ОБРАЩЕНІЕ

ЭЛЛИПТИЧЕСКИХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ.

М. Тихомандрицкаго.

Въ замѣткѣ моей «Ueber das Umkehrproblem der elliptischen Integrale» (Math. Ann. Bd. 22) я показалъ, какимъ образомъ, исходя изъ теоремы сложенія интеграловъ 2 рода, мы само собою приходимъ къ Θ-функціи или къ Al (u) Вейерштрасса; въ замѣткѣ «О введеніи Θ-функцій въ теорію эллиптическихъ функцій», помѣщенной въ Сообщеніяхъ и протоколахъ засѣданій математическаго общества при харьковскомъ университетѣ 1883 года вып. I, я прибавилъ къ содержащемуся въ предыдущей статьѣ замѣчаніе, что тотъ-же самый путь приводитъ вообще ко всѣмъ функціямъ, которыя Бріо и Букэ называютъ «fonctions intermédiaires» (Théorie des fonctions elliptique, 2 éd., p. 236); въ слѣдующей моей замѣткѣ (помѣщенной въ «Сообщеніяхъ» 1883 г. вып. II) подъ заглавіемъ—«Выводъ основныхъ предложеній теоріи эллиптическихъ интеграловъ независимо отъ канонической формы подрадикальной функціи» я показалъ, что найденный мною переходъ отъ интеграловъ къ Θ-функціямъ не требуетъ приведенія подрадикальной функціи къ каноническому виду, если ограничиться полиномами 3 степени, къ какому виду всегда можно привести подрадикальную функцію съ помощію линейной подстановки. Впослѣдствіи я замѣтилъ однако, что существуетъ болѣе прямой способъ перехода отъ интеграловъ къ fonctions intermédiaires, причемъ не только не требуется, чтобы была доказана теорема сложенія интеграловъ 1-го и 2-го рода, но и вообще, чтобы было что-либо извѣстно изъ теоріи эллиптическихъ интеграловъ, кромѣ только того, что верхній предѣлъ эллиптическаго интеграла 1 рода есть однозначная функція значенія интеграла, принимаемаго за независимую перемѣнную, такъ какъ даже двоякая періодичность эллиптическихъ функцій— основное ихъ свойство, получается при этомъ сама собою. Что же касается до однозначности верхняго предѣла интеграла, разсматриваемаго какъ функція значенія интеграла, то это легко можетъ быть доказано (см. *Briot et Bouquet*, Théorie des fonctions doublement périodiques et en particulier des fonctions elliptiques).

Въ предлагаемой теперь замѣткѣ, читанной мною въ математическомъ семинарѣ въ Лейпцигѣ 24 іюля 1884 г., я показываю этотъ новый переходъ отъ эллиптическихъ интеграловъ къ Θ-функціямъ, предполагая эллиптическій интегралъ приведеннымъ къ Вейерштрассовской канонической формѣ, чтобы вмѣстѣ съ тѣмъ получить и переходъ къ тѣмъ функціямъ $\sigma(u)$ изъ рода intermédiaires, которыми Вейерштрассъ замѣняетъ теперь свои прежнія $\mathrm{Al}\,(u)$.

Приведеніе эллиптическихъ интеграловъ къ канонической формѣ Вейерштрасса по его способу можно найдти въ брошюрѣ Митагъ-Лефлера: En metod att komma i analytisk besittning af de elliptiska Functionerna. Af Gösta *Mittag-Leffler*. Helsingfors. J. C. Frenckelletson. 1876; другой способъ, основанный на теоріи бинарныхъ биквадратичныхъ формъ, можно найдти въ мемуарѣ Hermite'a («Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées». Premier mémoire. Crelle. Bd. 52, p. 7 et 8).

1.

Мы опредѣляемъ x какъ функцію отъ u уравненіемъ:

$$\frac{dx}{du} = -\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}$$

(гдѣ g_2 и g_3 постоянныя, именно оба инваріанта биквадратичной бинарной формы) при условіи $x = \infty$ для $u = 0$.

Возвышая это уравненіе въ квадратъ, раздѣляя на $(x-\alpha)^2$ и разлагая вторую часть по строкѣ Тайлора, будемъ имѣть:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{d\log(x-\alpha)}{du}\right)^2 = \frac{R(\alpha)}{(x-\alpha)^2} + \frac{R'(\alpha)}{x-\alpha} + \frac{R''(\alpha)}{1.2} + \frac{R'''(\alpha)}{1.2.3}(x-\alpha),$$

гдѣ для краткости положено:

$$4x^3 - g_2 x - g_3 = 4R(x).$$

Дифференцируя предыдущее уравненіе по u и раздѣляя обѣ части на $\frac{d\log(x-\alpha)}{du}$, получимъ такое:

$$\frac{d^2\log\sqrt{x-\alpha}}{du^2} = -2\frac{R(\alpha)}{(x-\alpha)^2} - \frac{R'(\alpha)}{x-\alpha} + \frac{R'''(\alpha)}{1.2.3}(x-\alpha).$$

Оно приметъ болѣе простой видъ, если взять за α, которое до сихъ поръ оставалось произвольнымъ, корень уравненія $R(x) = 0$, напр. e_i, если $R(x) = (x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)$.

Тогда мы будемъ имѣть:

$$\frac{d^2\log\sqrt{x-e_i}}{du^2} = -\frac{R'(e_i)}{x-e_i} + \frac{R'''(e_i)}{1.2.3}(x-e_i)$$

или

$$\frac{d^2\log\sqrt{x-e_i}}{du^2} = \left(b - \frac{R'(e_i)}{x-e_i}\right) - (b-(x-e_i)), \quad (1)$$

(гдѣ b произвольная постоянная) такъ какъ $\frac{R'''(\alpha)}{1.2.3} = 1$.

2.

Первый членъ второй части приводится къ виду втораго чрезъ не лишенную значенія въ теоріи эллиптическихъ функцій подстановку:

$$y - e_i = \frac{R'(e_i)}{x - e_i}; \qquad (2)$$

на основаніи которой значеніямъ x-са: ∞, e_i, e_k, e_l, отвѣчаютъ значенія y: e_i, ∞, e_l, e_k; и такъ какъ изъ (2)

$$\frac{dy}{2\sqrt{R(y)}} = -\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}},$$

то будетъ:

$$\int_{e_i}^{y} \frac{dy}{2\sqrt{R(y)}} = -\int_{\infty}^{x} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} = u. \qquad (3)$$

Такъ какъ далѣе

$$\int_{e_i}^{y} \frac{dy}{2\sqrt{R(y)}} = \int_{e_i}^{\infty} \frac{dy}{2\sqrt{R(y)}} - \int_{y}^{\infty} \frac{dy}{2\sqrt{R(y)}} = \omega_i - v,$$

если положить

$$\int_{e_i}^{\infty} \frac{dy}{2\sqrt{R(y)}} = \omega_i, \text{ и } -\int_{\infty}^{y} \frac{dy}{2\sqrt{R(y)}} = v,$$

то послѣднее уравненіе обратится въ такое

$$\omega_i - v = u.$$

Если введемъ теперь Вейерштрассовское обозначеніе для функціи x отъ u, положивъ:

$$x = p(u),$$

и слѣдовательно

$$y = p(v) = p(\omega_i - u),$$

то формула (2) дастъ слѣдующее соотношеніе между значеніями функціи $p(u)$ для значеній аргумента, дополняющихъ другъ друга до ω_i:

$$p(\omega_i - u) - e_i = \frac{R'(e_i)}{p(u) - e_i}. \tag{4}$$

Предположивъ доказанною однозначность функціи $p(u)$, отсюда сейчасъ получимъ ея періодичность. Дѣйствительно, замѣтивъ, что она четная, что слѣдуетъ изъ самого опредѣляющаго ее уравненія (3), и перемѣнивъ u на $u + \omega_i$, получимъ:

$$p(u) - e_i = \frac{R'(e_i)}{p(u + \omega_i) - e_i},$$

и чрезъ повтореніе того же пріема:

$$p(u + \omega_i) - e_i = \frac{R'(e_i)}{p(u + 2\omega_i) - e_i},$$

откуда, по сравненіи съ предыдущимъ, тотчасъ получается:

$$p(u + 2\omega_i) = p(u). \tag{5}$$

Слѣдовательно $2\omega_i$ есть періодъ функціи $p(u)$. Повидимому такихъ періодовъ будетъ три. Но съ помощію формулы (3) легко убѣдиться, что третій будетъ линейная функція двухъ первыхъ съ цѣлыми коэффиціентами.

3.

Выразивъ теперь въ уравненіи (1) все чрезъ u, мы дадимъ ему такой видъ:

$$\frac{d^2\log\sqrt{p(u)-p(\omega_i)}}{du^2} = c - p(u-\omega_i) - (c - p(u))$$

(гдѣ положено $b + e_i = c$). Интегрируя это уравненіе по u отъ $u = \omega_k$, получимъ:

$$\frac{d\log\sqrt{p(u)-p(\omega_i)}}{du} = \int\limits_{\omega_k}^{u}(c-p(u-\omega_i))du^2 - \int\limits_{\omega_k}^{u}(c-p(u))\,du$$

или

$$\frac{d\log\sqrt{p(u)-p(\omega_i)}}{du} = \int\limits_{\omega_k-\omega_i}^{u-\omega_i}(c-p(u))du - \int\limits_{\omega_k}^{u}(c-p(u))\,du.$$

Полагая:

$$\int(c-p(u))\,du = Z(u) + C,$$

мы можемъ послѣднее уравненіе написать такъ:

$$\frac{d\log\sqrt{p(u)-p(\omega_i)}}{du} =$$

$$= Z(u-\omega_i) - Z(u) - [Z(\omega_k-\omega_i) - Z(\omega_k)]. \qquad (7)$$

Но теперь изъ періодичности функціи $p(u)$ слѣдуетъ, что:

$$c - p(u+\omega_i) = c - p(u-\omega_i);$$

помножая это уравненіе на du и интегрируя отъ u_0, получимъ:

$$\int\limits_{u_0}^{u}(c-p(u+\omega_i))\,du = \int\limits_{u_0}^{u}(c-p(u-\omega_i))\,du$$

или

$$\int_{u_0+\omega_i}^{u+\omega_i} (c-p(u))\,du = \int_{u_0-\omega_i}^{u-\omega_i} (c-p(u))\,du,$$

откуда слѣдуетъ, что разность

$$Z(u+\omega_i)-Z(u-\omega_i)=Z(u_0+\omega_i)-Z(u_0-\omega_i)$$

отъ u не зависитъ; положимъ

$$Z(u+\omega_i)-Z(u-\omega_i)=2\eta_i. \qquad (8)$$

Это равенство показываетъ, что функція $Z(u)$ обладаетъ періодичностію 2 рода (по Эрмиту) и что η_i есть модуль этой періодичности. Полагая здѣсь $u=0$ и принимая во вниманіе, что $Z(u)$ есть нечетная функція, такъ какъ ея производная $c-p(u)$ есть четная функція, мы получимъ:

$$\eta_i = Z(\omega_i). \qquad (9)$$

Полагая въ томъ-же уравненіи (8) $u=\omega_k$, получимъ:

$$Z(\omega_k+\omega_i)-Z(\omega_k-\omega_i)=2\eta_i;$$

но точно такъ-же будемъ имѣть и уравненіе:

$$Z(\omega_i+\omega_k)-Z(\omega_i-\omega_k)=2\eta_k;$$

вычитая изъ этого уравненія предыдущее и дѣля на 2, получимъ:

$$Z(\omega_k-\omega_i)=\eta_k-\eta_i. \qquad (10)$$

На основаніи (9) и (10) уравненіе (7) принимаетъ теперь такой видъ:

$$\frac{d\log\sqrt{p(u)-p(\omega_i)}}{du}=Z(u-\omega_i)-Z(u)+\eta_i. \qquad (11)$$

4.

Интегрируя послѣднее уравненіе по u въ тѣхъ же предѣлахъ, получимъ:

$$\log \sqrt{\frac{p(u)-p(\omega_i)}{p(\omega_k)-p(\omega_i)}} =$$

$$= \int_{\omega_k}^{u} Z(u-\omega_i)\,du - \int_{\omega_k}^{u} Z(u)\,du + \eta_i(u-\omega_k)$$

или

$$\log \sqrt{\frac{p(u)-p(\omega_i)}{p(\omega_k)-p(\omega_i)}} =$$

$$= \int_{\omega_k-\omega_i}^{u-\omega_i} Z(u)\,du - \int_{\omega_k}^{u} Z(u)\,du + \eta_i(u-\omega_k)\,, \qquad (12)$$

и переходя отъ логариѳма къ числу:

$$\sqrt{\frac{p(u)-p(\omega_i)}{p(\omega_k)-p(\omega_i)}} = \frac{e^{\int_{\omega_k-\omega_i}^{u-\omega_i} Z(u)\,du} \,.\, e^{\eta_i(u-\omega_k)}}{e^{\int_{\omega_k}^{u} Z(u)\,du}} \qquad (13)$$

Естественно ввести особое обозначеніе для новой трансцендентной, появившейся теперь во второй части; положивъ потому

$$e^{\int_{u_0}^{u} Z(u)\,du} = \frac{\Theta(u)}{\Theta(u_0)}\,, \qquad (14)$$

мы можемъ послѣднее полученное уравненіе представить такъ:

$$\sqrt{\frac{p(u)-p(\omega_i)}{p(\omega_k)-p(\omega_i)}} = \frac{\Theta(u-\omega_i)\,.\,e^{\eta_i(u-\omega_k)}\,.\,\Theta(\omega_k)}{\Theta(u)\,.\,\Theta(\omega_k-\omega_i)}\,.$$

Отсюда, положивъ для краткости

$$\frac{\sqrt{p(\omega_k)-p(\omega_i)}}{\dfrac{\Theta(\omega_k-\omega_i)e^{\eta_i\omega_k}}{\Theta(\omega_k)}}=C\,,$$

получимъ:

$$\sqrt{p(u)-p(\omega_i)}=C\,\frac{\Theta(u-\omega_i)e^{\eta_i u}}{\Theta(u)}\,, \qquad (15)$$

и такихъ формулъ будетъ три.

5.

Изъ уравненія (14), опредѣляющаго функцію $\Theta(u)$, можно вывести извѣстнымъ способомъ (см. нашу замѣтку «О введеніи Θ-функціи въ теорію эллиптическихъ функцій». Сообщенія и протоколы 1883 г., вып. I), что функція $\Theta(u)$: 1) есть однозначная функція отъ u; 2) для конечныхъ значеній u всегда конечная; 3) для $u=0$ равна нулю, и 4) обладаетъ періодичностію 3 рода, что выражается уравненіемъ:

$$\Theta(u+2\omega_i)=-e^{2\eta_i(u+\omega_i)}\,\Theta(u). \qquad (16)$$

Сдѣлавъ $c=0$ въ выраженіи $Z(u)$, мы получимъ отсюда функцію, которая только независящимъ отъ u множителемъ будетъ отличаться отъ функціи $\sigma(u)$, которую Вейерштрассъ опредѣляетъ уравненіемъ:

$$\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}=-\int\frac{zdz}{\sqrt{4z^3-g_2 z-g_3}}\,; \qquad (17)$$

сдѣлавъ $\eta_i=0$, что даетъ для c значеніе $\dfrac{\bar{\eta}_i}{\omega_i}$, если $\bar{\eta}_i$ относится къ частному виду $Z(u)$, именно

$$Z(u) = -\int p(u)\,du + C,$$

мы получимъ функцію, которая подобнымъ же образомъ будетъ отличаться отъ Якобіевской $\Theta(u)$.

Вообще же наши $\Theta(u)$ будутъ fonctions intermédiaires Briot et Bouquet, ибо эти послѣднія какъ-разъ опредѣляются уравненіями (16), изъ которыхъ только два независимыхъ.