МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені В. Н. КАРАЗІНА

МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ НЕВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Методичні вказівки
до виконання індивідуального домашнього завдання за темою
«Невизначені інтеграли»

Електронне видання

Харків – 2023

УДК 517.312
М 54

Рецензенти:

С. Л. Гефтер – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри фундаментальної математики факультету математики і інформатики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна;

О. Л. Вишневецький – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої математики Харківського національного автомобільно-дорожнього університету.

Затверджено до розміщення в мережі Інтернет рішенням Науково-методичної ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (протокол № 8 від 16 травня 2023 року)

М 54 **Методи** обчислення невизначених інтегралів : методичні вказівки до виконання індивідуального домашнього завдання за темою «Невизначені інтеграли» [Електронне видання] / уклад. О. А. Макаров, І. Г. Ніколенко. – Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2023. – (PDF 36 с.)

Методичні вказівки з курсу «Математичний аналіз» факультету математики і інформатики (спеціальності 111 – «Математика», 113 – «Прикладна математика») та з курсу «Вища математика» факультету комп’ютерних наук (спеціальності 122 – «Комп’ютерні науки», 123 – «Комп’ютерна інженерія», 125 – «Кібербезпека», 174 – «Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології»), розроблені для студентів 1 курсу першого бакалаврського рівня освіти денної та заочної форм навчання.

Наведені матеріали ознайомлюють студентів з методами обчислення невизначених інтегралів при вивченні теми «Невизначені інтеграли». Крім того, в посібнику наведені варіанти індивідуальних завдань з цієї теми.

УДК 517.312

ЗМІСТ

Вступ

Мета даних методичних вказівок – надати допомогу студентам 1 курсу при засвоєнні та самостійному вивченні теми «Невизначені інтеграли».

У першому розділі без доведення наведено основні теоретичні факти та таблиця невизначених інтегралів. Також посібник містить типові приклади. Основою цього розділу є стандартні університетські підручники з математичного аналізу [1, 2] та збірники задач [3, 4], а також конспекти лекцій та матеріали практичних занять авторів.

Останній розділ складається з 28 варіантів залікових завдань на цю тему.

1. Первісна і невизначений інтеграл

Обернена операція до диференціювання називається **інтегруванням**.

Означення 1. ***Первісною*** *функції* $f(x)$ *на інтервалі* (a,b) *називається функція* $F(x)$ *така, що*

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b).$$

Зауваження. *Інтервал* (a,b) *може бути нескінченним.*

Приклади. 1) $\cos x \to \sin x$,
2) $1 \to x$,
3) $0 \to C$, де C – довільна стала.

Первісна визначається неоднозначно.

Теорема. *Якщо* $F_1(x)$ *і* $F_2(x)$ *– первісні функції* $f(x)$ *на інтервалі* (a,b), *то*

$$F_1(x) - F_2(x) = C,$$

де C – довільна стала.

Доведення. Якщо розглянути функцію

$$\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x),$$

то оскільки за умовою теореми $F_1(x)$ *і* $F_2(x)$ – первісні функції $f(x)$ на інтервалі (a,b), то

$$\Phi'(x)=0 \quad \forall x\in(a,b),$$

звідки за наслідком теореми Лагранжа

$$\Phi(x)\equiv const.$$

Теорему доведено.

Означення 2. *Множина усіх первісних функції $f(x)$ на інтервалі (a,b) називається **невизначеним інтегралом** і позначається*

$$\int f(x)dx=F(x)+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Приклади. 1) $\int\cos dx=\sin x+C$,

2) $\int dx=x+C$,

3) $\int 0dx=C$, $C\in\mathbb{R}$.

2. Основні властивості невизначених інтегралів

1. $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$ або $d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx$ (випливає з означення).

2. $\int F'(x)dx=F(x)+C$, $C\in\mathbb{R}$ (випливає з означення).

3. $\int\left(f(x)+g(x)\right)dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$ *– **лінійність** невизначених інтегралів.*

Властивість **3** випливає з того, що якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ мають на проміжку X первісні $F(x)$ та $G(x)$ відповідно, то функція $f(x)+g(x)$ має на проміжку X первісну $F(x)+G(x)$, тобто множини ліворуч та праворуч у виписаній рівності властивості **3** збігаються.

4. $\int k\cdot f(x)\,dx=k\int f(x)dx$ – ***лінійність*** невизначених інтегралів.

Властивість **4** випливає з того, що якщо функція $f(x)$ має на проміжку X первісну $F(x)$, то функція $k\cdot f(x)$ має на проміжку X первісну $k\cdot F(x)$, тобто множини ліворуч та праворуч у виписаній рівності властивості **4** збігаються.

Зауваження. Властивості **3** та **4** можна записати так:

$$\int \left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)dx=\alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx,\ \text{де}\ \alpha,\ \beta-\text{сталі},$$

– ***лінійність*** *невизначених інтегралів.*

Таблиця невизначених інтегралів

1. $\int 0\, dx = C;$

2. $\int 1\, dx = x + C;$

3. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1, \quad x > 0;$

4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad x \neq 0$

5. $\int a^{x} dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C, \qquad \int e^{x} dx = e^{x} + C$

6. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

7. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + C, \qquad x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\, x + C, \qquad x \neq k\pi$

10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \qquad x \in (-1;1)$

11. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arc\,tg\, x + C = -arc\,ctg\, x + C$

12. $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{dx}{1-x} + \dfrac{1}{2}\int \dfrac{dx}{1+x} = \dfrac{1}{2}\ln|1+x| - \dfrac{1}{2}\ln|1-x| = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| + C$

13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C$

14. $\int sh\, x\, dx = ch\, x + C$

15. $\int ch\, x\, dx = sh\, x + C$

16. $\int \dfrac{dx}{ch^2 x} = th\, x + C$

17. $\int \dfrac{dx}{sh^2 x} = -\,cth\, x + C \;\;, \;\; C \in \mathbb{R}$

Зауваження. *У неперервної на відрізку функції завжди існує первісна (і невизначений інтеграл).*

Але первісна елементарної функції може бути неелементарною функцією.

Наприклад, $\int e^{-x^2}dx;\quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx;\quad \int \cos\left(x^2\right)dx.$

Приклади обчислення:

Приклад 2.1.

$$\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^2 dx=\int\left(x+\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\frac{x^2}{2}+2\cdot 2x^{\frac{1}{2}}-x^{-1}+C\,,\quad C\in\mathbb{R}.$$

Приклад 2.2. $\int tg^2x\,dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}=tg\,x-x+C\,,\quad C\in\mathbb{R}.$

Приклад 2.3. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^3}}=\int x^{-\frac{3}{2}}dx=\frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{1}{2}}+C=-\frac{2}{\sqrt{x}}+C\quad,\quad C\in\mathbb{R}.$

Перевірка: $\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}+C\right)'=-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1}+0=\frac{1}{\sqrt{x^3}}.$

Приклад 2.4. $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx=\int\left(x+2+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{x^2}{2}+2x+\ln|x|+C\,,\quad C\in\mathbb{R}.$

Приклад 2.5.

$$\int ctg^2x\,dx=\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx=-ctg\,x-x+C\,,\quad C\in\mathbb{R}.$$

3. Заміна змінної

Із формули $F\left(\varphi(x)\right)'=F'(\varphi)\cdot\varphi'(x)$ випливає формула заміни змінної (чи підстановки):

$$\int f\left(\varphi(x)\right)\cdot\varphi'(x)\,dx=F\left(\varphi(x)\right)+C\ ,\ \text{де}\ F(x)-\text{первісна функції}\ f(x).$$

Наслідки. 1. $\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C;\qquad a\neq 0,\ C\in\mathbb{R}$.

2. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln\left|f(x)\right|+C,\ C\in\mathbb{R}$.

Приклад 3.1. $\int (2x+3)^3\,dx=\frac{1}{2}\frac{\left(2x+3\right)^4}{4}+C$, $C\in\mathbb{R}$ (за наслідком 1).

Або можна виконати підстановку:

$$\int (2x+3)^3\,dx=\left|\begin{array}{l} 2x+3=t \\ x=\dfrac{t-3}{2} \\ dx=\dfrac{1}{2}dt \end{array}\right|=\frac{1}{2}\int t^3\,dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^4}{4}+C=\frac{\left(2x+3\right)^4}{8}+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Приклад 3.2. $\int \mathrm{ctg}\,x\,dx=\int\frac{(\sin x)'}{\sin x}dx=\ln\left|\sin x\right|+C$ (за наслідком 2).

Або можна виконати підстановку:

$$\int \mathrm{ctg}\,x\,dx=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\left|\begin{array}{c} t=\sin x \\ dt=\cos x\,dx \end{array}\right|=\int\frac{dt}{t}=\ln\left|t\right|+C=\ln\left|\sin x\right|+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Приклад 3.3.

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{\left(\dfrac{x}{a}\right)^2+1}=\left|\begin{array}{l} \dfrac{x}{a}=t \\ x=a\cdot t \\ dx=a\cdot dt \end{array}\right|=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{a}\left(\mathrm{arctgt}\right)\Big|_{t=\frac{x}{a}}+C=\frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a}+C.$$

Приклад 3.4.

$$\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int \arcsin x\ d(\arcsin x)=\left|\arcsin x=t\right|=\int t\ dt=\frac{t^2}{2}+C=\frac{1}{2}\arcsin^2 x+C,$$

$C\in\mathbb{R}$.

Приклад 3.5. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\,\frac{x}{a}}{\left(x/a\right)^2+1} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$, $C \in \mathbb{R}$.

Приклад 3.6. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx = \int \operatorname{arctg} x\, d\left(\operatorname{arctg} x\right) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x + C,\quad C \in \mathbb{R}$.

Приклад 3.7.

$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \arcsin x\; d(\arcsin x) = \left|\arcsin x = t\right| = \int t\; dt = \frac{t^2}{2}+C = \frac{1}{2}\arcsin^2 x + C$,

$C \in \mathbb{R}$.

4. Інтегрування частинами

Із формули похідної добутку функцій випливає:

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx.$$

Приклад 4.1. $\int x\cdot e^x dx = x\cdot e^x - \int e^x dx = x\cdot e^x - e^x + C,\; C \in \mathbb{R}$.

Приклад 4.2.

$\int\left(x+5\right)\cdot e^x dx = \int\left(x+5\right)d\left(e^x\right) = \left(x+5\right)\cdot e^x - \int e^x \underbrace{d\left(x+5\right)}_{dx} = \left(x+5\right)\cdot e^x - e^x + C$,

$C \in \mathbb{R}$.

Приклад 4.3.

$\int \ln x\, dx = x\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot x\;\, dx = x\ln x - x + C,\; C \in \mathbb{R}$.

Приклад 4.4.

$\int \operatorname{arctg} x\, dx = x\cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\cdot\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C,\; C \in \mathbb{R}$.

Приклад 4.5.

$$\int \arcsin x\,dx = x\cdot\arcsin x - \int x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\cdot\arcsin x + \frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}d\left(-x^2+1\right) =$$

$$= \left|1-x^2=t\right| == x\cdot\arcsin x + \frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}} = x\cdot\arcsin x + \sqrt{t} + C = x\cdot\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

$C\in\mathbb{R}$.

Приклад 4.6.

$$\int x\sin 2x dx = -\frac{1}{2}\int xd\left(\cos 2x\right) = -\frac{1}{2}\left(x\cos 2x - \int\cos 2x dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Приклад 4.7.

$$I = \int\sqrt{x^2+a}\,dx = x\sqrt{x^2+a} - \int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}dx = x\sqrt{x^2+a} - \int\frac{x^2+a-a}{\sqrt{x^2+a}}dx =$$

$$= x\sqrt{x^2+a} - \int\sqrt{x^2+a}\,dx + a\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = x\sqrt{x^2+a} - I + a\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}},$$

тобто

$$I = x\sqrt{x^2+a} - I + a\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}},$$

Якщо перенести з правої частини ліворуч шуканий інтеграл I, отримаємо формулу

$$\int\sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a}\right) + C,\ \ C\in\mathbb{R}.$$

Приклад 4.8. Аналогічно, як і в прикладі **4.7**, отримуємо, що

$$I = \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} + \int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = x\sqrt{a^2-x^2} - \int\frac{\left(a^2-x^2\right)-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx + a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = x\sqrt{a^2-x^2} - I + a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$2I = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

звідки

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C, \ \ C \in \mathbb{R}.$$

5. Інтегрування раціональних функцій

В цьому розділі ми розглянемо інтегрування раціональних функцій.

Означення. ***Раціональною функцією*** *або* ***раціональним дробом*** $R(z)$ *називається функція, яку можна представити у вигляді відношення двох поліномів:*

$$R(z) = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)},$$

де $P_m(z) -$ *многочлен (поліном) степеня* m, $Q_n(z) -$ *многочлен степеня* n.

Раціональний дріб (раціональна функція) називається ***правильним***, якщо степінь чисельника менше за степінь знаменника, тобто $m < n$. В протилежному випадку (якщо $m \geq n$) раціональний дріб називається ***неправильним***. Всякий неправильний раціональний дріб можна діленням чисельника на знаменник представити у вигляді суми многочлена та правильного раціонального дробу, тобто

якщо степінь чисельника більше за степінь знаменника, то можна виділити цілу частину (поліном) й представити даний дріб як суму полінома і правильної раціональної функції.

Приклад 5.1. $R(z) = \dfrac{z^3 + z + 1}{z^2 + 1} = \dfrac{z\left(z^2 + 1\right) + 1}{z^2 + 1} = z + \dfrac{1}{z^2 + 1}$,

де $z -$ поліном першого степеня (лінійний поліном), а $\dfrac{1}{z^2 + 1}$ − правильний раціональний дріб.

Таким чином, далі будемо розглядати правильні раціональні функції.

Скористаємося теоремою з алгебри, що стверджує, що правильний раціональний дріб з дійсними коефіцієнтами можна розкласти на найпростіші дроби:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r_i}\frac{A_{ij}}{(x-a_i)^j}+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{s_i}\frac{B_{ij}x+C_{ij}}{\left(x^2+p_ix+q_i\right)^j}.$$

Приклад 5.2. $R(z)=\dfrac{z+1}{z^3-2z^2+z}$.

Розкладемо дану раціональну функцію $R(z)$ за теоремою на найпростіші дроби:

$$\frac{z+1}{z\left(z-1\right)^2}=\frac{A}{z}+\frac{B}{\left(z-1\right)^2}+\frac{C}{z-1}.$$

<u>1 спосіб:</u>

Коефіцієнт A легко знайти, помноживши рівність на z та підставивши $z=0$:

$$\left.\frac{z+1}{\left(z-1\right)^2}\right|_{z=0}=A \quad\Rightarrow\quad A=1.$$

Коефіцієнт B легко знайти, помноживши рівність на $\left(z-1\right)^2$ та підставивши $z=1$:

$$\left.\frac{z+1}{z}\right|_{z=1}=B \quad\Rightarrow\quad B=2.$$

Коефіцієнт C можна отримати при $z=-1$:

$$\left.\frac{z+1}{z\left(z-1\right)^2}\right|_{z=-1}=\left.\frac{1}{z}\right|_{z=-1}+\left.\frac{2}{\left(z-1\right)^2}\right|_{z=-1}+\left.\frac{C}{z-1}\right|_{z=-1},$$

звідки $0=-1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{C}{2} \quad\Rightarrow\quad C=-1$.

<u>2 спосіб</u> (*метод невизначених коефіцієнтів*):

Якщо привести праву частину до спільного знаменника, отримаємо:

$$\frac{z+1}{z(z-1)^2}=\frac{A(z-1)^2+Bz+Cz(z-1)}{z(z-1)^2}.$$

Прирівнюємо чисельники обох частин:

$$z+1=A(z-1)^2+Bz+Cz(z-1),$$
$$z+1=Az^2-2Az+A+Bz+Cz^2-Cz,$$
$$z+1=(A+C)z^2+(-2A+B-C)z+A.$$

Порівняємо коефіцієнти при однакових степенях z :

$$\begin{aligned} z^0:&\quad 1=A,\\ z^1:&\quad 1=-2A+B-C,\\ z^2:&\quad 0=A+C. \end{aligned}\qquad \text{звідки } A=1,\ B=2,\ C=-1.$$

Отже, $\dfrac{z+1}{z(z-1)^2}=\dfrac{1}{z}+\dfrac{2}{(z-1)^2}-\dfrac{1}{z-1}.$

Далі розглянемо інтегрування таких дробів:

I . $$\int\frac{A}{x-a}\,dx=A\ln|x-a|+C\,,\ C\in\mathbb{R}.$$

II . $$\int\frac{A}{(x-a)^n}\,dx=-\frac{A}{(n-1)\,(x-a)^{n-1}}+C,\qquad n>1,\ C\in\mathbb{R}.$$

III . $$\int\frac{Bx+D}{x^2+px+q}\,dx=\int\frac{B\left(x+\frac{p}{2}\right)+D_1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q_1^2}\,dx=\left|x+\frac{p}{2}=t\right|=B\int\frac{t\,dt}{t^2+q_1^2}+D_1\int\frac{dt}{t^2+q_1^2}=$$

$$=\frac{B}{2}\ln\left(t^2+q_1^2\right)+\frac{D_1}{q_1}arctg\,\frac{t}{q_1}+C=\frac{B}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\frac{D_1}{q_1}arctg\,\frac{x+p/2}{q_1}+C,$$

де $D_1=D-B\dfrac{p}{2},\ q_1=\sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}}.$

IV.

$$\int \frac{Bx+D}{\left(x^2+px+q\right)^s}\,dx = \left| x+\frac{p}{2}=t \right| = B\int \frac{t\,dt}{\left(t^2+q_1^2\right)^s} + D_1\int \frac{dt}{\left(t^2+q_1^2\right)^s} =$$

$$= -\frac{B}{2(s-1)}\cdot\frac{1}{\left(t^2+q_1^2\right)^{s-1}} + D_1\cdot I_s$$

де $I_s = \int \frac{dt}{\left(t^2+q_1^2\right)^s}$.

Одержимо рекурентну формулу для I_s за допомогою інтегрування частинами:

$$I_s = \int \frac{dt}{\left(t^2+q_1^2\right)^s} = \frac{t}{\left(t^2+q_1^2\right)^s} + \int \frac{s\cdot 2t^2}{\left(t^2+q_1^2\right)^{s+1}}\,dt = \frac{t}{\left(t^2+q_1^2\right)^s} + 2s\left(I_s - q_1^2\cdot I_{s+1}\right).$$

Звідки

$$I_{s+1} = \frac{1}{2s\,q_1^2}\left(I_s\cdot(2s-1) + \frac{t}{\left(t^2+q_1^2\right)^s} \right).$$

Висновок

Усяка раціональна функція інтегрується в елементарних функціях (раціональна, логарифмічна й арктангенс). Іншими словами:

інтеграл від будь-якої раціональної функції представляється через логарифмічну функцію, арктангенс і раціональну функцію.

Приклад 5.3. Використаємо розкладення

$$\frac{x+1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1}$$ з прикладу 5.2.

Тоді

$$\int \frac{x+1}{x(x-1)^2}dx = \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{2}{(x-1)^2}\,dx - \int \frac{1}{x-1}dx = \ln|x| + 2\int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2} - \int \frac{d(x-1)}{x-1} =$$

$$= \ln|x| + 2\int (x-1)^{-2}\,d(x-1) - \ln|x-1| = \ln\left|\frac{x}{x-1}\right| - 2\frac{1}{x-1} + C,\ \ C\in\mathbb{R}.$$

Приклад 5.4. Знайдемо $\int \frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\,dx$.

Розкладемо підінтегральну раціональну функцію на найпростіші дроби:

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{A}{\left(x-1\right)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}.$$

Коефіцієнт A легко знайти, помноживши рівність на $\left(x-1\right)^2$ та підставивши $x=1$:

$$\left.\frac{2x^3+4x^2+x+2}{x^2+x+1}\right|_{x=1}=A \quad\Rightarrow\quad A=3.$$

Коефіцієнти $B,\ C,\ D$ знайдемо ***методом невизначених коефіцієнтів***:

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{3}{\left(x-1\right)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1},$$

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{3(x^2+x+1)+B(x-1)(x^2+x+1)+(Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}.$$

Порівняємо чисельники:

$$2x^3+4x^2+x+2=3(x^2+x+1)+B(x-1)(x^2+x+1)+\left(Cx+D\right)\left(x-1\right)^2,$$

$$2x^3+4x^2+x+2=3x^2+3x+3+Bx^3-B+Cx^3-2Cx^2+Cx+Dx^2-2Dx+D.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$\left.\begin{array}{ll} x^3: & 2=B+C \\ x^2: & 4=3-2C+D \\ x: & 1=3+C-2D \\ x^0: & 2=3-B+D \end{array}\right\} \Rightarrow \quad B=2,\quad C=0,\quad D=1.$$

Звідки маємо, що

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{3}{\left(x-1\right)^2}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x^2+x+1},$$

$$\int\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\,dx=3\int\frac{dx}{(x-1)^2}+2\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{x^2+x+1}=$$

$$=-\frac{3}{x-1}+2\ln|x-1|+\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=2\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+\frac{2}{\sqrt{3}}\,atctg\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c,\ \ c\in\mathbb{R}.$$

М. В. Остроградський запропонував такий спосіб обчислення інтеграла вигляду

$$\int\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx=\frac{P_r(x)}{Q_s(x)}+\int\frac{P_u(x)}{Q_{n-s}(x)}dx, \qquad \textbf{(5.1)}$$

де многочлен $Q_s(x)=$ НСД $\left(Q_n(x),Q_n'(x)\right)$, тобто найбільший спільний дільник многочленів $Q_n(x),\ Q_n'(x)$, а $Q_{n-s}(x)=\dfrac{Q_n(x)}{Q_s(x)}$.

Розглянемо приклад із застосуванням методу Остроградського.

Приклад 5.5. Знайдемо $\int\frac{x^2+2x}{(x^2+1)^2}dx$.

Застосуємо метод Остроградського:

$$\int\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx=\frac{P_r(x)}{Q_s(x)}+\int\frac{P_u(x)}{Q_{n-s}(x)}dx\,. \qquad \textbf{(5.1)}$$

У нашому випадку

$$P_m(x)=x^2+2x\,,\quad Q_n(x)=(x^2+1)^2.$$

1. Знаходимо многочлен $Q_s(x)$:

Оскільки $Q_n(x)=(x^2+1)^2,\ Q_n'(x)=4x(x^2+1)$, то

$$Q_s(x) = \text{НСД}\big(Q_n(x), Q_n'(x)\big) = x^2+1.$$

Отже,

$$Q_s(x) = x^2+1.$$

2. Знаходимо многочлен $Q_{n-s}(x) = \dfrac{Q_n(x)}{Q_s(x)} = \dfrac{(x^2+1)^2}{x^2+1} = x^2+1$.

3. Перепишемо рівність **(5.1)** з многочленами $P_r(x)$ і $P_u(x)$, які записані з невизначеними коефіцієнтами:

$$\int \frac{x^2+2x}{(x^2+1)^2}dx = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \int \frac{Cx+D}{x^2+1}dx$$

та застосуємо операцію диференціювання до цієї рівності:

$$\frac{x^2+2x}{(x^2+1)^2} = \frac{A(x^2+1)-(Ax+B)2x}{(x^2+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

4. Помножимо останню рівність на $Q_n(x) = (x^2+1)^2$:

$$x^2+2x = A(x^2+1)-(Ax+B)2x + \big(Cx+D\big)(x^2+1),$$

звідки

$$x^2+2x = Ax^2 + A - 2Ax^2 - 2Bx + Cx^3 + Dx^2 + Cx + D,$$

$$x^2+2x = Cx^3 + (D-A)x^2 + (C-2B)x + A + D.$$

5. Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях змінної x в обох частинах останньої рівності та знайдемо коефіцієнти многочленів $P_r(x)$ і $P_u(x)$:

$$\begin{aligned} x^3: &\quad 0 = C, \\ x^2: &\quad 1 = D - A, \\ x: &\quad 2 = C - 2B, \\ x^0: &\quad 0 = A + D. \end{aligned}$$

Таким чином, ми отримали 4 рівняння з 4 невідомими:

$$\begin{cases} C=0, \\ D-A=1, \\ C-2B=2, \\ A+D=0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A=-\frac{1}{2},\ B=-1,\ C=0,\ D=\frac{1}{2}.$$

Отже, підставляємо отримані коефіцієнти та знаходимо інтеграл

$$\int \frac{x^2+2x}{(x^2+1)^2}dx = \frac{-x/2-1}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1} = -\frac{x+2}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}arctgx+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

6. Інтегрування ірраціональних функцій

Інтеграли, що зводяться до інтегралів від раціональних функцій

I. Інтегрування дрібно-лінійних функцій

Нехай $R(x,y)=\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ – раціональна функція змінних x та y, де $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ багаточлени. Застосуємо формулу заміни змінної у невизначеному інтегралі

$$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx = \int R\left(\frac{t^n d-b}{a-ct^n},t\right)\frac{(ad-bc)nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2}dt.$$

Отже, обчислення інтегралу зводиться до обчислення інтегралу від раціональної функції змінної t:

$$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx = \left| t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}};\quad x=\frac{t^n\cdot d-b}{a-t^n\cdot c};\quad dx=Q(t)dt \right| = \int Q_1(t)\,dt.$$

Приклад 6.1.

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{(1-x)^3}}\,dx = \int\frac{1}{(1-x)}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = \left| \begin{array}{ll} t=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}; & x=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}; \\ (1-x)=\dfrac{2}{t^2+1}; & dx=\dfrac{4t\,dt}{(t^2+1)^2} \end{array} \right| = \int\frac{1+t^2}{2}\cdot t\cdot\frac{4t\,dt}{(t^2+1)^2} =$$

$$=2\int\frac{t^2dt}{1+t^2}=2\int\frac{\left(1+t^2\right)-1}{1+t^2}dt=2t-2arctg\ t+C=2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-2arctg\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

II. Інтегрування квадратичних ірраціональностей:

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx, \qquad a,b,c\in\mathbb{R},\ a\neq 0\ .$$

а) Якщо $a>0$, то заміна

$$t=\sqrt{ax^2+bx+c}\pm x\sqrt{a}\ –$$ ***перша підстановка Ейлера***

приводить до інтеграла від раціональної функції.

Дійсно, оскільки

$$\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)^2=\left(t\mp x\sqrt{a}\right)^2,$$

то

$$\cancel{ax^2}+bx+c=t^2\mp 2tx\sqrt{a}+\cancel{x^2a},$$

$$x=\frac{t^2-c}{b\pm 2t\sqrt{a}}$$ – раціональна функція від t.

Отже, $\sqrt{ax^2+bx+c}$, dx – раціональні функції від t, звідки приходимо до інтеграла від раціональної функції

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=\int R_1(t)\,dt\ .$$

б) Якщо $c>0$, то заміна

$$xt=\sqrt{ax^2+bx+c}\ \pm\sqrt{c}\ –$$ ***друга підстановка Ейлера***

приводить до раціональної функції тому, що

$$ax^2+bx+\cancel{c}=x^2t\mp 2tx\sqrt{c}+\cancel{c},$$

$$ax+b=xt^2\mp 2t\sqrt{c},$$

$$x=\frac{b\pm 2t\sqrt{c}}{t^2-a}$$ – раціональна функція від t.

Отже, $\sqrt{ax^2+bx+c}$, dx – раціональні функції від t, звідки приходимо до інтеграла від раціональної функції

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx = \int R_1(t)\, dt\,.$$

в) Якщо тричлен ax^2+bx+c має різні дійсні корені, тобто

$$ax^2+bx+c = a\,(x-x_1)(x-x_2)\,,$$

то заміна

$$t = \sqrt{a\cdot\frac{x-x_1}{x-x_2}}$$

приводить до раціональної функції (див. випадок **I**).

Приклад 6.2. Знайдемо $\displaystyle\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2+x+1}}$.

Зробимо заміну:

$$\sqrt{x^2+x+1}-x=t \quad \text{(перша підстановка Ейлера).}$$

Звідки

$$\cancel{x^2}+x+1=\cancel{x^2}+t^2+2t\,x\,,$$

$$x=\frac{t^2-1}{1-2t}\,,$$

$$dx=\frac{2t(1-2t)+2(t^2-1)}{(1-2t)^2}\,dt=\frac{-2t^2+2t-2}{(1-2t)^2}\,dt,$$

$$\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2+x+1}}=-2\int\frac{t^2-t+1}{t(1-2t)^2}\,dt=\int\frac{A}{t}\,dt+B\int\frac{dt}{2t-1}+C\int\frac{dt}{(2t-1)^2}\,.$$

II ′. Інтегрування квадратичних ірраціональностей

Інтеграл вигляду

$$\int\frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

можна знайти простіше, якщо застосувати формулу

$$\int \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \int \frac{\lambda dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,.$$

У цій формулі $Q_{n-1}(x)$ – багаточлен $(n-1)$ -го степеня із невизначеними коефіцієнтами, λ – невідомий множник. Щоб знайти ці невизначені коефіцієнти, зазначену формулу диференціюють, потім множать на $\sqrt{ax^2+bx+c}$ та прирівнюють коефіцієнти при відповідних степенях x, що дає систему рівнянь для знаходження коефіцієнтів многочлена $Q_{n-1}(x)$ та множника λ.

Приклад 6.2.

$$\int \frac{3x^3-1}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx = \left(Ax^2+Bx+C\right)\sqrt{1+2x-x^2} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,.$$

Диференціюємо рівність:

$$\frac{3x^3-1}{\sqrt{1+2x-x^2}} = (2Ax+B)\sqrt{1+2x-x^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(Ax^2+Bx+C\right)(2-2x)}{\sqrt{1+2x-x^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,.$$

Множимо на знаменник:

$$3x^3-1 = (2Ax+B)(1+2x-x^2) + (Ax^2+Bx+C)(1-x) + \lambda,$$

$$3x^3-1 = (-3A)x^3 + (5A-2B)x^2 + (2A+3B-C)x + C + B + \lambda\,.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x та одержуємо систему

$$\left.\begin{array}{ll} x^3: & 3=-3A, \\ x^2: & 0=5A-2B, \\ x^1: & 0=2A+3B-C, \\ x^0: & -1=B+C+\lambda. \end{array}\right\} \Rightarrow \quad A=-1;\ B=-2{,}5;\ C=-9{,}5;\ \lambda=11$$

Отже,

$$\int \frac{3x^3-1}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx = -\left(x^2+2,5x+9,5\right)\cdot\sqrt{1+2x-x^2}+11\int\frac{dx}{\sqrt{2-(x-1)^2}}=$$

$$=11\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}}-\left(x^2+2,5x+9,5\right)\cdot\sqrt{1+2x-x^2}+C,\ \ C\in\mathbb{R}.$$

7. Інтегрування тригонометричних та показникових функцій

I. Нехай $R(u,v)$ – раціональна функція від двох змінних, тобто відношення двох багаточленів від двох змінних.

Тоді за допомогою універсальної підстановки, яку ми приведемо нижче, інтеграл від функції $R(\sin x, \cos x)$ можна звести до інтеграла від раціональної функції, тобто виразити його через елементарні функції:

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \left| \begin{array}{ll} t = tg\,\dfrac{x}{2}, & \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}, & \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| = \int R_1(t)\,dt\,,$$

де $R_1(t)$ – раціональна функція.

Приклад 7.1.

$$\int\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}=\int\frac{2dt}{(1+\varepsilon)+(1-\varepsilon)\,t^2}=\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,arctg\,t\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}+C \quad \text{при} \quad |\varepsilon|<1\,.$$

При $|\varepsilon|\geq 1$ спробуйте знайти цей інтеграл самостійно.

У низці випадків можна **спростити обчислення** вихідного інтеграла:

а) Якщо

$$R(\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)\,,$$

то для приведення нашого інтеграла до раціонального виконується заміна $t=\cos x$.

б) Якщо

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то виконується заміна $t = \sin x$.

в) Якщо

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

то для приведення нашого інтеграла до раціонального виконується заміна

$$t = tg\,x \quad \text{або} \quad t = ctg\,x.$$

Приклад 7.2.

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)\,d\sin x}{\sin^2 x} = \int\left(\frac{1}{t^2}-1\right)dt = \left(-\frac{1}{t} - t + C\right) = -\sin x - \frac{1}{\sin x} + C,$$

$C \in \mathbb{R}$.

(маємо випадок **б)**).

Приклад 7.3.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x + 2\cos^2 x} = |\ t = tg\,x\ | = \int \frac{dt}{t^2+3t+2} = \int \frac{dt}{t+1} - \int \frac{dt}{t+2} =$$

$$= \ln|t+1| - \ln|t+2| + C = \ln\left|\frac{tg\,x+1}{tg\,x+2}\right| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Іноді можна застосовувати інші методи.

Наприклад, для знаходження $I_n = \int \sin^n x\,dx$ можна вивести рекурентну формулу.

Приклад 7.4.

$$I_n = \int \sin^n x\,dx = -\int \sin^{n-1} x\,d\left(\cos x\right) = -\sin^{n-1} x \cdot \cos x + \int \cos x\,d\left(\sin^{n-1} x\right) =$$

$$= -\sin^{n-1} x \cdot \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cdot \underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x}\,dx = -\sin^{n-1} x \cdot \cos x + (n-1)\,I_{n-2} - (n-1)\,I_n.$$

Отже,

$$I_n = -\sin^{n-1} x \cdot \cos x + (n-1)\,I_{n-2} - (n-1)\,I_n,$$

$$n \cdot I_n = -\sin^{n-1} x \cdot \cos x + (n-1)\, I_{n-2},$$

$$I_n = \frac{n-1}{n}\, I_{n-2} - \frac{\sin^{n-1} x \cdot \cos x}{n}.$$

II. Аналогічно можна інтегрувати ***гіперболічні*** функції або ***показникові*** функції , тобто знаходити $\int R(sh\, x, ch\, x)\, dx$ або $\int R(e^x)\, dx$.

В останньому інтегралі простіше зробити заміну $e^x = t$ або з $e^{-x} = t$.

Приклад 7.5.

$$\int \frac{dx}{e^{2x} + 2e^x - 3} = \int \frac{dx}{e^{2x}(1 + 2e^{-x} - 3e^{-2x})} = \left| \begin{array}{c} t = e^{-x} \\ dt = -e^{-x} dx \end{array} \right| = \int \frac{-t\, dt}{1 + 2t - 3t^2} =$$

$$= \int \frac{t\, dt}{3t^2 - 2t - 1} = \frac{1}{3} \int \frac{t\, dt}{(t-1)\left(t + \frac{1}{3}\right)},$$

подальші дії зрозумілі.

III. Інтеграли вигляду $\int P(x)\, e^{\alpha x} dx$ або $\int P(x) \sin \beta x\, dx$ потрібно інтегрувати частинами, знижуючи степінь багаточлена $P(x)$.

Насамкінець розглянемо ще один важливий приклад:

Приклад 7.6.

$$I = \int e^{\alpha x} \sin \beta x\, dx = \left| \begin{array}{ll} \sin \beta x = f(x), & df = \beta \cos \beta x \\ e^{\alpha x} dx = d\, g(x), & g = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \sin \beta x - \frac{\beta}{\alpha} \int e^{\alpha x} \cos \beta x\, dx = \left| \begin{array}{ll} \cos \beta x = f, & d\, f = \beta \cos \beta x \\ e^{\alpha x} dx = dg, & g = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \sin \beta x - \frac{\beta}{\alpha^2} e^{\alpha x} \cos \beta x - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \int e^{\alpha x} \sin \beta x\, dx,$$

звідки

$$I = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x - \frac{\beta}{\alpha^2} e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot I,$$

$$\left(1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)I=\left(\frac{1}{\alpha}\sin\beta x-\frac{\beta}{\alpha^2}\cos\beta x\right)e^{\alpha x},$$

отже,

$$I=\frac{\left(\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x\right)e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}+C\ ,\ C\in\mathbb{R}.$$

Аналогічно знаходиться інтеграл $\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$ (знайти самостійно).

Інтеграли $\int\frac{\sin x}{x}dx,$ $\int\frac{\cos x}{x}dx,$ $\int\frac{e^x}{x}dx,$ $\int e^{-x^2}dx$ через елементарні функції не виражаються.

8. Індивідуальні завдання

В-1

1. $\int \frac{2x+5}{(3x+4)(x-2)^2}dx$

2. $\int \frac{x^2+2x+3}{x^3+8}dx$

3. $\int \sqrt{\frac{x+3}{2x+5}}dx$

4. $\int \frac{3x+4}{\sqrt{2x^2+x+1}}dx$

5. $\int \cos x \cdot \sin^2 x dx$

6. $\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x + 3}$

7. $\int (x+1) arctg 2x dx$

8. $\int x \ln(x+2)(x-3)dx$

9. $\int x \sin 2x dx$

10. $\int \frac{\arcsin \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}dx$

В-2

1. $\int \frac{3x+4}{(2x+5)(x-1)^2}dx$

2. $\int \frac{x^2+3x+4}{x^3+1}dx$

3. $\int \sqrt{\frac{3x+4}{2x+3}}dx$

4. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{5x^2+2x+1}}dx$

5. $\int \sin x \cdot \cos^3 x dx$

6. $\int \frac{dx}{3\sin x + \cos x + 2}$

7. $\int (x+2) arctg 3x dx$

8. $\int x \ln \frac{2+x}{x-3}dx$

9. $\int x \cos 3x dx$

10. $\int \frac{\sqrt{\ln(x+7)}}{x+7}dx$

В-3

1. $\int \frac{5x+2}{(2x+3)(x-3)^2}dx$

2. $\int \frac{x^2+5x+2}{x^3+27}dx$

3. $\int \sqrt{\frac{5x+2}{3x+4}}dx$

4. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{3x^2+5x+2}}dx$

5. $\int \cos x \cdot \sin^4 x dx$

6. $\int \frac{dx}{2\sin x + 5\cos x + 1}$

7. $\int (x+3) arctg 4x dx$

8. $\int x \ln(x+5)(x-2)dx$

9. $\int (5x+2)e^{2x}dx$

10. $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$

В-4

1. $\int \frac{4x+3}{(2x+7)(x-2)^2}dx$

2. $\int \frac{x^2+4x+3}{x^3+64}dx$

3. $\int \sqrt{\frac{5x+4}{4x+3}}dx$

4. $\int \frac{4x+3}{\sqrt{3x^2+4x+7}}dx$

5. $\int \sin x \cdot \cos^5 x dx$

6. $\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 2}$

7. $\int (x+4) arctg 5x dx$

8. $\int x \ln \frac{4+x}{x-3}dx$

9. $\int x \sin 3x dx$

10. $\int \frac{\mathrm{arc}\,tg^2 x}{1+x^2}dx$

В-5

1. $\int \frac{7x+1}{(3x+5)(x-2)^2}dx$
2. $\int \frac{x^2+7x+2}{x^3+125}dx$
3. $\int \sqrt{\frac{7x+1}{3x+2}}dx$
4. $\int \frac{7x+1}{\sqrt{3x^2+2x+5}}dx$
5. $\int \cos x \cdot \sin^6 x dx$
6. $\int \frac{dx}{7\sin x+3\cos x+2}$
7. $\int (x+5) arctg 6x dx$
8. $\int x \ln(x+7)(x-2)dx$
9. $\int x\cos 4x dx$
10. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln(x+7)}}{x+7}dx$

В-6

1. $\int \frac{6x+1}{(2x+3)(x-4)^2}dx$
2. $\int \frac{x^2+6x+1}{x^3+1}dx$
3. $\int \sqrt{\frac{6x+1}{4x+3}}dx$
4. $\int \frac{6x+1}{\sqrt{2x^2+5x+1}}dx$
5. $\int \sin x \cdot \cos^7 x dx$
6. $\int \frac{dx}{6\sin x+\cos x+2}$
7. $\int (x+6) arctg 7x dx$
8. $\int x \ln\frac{6+x}{x-1}dx$
9. $\int (6x+1)e^{3x}dx$
10. $\int \frac{\cos x}{\sin^7 x}dx$

В-7

1. $\int \frac{8x+3}{(2x+3)(x-5)^2}dx$
2. $\int \frac{x^2+8x+1}{x^3+8}dx$
3. $\int \sqrt{\frac{8x+3}{2x+5}}dx$
4. $\int \frac{8x+3}{\sqrt{3x^2+4x+1}}dx$
5. $\int \cos x \cdot \sin^8 x dx$
6. $\int \frac{dx}{3\sin x+8\cos x+2}$
7. $\int (x+7) arctg 8x dx$
8. $\int x \ln(x+3)(x-8)dx$
9. $\int x\sin 5x dx$
10. $\int \sqrt{x}\, arctg x^{\frac{3}{2}} dx$

В-8

1. $\int \frac{5x+7}{(3x+1)(x-1)^2}dx$
2. $\int \frac{x^2+5x+7}{x^3+27}dx$
3. $\int \sqrt{\frac{5x+7}{3x+4}}dx$
4. $\int \frac{5x+7}{\sqrt{3x^2+7x+2}}dx$
5. $\int \sin x \cdot \cos^9 x dx$
6. $\int \frac{dx}{5\sin x+2\cos x+3}$
7. $\int (x+8) arctg 9x dx$
8. $\int x \ln\frac{5+x}{x-7}dx$
9. $\int x\cos 6x dx$
10. $\int \frac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

B-9

1. $\int \frac{9x+2}{(3x+1)(x-2)^2}dx$
2. $\int \frac{x^2+9x+2}{x^3+64}dx$
3. $\int \sqrt{\frac{2x+9}{3x+8}}dx$
4. $\int \frac{2x+9}{\sqrt{3x^2+9x+2}}dx$
5. $\int \cos x \cdot \sin^{10} x dx$
6. $\int \frac{dx}{2\sin x+9\cos x+3}$
7. $\int (x+9) arctg 10x dx$
8. $\int x \ln(x+9)(x-2)dx$
9. $\int (9x+2)e^{4x}dx$
10. $\int \frac{\operatorname{arc} tg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

B-10

1. $\int \frac{10x+3}{(5x+2)(x-3)^2}dx$
2. $\int \frac{x^2+10x+3}{x^3+125}dx$
3. $\int \sqrt{\frac{3x+10}{2x+9}}dx$
4. $\int \frac{10x+3}{\sqrt{2x^2+7x+4}}dx$
5. $\int \sin x \cdot \cos^{11} x dx$
6. $\int \frac{dx}{10\sin x+3\cos x+1}$
7. $\int (x+10) arctg 11x dx$
8. $\int x \ln\frac{10+x}{x-3}dx$
9. $\int x \sin 7x dx$
10. $\int \frac{\ln^{\frac{3}{2}}(x+2)}{x+2}dx$

B-11

1. $\int \frac{6x+5}{(2x+1)(x-5)^2}dx$
2. $\int \frac{x^2+5x+6}{x^3+1}dx$
3. $\int \sqrt{\frac{2x+1}{5x+6}}dx$
4. $\int \frac{6x+5}{\sqrt{4x^2+x+5}}dx$
5. $\int \cos x \cdot \sin^{12} x dx$
6. $\int \frac{dx}{6\sin x+5\cos x+4}$
7. $\int (x+11) arctg 12x dx$
8. $\int x \ln(x+5)(x-6)dx$
9. $\int x \cos 8x dx$
10. $\int \frac{tg\sqrt{x+5}}{\sqrt{x+5}}dx$

B-12

1. $\int \frac{9x+7}{(2x+3)(x-2)^2}dx$
2. $\int \frac{x^2+9x+7}{x^3+8}dx$
3. $\int \sqrt{\frac{2x+3}{9x+7}}dx$
4. $\int \frac{7x+9}{\sqrt{3x^2+x+5}}dx$
5. $\int \sin x \cdot \cos^{13} x dx$
6. $\int \frac{dx}{9\sin x+7\cos x+5}$
7. $\int (x+12) arctg 13x dx$
8. $\int x \ln\frac{9+x}{x-7}dx$
9. $\int (9x+7)e^{5x}dx$
10. $\int \frac{tg^3 x}{\cos x}dx$

В-13

1. $\int \frac{3x+5}{(5x+3)(x-3)^2}dx$
2. $\int \frac{x^2+3x+5}{x^3+27}dx$
3. $\int \sqrt{\frac{2x+7}{3x+5}}dx$
4. $\int \frac{3x+5}{\sqrt{2x^2+x+4}}dx$
5. $\int \cos x \cdot \sin^{14} x dx$
6. $\int \frac{dx}{3\sin x+5\cos x+7}$
7. $\int (x+13)arctg14xdx$
8. $\int x\ln(x+3)(x-5)dx$
9. $\int x\sin 9xdx$
10. $\int x^{\frac{3}{2}}tgx^{\frac{5}{2}}dx$

В-14

1. $\int \frac{9x+4}{(4x+9)(x-4)^2}dx$
2. $\int \frac{x^2+9x+4}{x^3+64}dx$
3. $\int \sqrt{\frac{4x+9}{9x+4}}dx$
4. $\int \frac{9x+4}{\sqrt{3x^2+x+9}}dx$
5. $\int \sin x \cdot \cos^{15} x dx$
6. $\int \frac{dx}{9\sin x+4\cos x+3}$
7. $\int (x+14)arctg15xdx$
8. $\int x\ln\frac{9+x}{x-4}dx$
9. $\int x\cos 10xdx$
10. $\int \frac{\ln^{\frac{9}{4}}(x-3)}{x-3}dx$

В-15

1. $\int \frac{3x+10}{(10x+3)(x-5)^2}dx$
2. $\int \frac{x^2+3x+10}{x^3+125}dx$
3. $\int \sqrt{\frac{10x+3}{3x+10}}dx$
4. $\int \frac{3x+10}{\sqrt{4x^2+2x+1}}dx$
5. $\int \cos x \cdot \sin^3 x dx$
6. $\int \frac{dx}{3\sin x+10\cos x+5}$
7. $\int (x+15)arctg16xdx$
8. $\int x\ln(x+10)(x-3)dx$
9. $\int (10x+3)e^{6x}dx$
10. $\int \frac{ctg^3 x}{\sin^5 x}dx$

В-16

1. $\int \frac{4x+7}{(7x+4)(x-1)^2}dx$
2. $\int \frac{x^2+7x+4}{x^3+1}dx$
3. $\int \sqrt{\frac{7x+4}{4x+7}}dx$
4. $\int \frac{7x+4}{\sqrt{2x^2+5x+3}}dx$
5. $\int \sin x \cdot \cos^4 x dx$
6. $\int \frac{dx}{4\sin x+7\cos x+2}$
7. $\int (x+16)arctg17xdx$
8. $\int x\ln\frac{4+x}{x-7}dx$
9. $\int x\sin 11xdx$
10. $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx$

B-17

1. $\int \frac{5x+8}{(3x+5)(x-2)^2}dx$

2. $\int \frac{x^2+5x+8}{x^3+8}dx$

3. $\int \sqrt{\frac{8x+5}{5x+8}}dx$

4. $\int \frac{8x+5}{\sqrt{x^2+8x+3}}dx$

5. $\int \cos x \cdot \sin^5 x dx$

6. $\int \frac{dx}{5\sin x + 8\cos x + 2}$

7. $\int (x+17) arctg 18x dx$

8. $\int x \ln(x+5)(x-8) dx$

9. $\int x \cos 12x dx$

10. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln(x+8)}}{x+8}dx$

B-18

1. $\int \frac{7x+2}{(2x+7)(x-3)^2}dx$

2. $\int \frac{x^2+7x+2}{x^3+27}dx$

3. $\int \sqrt{\frac{7x+2}{4x+1}}dx$

4. $\int \frac{7x+2}{\sqrt{2x^2+7x+3}}dx$

5. $\int \sin x \cdot \cos^6 x dx$

6. $\int \frac{dx}{7\sin x + 2\cos x + 3}$

7. $\int (x+18) arctg 19x dx$

8. $\int x \ln \frac{7+x}{x-2} dx$

9. $\int (2x+7) e^{7x} dx$

10. $\int \frac{\operatorname{arc} tg^3 x}{1+x^2} dx$

B-19

1. $\int \frac{x+8}{(3x+8)(x-4)^2}dx$

2. $\int \frac{x^2+8x+1}{x^3+64}dx$

3. $\int \sqrt{\frac{8x+1}{3x+2}}dx$

4. $\int \frac{8x+1}{\sqrt{x^2+8x+3}}dx$

5. $\int \cos x \cdot \sin^7 x dx$

6. $\int \frac{dx}{8\sin x + \cos x + 2}$

7. $\int (x+19) arctg 20x dx$

8. $\int x \ln(x+8)(x-1) dx$

9. $\int x \sin 13x dx$

10. $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

B-20

1. $\int \frac{3x+7}{(x+2)(x-5)^2}dx$

2. $\int \frac{x^2+7x+3}{x^3+125}dx$

3. $\int \sqrt{\frac{6x+5}{7x+3}}dx$

4. $\int \frac{3x+7}{\sqrt{2x^2+5x+4}}dx$

5. $\int \sin x \cdot \cos^8 x dx$

6. $\int \frac{dx}{3\sin x + 7\cos x + 2}$

7. $\int (x+20) arctg 21x dx$

8. $\int x \ln \frac{3+x}{x-7} dx$

9. $\int x \cos 14x dx$

10. $\int \frac{sin^5 x}{\cos^7 x} dx$

В-21

1. $\int \frac{4x+1}{(2x+5)(x-1)^2}dx$
2. $\int \frac{x^2+4x+1}{x^3+1}dx$
3. $\int \sqrt{\frac{x+4}{2x+5}}dx$
4. $\int \frac{4x+1}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx$
5. $\int \cos x \cdot \sin^9 x dx$
6. $\int \frac{dx}{4\sin x+\cos x+2}$
7. $\int (x+21) arctg 22x dx$
8. $\int x\ln(x+4)(x-1)dx$
9. $\int (4x+1)e^{8x}dx$
10. $\int \frac{\sqrt{\ln(x+8)}}{x+8}dx$

В-22

1. $\int \frac{7x+8}{(5x+6)(x-2)^2}dx$
2. $\int \frac{x^2+7x+8}{x^3+8}dx$
3. $\int \sqrt{\frac{7x+8}{8x+7}}dx$
4. $\int \frac{7x+8}{\sqrt{x^2+7x+2}}dx$
5. $\int \sin x \cdot \cos^{10} x dx$
6. $\int \frac{dx}{7\sin x+8\cos x+2}$
7. $\int (x+22) arctg 23x dx$
8. $\int x\ln\frac{7+x}{x-8}dx$
9. $\int x\sin 15x dx$
10. $\int \sqrt{\frac{\arcsin^3 x}{1-x^2}}dx$

В-23

1. $\int \frac{4x+9}{(9x+1)(x-3)^2}dx$
2. $\int \frac{x^2+4x+9}{x^3+27}dx$
3. $\int \sqrt{\frac{4x+9}{9x+4}}dx$
4. $\int \frac{4x+9}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx$
5. $\int \cos x \cdot \sin^{11} x dx$
6. $\int \frac{dx}{4\sin x+9\cos x+3}$
7. $\int (x+23) arctg 24x dx$
8. $\int x\ln(x+4)(x-9)dx$
9. $\int x\cos 16x dx$
10. $\int \frac{\arccos\sqrt{x+8}}{\sqrt{x+8}}dx$

В-24

1. $\int \frac{3x+1}{(2x+1)(x-4)^2}dx$
2. $\int \frac{x^2+3x+1}{x^3+64}dx$
3. $\int \sqrt{\frac{x+3}{3x+1}}dx$
4. $\int \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+3x+1}}dx$
5. $\int \sin x \cdot \cos^{12} x dx$
6. $\int \frac{dx}{3\sin x+4\cos x+1}$
7. $\int (x+24) arctg 25x dx$
8. $\int x\ln\frac{3+x}{x-1}dx$
9. $\int (3x+1)e^{9x}dx$
10. $\int \frac{\sqrt[5]{\ln(x+3)}}{x+3}dx$

В-25

1. $\int \frac{6x+7}{(x+7)(x-5)^2}dx$
2. $\int \frac{x^2+6x+7}{x^3+125}dx$
3. $\int \sqrt{\frac{6x+7}{7x+6}}dx$
4. $\int \frac{6x+7}{\sqrt{x^2+2x+7}}dx$
5. $\int \cos x \cdot \sin^{13} x dx$
6. $\int \frac{dx}{6\sin x + 7\cos x + 3}$
7. $\int (x+25) arctg 26x dx$
8. $\int x \ln(x+8)(x-7)dx$
9. $\int x \sin 17x dx$
10. $\int \sqrt{\frac{\arcsin^5 x}{1-x^2}}dx$

В-26

1. $\int \frac{5x+9}{(x+9)(x-1)^2}dx$
2. $\int \frac{x^2+5x+9}{x^3+1}dx$
3. $\int \sqrt{\frac{5x+9}{9x+5}}dx$
4. $\int \frac{5x+9}{\sqrt{2x^2+x+1}}dx$
5. $\int \sin x \cdot \cos^{14} x dx$
6. $\int \frac{dx}{5\sin x + 9\cos x + 3}$
7. $\int (x+26) arctg 27x dx$
8. $\int x \ln \frac{5+x}{x-9} dx$
9. $\int x \cos 18x dx$
10. $\int \frac{sin^7 x}{\cos^9 x} dx$

В-27

1. $\int \frac{8x+9}{(x+5)(x-2)^2}dx$
2. $\int \frac{x^2+8x+9}{x^3+8}dx$
3. $\int \sqrt{\frac{8x+9}{9x+8}}dx$
4. $\int \frac{8x+9}{\sqrt{x^2+3x+2}}dx$
5. $\int \cos x \cdot \sin^{15} x dx$
6. $\int \frac{dx}{8\sin x + 9\cos x + 2}$
7. $\int (x+27) arctg 28x dx$
8. $\int x \ln(x+8)(x-9)dx$
9. $\int (8x+9)e^{10x}dx$
10. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x+7}}{\sqrt{x+7}} dx$

В-28

1. $\int \frac{5x+1}{(x+4)(x-3)^2}dx$
2. $\int \frac{x^2+5x+1}{x^3+27}dx$
3. $\int \sqrt{\frac{x+5}{5x+1}}dx$
4. $\int \frac{5x+1}{\sqrt{x^2+7x+3}}dx$
5. $\int \sin x \cdot \cos^{16} x dx$
6. $\int \frac{dx}{5\sin x + \cos x + 2}$
7. $\int (x+28) arctg 29x dx$
8. $\int x \ln \frac{5+x}{x-1} dx$
9. $\int x \sin 20x dx$
10. $\int \frac{\sqrt{\ln(x+3)}}{x+3}dx$

Література

1. Дороговцев А. Я., Математичний аналіз : підручник у 2-х ч. Ч. 1. Київ: Либідь, 1993. 320 с.

2. Ляшко І. І., Ємельянов В. Ф., Боярчук О. К. Математичний аналіз. Ч.1. Київ: Вища школа, 1992. 494 с.

3. Денисьєвський М. О., Курченко О. О., Нагорний В.Н. та ін. Збірник задач з математичного аналізу. Ч. 1. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2005. 257 с.

4. Рудавський Ю. К., Сухорольський М. А., Білонога Д. М. та ін. Збірник задач з математичного аналізу. Ч. 1. Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2008. 352 с.

ДЛЯ НОТАТОК

ДЛЯ НОТАТОК

Електронне навчальне видання комбінованого використання
Можна використовувати в локальному та мережному режимі

Макаров Олександр Анатолійович
Ніколенко Ірина Геннадіївна

МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ НЕВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Методичні вказівки
до виконання індивідуального домашнього завдання за темою
«Невизначені інтеграли»

Електронне видання

Коректор *О. В. Пікалова*
Комп'ютерне верстання *І. Г. Ніколенко*
Макет обкладинки *І. М. Дончик*

Підписано до видання 17.05.2023.
Гарнітура Times New Roman. Обсяг 1,0 Мб. Зам № 92/23.

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.2009

Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна
Тел. 705-24-32