Выпуск 9 1969

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ИНТЕГРАЛЬНОГО МОДУЛЯ ГЛАДКОСТИ ГРАНИЧНОЙ ФУНКЦИИ КЛАССА $Hp\,(p \geqslant 1)$

Р. Н. Ковальчук

Обозначим через H_p, $p \geqslant 1$, класс функций $f(z)$, аналитических в $D = \{ z : |z| < 1 \}$ и таких, что для каждой из них интеграл $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta$ ограничен при $0 < r < 1$. Известно (см. [1 стр. 389]), что в таком случае $f(z)$ имеет почти всюду на $\gamma = \{z : |z| = 1\}$ определенные предельные значения по некасательным путям, образующие граничную функцию $f(e^{i\theta}) \in L_p(-\pi, \pi)$

Обозначим

$$\|f(re^{i\varphi})\|_{L_p} = \left\{ \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\varphi})|^p d\varphi \right\}^{\frac{1}{p}}$$

и

$$\omega_2^{(p)}(f;\ t) = \sup_{|\tau| < t} \|f[e^{i(\varphi+\tau)}] - 2f(e^{i\varphi}) + f[e^{i(\varphi-\tau)}]\|_{L_p}.$$

Будем говорить, что действительная функция $\omega(t)$, заданная на некотором сегменте $[0, l]$, принадлежит классу Ω_2, если для $\omega(t)$ выполняются следующие условия:

1) $\omega(0) = 0$, $\omega(t) > 0$ при $t \in (0, l]$;
2) $\omega(t)$ не убывает вместе с t;
3) $\omega(t)$ — непрерывна на $[0, l]$;
4) для произвольного $\lambda > 0$ $\omega(\lambda t) \leqslant A_1(1 + \lambda)^2 \omega(t)$, где A_1 — некоторая постоянная, не зависящая от t и λ.

Теорема 1. *Если $f(z) \in H_p$, $p \geqslant 1$, и интегральный модуль непрерывности второго порядка $\omega_2^{(p)}$ $(f,\ t)$; функции $f(e^{i\theta})$ удовлетворяет неравенству*

$$\omega_2^{(p)}(f;\ t) \leqslant \omega(t), \tag{1}$$

где $\omega(t) \in \Omega_2$, то при всех $r \in (0, 1)$

$$\|f''(re^{i\varphi})\|_{L_p} \leqslant A_2 \frac{\omega(1-r)}{(1-r)^2}, \tag{2}$$

где A_2 — постоянная, не зависящая от r.

Доказательство. Пусть $f(z) = u(z) + iv(z)$. Так как по условию теоремы на $\gamma\,\omega_2^{(p)}(f;\ t) \leqslant \omega(t)$, то для функций $u(z)$ и $v(z)$ также имеем

$$\omega_2^{(p)}(u;\ t) \leqslant \omega(t), \tag{3}$$

$$\omega_2^{(p)}(v;\ t) \leqslant \omega(t).$$

Пусть $z = re^{i\varphi} \in D$. Тогда, как легко видеть,

$$f''(z) = -\frac{\dfrac{\partial^2 f(re^{i\varphi})}{\partial\varphi^2} - i\dfrac{\partial f(re^{i\varphi})}{\partial\varphi}}{z^2}, \tag{4}$$

Кроме того,

$$\frac{\partial f(re^{i\varphi})}{\partial\varphi}=\frac{\partial u(re^{i\varphi})}{\partial\varphi}+i\frac{\partial v(re^{i\varphi})}{\partial\varphi} \tag{5}$$

и

$$\frac{\partial^2 f(re^{i\varphi})}{\partial\varphi^2}=\frac{\partial^2 u(re^{i\varphi})}{\partial\varphi^2}+i\frac{\partial^2 v(re^{i\varphi})}{\partial\varphi^2}. \tag{6}$$

Функция $u(re^{i\varphi})$ является гармонической в D и интегралы $\int\limits_{-\pi}^{\pi}|u(re^{i\varphi})|^p d\varphi$, $\int\limits_{-\pi}^{\pi}|v(re^{i\varphi})|^p d\varphi$ ограничены при $0<r<1$, а поэтому в каждой точке $z=re^{i\varphi}\in D$ значение $u(re^{i\varphi})$ можно выразить интегралом Пуассона

$$u(re^{i\varphi})=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}u(e^{i\theta})\cdot P(r\theta-\varphi)\,d\theta, \tag{7}$$

где $P(r,\theta)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$ — ядро Пуассона.

Из (7) получаем

$$\frac{\partial^2 u(re^{i\varphi})}{u\varphi^2}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}u(e^{i\theta})\cdot\frac{\partial^2 P(r,\theta-\varphi)}{\partial\varphi^2}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}u[e^{i(\varphi+\theta)}]\frac{\partial^2 P(r,\theta)}{\partial\theta^2}d\theta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\{u[e^{i(\varphi+\theta)}]-2u(e^{i\varphi})+u[e^{i(\varphi-\theta)}]\}\frac{\partial^2 P(r,\theta)}{\partial\theta^2}d\theta. \tag{8}$$

Далее, пользуясь обобщенным неравенством Минковского, получаем

$$\left\|\frac{\partial^2 u(re^{i\varphi})}{\partial\varphi^2}\right\|_{L_p}\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\left\{\int\limits_{-\pi}^{\pi}|u[e^{i(\varphi+\theta)}]-2u(e^{i\varphi})+u[e^{i(\varphi-\theta)}]|^p d\varphi\right\}^{\frac{1}{p}}\cdot\left|\frac{\partial^2 P(r,\theta)}{\partial\theta^2}\right|d\theta\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\omega(\theta)\cdot\left|\frac{\partial^2 P(r,\theta)}{\partial\theta^2}\right|d\theta. \tag{9}$$

Но так как

$$\frac{\partial^2 P(r,\theta)}{\partial\theta^2}=\frac{2r(1-r^2)\cos\theta}{(1-2r\cos\theta+r^2)^2}-\frac{8r^2(1-r^2)\sin^2\theta}{(1-2r\cos\theta+r^2)^3}$$

и

$$1-2r\cos\theta+r^2\geqslant(1-r)^2+\frac{4r}{\pi^2}\theta^2,$$

то

$$\left|\frac{\partial^2 P(r,\theta)}{\partial\theta^2}\right|\leqslant A_7\begin{cases}(1-r)^{-3}, & \text{при } 0\leqslant\theta\leqslant 1-r\\ (1-r)\cdot\theta^{-4}, & \text{при } 1-r\leqslant\theta\leqslant\pi\end{cases} \tag{10}$$

Из (9), пользуясь неравенствами (10), получаем

$$\left\|\frac{\partial^2 u(re^{i\varphi})}{\partial\varphi^2}\right\|_{L_p}\leqslant\frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{0}^{1-r}+\int\limits_{1-r}^{\pi}\right)\omega(\theta)\left|\frac{\partial^2 P(r,\theta)}{\partial\theta^2}\right|d\theta\leqslant A_8\left[\frac{1}{(1-r)^3}\int\limits_{0}^{1-r}\omega(\theta)\,d\theta+\right.$$

$$\left.+(1-r)\int\limits_{1-r}^{\pi}\frac{\omega(\theta)}{\theta^4}d\theta\right]\leqslant A_8\left[\frac{\omega(1-r)}{(1-r)^2}+(1-r)\int\limits_{1-r}^{\pi}\frac{\omega(\theta)}{\theta^4}d\theta\right]. \tag{11}$$

Но так как при всех $1-r\leqslant\theta\leqslant\pi$ (см., например, [2, стр. 116])

$$\frac{\omega(\theta)}{\theta^2}\leqslant A_9\frac{\omega(1-r)}{(1-r)^2}, \tag{12}$$

где A_9 — постоянная, не зависящая от r и θ, то

$$\int\limits_{1-r}^{\pi}\frac{\omega(\theta)}{\theta^4}d\theta\leqslant A_9\frac{\omega(1-r)}{(1-r)^2}\int\limits_{1-r}^{\pi}\frac{d\theta}{\theta^2}\leqslant A_9\frac{\omega(1-r)}{(1-r)^3}. \tag{13}$$

Поэтому из (11) получаем

$$\left\| \frac{\partial^2 u(re^{i\varphi})}{\partial\varphi^2} \right\|_{L_p} \leqslant A_{10} \frac{\omega(1-r)}{(1-r)^2}. \tag{14}$$

Аналогично имеем

$$\left\| \frac{\partial^2 v(re^{i\varphi})}{\partial\varphi^2} \right\|_{L_p} \leqslant A_{11} \frac{\omega(1-r)}{(1-r)^2}. \tag{15}$$

Таким образом, из (6), пользуясь неравенствами (14) и (15), получаем

$$\left\| \frac{\partial^2 f(re^{i\varphi})}{\partial\varphi^2} \right\|_{L_p} \leqslant \left\| \frac{\partial^2 u(re^{i\varphi})}{\partial\varphi^2} \right\|_{L_p} + \left\| \frac{\partial^2 v(re^{i\varphi})}{\partial\varphi^2} \right\|_{L_p} \leqslant A_{12} \frac{\omega(1-r)}{(1-r)^2}. \tag{16}$$

Оценим теперь

$$\left\| \frac{\partial f(re^{i\varphi})}{\partial\varphi} \right\|_{L_p}.$$

Имеем

$$\frac{\partial u(re^{i\varphi})}{\partial\varphi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(e^{i\theta}) \frac{\partial P(r, \theta-\varphi)}{\partial\varphi} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} \{u[e^{i(\varphi+\theta)}] - u[e^{i(\varphi-\theta)}]\} \frac{\partial P(r,\theta)}{\partial\theta} d\theta$$

и

$$\left\| \frac{\partial u(re^{i\varphi})}{\partial\varphi} \right\|_{L_p} \leqslant \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \omega_1^{(p)}(u;\ \theta) \cdot \left| \frac{\partial P(r,\theta)}{\partial\theta} \right| d\theta, \tag{17}$$

где $\omega_1^{(p)}(u, t)$ — интегральный модуль непрерывности первого порядка функции $u(z)$ на окружности γ.

Так как

$$\frac{\partial P(r,\theta)}{\partial\theta} = \frac{2r(1-r^2)\sin\theta}{(1-2r\cos\theta+r^2)^2},$$

то

$$\left| \frac{\partial P(r,\theta)}{\partial\theta} \right| \leqslant A_{13} \begin{cases} (1-r)^{-2}, & \text{при } 0 \leqslant \theta \leqslant 1-r \\ (1-r)\cdot\theta^{-3}, & \text{при } 1-r \leqslant \theta \leqslant \pi. \end{cases} \tag{18}$$

Кроме того имеем (см. например, [2, стр. 119])

$$\omega_1^{(p)}(u;\theta) \leqslant A_{14}\theta \int_{\theta}^{\pi} \frac{\omega_2^{(p)}(u;t)}{t^2} dt + O(\theta). \tag{19}$$

Поэтому из (17), пользуясь неравенствами (18), (19) и (12), а также неравенством (6) из [2] (см. [2, стр. 111]), получаем

$$\left\| \frac{\partial u(re^{i\varphi})}{\partial\varphi} \right\|_{L_p} \leqslant \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{1-r} + \int_{1-r}^{\pi} \right) \omega_1^{(p)}(u,\theta) \cdot \left| \frac{\partial P(r,\theta)}{\partial\theta} \right| d\theta \leqslant$$

$$\leqslant A_{15} \frac{\omega_1^{(p)}(u, 1-r)}{1-r} + A_{16}(1-r) \int_{1-r}^{\pi} \frac{\omega_1^{(p)}(u,\theta)}{\theta^3} d\theta \leqslant A_{17} \int_{1-r}^{\pi} \frac{\omega(t)}{t^2} dt +$$

$$+ A_{18}(1-r) \frac{\omega_1^{(p)}(u, 1-r)}{1-r} \int_{1-r}^{\pi} \frac{d\theta}{\theta^2} + O(1) \leqslant$$

$$\leqslant A_{19} \frac{\omega(1-r)}{(1-r)^2} + A_{20} \frac{\omega_1^{(p)}(u, 1-r)}{1-r} \leqslant A_{21} \frac{\omega(1-r)}{(1-r)^2}. \tag{20}$$

Аналогичное неравенство имеет место и для $v(z)$, т. е.

$$\left\| \frac{\partial v(re^{i\varphi})}{\partial\varphi} \right\|_{L_p} \leqslant A'_{21} \frac{\omega(1-r)}{(1-r)^2}. \tag{21}$$

Следовательно,

$$\left\| \frac{\partial f(re^{i\varphi})}{\partial\varphi} \right\|_{L_p} \leqslant \left\| \frac{\partial u(re^{i\varphi})}{\partial\varphi} \right\|_{L_p} + \left\| \frac{\partial v(re^{i\varphi})}{\partial\varphi} \right\|_{L_p} \leqslant A_{22} \frac{\omega(1-r)}{(1-r)^2}. \tag{22}$$

Теперь из (4), пользуясь неравенствами (16) и (22) при всех $\frac{1}{2} \leqslant r < 1$, получаем

$$\| f''(re^{i\varphi}) \|_{L_p} \leqslant A_{23} \frac{\omega(1-r)}{(1-r)^2}. \tag{23}$$

Так как функция $f''(z)$ является аналитической при $|z| \leqslant \frac{1}{2}$, то неравенство (23) имеет место и при $|z| \leqslant \frac{1}{2}$, т. е. при всех $0 < r < 1$.

Будем говорить, что $\omega(t) \in \Omega_2^*$, если $\omega(t) \in \Omega_2$ и $\int\limits_0^1 \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty$.

Если $\omega(t) \in \Omega_2$ и существует такая постоянная $C > 1$, что $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\omega(Ct)}{\omega(t)} > 1$, то скажем, что $\omega(t) \in \Omega_2^{**}$.

Известно (см. [3]), что если $\omega(t) \in \Omega_2^{**}$, то

$$\int\limits_0^t \frac{\omega(\tau)}{\tau} d\tau \leqslant A\omega(t), \tag{*}$$

где A — постоянная, не зависящая от t.

Теорема 2. *Пусть $f(z)$ является аналитической в D и ее вторая производная $f''(z)$ удовлетворяет неравенству*

$$\| f''(re^{i\varphi}) \|_{L_p} \leqslant \frac{\omega(1-r)}{(1-r)^2}, \quad 0 < r < 1, \tag{24}$$

где $\omega(t) \in \Omega_2^*$, тогда $f(z) \in H_p$ и на γ

$$\omega_2^{(p)}(f;\ t) \leqslant A_{24} \int\limits_0^t \frac{\omega(\tau)}{\tau} d\tau, \tag{25}$$

где A_{24} — постоянная, не зависящая от t.

Доказательство. Покажем сначала, что $f(z) \in H_p$.

Так как

$$f(re^{i\varphi}) = \int\limits_0^r \int\limits_0^t f''(se^{i\varphi}) e^{i2\varphi} ds dt + e^{i\varphi} r f'(0) + f(0),$$

то

$$\| f(re^{i\varphi}) \|_{L_p} = \left\{ \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \int\limits_0^r \int\limits_0^t f''(se^{i\varphi}) e^{i2\varphi} ds dt + e^{i\varphi} r f'(0) + f(0) \right|^p d\varphi \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^r \int\limits_0^t \left\{ \int\limits_{-\pi}^{\pi} | f''(se^{i\varphi}) |^p d\varphi \right\}^{\frac{1}{p}} ds dt + A_{25} \leqslant \int\limits_0^r \int\limits_0^t \frac{\omega(1-s)}{(1-s)^2} ds dt + A_{25} =$$

$$= \int\limits_0^r ds \int\limits_s^r \frac{\omega(1-s)}{(1-s)^2} dt + A_{25} \leqslant \int\limits_0^1 \frac{\omega(\tau)}{\tau} d\tau + A_{25} \leqslant A_{26}.$$

Таким образом, $\| f(re^{i\varphi}) \|_{L_p} \leqslant A_{26}$, где A_{26} — постоянная и не зависит от r. Последнее неравенство и показывает, что $f(z) \in H_p$.

Докажем неравенство (25). Пусть $|\tau| < 1$ и $h = 1 - |\tau|$. Представим $\Delta_\tau^2 f(e^{i\theta})$ в таком виде:

$$\Delta_\tau^2 f(e^{i\theta}) = f[e^{i(\theta+\tau)}] - 2f(e^{i\theta}) + f[e^{i(\theta-\tau)}] = \Big\{ f[e^{i(\theta+\tau)}] -$$

$$- 2f\left[\frac{1+h}{2} e^{i(\theta+\tau)}\right] + f[he^{i(\theta+\tau)}] \Big\} - 2\left\{ f(e^{i\theta}) - 2f\left(\frac{1+h}{2} e_{i\theta}\right) + f(he^{i\theta}) \right\} +$$

$$+\left\{f[e^{i(\theta-\tau)}]-2f\left[\frac{1+h}{2}e^{i(\theta-\tau)}\right]+f[he^{i(\theta-\tau)}]\right\}+2\left\{f\left[\frac{1+h}{2}e^{i(\theta+\tau)}\right]-\right.$$

$$\left.-2f\left(\frac{1+h}{2}e^{i\theta}\right)+f\left[\frac{1+h}{2}e^{i(\theta-\tau)}\right]\right\}-\left\{f[he^{i(\theta+\tau)}]-2f(he^{i\theta})+f[he^{i(\theta-\tau)}]\right\}=$$

$$=\tilde{\Delta}^2_{\frac{1-h}{2}}f\left[\frac{1+h}{2}e^{i(\theta+\tau)}\right]-2\tilde{\Delta}^2_{\frac{1-h}{2}}f\left(\frac{1+h}{2}e^{i\theta}\right)+\tilde{\Delta}^2_{\frac{1-h}{2}}f\left[\frac{1+h}{2}e^{i(\theta-\tau)}\right]+$$

$$+2\Delta^2_\tau f\left(\frac{1+h}{2}e^{i\theta}\right)-\Delta^2_\tau f(he^{i\theta}). \tag{26}$$

Далее, так как

$$\tilde{\Delta}^2_{\frac{1-h}{2}}f\left(\frac{1+h}{2}e^{i\theta}\right)=\int\limits_0^{\frac{1-h}{2}}\int\limits_{-t_1}^{t_1}f''\left[\left(\frac{1+h}{2}+t_2\right)e^{i\theta}\right]e^{i2\theta}dt_1dt_2,$$

то, используя неравенство (24), получим

$$\left\|\tilde{\Delta}^2_{\frac{1-h}{2}}f\left(\frac{1+h}{2}e^{i\theta}\right)\right\|_{L_p}\leqslant\int\limits_0^{\frac{1-h}{2}}\int\limits_{-t_1}^{t_1}\left\|f''\left[\left(\frac{1+h}{2}+t_2\right)e^{i\theta}\right]\right\|_{L_p}dt_1dt_2\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^{\frac{1-h}{2}}\int\limits_{-t_1}^{t_1}\frac{\omega\left(\frac{1-h}{2}-t_2\right)}{\left(\frac{1-h}{2}-t_2\right)^2}dt_1dt_2=\int\limits_0^{\frac{1-h}{2}}dt_2\int\limits_{t_2}^{\frac{1-h}{2}}\frac{\omega\left(\frac{1-h}{2}-t_2\right)}{\left(\frac{1-h}{2}-t_2\right)^2}dt_1+$$

$$+\int\limits_{\frac{1-h}{2}}^{0}dt_2\int\limits_{-t_2}^{\frac{1-h}{2}}\frac{\omega\left(\frac{1-h}{2}-t_2\right)}{\left(\frac{1-h}{2}-t_2\right)^2}dt_1\leqslant\int\limits_0^{\frac{1-h}{2}}\frac{\omega\left(\frac{1-h}{2}-t_2\right)}{\frac{1-h}{2}-t_2}dt_2+$$

$$+\int\limits_0^{\frac{1-h}{2}}\frac{\omega\left(\frac{1-h}{2}+t_2\right)}{\frac{1-h}{2}+t_2}dt_2=\int\limits_0^{1-h}\frac{\omega(\xi)}{\xi}d\xi=\int\limits_0^{|\tau|}\frac{\omega(\xi)}{\xi}d\xi. \tag{27}$$

Аналогично получаем

$$\left\|\tilde{\Delta}^2_{\frac{1-h}{2}}f\left[\frac{1+h}{2}e^{i(\theta+\tau)}\right]\right\|_{L_p}\leqslant\int\limits_0^{|\tau|}\frac{\omega(\xi)}{\xi}d\xi, \tag{27'}$$

$$\left\|\tilde{\Delta}^2_{\frac{1-h}{2}}f\left[\frac{1+h}{2}e^{i(\theta-\tau)}\right]\right\|_{L_p}\leqslant\int\limits_0^{|\tau|}\frac{\omega(\xi)}{\xi}d\xi. \tag{27''}$$

Перейдем теперь к оценке двух последних слагаемых в сумме (26). Так как

$$\frac{\partial^2 f(re^{i\theta})}{\partial\theta^2}=-re^{i\theta}[f''(re^{i\theta})re^{i\theta}+f'(re^{i\theta})],$$

то из неравенства (24) следует, что

$$\left\|\frac{\partial^2 f(re^{i\theta})}{\partial\theta^2}\right\|_{L_p}\leqslant A_{27}\frac{\omega(1-r)}{(1-r)^2}. \tag{28}$$

Учитывая, что $\Delta^2_\tau f(he^{i\theta})=\int\limits_0^\tau\int\limits_{-\varphi_1}^{\varphi_1}\frac{\partial^2 f[he^{i(\theta+\varphi_2)}]}{\partial\theta^2}d\varphi_1d\varphi_2$, и используя неравенство (28), получаем

$$\|\Delta^2_\tau f(he^{i\theta})\|_{L_p}\leqslant\left|\int\limits_0^\tau\int\limits_{-\varphi_1}^{\varphi_1}\left\|\frac{\partial^2 f[he^{i(\theta+\varphi_2)}]}{\partial\theta^2}\right\|_{L_p}d\varphi_1d\varphi_2\right|\leqslant A_{27}\left|\int\limits_0^\tau\int\limits_{-\varphi_1}^{\varphi_1}\frac{\omega(1-h)}{(1-h)^2}d\varphi_1d\varphi_2\right|=$$

$$=A_{27}\frac{\omega(1-h)}{(1-h)^2}|\tau|^2=A_{27}\omega(|\tau|). \tag{29}$$

Аналогично

$$\left\| \Delta_\tau^2 f\left(\frac{1+h}{2} e^{i\theta}\right) \right\|_{L_p} \leqslant A'_{27} \omega(|\tau|). \tag{29'}$$

Учитывая теперь неравенства (27), (27'), (27''), (29) и (29'), из (26) получаем

$$\omega_2^{(p)}(f;\ t) = \sup_{|\tau|<t} \| \Delta_\tau^2 f(e^{i\theta}) \|_{L_p} \leqslant A_{28} \int_0^t \frac{\omega(\xi)}{\xi} d\xi,$$

где A_{28} — постоянная, не зависящая от t.

Используя неравенство (*), получаем

Следствие 1. *Если $\omega(t) \in \Omega_2^{**}$, то при условиях теоремы 2*

$$\omega_2^{(p)}(f;\ t) \leqslant A_{29} \omega(t), \tag{30}$$

где A_{29} — постоянная, не зависящая от t.

Следствие 2. *Пусть $f(z)$ является аналитической в D и ее $(k+2)$-я производная $f^{(k+2)}(z)$ удовлетворяет неравенству*

$$\| f^{(k+2)}(z) \|_{L_p} \leqslant \frac{\omega(1-r)}{(1-r)^2}, \quad 0 < r < 1, \tag{31}$$

где $\omega(t) \in \Omega_2^{**}$, тогда $f^{(k)}(z) \in H_p$ и на γ

$$\omega_2^{(p)}(f^{(k)};\ t) \leqslant A_{30} \omega(t), \tag{32}$$

где A_{30} — постоянная, не зависящая от t.

Пользуясь теоремой 1 и следствием 2 к теореме 2, получаем следующую теорему

Теорема 3. *Пусть $\omega(t) \in \Omega_2$. Для того, чтобы функция $f(z)$, аналитическая в D, имела на $\bar{D} = \{z: |z| \leqslant 1\}$ производную k-го порядка $f^{(k)}(z) \in H_p$ интегральный модуль непрерывности второго порядка которой на γ удовлетворял бы условию*

$$\omega_2^{(p)}(f^{(k)};\ t) \leqslant A_{31} \omega(t), \tag{33}$$

необходимо, а в случае, когда $\omega(t) \in \Omega_2^{**}$, и достаточно, чтобы в D выполнялось неравенство

$$\| f^{(k+2)}(re^{i\varphi}) \|_{L_p} \leqslant A_{32} \frac{\omega(1-r)}{(1-r)^2}, \tag{34}$$

где A_{32} — постоянная, не зависящая от r.

Замечание 1. Учитывая (4), (16), (22), а также, что

$$f^{(p)}(re^{i\varphi}) = \frac{\partial^p f(re^{i\varphi})}{\partial r^p} e^{-ip\varphi},$$

легко убедиться, что теорема 3 имеет место, если неравенство (34) заменить одним из неравенств

$$\left\| \frac{\partial^{k+2} f(re^{i\varphi})}{\partial r^{k+2}} \right\|_{L_p} \leqslant A'_{32} \frac{\omega(1-r)}{(1-r)^2}, \tag{34'}$$

$$\left\| \frac{\partial^{k+2} f(re^{i\varphi})}{\partial \varphi^{k+2}} \right\|_{L_p} \leqslant A''_{32} \frac{\omega(1-r)}{(1-r)^2}, \tag{34''}$$

где A'_{32} и A''_{32} — постоянные, не зависящие от r.

Замечание 2. Все утверждения этой заметки останутся справедливыми и в равномерной метрике, т. е., если рассматривать класс функций аналитических в D и непрерывных на $\bar{D}$ и вместо интегрального модуля непрерывности $\omega_2^{(p)}(f;\ t)$ рассматривать обыкновенный второй модуль непрерывности

$$\omega_2(f;\ t) = \max_{|\theta_2-\theta_1|\leqslant t} |f(e^{i\theta_1}) - 2f(e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}) + f(e^{i\theta_2})|,$$

а $\|f''(re^{i\varphi})\|_{L_p}$ заменить на $\|f''(re^{i\varphi})\|_C = \max_{\varphi}|f''(re^{i\varphi})|$.

При этом все доказательства остаются такими же, а в некоторых местах даже упрощаются.

Отметим, что случай первых модулей непрерывности и $\omega(t) = At^\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$, изучен Харди и Литтльвудом [4], Уолш и Эллиот [5] получили аналогичные теоремы для функций классов Зигмунда. М. Б. Гагуа [6] распространил результаты Харди и Литтльвуда на классы функций Дини — Липшица, а Л. Я. Геронимус [7, 8], Ю. А. Брудный и И. Е. Гопенгауз [9] на классы функций, определяемые довольно общими первыми модулями непрерывности.

При несколько более ограничительных условиях для случая равномерной метрики результаты этой заметки сообщались нами на Первой республиканской математической конференции молодых исследователей [10] (см. также [11]).

Отметим, что полученные в этой работе результаты при помощи конформного отображения легко распространяются на области, ограниченные аналитическими кривыми.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. М. Голузин. Геометрическая теория функций комплексного переменного. «Наука», М., 1966.

2. А. Ф. Тиман. Теория приближения функций действительного переменного. Физматгиз, М., 1960.

3. Н. К. Бари и С. Б. Стечкин. Наилучшее приближение и дифференциальные свойства двух сопряженных функций. «Труды Московск. матем. об-ва», 5, 1956, 483—522.

4. G. H. Hardy, J. E. Littlewood. Somme properties of fractional integrals. II, Math. Zeitschr, 34 (1932), 403—439.

5. J. L. Walsh and H. Margaret Elliott. Polynomial approximation to harmonic and analytic functions generalzed continyity condions. Fransctions of the American Math. Society, v. 68, № 2, 1950, 183—203.

6. М. Б. Гагуа. О поведении аналитических функций и их производных в замкнутых областях. «Сообщ. АН Груз. ССР», Х, № 8, 1949, 451—456.

7. Я. Л. Геронимус. О некоторых свойствах аналитических функций, непрерывных в замкнутом круге или круговом секторе. «Матем. сб.» 38 (80): 3 (1956). 320—330.

8. Я. Л. Геронимус. О некоторых свойствах функциий класса. «Изв. вузов матем.», 1/2/ (1958), 24—32.

9. Ю. А. Брудный и И. Е. Гопенгауз. Обобщение одной теоремы Харди и Литтльвуда. «Матем. сб.», 52 (94): 3 (1960), 891—894.

10. Р. Н. Ковальчук. О модулях непрерывности функций, заданных в замкнутом круге. «Первая респ. матем. конф. молодых исслед. вып. II, Киев, 1965, 333—340.

11. Р. Н. Ковальчук. О модулях непрерывности аналитических функций и о приближении функций многих комплексных переменных. Автореф. канд. дисс., К., 1964.

Поступила 4 января 1968 г.