, \Gamma_\zeta(v, u, t)\, dv = 0. \qquad (1.28)$$

Из (1.28) согласно [2, 3] следует окончательная формула:

$$R(x, t) = -4\Gamma_{2x}(2x, 0, t). \qquad (1.29)$$

Отметим, что формула, эквивалентная (1.29), содержится в статье М. Г. Крейна [5].

6. Применяя формулы (1.25) к случаю (1.10), выводим, что

$$\overline{\underset{x>0}{\overline{k}(-x,\ t)}} = k(x,\ t) = -\sum_{j=1}^{N} \overline{\beta_j(t)} \exp[\overline{i\alpha_j(t)}\, x]. \tag{1.30}$$

Обозначим через $p(z)$ многочлен $p(z) = \prod_{j=1}^{N} [(z - i\overline{\alpha}_j)(z - i\alpha_j)]$, а через $\mathscr{D}$ — оператор дифференцирования по x. Действуя на обе части (1.28) оператором $p(\mathscr{D})$, получаем соотношение

$$Q(\mathscr{D})\,\Gamma_\zeta(x,\ u,\ t) = 0. \tag{1.31}$$

Сформулируем теперь основной результат.

Теорема 1.1. *Пусть даны наборы чисел* $\omega = [\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{2N}]$, $\alpha_0 = [\alpha_{1,0},\ \alpha_{2,0},\ \ldots,\ \alpha_{N,0}]$, *причем* ω_j *попарно различны и* $\omega_j = \overline{\omega}_{j+N}\ (1 \leqslant j \leqslant N)$. *Тогда уравнение* (0.1) *имеет решение*

$$R(x,\ t) = -2(-1)^N \Delta_1(x,\ t)/\Delta_2(x,\ t), \tag{1.32}$$

где

$$\Delta_1(x,\ t) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \cdots\cdots & \omega_{2N} \\ - - - & - - - & - - - & - - - \\ \omega_1^{N-2} & \omega_2^{N-2} & \cdots\cdots & \omega_{2N}^{N-2} \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots\cdots & \gamma_{2N} \\ \omega_1\gamma_1 & \omega_2\gamma_2 & \cdots\cdots & \omega_{2N}\gamma_{2N} \\ - - - & - - - & - - - & - - - \\ \omega_1^N\gamma_1 & \omega_2^N\gamma_2 & \cdots\cdots & \omega_{2N}^N\gamma_{2N} \end{vmatrix}, \tag{1.33}$$

$$\Delta_2(x,\ t) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \cdots\cdots & \omega_{2N} \\ - - - & - - - & - - - & - - - \\ \omega_1^{N-1} & \omega_2^{N-1} & \cdots\cdots & \omega_{2N}^{N-1} \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots\cdots & \gamma_{2N} \\ \omega_1\gamma_1 & \omega_2\gamma_2 & \cdots\cdots & \omega_{2N}\omega_{2N} \\ - - - & - - - & - - - & - - - \\ \omega_1^{N-1}\gamma_1 & \omega_2^{N-1}\gamma_2 & \cdots\cdots & \omega_{2N}^{N-1}\gamma_{2N} \end{vmatrix}, \tag{1.34}$$

$$\gamma_k = \left\{\prod_{j=1}^{N} [(i\omega_k + \overline{\alpha}_{j,0})/(i\omega_k + \alpha_{j,0})]\right\} \exp 2(\omega_k x - \omega_k^3 t). \tag{1.35}$$

Доказательство. Из формулы (1.31) следует, что

$$\Gamma_\zeta(x,\ 0,\ t) = \sum_{k=1}^{2N} c_k(\zeta,\ t) \exp(\omega_k x). \tag{1.36}$$

Подставляя (1.30) и (1.36) в (1.28), получаем систему линейных алгебраических уравнений для нахождения $c_k(\zeta,\ t)$. Повторяя выкладки из [8] и пользуясь формулами (1.24), (1,29), получаем утверждение теоремы.

7. Отметим, что набором чисел ω и α_0 соответствуют многочлены

$$Q(z) = 2\prod_{j=1}^{N}(z-\omega_j)(z+\bar{\omega}_j),\quad p_1(z) = \prod_{k=1}^{N}(z-\alpha_{k,0}). \tag{1.37}$$

Из формулы (1.22) получаем, что

$$p_2(\alpha_{k,0}) = (-1)^N Q(i\alpha_{k,0})/\overline{p_1(\bar{\alpha}_{k,0})}. \tag{1.38}$$

В силу интерполяционной формулы Лагранжа

$$v_0(z) = i\,[1 + \sum_{k=1}^{N} p_2(\alpha_{k,0})/(z-\alpha_{k,0})\,p_1'(\alpha_{k,0}). \tag{1.39}$$

Таким образом, формулы (1.37) — (1.39) дают способ восстановления $v_0(z)$ по наборам ω и α_0.

§ 2. Спектральные задачи

1. В статье [3] система (1.1) приведена к виду

$$\begin{cases} \dfrac{d\Phi(x,\lambda)}{dx} = -\lambda\Psi(x,\lambda) - a(x)\Phi(x,\lambda) + b(x)\Psi(x,\lambda), \\ \dfrac{d\Psi(x,\lambda)}{dx} = \lambda\Phi(x,\lambda) + b(x)\Phi(x,\lambda) + a(x)\Psi(x,\lambda) \end{cases} \tag{2.1}$$

где

$$\Phi(0,\lambda) = 1,\quad \Psi(0,\lambda) = 0; \tag{2.2}$$

$$a(x) = \operatorname{Re} R(x),\quad b(x) = -\operatorname{Im} R(x). \tag{2.3}$$

(зависимость от параметра t мы опускаем). Системе (2.1) посвящена известная работа М. Г. Крейна [5]. Обозначим через $\sigma(\lambda)$ и $\tilde{\sigma}(\lambda)$ спектральные функции систем соответственно (1.1) и (2.1) (определения см. [2 и 5]). Легко выводится равенство

$$\sigma(\lambda) = 2\tilde{\sigma}(\lambda). \tag{2.4}$$

2. Далее будем рассматривать случай вещественных $R(x)$, т. е.

$$b(x) = 0. \tag{2.5}$$

В этом случае, как извество [5],

$$\sigma(\lambda) = -\sigma(-\lambda), \tag{2.6}$$

а функции $\Psi(x,\lambda)$ и $\Phi(x,\lambda)$ таковы, что

$$\Psi'' - [a^2(x) + a'(x)]\Psi + \lambda^2\Psi = 0,\quad \Psi(0,\lambda) = 0, \tag{2.7}$$

$$\Phi'' - [a^2(x) - a'(x)]\Phi + \lambda^2\Phi = 0,\quad \Phi'(0,\lambda) + a(0)\Phi(0,\lambda) = 0. \tag{2.8}$$

(Функция $a(x)$ предполагается абсолютно непрерывной). Обозначим через $\sigma_1(\lambda)$ и $\sigma_2(\lambda)$ спектральные функции задач Штурма — Лиувилля соответственно (2.7) и (2.8) (см. определение [7]). При этом принята нормировка $\Psi'(0,\lambda) = 1$ и $\Phi(0,\lambda) = 1$. Сопоставляя определения спектральных функций, получаем

$$d\sigma_1(\lambda) = 2\lambda d\sigma(\sqrt{\lambda}),\ \lambda > 0;\ d\sigma_1(\lambda) = 0,\ \lambda \leqslant 0, \tag{2.9}$$

$$d\sigma_2(\lambda) = 2d\sigma(\sqrt{\lambda}),\ \lambda > 0;\ d\sigma_2(\lambda) = 0,\ \lambda \leqslant 0. \tag{2.10}$$

3. Следуя [7], через $\varphi_\alpha(x, z)$ и $\theta_\alpha(x, z)$ обозначим решения уравнения

$$-y'' + q(x) y = zy, \quad -\infty < x < \infty, \tag{2.11}$$

такие, что

$$-\varphi_\alpha(0, z) = \theta_\alpha(0, z) = \sin\alpha, \quad \varphi'_\alpha(0, z) = \theta_\alpha(0, z) = \cos\alpha. \tag{2.12}$$

В силу (2.12) функция $\varphi_\alpha(x, z)$ удовлетворяет краевому условию

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0. \tag{2.13}$$

Функции Вейля — Титчмарша $m_\alpha^+(z)$ и $m_\alpha^-(z)$ задачи (2.11), (2.12) соответственно на участках $(0, \infty)$ и $(-\infty, 0)$ определяются соотношениями

$$J_\alpha^+(x, z) = \theta_\alpha(x, z) + m_\alpha^+(z)\varphi_\alpha(x, z) \in L^2(0, \infty), \tag{2.14}$$

$$J_\alpha^-(x, z) = \theta_\alpha(x, z) + m_\alpha^-(z)\varphi_\alpha(x, z) \in L^2(-\infty, 0), \tag{2.15}$$

где $\operatorname{Im} z > 0$.

4. Вернемся снова к случаю (1.15), (1.16), причем будем дополнительно предполагать, что выполняется условие перемежаемости

$$0 > \tilde{\alpha}_1 > \tilde{\nu}_1 > \ldots > \tilde{\alpha}_N > \tilde{\nu}_N, \tag{2.16}$$

где $\alpha_k = i\tilde{\alpha}_k$, $\nu_k = i\tilde{\nu}_k$.

Из (2.9) следует, что задаче (2.7) соответствует функция Вейля—Титчмарша:

$$m_0^+(z) = \sqrt{z}\, v(\sqrt{z}) - ia_1(\alpha, \nu), \quad \operatorname{Im}\sqrt{z} > 0. \tag{2.17}$$

Функцию $m_0^-(z)$ определим равенством

$$m_0^-(z) = -i\sqrt{z}\, p_2\overline{(\sqrt{\bar{z}})}/p_1\overline{(\sqrt{\bar{z}})} + ia_1(\alpha, \nu), \quad \operatorname{Im}\sqrt{z} > 0. \tag{2.18}$$

В силу (1.15), (1.22) (2.17), (2.18) справедливо равенство

$$i\sqrt{z}(-1)^N Q(i\sqrt{z})/[\overline{p_1(\sqrt{\bar{z}})}\, p_1(\sqrt{z})] = m_0^+(z) - m_0^-(z). \tag{2.19}$$

Пользуясь формулой (1.16), из (2.16) выводим, что

$$\beta_k < 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant N. \tag{2.20}$$

Теорема 2.1. *Если выполняются условия (2.16), то функции* $v(z)$, $m_0^+(z)$ и $[-m_0^-(z)]$ принадлежат классу Неванлинны, а многочлен $Q(z)$ имеет N положительных корней ω_j и N отрицательных корней $(-\omega_j)$, причем

$$\omega_j \in (-\alpha_j, -\nu_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant N. \tag{2.21}$$

Доказательство. Непосредственным подсчетом убеждаемся, что $\operatorname{Im} v(z) > 0$, $\operatorname{Im} m_0^+(z) > 0$, $\operatorname{Im}[-m_0^-(z)] > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$, т. е. эти функции принадлежат классу Неванлинны.

В силу (1.22) многочлен $Q(z)$ на вещественной оси принимает вещественные значения, $Q(z) = Q(-z)$ и

$$Q(-\tilde{\alpha}_j) = (-1)^N \overline{P_1(-i\tilde{\alpha}_j)}\, P_2(i\tilde{\alpha}_j), \quad Q(-\tilde{\nu}_j) = (-1)^N p_1(i\tilde{\nu}_j)\overline{p_2(-i\tilde{\nu}_j)}.$$

Легко убедиться, учитывая (2.16), что $Q(-\tilde{\alpha}_j)$ и $Q(-\tilde{\nu}_j)$ имеют разные знаки. Значит, верно утверждение теоремы.

5. Заданной функции $v(z)$ согласно формулам (1.32) — (1.35) соответствует функция $R(x)$. Решая обратную задачу для уравнения (2.11) (см. [7]), по функциям $m_0^+(z)$, $m_0^-(z)$, определяемым формулами (2.17), (2.18), находим $q(x)$. При этом, учитывая (2.3), (2.7), имеем

$$q(x) = R^2(x) + R'(x), \ 0 < x < \infty. \tag{2.22}$$

Как известно [7], матрица-функция Вейля — Титчмарша $M(z) = \{M_{ij}(z)\}_{i,j=1}^2$ уравнения (2.11) на всей оси $(-\infty, \infty)$ имеет вид

$$M_{11}(z) = [m_0^+(z) - m_0^-(z)]^{-1}, \quad M_{22}(z) = m_0^+(z)\, m_0^-(z)/[m_0^+(z) - m_0^-(z)], \tag{2.23}$$

$$M_{12}(z) = M_{21}(z) = \frac{1}{2}[m_0^+(z) + m_0^-(z)]/[m_0^+(z) - m_0^-(z)]. \tag{2.24}$$

Из (2.17) — (2.19) и (2.23), (2.24) вытекает

Теорема 2.2. *Если выполняются условия (2.16), то задача (2.11) имеет N отрицательных собственных чисел:*

$$z_j = -\omega_j^2, \ 1 \leqslant j \leqslant N. \tag{2.25}$$

6. Выясним теперь связь спектральных характеристик $m_0^+(z)$, $m_0^-(z)$ с данными рассеяния задачи (2.11) на непрерывном спектре. Заметим, что из (2.17), (2.18) вытекает неравенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 + x^2)\,|q(x)|\,dx < \infty. \tag{2.26}$$

Тогда уравнение (2.11) имеет решения $\psi(x, k)$ и $\varphi(x, k)$ такие, что (см. [7])

$$\psi(x, k) = \exp(-ikx) + O(1), \ x \to +\infty, \ z = k^2, \ k > 0, \tag{2.27}$$

$$\varphi(x, k) = \exp(-ikx) + O(1), \ x \to -\infty, \ z = k^2, \ k > 0. \tag{2.28}$$

При $\operatorname{Im} z \to +0$ из (2.14), (2.15) и (2.27), (2.28) выводим равенства

$$J_0^+(x, k^2) = c(k)\,\psi(x, k), \ J_0^-(x, k^2) = d(k)\,\overline{\varphi(x, k)}. \tag{2.29}$$

В силу (2.27), (2.28) верно также равенство

$$\varphi(x, k) = a(k)\,\psi(x, k) + b(k)\,\overline{\psi(x, k)}. \tag{2.30}$$

Заметим, что $a(k)$ и $b(k)$ являются характеристиками задачи рассеяния для уравнения (2.11). Полагая в (2.30) $x = 0$ и учитывая (2.14), (2.15) и (2.29), имеем

$$\begin{cases} d^{-1}(k) = a(k)/\overline{c(k)} + b(k)/c(k), \\ m_0^-(k^2)/d(k) = a(k)\,\overline{m_0^+(k^2)}/\overline{c(k)} + b(k)\,m_0^+(k^2)/c(k). \end{cases} \tag{2.31}$$

Решая систему (2.31), находим

$$b(k) = c(k)\,[m_0^-(k^2) - \overline{m_0^+(k^2)}]/d(k)\,[m_0^+(k^2) - \overline{m_0^+(k^2)}]. \tag{2.32}$$

Из (2.17), (2.18), (2.32) и равенства $b(-k) = \overline{b(k)}$ следует, что

$$b(k) = 0, \ k = \bar{k}. \tag{2.33}$$

Теорема 2.3. *Потенциал $q(x)$, соответствующий матрице-функции Вейля — Титчмарша (2,23), (2.24), является безотражательным, причем равенство (2.22) верно при всех $x \in (-\infty, \infty)$.*

Доказательство. Безотражательность потенциала эквивалентна равенству (2.33), а справедливость (2.22) при $x \in (-\infty, \infty)$ следует из голоморфности безотражательного потенциала $q(x)$ и мероморфности $R(x)$.

Следствие 2.1. *Все вещественные особые точки $R(x)$ в случае (2.16) являются полюсами первого порядка, а соответствующие вычеты равны 1.*

7. Рассмотрим теперь случай, когда выполняется не (2.16), а следующее правило перемежаемости:

$$0 > \tilde{\nu}_1 > \tilde{\alpha}_1 > \ldots > \tilde{\nu}_N > \tilde{\alpha}_N. \tag{2.34}$$

В этом случае верны неравенства $\beta_j > 0$, $1 \leqslant j \leqslant N$. Выберем α так, что

$$a(0)/\sqrt{1+a^2(0)} = \cos\alpha, \quad 1/\sqrt{1+a^2(0)} = \sin\alpha. \tag{2.35}$$

Через $m_\alpha^+(z)$ обозначим функцию Вейля — Титчмарша задачи (2.8) на полуоси $(0, \infty)$. Тогда $m_0^+(z)$ для уравнения (2.8) имеет вид

$$m_0^+(z) = [\sin\alpha + m_\alpha^+(z)\cos\alpha]/[\cos\alpha - m_\alpha^+(z)\sin\alpha]. \tag{2.36}$$

Повторяя рассуждения пп. 4—6, приходим к равенству

$$q(x) = R^2(x) - R'(x), \quad -\infty < x < \infty. \tag{2.37}$$

При этом остаются верными утверждения теорем 2.1, 2.2, соответствующий потенциал $q(x)$ является безотражательным и справедливо

Следствие 2.2. *Все вещественные особые точки $R(x)$ в случае (2.34) являются полюсами первого порядка, а соответствующие вычеты равны (-1).*

8. Наряду с $v(z)$ вида (1.15) рассмотрим функцию $v_1(z) = -v^{-1}(z)$. Решая обратные задачи для системы (2.1) — (2.3), по $v(z)$ и $v_1(z)$ находим $R(x)$ и $R_1(x)$. Верна

Теорема 2.4. *Функции $R(x)$ и $R_1(x)$, соответствующие функциям Вейля — Титчмарша $v(z)$ и $v_1(z)$, связаны равенством*

$$R(x) = -R_1(x). \tag{2.38}$$

Доказательство. В силу формулы (1.22) функциям $v(z)$ и $v_1(z)$ соответствует один и тот же многочлен $Q(z)$. Если ω_k — корень $Q(z)$, то из (1.22) следует, что

$$p_1(-i\omega_k)/\overline{p_1(i\overline{\omega}_k)} = -p_2(-i\omega_k)/\overline{p_2(i\overline{\omega}_k)}. \tag{2.39}$$

Из теоремы 1.1 и (2.39) следует доказываемое утверждение.

§ 3. Область регулярности и связь с N-солитонными решениями

1. В данном параграфе существенную роль играет исследование зависимости $v(t, z)$ и $R(x, t)$ от параметра t. Пользуясь соотношениями (1.11) — (1.13), имеем

$$\tilde{\alpha}_k'(t) = \tilde{\alpha}_k(t)\beta_k(t)\left[\tilde{\alpha}_k^2(t) + \sum_{j=1}^{N} \tilde{\alpha}_j(t)\beta_j(t)\right], \quad 1 \leqslant k \leqslant N, \tag{3.1}$$

где $\alpha_k(t) = i\tilde{\alpha}_k(t)$. Запишем $v^{-1}(t, z)$ в виде

$$v^{-1}(t, z) = -i + \sum_{k=1}^{N} \delta_k(t)/[z - i\tilde{v}_k(t)].$$

Аналогично (3.1) выводим, что

$$\tilde{v}_k'(t) = -\tilde{v}_k(t)\,\delta_k(t)\,[v_k^2(t) - \sum_{j=1}^{N} \tilde{v}_j(t)\,\delta_j(t)]. \qquad (3.2)$$

Из (3.1), (3.2) методом последовательных приближений доказывается

Лемма 3.1. *Если в момент t_0 выполняется одно из соотношений (2.16) или (2.34), то это соотношение выполняется и при $t \in (t_0 - T,\ t_0 + T)$, где T достаточно мало.*

Из (2.16) (2.34) и (3.1), (3.2) вытекает

Теорема 3.1. *Если выполняется условие (2.16), то функции $\tilde{\alpha}_k(t)$ монотонно возрастают. Если выполняется условие (2.34), то функции $\tilde{v}_k(t)$ монотонно возрастают.*

Здесь учтено, что при условии (2.16) верно неравенство $\beta_k < 0$ $(1 \leqslant k \leqslant N)$, а при условии (2.34) верно неравенство $\delta_k > 0\ (1 \leqslant k \leqslant N)$.

В силу (1.23), (1.24) из теоремы 3.1 вытекает важное

Следствие 3.1. *Пусть в момент t_0 выполняется одно из двух соотношений (2.16) или (2.34). Тогда это соотношение остается верным и при всех $t \leqslant t_0$, а решение $R(x, t)$ уравнения (0.1), определенное формулами (1.32)—(1.35), является регулярным в области $0 \leqslant x < \infty$, $t \leqslant t_0$, причем*

$$\lim_{t \to -\infty} \tilde{\alpha}_k(t) = \lim_{t \to -\infty} \tilde{v}_k(t) = -\omega_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant N.$$

2. Запишем преобразование Миуры [4]:

$$v_{\pm}(x, t) = -\frac{1}{2}\left[R^2(x, t) \pm \frac{\partial R(x, t)}{\partial x}\right], \quad u_{\pm}(x, t) = v_{\pm}(x/\sqrt{2},\ t\sqrt{2}). \qquad (3.3)$$

Преобразование Миуры переводит вещественное решение уравнения МКдФ (0.1) в решение уравнения КдФ (0.3). Из теорем 2.2, 2.3 следует

Теорема 3.2. *Пусть выполнено при $t = 0$ условие (2.16). Тогда функция $u_+(x, t)$, определенная формулами (1.32)—(1.35) и (3.3), является N-солитонным решением уравнения КдФ (0.3) при $-\infty < x < \infty$. Если выполнено условие (2.34), то функция $u_-(x, t)$ является N-солитонным решением уравнения КдФ (0.3).*

Список литературы: 1. *Солитоны* / Под ред. Р. Буллаф, Ф. Кодри. М., 1983. 408 с. 2. *Сахнович Л. А.* Задачи факторизации и операторные тождества // Успехи мат. наук. 1986. **41**, № 1. С. 3—55. 3. *Сахнович Л. А.* Нелинейные уравнения и обратные задачи. К., Ин-т мат.: препринт. 1987. 56 с. 4. *Ньюэлл А.* Солитоны в математике и физике. М., 1989. 323 с. 5. *Крейн М. Г.* Континуальные аналоги предложений о многочленах, ортогональных на единичной окружности // Докл. АН СССР, 1955. **105**, № 4. С. 673—640. 6. *Сахнович Л. А.* Procedure of solving nonlinear equations on half-axis. Nonlinear world, **2**. 1989. С. 314—317. 7. *Левитан Б. М.* Обратные задачи Штурма — Лиувилля. М., 1984. 239 с. 8. *Сахнович Л. А., Тыднюк И. Ф.* Об одном классе интегральных уравнений статистической радиотехники // Сб. науч. тр. ОЭИС. Одесса, 1989. С. 94—98.

Поступила в редколлегию 23.10.90