Министерство образования и науки Украины
Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина

Н.Д. Парфёнова

КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

Харьков 2008

СОДЕРЖАНИЕ

1 Комплексные числа. Элементарные функции.

<table>
<tr><td colspan="2">Выполнить арифметические действия над комплексными числами в алгебраической форме.</td></tr>
<tr><td>1.1. $z_1 = 1 - i,\, z_2 = 1 + i.$</td><td>1.1. $z_1 = 3 + i,\, z_2 = 1 - 3i.$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Выполнить действия.</td></tr>
<tr><td>1.2. $\frac{1}{i^{13}} + \frac{1}{i^{23}} + \frac{1}{i^{34}}.$</td><td>1.2. $\frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^5} + \frac{1}{i^7} + \frac{1}{i^9}.$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Представить число в тригонометрической форме и найти n-ю степень.</td></tr>
<tr><td>1.3. $z = 3i,\ n = 20;$
1.4. $z = 2 + 5i,\ n = 5.$</td><td>1.3. $z = -2,\ n = 7;$
1.4. $z = 1 + i,\ n = 25.$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Представить число в тригонометрической форме, найти корни n-й степени и изобразить их.</td></tr>
<tr><td>1.5. $z = 1 - i,\ n = 3;$
1.6. $z = 3 - 4i,\ n = 2.$</td><td>1.5. $z = -1,\ n = 4;$
1.6. $z = -1 - i,\ n = 3.$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Представить число в показательной форме.</td></tr>
<tr><td>1.7. $z = 3i.$</td><td>1.7. $z = -1 - i.$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Выяснить геометрический смысл соотношений.</td></tr>
<tr><td>1.8. $|z + 3| < 5;$
1.9. $|z - 1| > |z - 2|;$
1.10. $|z - 2| + |z + 2| = 5;$
1.11. $\mathrm{Re}\, z \geq 3;$
1.12. $\frac{\pi}{6} \leq arg(z - 2) < \frac{\pi}{4}.$</td><td>1.8. $|z - 2| > 1;$
1.9. $||z - 2| - |z + 2|| > 3;$
1.10. $\mathrm{Re}(z + 2 - i) < 3;$
1.11. $\mathrm{Im}\, z < -1;$
1.12. $\pi \leq argz < \frac{5\pi}{4};$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Найти модуль и аргумент числа.</td></tr>
<tr><td>1.13. $e^{2+i};$ 1.14. $e^{-3-i}.$</td><td>1.12. $e^{2-3i};$ 1.14. $e^{3+i}.$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Вычислить.</td></tr>
<tr><td>1.15. $\mathrm{Ln}(-4);$ 1.16. $\ln(-4);$
1.17. $\mathrm{Ln}\frac{1+i}{\sqrt{2}}.$</td><td>1.15. $\mathrm{Ln}(i);$ 1.16. $\ln(i);$
1.17. $\mathrm{Ln}(2 - 3i).$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Найти все значения выражения.</td></tr>
<tr><td>1.18. $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i};$ 1.19. $(3 - 4i)^{-i}.$</td><td>1.18. $(-2)^{\sqrt{2}i};$ 1.19. $(-3 + 4i)^{1+i}.$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Найти значение выражения.</td></tr>
<tr><td>1.20. $\cos(2 + i);$ 1.21. $\mathrm{tg}(2 + i).$</td><td>1.20. $\sin(2i);$ 1.21. $\mathrm{ctg}(\frac{\pi}{4} - i\ln(2)).$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Доказать равенства.</td></tr>
<tr><td>1.22. $\mathrm{Arccos}\, z = -i\mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1});$
1.23. $\mathrm{Arsh}\, z = \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1}).$</td><td>1.22. $\mathrm{Arcsin}\, z = -i\mathrm{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2});$
1.23. $\mathrm{Arch}\, z = \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Найти все значения выражения.</td></tr>
<tr><td>1.24. $\mathrm{Arccos}\, \frac{1}{2};$ 1.25. $\mathrm{Arsh}\, 2.$</td><td>1.24. $\mathrm{Arcsin}\, 3;$ 1.25. $\mathrm{Arch}\, i.$</td></tr>
</table>

Теория.

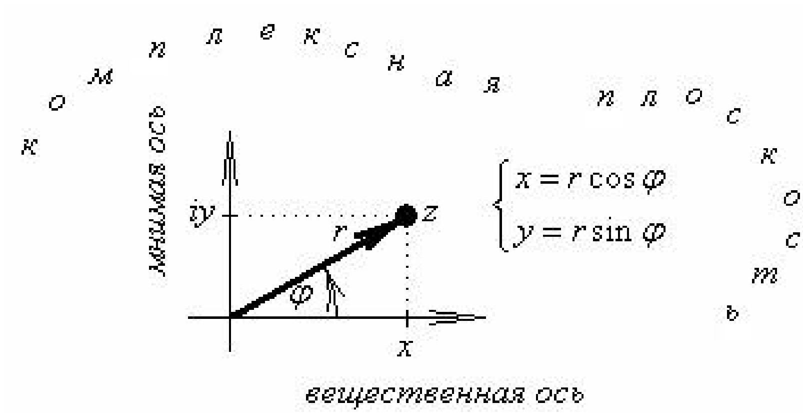
Def. *Комплексным числом* z называется выражение вида

$$z = x + iy,$$

где x и y – вещественные числа, а i – мнимая единица, т.е. число удовлетворяющее условию

$$i^2 = -1.$$

Множество $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел являются расширением множества вещественных чисел $\mathbb{R}$ с сохранением всех свойств арифметических операций путем добавления нового числа – мнимой единицы i.



Геометрической интерпретацией комплексного числа z является точка на плоскости (радиус-вектор точки).

- Декартовы координаты точки (x, y) называются *вещественной* $x = \mathrm{Re} z$ и *мнимой* $y = \mathrm{Im} z$ частью комплексного числа

$$z = x + iy - \text{ алгебраическая форма.}$$

- Полярные координаты точки (r, φ) называются *модулем* $r = |z|$ и *аргументом* $\varphi = \mathrm{Arg} z = \arg z + 2\pi k i, \quad k \in \mathbb{Z}$, $0 \le \arg z < 2\pi$ комплексного числа

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) - \text{ тригонометрическая форма.}$$

- Используя формулу Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ тригонометрическая форма иначе записывается в виде

$$z = re^{i\varphi} - \text{ показательная форма.}$$

Арифметические операции над комплексными числами в алгебраической форме сводятся к привычному раскрытию скобок и приведению подобных слагаемых, с учетом того, что $i^2 = -1$.

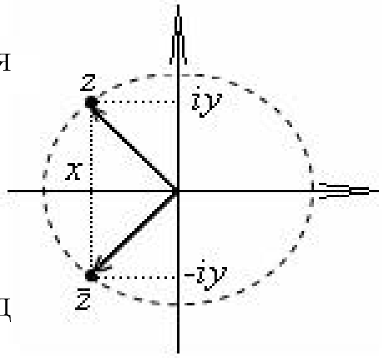
$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)\,,$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i\,(y_1 - y_2)\,,$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot iy_2 + iy_1 \cdot x_2 + iy_1 \cdot iy_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i\,(y_1x_2 + x_1y_2)\,,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + iy_1)\cdot(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)\cdot(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot iy_2 + iy_1 \cdot x_2 - iy_1 \cdot iy_2}{(x_2)^2 - (iy_2)^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Def. Комплексное число $\overline{z} = x - iy$ называется *комплексно сопряженным* числу $z = x + iy$



$$z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2 = r^2$$
$$z + \overline{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x = 2 \text{ Re } z.$$

Операции умножения и деления удобней проводить над числами, записанными в тригонометрической форме

$z_1 \cdot z_2 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_1 \cdot r_2 (\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2))$,
$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \dfrac{r_1}{r_2} (\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2))$.

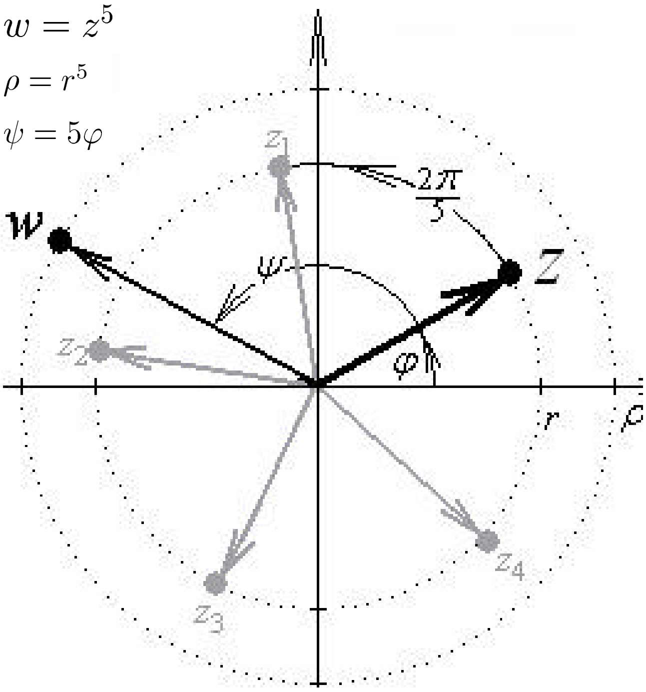
В частности, получаем **формулу Муавра**

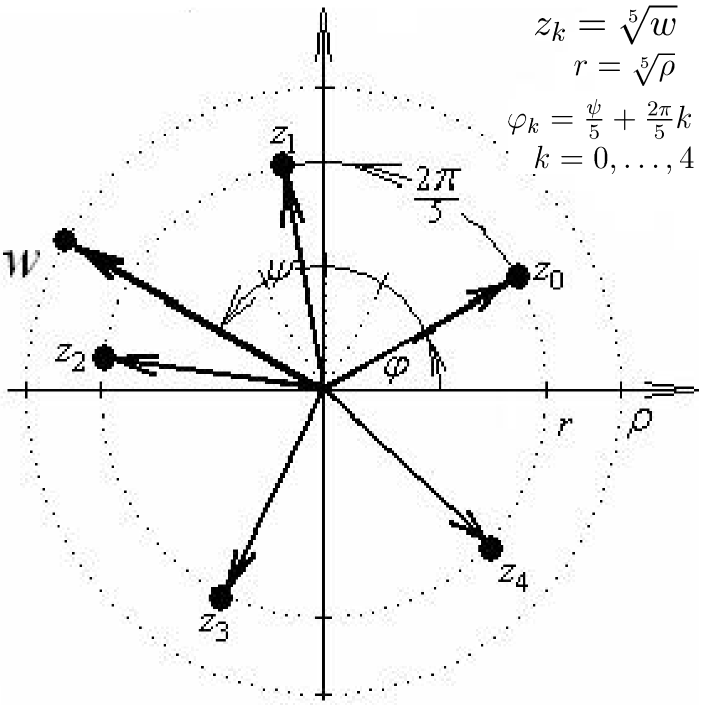
$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Числа z_k, аргументы которых $\varphi_k = \varphi + \frac{2\pi}{n}k, \quad k = 0, ..., (n-1)$, отличаются на $\frac{2\pi}{n}$, имеют одну и ту же степень
$r^n \left(\cos n \left(\varphi + \frac{2\pi}{n}k\right) + i \sin n \left(\varphi + \frac{2\pi}{n}k\right)\right) = r^n (\cos (n\varphi + 2\pi k) + i \sin (n\varphi + 2\pi k))$.

Отсюда вытекает, что существует *n различных комплексных корней n-ой степени из комплексного числа* $w = \rho (\cos \psi + i \sin \psi)$

$$z_k = \sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \left(\frac{\psi + 2\pi k}{n}\right) + i \sin \left(\frac{\psi + 2\pi k}{n}\right)\right), k = 0, ..., (n-1).$$





Решение примеров.

1.1. *Выполнить арифметические действия над комплексными числами в алгебраической форме:* $z_1 = -4 - 3i, \quad z_2 = -1 + 2i.$

$z_1 + z_2 = (-4 - 3i) + (-1 + 2i) = (-4 + (-1)) + i(-3 + 2) = -5 - i.$

$z_1 - z_2 = (-4 - 3i) - (-1 + 2i) = (-4 - (-1)) + i(-3 - 2) = -3 - 5i.$

$z_1 \cdot z_2 = (-4 - 3i)(-1 + 2i) = 4 - 8i + 3i - 6i^2 = (4 + 6) + i(-8 + 3) = 10 - 5i.$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{-4-3i}{-1+2i} = \frac{(-4-3i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)} = \frac{4+8i+3i+6i^2}{1-4i^2} = \frac{-2+11i}{5} = -\frac{2}{5} + i\frac{11}{5}.$

1.2. *Вычислить* $i^n, n \in \mathbb{N}$.

$i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = i^2 \cdot i = -i,\ i^4 = (i^2)^2 = 1,\ i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i, \ldots$

Таким образом есть всего 4 различные значения степени i^n :

$$i^n = \left[\begin{array}{rl} i, & n = 4k + 1, \\ -1, & n = 4k + 2, \\ -i, & n = 4k + 3, \\ 1, & n = 4k, \end{array} \right. \quad k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}.$$

Например, $i^{2006} = i^{2004+2} = i^{4\cdot 501+2} = (i^4)^{501} \cdot i^2 = 1^{501} \cdot (-1) = -1.$

1.3. *Вычислить* $\mathrm{Re}\dfrac{(1 - 3i)^2 - (1 + i^9)^3}{(1 + i^{21})^3 - (2 - i)^3}$.

Для вычисления нам понадобятся формулы сокращенного умножения

$$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.}$$

$(1 - 3i)^2 = 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 3i + (3i)^2 = 1 - 6i - 9 = -8 - 6i$

$(1 + i^9)^3 = (1 + (i^2)^4 i)^3 = (1 + i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i$

$(1 + i^{21})^3 = (1 + (i^2)^{10} i)^3 = (1 + i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i$

$(2 - i)^3 = 2^3 - 3 \cdot 2^2 i + 3 \cdot 2i^2 - i^3 = 8 - 12i - 6 + i = 2 - 11i$

$(1 - 3i)^2 - (1 + i^9)^3 = (-8 - 6i) - (-2 + 2i) = -6 - 8i$

$(1 + i^{21})^3 - (2 - i)^3 = (-2 + 2i) - (2 - 11i) = -4 + 13i$

$\frac{(1-3i)^2-(1+i^9)^3}{(1+i^{21})^3-(2-i)^3} = \frac{6+8i}{4-13i} = \frac{(6+8i)\cdot(4+13i)}{(4-13i)\cdot(4+13i)} = \frac{(6\cdot 4-8\cdot 13)+i(6\cdot 13+8\cdot 4)}{4^2+13^2} = \frac{-80+110i}{185} = \frac{-16}{37} + i\frac{22}{37}$

$$\mathrm{Re}\frac{(1 - 3i)^2 - (1 + i^9)^3}{(1 + i^{21})^3 - (2 - i)^3} = \mathrm{Re}\left(-\frac{16}{37} + i\frac{22}{37}\right) = -\frac{16}{37}$$

1.4. *Представить число в тригонометрической форме:* $z = -\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$.

Из формул приведения:

$\boxed{\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha,\ \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha}$

получаем

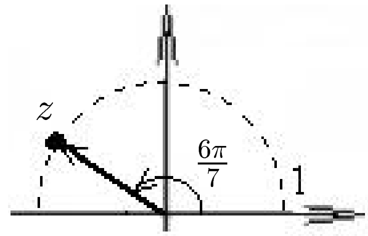
$-\cos\frac{\pi}{7} = \cos(\pi - \frac{\pi}{7}),\ \sin\frac{\pi}{7} = \sin(\pi - \frac{\pi}{7}).$

Тогда $z = -\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7} =$

$\cos(\pi - \frac{\pi}{7}) + i\sin(\pi - \frac{\pi}{7}) = \cos(\frac{6\pi}{7}) + i\sin(\frac{6\pi}{7}) =$

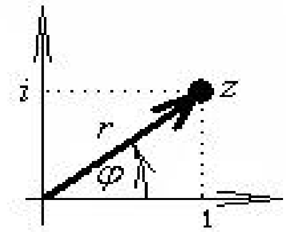
$\left[\varphi = \arg z = \frac{6\pi}{7}; \quad r = |z| = \sqrt{(\cos\frac{6\pi}{7})^2 + (\sin\frac{6\pi}{7})^2} = 1\right]$

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cos(\frac{6\pi}{7}) + i\sin(\frac{6\pi}{7}).$



1.5. *Представить число в тригонометрической форме:* $z = 1+\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$.
$z = 1+\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7} = \left[1+\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha;\ \sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha\right] = 2\cos^2\frac{\pi}{14}+i2\sin\frac{\pi}{14}\cos\frac{\pi}{14} = 2\cos\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{14}+i\sin\frac{\pi}{14}\right) = \left[\varphi = \arg z = \frac{\pi}{14};\ r = |z| = 2\cos\frac{\pi}{14}\right] \Longrightarrow$
$z = r(\cos\varphi+i\sin\varphi) = 2\cos\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{14}+i\sin\frac{\pi}{14}\right)$.

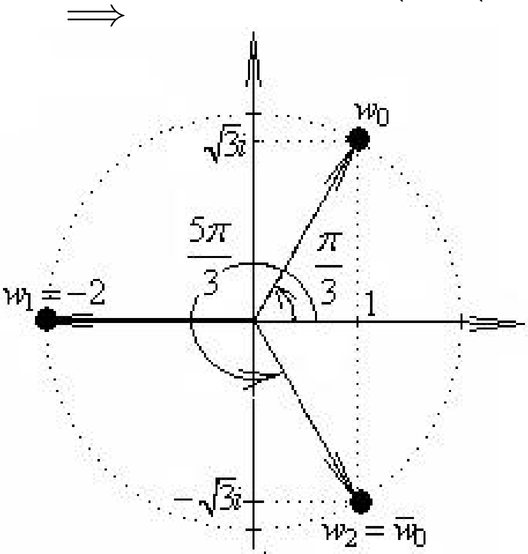
1.6. *Представить число в тригонометрической форме и найти его* n*-ю степень:* $z = 1+i^{2005},\ n = 25$.



$i^{2005} = i^{2004+1} = i^{4\cdot 501+1} = i$.
$$z = 1+i^{2005} = 1+i = \left[\begin{array}{r} r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}; \\ \varphi = \arg\ z = \operatorname{arctg}\ 1 = \frac{\pi}{4}. \end{array}\right]$$
$= r(\cos\varphi+i\sin\varphi) = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$.

$w = z^{25} = (1+i^{2005})^{25} = \left[(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)\right] = (\sqrt{2})^{25}\left(\cos\frac{25\pi}{4}+i\sin\frac{25\pi}{4}\right) = 2^{12}\sqrt{2}\left(\cos\left(6\pi+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(6\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2^{12}\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2^{12}\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2^{12}(1+i)$.

1.7. *Представить число в тригонометрической форме, найти его корни* n*-й степени и изобразить их:* $z = -8,\ n = 3$.
$z = -8+0i = \left[\varphi = \arg z = \pi;\ r = |z| = \sqrt{(-8)^2+0^2} = 8\right] = 8(\cos\pi+i\sin\pi)$.
$w_k = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{3}\right)\right),\ k = 0,1,2.$
$\Longrightarrow$



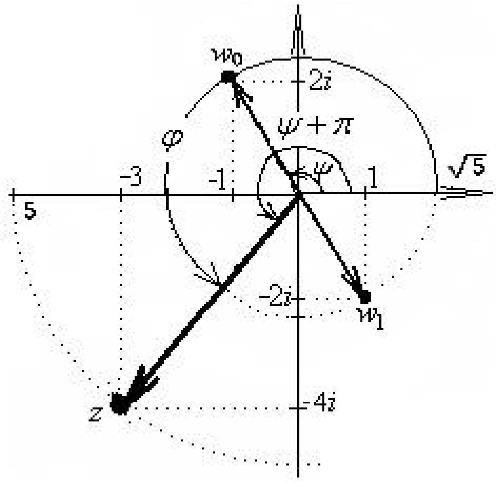
$w_0 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 1+i\sqrt{3}$,

$w_1 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi+2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+2\pi}{3}\right)\right) =$
$= 2(\cos\pi+i\sin\pi) = 2(-1+0i) = -2$,

$w_2 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi+4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+4\pi}{3}\right)\right) =$
$= 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) =$
$= 2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1-i\sqrt{3} = \overline{w_0}$.

1.8. *Представить число в тригонометрической форме, найти его корни* n*-й степени и изобразить их:* $z = -3-4i,\ n = 2$.

Первый способ.
$z = -3-4i = \left[\varphi = \arg z = \pi+\operatorname{arctg}\frac{4}{3};\ r = |z| = \sqrt{(-3)^2+(-4)^2} = 5\right] \Longrightarrow$
$z = 5\left(\cos\left(\pi+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)+i\sin\left(\pi+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right)$.
$w_k = \sqrt{z} = \sqrt{-3-4i} = \sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{3}\right)\right),\ k = 0,1.$



$\Longrightarrow$
$$w_0 = \sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{\pi+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}}{2}\right)\right),$$
$$w_1 = \sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{3\pi+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}}{2}\right)\right) =$$
$$\sqrt{5}\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}}{2}\right) + i\sin\left(\pi+\frac{\pi+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}}{2}\right)\right)$$
$= -w_0$.

Второй способ. Будем искать w_k в алгебраической форме: $w_k = \sqrt{-3-4i} = a+bi$. $\Longrightarrow$

$$w_k^2 = -3-4i = (a^2-b^2)+2abi \iff \begin{cases} -3 = a^2-b^2 \\ -4 = 2ab \end{cases}$$

Возведем оба уравнения в квадрат и сложим.
$9+16 = 25 = a^4-2a^2b^2+b^4+4a^2b^2 = (a^2+b^2)^2 \iff a^2+b^2 = 5.$

Таким образом, $\begin{cases} a^2-b^2 = -3 \\ a^2+b^2 = \ \ 5 \\ \quad ab = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = \ \ 1 \\ b^2 = \ \ 4 \\ ab = -2 \end{cases} \iff$

$\begin{cases} a = \ \ 1 \\ b = -2 \end{cases}$ или $\begin{cases} a = -1 \\ b = \ \ 2 \end{cases}$.

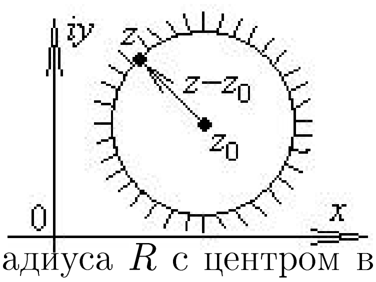
Значит, $w_0 = 1-2i$, $w_1 = -1+2i$.

1.9. *Представить число в показательной форме:* $z = -\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$.

В задаче 1.4. были найдены модуль и главное значение аргумента данного числа , поэтому
$z = -\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7} = \left[\varphi = \arg z = \frac{6\pi}{7};\ r = |z| = 1\right] = \boxed{\ z = re^{i\varphi}\ } = e^{i\frac{6\pi}{7}}$.

1.10. *Выяснить геометрический смысл соотношения:* $|z-z_0| = R$.

Множество точек z, удовлетворяющих уравнению $|z-z_0| = R$, есть окружность радиуса R с центром в точке z_0, так как $|z-z_0|$ — расстояние между точками z и z_0.

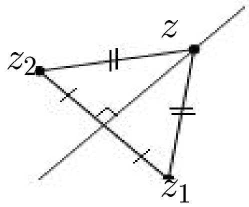


Соотношение $|z-z_0| < R$ задает множество точек z, удаленных на расстояние меньшее чем R от фиксированной точки z_0, т.е. это внутренность круга радиуса R с центром в точке z_0.

Замечание. В комплексном анализе принято штриховать дополнение искомой области, а не ее саму.

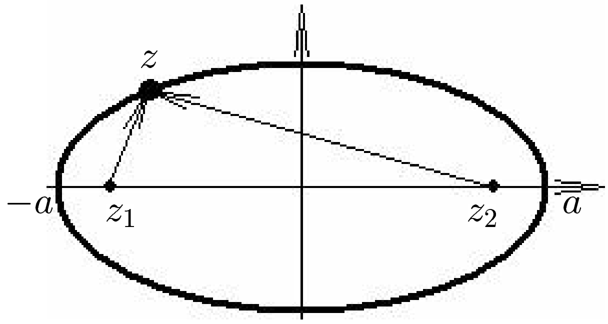
1.11. *Выяснить геометрический смысл соотношения:* $|z-z_1| = |z-z_2|$.

Множество точек z, удовлетворяющих уравнению $|z-z_1| = |z-z_2|$, есть множество точек, равноудаленных от точек z_1 и z_2.



Следовательно, это уравнение прямой, перпендикулярной отрезку, соединяющему точки z_1, z_2, и проведенной через его середину.

1.12. *Выяснить геометрический смысл соотношения:* $|z-z_1|+|z-z_2| = 2a.$

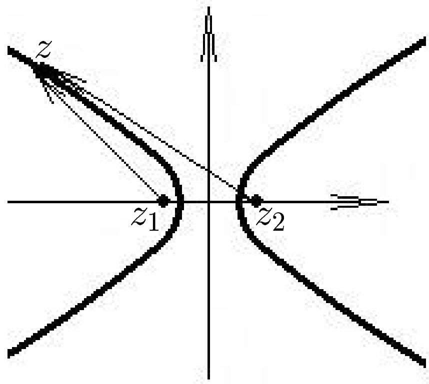


Множество точек z, удовлетворяющих уравнению $|z-z_1|+|z-z_2| = 2a$, где $a > \frac{1}{2}\,|z_1 - z_2|$, есть эллипс с фокусами в точках z_1, z_2 и с большой полуосью, равной a, так как $|z - z_1| + |z - z_2|$ — сумма расстояний от точки z до точек z_1 и z_2.

Замечание. Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости сумма расстояний, от которых до двух заданныхточек (фокусов) есть величина постоянная.

1.13. *Выяснить геометрический смысл соотношения:* $||z-z_1|-|z-z_2|| = 2a.$

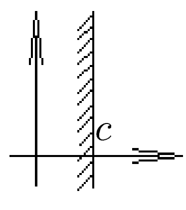
Множество точек z, удовлетворяющих уравнению $||z-z_1|-|z-z_2|| = 2a$, где $a < \frac{1}{2}|z_1-z_2|$, является уравнением гиперболы с фокусами в точках z_1, z_2, и с действительной полуосью, равной a.



Замечание. Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости модуль разности расстояний, от которых до двух заданных точек (фокусов) есть величина постоянная.

1.14. *Выяснить геометрический смысл соотношения:* $\mathrm{Re}\ z \geq c.$

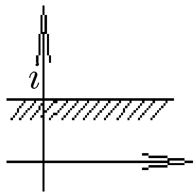
Пусть $z = x+iy$, тогда $\mathrm{Re}\ z = x$, т.е. неравенство превращается в $x \geq c$. Множество точек z, удовлетворяющих данному неравенству – это правая полуплоскость относительно прямой $x = c$, состаящая из точек плоскости абсциссы, которых больше или равны c.



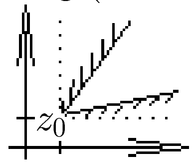
1.15. *Выяснить геометрический смысл соотношения:* $\mathrm{Im}\ (2z + i) \geq 3.$

Пусть $z = x + iy$, тогда $\mathrm{Im}(2z + i) = \mathrm{Im}(2x + i(2y + 1)) = 2y + 1$, т.е. неравенство превращается в $2y + 1 \geq 3$ или $y \geq 1$.

Множество точек z, удовлетворяющих данному неравенству – это верхняя полуплоскость относительно прямой $y = 1$, состаящая из точек плоскости ординаты, которых больше или равны 1.



1.16. *Выяснить геометрический смысл соотношения:* $\alpha < \arg\,(z - z_0) < \beta$.



Множество точек z, удовлетворяющих данному неравенству – это внутренность угла между лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ с вершиной в точке z_0.

Основные элементарные функции комплексного переменного могут быть определены следующим образом ($z = x + iy$):

- Показательная функция

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

- Тригонометрические функции:

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right),\ \sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right),\ \mathrm{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z},\ \mathrm{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

- Гиперболические функции:

$$\mathrm{ch}\, z = \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right),\ \mathrm{sh}\, z = \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right),\ \mathrm{th} z = \frac{\mathrm{sh}\, z}{\mathrm{ch}\, z},\ \mathrm{cth} z = \frac{\mathrm{ch}\, z}{\mathrm{sh}\, z}.$$

- Логарифмическая функция

$$\mathrm{Ln}\ z = \ln|z| + i \cdot \mathrm{Arg}\ z = \ln|z| + i \cdot \arg\ z + 2\pi k i = \ln z + 2\pi k i,\ k \in \mathbb{Z};$$

главное значение логарифма: $\ln\ z = \ln|z| + i \cdot \arg\ z.$

- Показательная и степенная функции ($a \neq 0, a \in \mathbb{C}$):

$$a^z = e^{z \cdot \mathrm{Ln}\ a},\quad z^a = e^{a \cdot \mathrm{Ln}\ z}.$$

1.17. *Найти модуль и аргумент числа:* $z = e^{1+2i}$.
$z = e^{1+2i} = \boxed{e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)} = e(\cos 2 + i \sin 2) = e(\cos(2+2\pi k) + i \sin(2 + 2\pi k)) \Longrightarrow$
$|z| = e,\ \mathrm{Arg}\ z = 2 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

1.18. *Вычислить:* $\mathrm{Ln}(1+i),\ \ln(1+i)$.

$$\boxed{\mathrm{Ln}\ z = \ln|z| + i \cdot \mathrm{Arg}\ z = \ln|z| + i \cdot \arg\ z + 2\pi k i = \ln z + 2\pi k i,\ k \in \mathbb{Z}.}$$

В задаче 1.6. были найдены модуль и главное значение аргумента данного числа. $z = 1 + i = \left[r = |z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}; \varphi = \arg\ z = \mathrm{arctg}\ 1 = \frac{\pi}{4}\right]$.
$\mathrm{Ln}\ (1+i) = \ln|1+i| + i \cdot \mathrm{Arg}\ (1+i) = \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} + 2\pi k i,\ k \in \mathbb{Z}.$
$\ln(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}.$

1.19. *Вычислить:* $w = 1^{-\cos\frac{\pi}{7} + i \sin\frac{\pi}{7}}$.

$w = \boxed{z^a = e^{a \cdot \mathrm{Ln}\ z}} = e^{(-\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7})\mathrm{Ln} 1} = e^{(-\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7})(\ln|1| + i\cdot\arg 1 + 2\pi k i)} = e^{(-\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7})(2\pi k i)} = e^{(-\sin\frac{\pi}{7} - i\cos\frac{\pi}{7})(2\pi k)} = e^{-2\pi k \sin\frac{\pi}{7}}\left(\cos\left(2\pi k (cos\frac{\pi}{7})\right) - \right.$
$\left. -i\sin\left(2\pi k (cos\frac{\pi}{7})\right)\right).$

1.20. *Найти значение выражений:* $\cos(1+i)$; $\sin(1+i)$; $\mathrm{tg}(1+i)$; $\mathrm{ctg}(1+i)$.

Найдем в общем виде $w = \cos z$. Имеем
$w = u+iv = \cos z = \cos(x+iy) = \frac{1}{2}\left(e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-y+ix} + e^{y-ix}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-y}(\cos x + i\sin x) + e^{y}(\cos x - i\sin x)\right) = \cos x\frac{e^{y}+e^{-y}}{2} - i\sin x\frac{e^{y}-e^{-y}}{2} = \cos x \cdot \mathrm{ch}y - i\sin x\cdot \mathrm{sh}y$.

Сравнить!

$w = u+iv = \cos z = \cos(x+iy) = \cos x\cos iy - \sin x\sin iy = \cos x\cdot\mathrm{ch}y - i\sin x\cdot\mathrm{sh}y$.

Непосредственно из определения тригонометрических и гиперболических функций, вытекает простая связь между ними

$$\mathrm{ch}z = \cos\ iz, \qquad \mathrm{sh}z = -i\ \sin\ iz,$$
$$\mathrm{cth}z = i\ \mathrm{ctg}\ iz, \qquad \mathrm{th}z = -i\ \mathrm{tg}\ iz.$$

Найдем в общем виде $w = \sin z$. Имеем
$w = u+iv = \sin z = \sin(x+iy) = \frac{1}{2}\left(e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-y+ix} - e^{y-ix}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-y}(\cos x + \ i\sin x) - e^{y}(\cos x - i\sin x)\right) = \cos x\frac{e^{-y}-e^{y}}{2} + i\sin x\frac{e^{y}+e^{-y}}{2} = \sin x\cdot \mathrm{ch}y + i\cos x\cdot\mathrm{sh}y$.

Сравнить!

$w = u+iv = \sin z = \sin(x+iy) = \sin x\cdot\cos iy + \cos x\cdot\sin iy = \sin x\cdot\mathrm{ch}y + i\cos x\cdot\mathrm{sh}y$.

$\Rightarrow$

$$\cos(1+i) = \cos 1\cdot\mathrm{ch}1 - i\sin 1\cdot\mathrm{sh}1; \qquad \sin(1+i) = \sin 1\cdot\mathrm{ch}1 + i\cos 1\cdot\mathrm{sh}1;$$

$$\mathrm{tg}(1+i) = \frac{\sin 1\cdot\mathrm{ch}1 + i\cos 1\cdot\mathrm{sh}1}{\cos 1\cdot\mathrm{ch}1 - i\sin 1\cdot\mathrm{sh}1} = \frac{(\sin 1\cdot\mathrm{ch}1 + i\cos 1\cdot\mathrm{sh}1)\overline{(\cos 1\cdot\mathrm{ch}1 + i\sin 1\cdot\mathrm{sh}1)}}{(\cos 1\cdot\mathrm{ch}1 - i\sin 1\cdot\mathrm{sh}1)\overline{(\cos 1\cdot\mathrm{ch}1 + i\sin 1\cdot\mathrm{sh}1)}} =$$

$$= \frac{(\sin 1\cdot\cos 1\cdot\mathrm{ch}^2 1 - \cos 1\cdot\sin 1\cdot\mathrm{sh}^2 1) + i(\sin^2 1\cdot\mathrm{sh}1\cdot\mathrm{ch}1 + \cos^2 1\cdot\mathrm{sh}1\cdot\mathrm{ch}1)}{\cos^2 1\cdot\mathrm{ch}^2 1 + \sin^2 1\cdot\mathrm{sh}^2 1} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2 + i\mathrm{sh}2}{\cos^2 1\cdot\mathrm{ch}^2 1 + \sin^2 1\cdot\mathrm{sh}^2 1}$$

$$\mathrm{ctg}(1+i) = \frac{\cos 1\cdot\mathrm{ch}1 - i\sin 1\cdot\mathrm{sh}1}{\sin 1\cdot\mathrm{ch}1 + i\cos 1\cdot\mathrm{sh}1} = \frac{(\cos 1\cdot\mathrm{ch}1 - i\sin 1\cdot\mathrm{sh}1)\cdot\overline{(\sin 1\cdot\mathrm{ch}1 - i\cos 1\cdot\mathrm{sh}1)}}{(\sin 1\cdot\mathrm{ch}1 + i\cos 1\cdot\mathrm{sh}1)\cdot\overline{(\sin 1\cdot\mathrm{ch}1 - i\cos 1\cdot\mathrm{sh}1)}} =$$

$$= \frac{(\sin 1\cdot\cos 1\cdot\mathrm{ch}^2 1 - \cos 1\cdot\sin 1\cdot\mathrm{sh}^2 1) - i(\sin^2 1\cdot\mathrm{sh}1\cdot\mathrm{ch}1 + \cos^2 1\cdot\mathrm{sh}1\cdot\mathrm{ch}1)}{\cos^2 1\cdot\mathrm{sh}^2 1 + \sin^2 1\cdot\mathrm{ch}^2 1}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2 - i\mathrm{sh}2}{\cos^2 1\cdot\mathrm{sh}^2 1 + \sin^2 1\cdot\mathrm{ch}^2 1}$$

1.21. *Найти значение выражения:* $|\sin(\pi + i\ln(2+\sqrt{5}))|$.

$\left|\sin\left(\pi + i\ln(2+\sqrt{5}\right)\right| = [\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha] = \left|\sin\left(i\ln(2+\sqrt{5}\right)\right| = \left|sh\left(\ln(2+\sqrt{5}\right)\right| = = \frac{1}{2}\left(e^{\ln(2+\sqrt{5})} - e^{-\ln(2+\sqrt{5})}\right) = \frac{1}{2}\left(2+\sqrt{5} - \frac{1}{2+\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{2}\left(2+\sqrt{5} - \frac{2-\sqrt{5}}{4-5}\right) = 2.$

Этот пример показывает, что $\sin z$ может принимать значения, по модулю большие 1!

- **Обратные тригонометрические и гиперболические функции** $\mathrm{Arcsin}z$, $\mathrm{Arccos}z$, $\mathrm{Arctg}z$, $\mathrm{Arcctg}z$, $\mathrm{Arsh}z$, $\mathrm{Arch}z$, $\mathrm{Arth}z$, $\mathrm{Arcth}z$ определяются как функции, обратные соответственно к функциям $\sin z$, $\cos z$, $\mathrm{tg}z$, $\mathrm{ctg}z$, $\mathrm{sh}z$, $\mathrm{ch}z$, $\mathrm{th}z$, $\mathrm{cth}z$.

Например, если $z = \sin w$, то w называется арксинусом числа z, $w = \mathrm{Arcsin}z$.

$$\mathrm{Arcsin}\ z = -i\ \mathrm{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2}); \qquad \mathrm{Arccos}\ z = -i\ \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2-1});$$
$$\mathrm{Arctg}\ z = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}; \qquad \mathrm{Arcctg}\ z = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{z+i}{z-i};$$
$$\mathrm{Arsh}\ z = \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2+1}). \qquad \mathrm{Arch}\ z = \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2-1}).$$
$$\mathrm{Arth}\ z = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+z}{1-z}; \qquad \mathrm{Arcth}\ z = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{z+1}{z-1};$$

Все эти функции являются многозначными и их главные значения получаются, если брать главные значения соответствующих логарифмических функций.

1.22. *Доказать равенство* $\mathrm{Arctg}\ z = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}$.

Пусть $w = \mathrm{Arctg}\ z$, по определению это означает

$$z = \mathrm{tg}\ w = \frac{\sin w}{\cos w} = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} : \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = -i\ \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}} = -i\ \frac{e^{2iw} - 1}{e^{2iw} + 1}$$

Отсюда $iz(e^{2iw} + 1) = e^{2iw} - 1$ или $e^{2iw} = \frac{-1-iz}{iz-1}$, тогда $2iw = \mathrm{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}$. Таким образом

$$w = \mathrm{Arctg}\ z = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}.$$

1.23. *Найти все значения выражения* $\mathrm{Arctg}(1+i)$.

$\mathrm{Arctg}(1+i) = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+i(1+i)}{1-i(1+i)} = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{i}{2-i} = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{i(2+i)}{(2-i)(2+i)} = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\left(-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i\right)$.

Далее

$$\mathrm{Ln}\left(-\tfrac{1}{5} + \tfrac{2}{5}i\right) = \ln\left|-\tfrac{1}{5} + \tfrac{2}{5}i\right| + i\arg\left(-\tfrac{1}{5} + \tfrac{2}{5}i\right) + i2\pi k =$$
$$= \ln\frac{1}{\sqrt{5}} - i\ \mathrm{arctg}\ 2 + \pi(2k+1)i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Так как

$\left|-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i\right| = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{4}{25}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$;

$\mathrm{Arg}\left(-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i\right) = \pi - \mathrm{arctg}\ 2 + 2\pi k = -\mathrm{arctg}\ 2 + \pi(2k+1),\ k \in \mathbb{Z}$.

Таким образом

$$\mathrm{Arctg}(1+i) = -\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\ 2 + (2k+1)\frac{\pi}{2} + \frac{i}{2}\ln\sqrt{5},\ k \in \mathbb{Z}.$$

1.24. *Найти корни уравнения* $\cos z = 10$.

Первый способ. Используя определение функции $\cos z$ перепишем уравнение в виде

$$\frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) = 10 \quad \text{или} \quad e^{2iz} - 20e^{iz} + 1 = 0.$$

Это квадратное уравнение относительно e^{iz}, его корни $e^{iz} = 10 \pm 3\sqrt{11}$, если под $\sqrt{11}$ понимать арифметический корень квадратный из 11. Прологарифмируем полученное равенство
$iz = \mathrm{Ln}(10 \pm 3\sqrt{11}) = \ln|10 \pm 3\sqrt{11}| + i\arg(10 \pm 3\sqrt{11}) + i2\pi k = \ln(10 \pm 3\sqrt{11}) + i2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$
Откуда

$$z = 2\pi k - i\ln(10 \pm 3\sqrt{11}),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Получили две серии корней:

$$z_1 = 2\pi k - i\ln(10 + 3\sqrt{11}),\ k \in \mathbb{Z};$$

$$z_2 = 2\pi k - i\ln(10 - 3\sqrt{11}),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Причем

$$\ln(10 - 3\sqrt{11}) = \ln\frac{1}{(10 + 3\sqrt{11})} = -\ln(10 + 3\sqrt{11}).$$

Таким образом

$$z_{1,2} = 2\pi k \pm i\ln(10 + 3\sqrt{11}),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Второй способ. Задача сводится к нахождению $z = \mathrm{Arccos}\ 10$. Воспользуемся тем, что $\mathrm{Arccos}\ z = -i\ \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$, получаем

$$z = \mathrm{Arccos}\ 10 = -i\ \mathrm{Ln}(10 + \sqrt{99}) = -i\ \mathrm{Ln}(10 \pm 3\sqrt{11}),$$

если под $\sqrt{11}$ понимать арифметический корень квадратный из 11.

Далее аналогично способу первому.

2 Конформные отображения.

Найти дробно-линейную функцию, переводящую точки	
2.1 $\{-1, i, 1+i\}$ в точки $\{0, 2i, 1-i\}$; **2.2** $\{-1, i, 1+i\}$ в точки $\{i, \infty, 1\}$.	**2.1** $\{-1,\ \infty,\ i\}$ в точки $\{i,\ 1,\ 1+i\}$; **2.2** $\{-1,\ \infty,\ i\}$ в точки $\{0,\ \infty,\ 1\}$.
2.3 Отобразить угол $0 < \arg z < \pi\alpha$ $(0 < \alpha \leq 2)$ на верхнюю полуплоскость.	**2.3** Отобразить угол $-\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2}$ на верхнюю полуплоскость так, чтобы $w(1-i) = 2,\ w(i) = -1,\ w(0) = 0$.
Отобразить на верхнюю полуплоскость круговые лунки	
2.4 $\lvert z\rvert > 1, \lvert z-i\rvert > 1$. **2.5** $\lvert z\rvert > 1, \lvert z-i\rvert < 1$;	**2.4** $\lvert z\rvert < 1, \lvert z-i\rvert < 1$; **2.5** $\lvert z\rvert > 2, \lvert z-\sqrt{2}\rvert < \sqrt{2}$.
Отобразить на верхнюю полуплоскость	
2.6 плоскость с разрезом $[-1, 1]$; **2.7** полуплоскость $\mathrm{Im}\ z > 0$ с разрезом $[0, ih],\ h > 0$; **2.8** полосу $y = x,\ y = x + h$; **2.9** полосу $0 < x < 1$ с разрезом $0 \leq x \leq h < 1, y = 0$.	**2.6** плоскость с разрезом $(-\infty, -1] \bigcup [1, +\infty)$; **2.7** полуплоскость $\mathrm{Im}\ z > 0$ с разрезом $[ih, +i\infty],\ h > 0$; **2.8** круговую лунку $\lvert z\rvert \leq 2,\ \lvert z-1\rvert \geq 1$; **2.9** полуполосу $0 < x < \pi, y > 0$ с разрезом $x = \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq h$.

Дробно-линейные функции.

Def. *Дробно-линейной* называется функция вида

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Def. *Обобщенной окружностью* называют либо обычную окружность, либо прямую. (Прямая – это окружность проходящая через бесконечно удаленную точку.)

Def. Две *точки* P и P^* называются *симметричными относительно обобщенной окружности* γ, если всякая обобщенная окружность проходящая через P и P^* ортогональна данной окружности γ.

Если обобщенная окружность γ– это прямая, то точки P и P^* будут находится от γ на одинаковом расстоянии и прямая их соединяющая будет перпендикулярна γ.

Если обобщенная окружность γ– это окружность радиуса r с центром в точке z_0, то

$$|z_0 - P^*| \cdot |z_0 - P| = r^2.$$

Свойства.

1. Дробно-линейная функция взаимно-однозначно и конформно отображает расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ на себя.

2. Функция, обратная к дробно-линейной, является дробно-линейной. Композиция двух дробно-линейных функций снова дробно-линейная функция.
3. Любую дробно-линейную функция можно представить в виде

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c} \cdot \frac{1}{cz+d}, \quad \text{если } c \neq 0,\ ad \neq bc,$$

или

$$w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}, \quad \text{если } c = 0,\ ad \neq bc,$$

т.е. она является композицией дробно-линейных функций вида:

- $w = az-$ поворот на угол $\arg a$ и растяжение в $|a|$ раз;
- $w = z + b-$ параллельный перенос;
- $w = \frac{1}{z}-$ инверсия с последующим преобразованием симметрии относительно вещественной оси.

4. Круговое свойство. Под действием дробно-линейной функции обобщенная окружность переходит в обобщенную окружность.
5. Свойство симметрии. Дробно-линейная функция переводит любую пару точек, симметричных относительно обобщенной окружности в пару точек, симметричных относительно образа этой обобщенной окружности.
6. Свойство трех точек. Пусть в расширенной $z-$плоскости заданы три различные точки $\{z_1,\ z_2,\ z_3\}$ и в расширенной $w-$плоскости заданы три различные точки $\{w_1,\ w_2,\ w_3\}$. Тогда существует единственная дробно-линейная функция переводящая $z_k \to w_k, k = \overline{1,3}$.

Если все числа $\{z_k,\ w_k,\ k = \overline{1,3}\}$ конечны, то искомая дробно-линейная функция может быть представлена в виде:

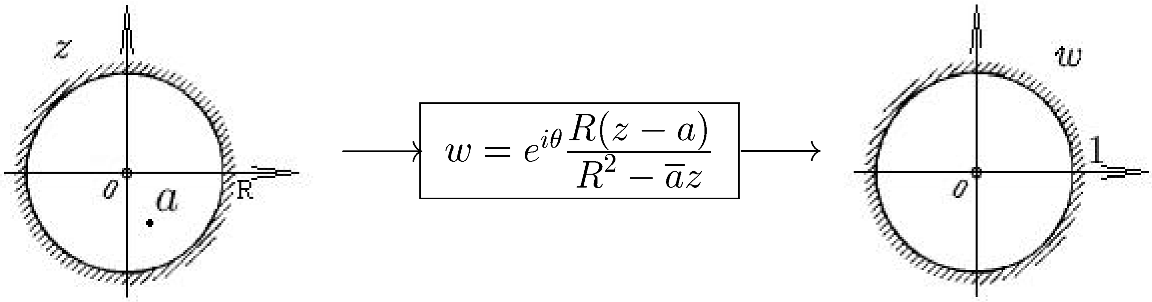
$$\frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2}. \tag{2.1}$$

Если хотя бы одно из чисел $\{z_k,\ w_k,\ k = \overline{1,3}\}$ равно ∞, то числитель и знаменатель в формуле (2.1), в которые входит это число, заменяем на единицу. Действительно, например, $z_3 = \infty$. Тогда рассматривая предел при $z_3 \to \infty$ в выражении (2.1), видим $\lim\limits_{z_3 \to \infty} \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = 1$.

Дробно-линейная функция вида

$$w = e^{i\theta} \frac{R(z-a)}{R^2 - \overline{a}z}, \quad |a| < R,\ \theta \in \mathbb{R}$$

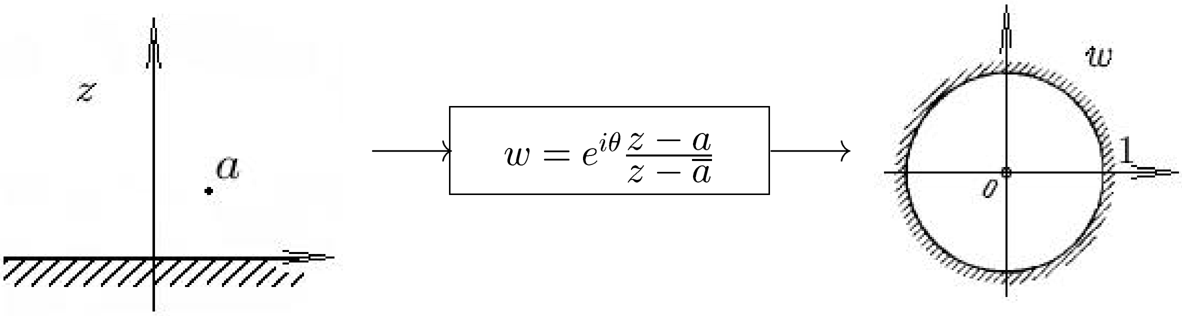
переводит *внутренность круга* $|z| < R$ *во внутренность единичного круга* $|w| < 1$, границу в границу, внешность во внешность, $a \to 0$.



Дробно-линейная функция вида

$$w = e^{i\theta}\frac{z-a}{z-\overline{a}}, \quad \frac{a-\overline{a}}{2i} = \operatorname{Im} a > 0,\ \theta \in \mathbb{R}$$

переводит *верхнюю полуплоскость* $\operatorname{Im} z > 0$ *во внутренность единичного круга* $|w| < 1$, вещественную ось в единичную окружность, нижнюю полуплоскость во внешность единичного круга, $a \to 0$.



Решение примеров.

2.1. *Найти дробно-линейную функцию, переводящую точки* $\{0, 2i, 1+i\}$ *в точки* $\{4, 0, 1+i\}$.

Искомую функцию находим из равенства (2.1)

$$\frac{z-0}{z-2i} : \frac{1+i-0}{1+i-2i} = \frac{w-4}{w-0} : \frac{1+i-4}{1+i-0}, \quad \text{откуда} \quad w = \frac{-4z+8i}{(1+i)z+2i}.$$

2.2. *Найти дробно-линейную функцию, переводящую точки* $\{i, \infty, -i\}$ *в точки* $\{2, 1+i, \infty\}$.

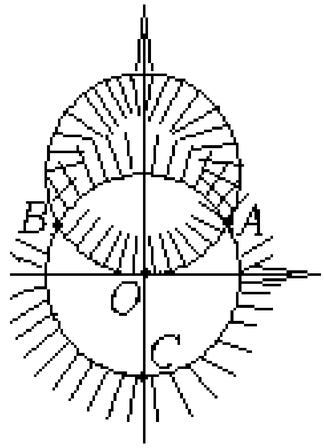
Снова применяем равенство (2.1), с заменой всех числителей и знаменателей содержащих ∞ на единицы.

$$\frac{z-i}{1} : \frac{-i-i}{1} = \frac{w-2}{w-(1+i)} : \frac{1}{1}, \quad \text{откуда} \quad w = \frac{(1+i)z+(1+3i)}{z+i}.$$

2.3. *Отобразить на верхнюю полуплоскость* $\{z \in \mathbb{C}\ :\ \operatorname{Im} z > 0\}$ *круговую лунку* $G = \{z \in \mathbb{C}\ :\ |z| < 1$ и $|z-i| > 1\}$.

Границу лунки G образуют дуги окружностей $|z| = 1, |z-i| = 1$. Выберем на границе точки O, A, B, C. Обход области при движении от O через B, C к A будет осуществляться в положительном направлении (т.е. область всегда будет оставаться слева).

При этом дуга окружности $|z| = 1$ однозначно определяется тремя точками B, C, A; а дуга окружности $|z - i| = 1$ – точками A, O, B. Найдем координаты точек B, A из системы уравнений



$$\begin{cases} |z| & = 1 \\ |z-i| & = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ x^2+y^2 = 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases},$$

так как они являются точками пересечения граничных окружностей. Таким образом в $z-$плоскости координаты точек

	O	A	C	B
z	0	$\frac{\sqrt{3}+i}{2}$	$-i$	$\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$

.

Найдем угол пересечения окружностей, т.е. угол под которым пересекаются касательные к окружностям, например, в точке B. Уравнение полуокружности A, O, B можно записать в виде $y = 1 - \sqrt{1-x^2}$, поэтому угловой коэффициент касательной

$$k_1 = \operatorname{tg}\alpha = y'(B) = \left.\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right|_{x=x_B} = -\sqrt{3}.$$

Уравнение полуокружности B, C, A можно записать в виде $y = \sqrt{1-x^2}$, поэтому угловой коэффициент касательной

$$k_2 = \operatorname{tg}\beta = y'(B) = \left.\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right|_{x=x_B} = \sqrt{3}.$$

Значит, окружности пересекаются под углом, тангенс которого

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} = \frac{-\sqrt{3}-\sqrt{3}}{1+(-\sqrt{3})\sqrt{3}} = \sqrt{3} \qquad \Longrightarrow \qquad \gamma = \frac{\pi}{3}.$$

Прежде "распрямим" нашу лунку. Для этого достаточно, отобразить одну из точек пересечения в ∞, а другую в 0. Затем, чтобы получить полуплоскость, т.е. угол с вершиной в 0 раствора π, нужно увеличить угол втрое, т.е. применить отображение $w = z^3$.

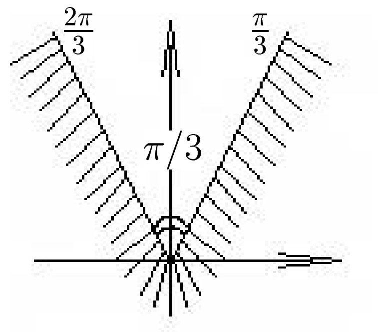
1) Воспользуемся дробно-линейной функцией w_1 переводящей

$$B \to 0,\ A \to \infty \qquad \Longrightarrow \qquad w_1 = \frac{z-z_B}{z-z_A} = \frac{2z+\sqrt{3}-i}{2z-\sqrt{3}-i},$$

при этом

$$w_1(O) = -\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} = -\frac{(\sqrt{3}-i)^2}{|\sqrt{3}+i|^2} = -\frac{1-i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}, \quad |w_1(O)| = 1.$$

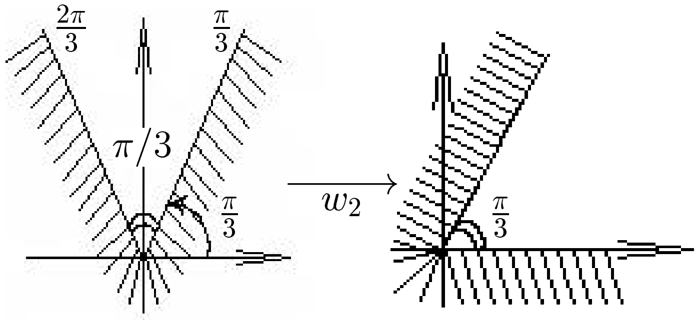
$$w_1(C) = -\frac{\sqrt{3}-3i}{\sqrt{3}+3i} = -\frac{(\sqrt{3}-3i)^2}{|\sqrt{3}-3i|^2} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad |w_1(C)| = 1.$$



Дробно-линейная функция является конформным отображением, поэтому сохраняются углы между кривыми. При этом обобщенные окружности переходят в обобщенные окружности (см. свойства 1 и 2). Значит, дуга окружности $|z| = 1$ перешла в луч $\varphi = \arg z = \frac{2\pi}{3}$, а дуга окружности $|z - i| = 1$ в луч $\varphi = \arg z = \frac{\pi}{3}$. Остается заметить, что внутренность луночки, перешла во внутренность угла, так как угол между кривыми сохраняется.

2) Повернем угол, так чтобы одна из его сторон совпала с положительным направлением вещественной оси. Этот поворот осуществляет функция

$$w_2(z) = w_1(z) \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

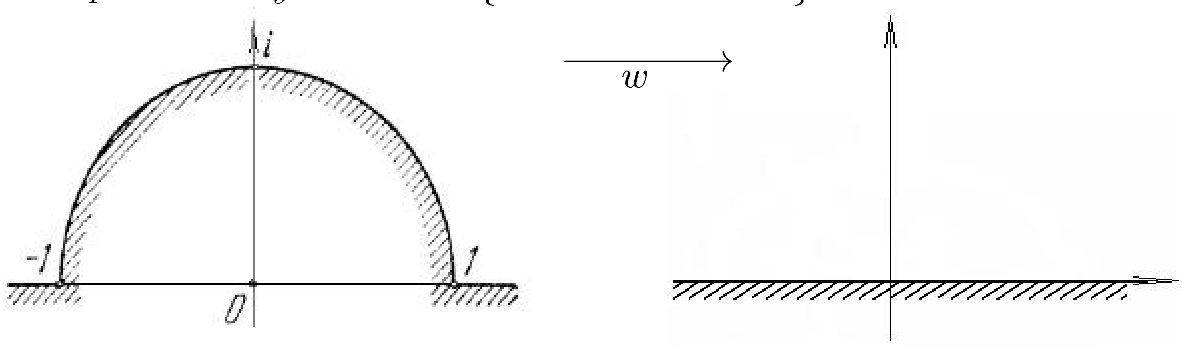


3) *Конформное отображение угла* $0 < \arg z < \pi\gamma$ $(0 < \gamma \leq 2)$ *на верхнюю полуплоскость осуществляется функцией* $w(z) = z^{1/\gamma}$, поэтому искомое отображение

$$w = (w_2)^{1/(1/3)} = (w_2)^3 = \left(w_1 \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^3 = \left(\frac{2z+\sqrt{3}-i}{2z-\sqrt{3}-i}\right)^3 e^{-i\pi}.$$

$$w = -\left(\frac{2z+\sqrt{3}-i}{2z-\sqrt{3}-i}\right)^3.$$

2.4. *Найти конформное отображение внешности части окружности, которая не лежит в нижней полуплоскости* $G = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| > 1, \ \operatorname{Im} z > 0\}$ *на верхнюю полуплоскость* $\{z \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Im} z > 0\}$.



Границу области G образуют лучи $\{\varphi = 0, \ x > 1\}$; $\{\varphi = \pi, \ x < -1\}$ и полуокружность $\{|z| = 1, \ \operatorname{Im} z > 0\}$, пересекающая их под прямым углом в точках $z = 1$ и $z = -1$. В результате искомого конформного отображения нужно получить верхнюю полуплоскость, т.е. область границу, которой образуют лучи $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$, пересекающиеся под углом π.

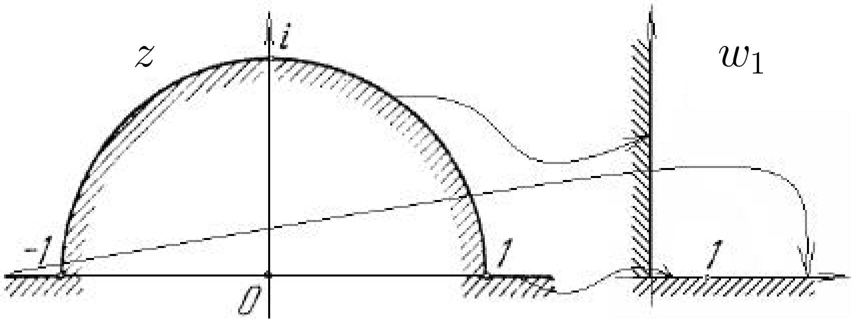
Так как нужно увеличить угол вдвое, применим отображение $w = z^2$. Но прежде нужно "распрямить" нашу область. Для этого достаточно, отобразить одну из точек пересечения полуокружности и луча в ∞.

1) Применим дробно-линейную функцию переводящую, например,

$$1 \to 0, \ -1 \to \infty : \quad w_1(z) = \frac{z-1}{z+1}.$$

При этом образом луча $\{\varphi = 0, \ x > 1\}$ будет интервал $(0, 1)$, так как любая точка x данного луча перейдет в положительное вещественное число $w_1(x) = \frac{x-1}{x+1}$ меньшее 1. (Очевидно, $0 < \frac{x-1}{x+1} < 1$, при $x > 1$.)

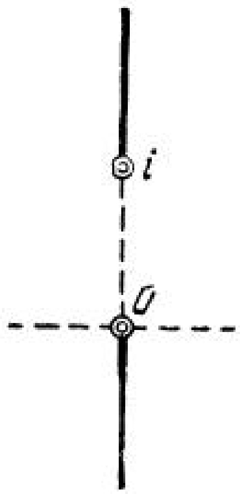
Образом луча $\{\varphi = \pi, \ x < -1\}$ будет луч $(1, +\infty)$, так как любая точка x данного луча перейдет в положительное вещественное число $w_1(x) = \frac{x-1}{x+1}$ большее 1. ($\frac{x-1}{x+1} > 1$, при $x < -1$, так как числа $x - 1$ и $x + 1$ отрицательные, причем модуль $|x - 1| = -x + 1$ больше модуля $|x + 1| = -x - 1$.)



Образом полуокружности $\{|z| = 1, \ \mathrm{Im}\, z > 0\}$ будет луч $\varphi = \frac{\pi}{2}$, так как $1 \to 0, \ -1 \to \infty$, и он образует прямой угол с образами лучей.

2) Применяем преобразование $w = w_1^2$, удваивающее углы с вершиной в 0, и получаем окончательный ответ: $w(z) = \left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^2$.

2.5. Найти конформное отображение плоскости с разрезами по мнимой оси от $(-\infty; 0]$ и $[i; +\infty)$ на верхнюю полуплоскость.



Нужно отобразить плоскость с разрезом на верхнюю полуплоскость. Из свойств радикала $\sqrt{z}$ (главная ветвь, т.е. $\sqrt{-1} = i$) известно, что данная функция отображает плоскость с разрезом по вещественной положительной полуоси на верхнюю полуплоскость. Если бы с помощью какого-либо конформного отображения удалось преобразовать нашу плоскость с разрезами по мнимой оси в плоскость с разрезом вдоль положительной полуоси, то задача была бы решена.

1) Наш разрез можно превратить в разрез вдоль вещественной полуоси с помощью дробно-линейной функции, переводящей точки i в ∞, 0 в 0 и $-i$ в -1.

С помощью формулы (2.1) находим эту функцию.

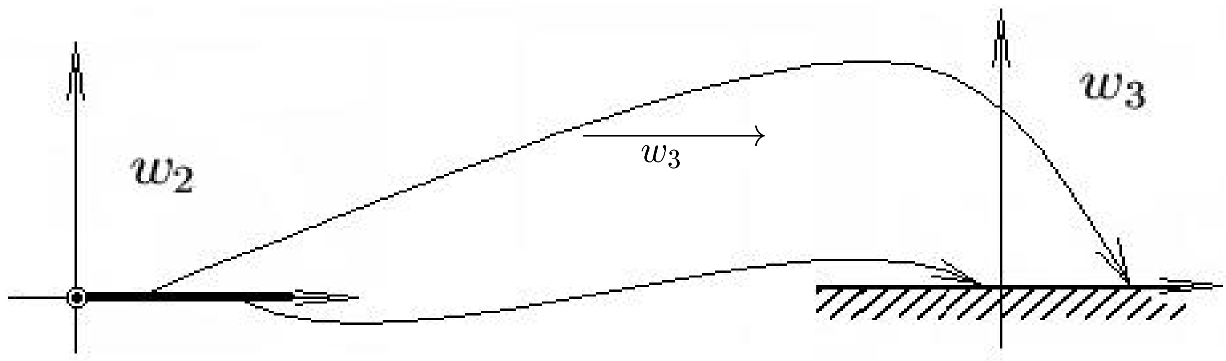
$$\frac{z-i}{z-0}\cdot\frac{-i-0}{-i-i}=\frac{1}{w_1-0}\cdot\frac{-1-0}{1},\quad \text{откуда}\quad w_1=-\frac{2z}{z-i}.$$

При этом отображении именно наш разрез по мнимой оси превращается в разрез вдоль отрицательной полуоси, так как

$$w_1(xi)=-\frac{2xi}{xi-i}=\frac{2x}{1-x}<0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\1-x<0\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\1-x>0\end{cases}\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\x>1\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\x<1\end{cases}\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>1\\x<0\end{array}\right..$$

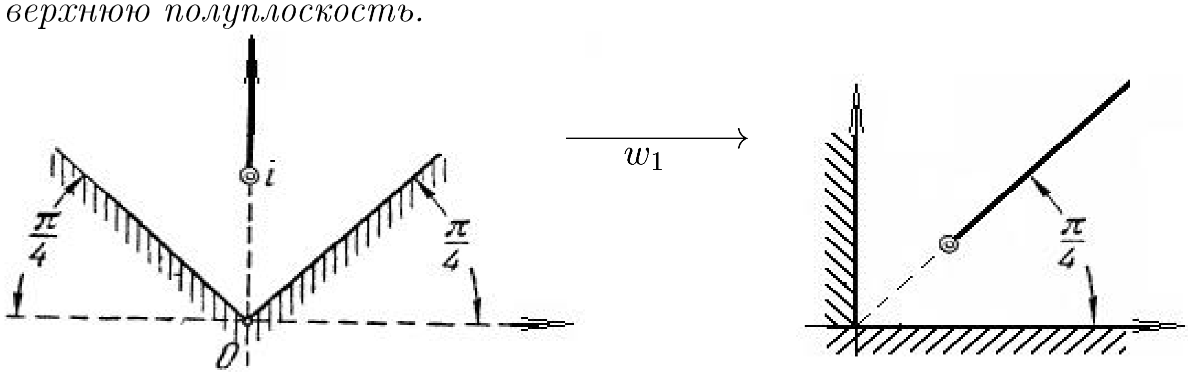
2) Функция $w_2(z)=-w_1(z)$ превратит плоскость с разрезом вдоль отрицательной вещественной полуоси в разрез вдоль положительной вещественной полуоси.

3) Функция $w_3=\sqrt{w_2}$ (главная ветвь) дает конформное отображение этой области на верхнюю полуплоскость плоскости вспомогательного комплексного переменного w_3. Действительно, плоскость с разрезом по положительной вещественной полуоси – это угол с вершиной в 0 раствора 2π, образованный лучами $\varphi=0$ и $\varphi=2\pi$. Применив функцию $w_3=\sqrt{w_2}$ (главную ветвь) получим угол с вершиной в 0 раствора π, образованный лучами $\varphi=0$ и $\varphi=\pi$. Т.е. верхнюю полуплоскость, так как главная ветвь $\sqrt{-1}=i$.



Нужное отображение дает, например, функция $w=w_3(w_2(w_1(z)))=\sqrt{\frac{2z}{z-i}}$.

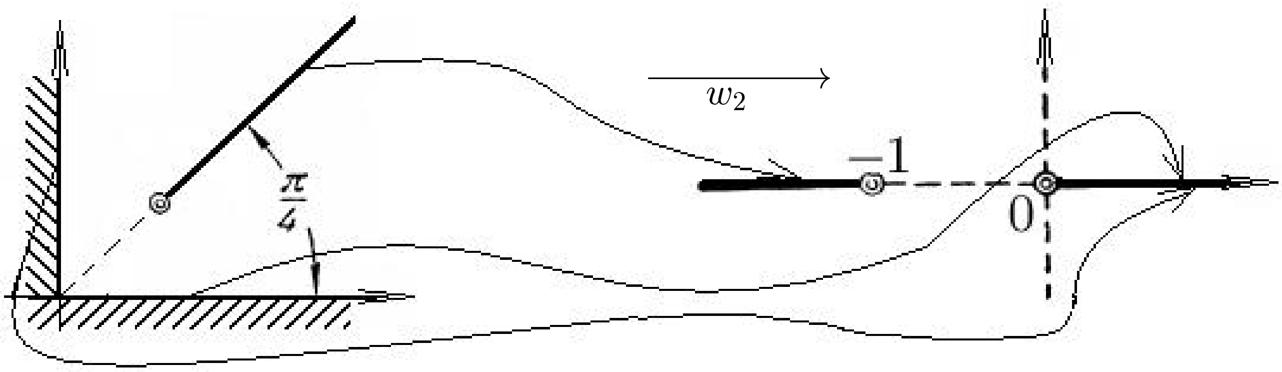
2.6. *Найти конформное отображение области изображенной на рисунке, на верхнюю полуплоскость.*



Границу области G образуют лучи $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$; $\varphi_2 = \frac{3\pi}{4}$ и $\left\{\varphi = \frac{\pi}{2},\ y > 1\right\}$. Лучи φ_1 и φ_2 пересекаются прямым углом.

1) Повернем нашу область на угол $\frac{\pi}{4}$ по часовой стрелке (т.е. в отрицательном направлении), с помощью отображения $w_1(z) = e^{-\frac{\pi}{4}i}z$. Теперь луч φ_1 совпадет с положительным направлением вещественной оси, а луч φ_2 – с положительным направлением мнимой оси. Разрез будет идти по лучу $\varphi = \frac{\pi}{4}$ и начинается в точке $w_1(i) = e^{-\frac{\pi}{4}i}i = e^{-\frac{\pi}{4}i} \cdot e^{\frac{\pi}{2}i} = e^{\frac{\pi}{4}i}$.

2) Отображение $w_2 = w_1^4$ увеличивает все углы выходящие из точки $z = 0$ в 4 раза, поэтому образом будет вся плоскость с разрезами по положительному лучу вещественной оси и по отрицательному лучу вещественной оси, до точки $w_2(e^{\frac{\pi}{4}i}) = (e^{\frac{\pi}{4}i})^4 = e^{\pi i} = -1$.



3) Наш разрез можно превратить в разрез вдоль вещественной полуоси с помощью дробно-линейной функции, переводящей точки

$$-1 \to \infty,\ 0 \to 0 \qquad \Longrightarrow \qquad w_3 = \frac{w_2}{w_2 + 1}.$$

При этом отображении именно наш разрез превращается в разрез вдоль положительной полуоси, так как $(w_2 = x + iy)$

$$w_3(x) = \frac{x}{x+1} > 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ x + 1 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0 \\ x > -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ x < -1 \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 0 \\ x < -1 \end{array}\right. .$$

4) Далее аналогично п.4 задачи 2.5, применив главную ветвь функции $w_4 = \sqrt{w_3}$ получаем ответ:

$$w = \sqrt{\frac{w_2}{w_2 + 1}} = \left[w_2 = (e^{-\frac{\pi}{4}i}z)^4 = e^{-\pi i}z^4 = -z^4\right] = \sqrt{\frac{-z^4}{1 - z^4}} = \frac{z^2}{\sqrt{z^4 - 1}}.$$

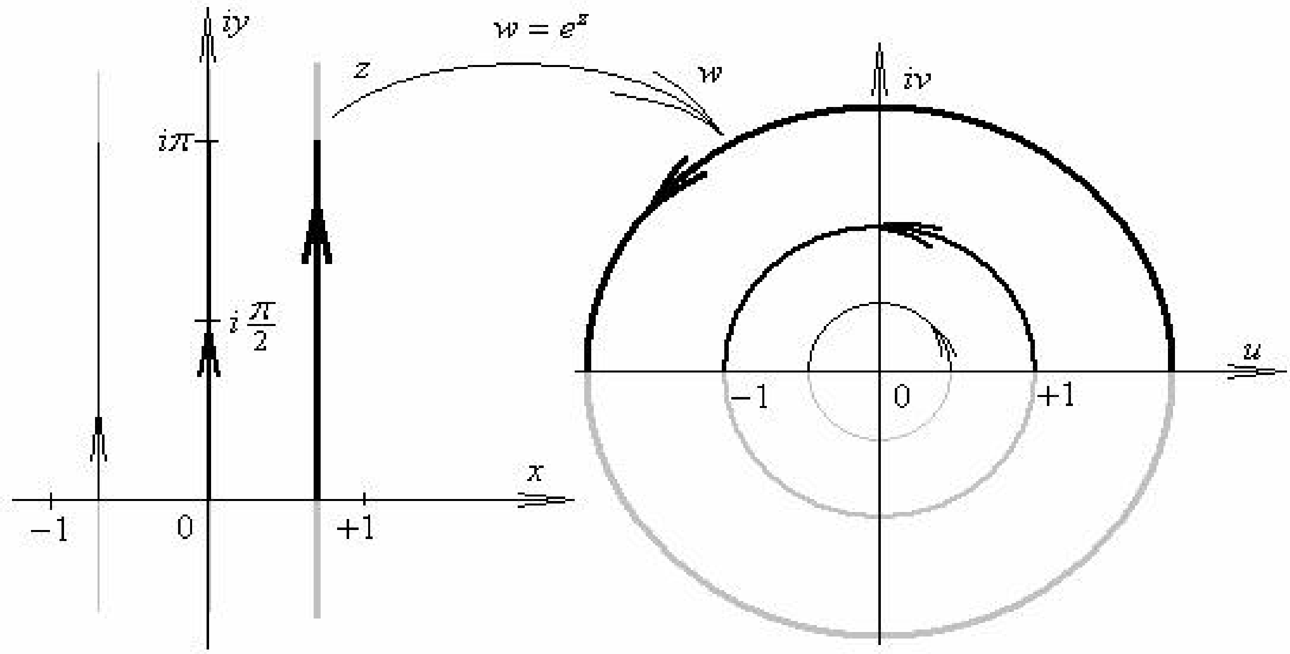
2.7. *Выяснить, во что преобразуется при отображении* $w = e^z$
1) прямоугольная сетка $x = x_0,\ y = y_0$;
2) прямоугольник $\alpha < x < \beta, \quad \gamma < y < \delta,\ (\delta - \gamma) \leq 2\pi$.

Пусть $w = u + iv$, $z = x + iy$. Тогда $w = u + iv = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, таким образом $\begin{cases} u = e^x \cos y \\ v = e^x \ \sin y \end{cases}$.

1) Рассмотрим в z-плоскости вертикальные прямые $x = x_0$, $(y \in \mathbb{R})$. Данное отображение преобразует всякую такую прямую в кривую, задаваемую параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} u = e^{x_0} \cos y \\ v = e^{x_0} \ \sin y \end{cases}, \ y \in \mathbb{R} \ \left[\quad r_0 = e^{x_0}, \varphi = y \quad \right] \Rightarrow \begin{cases} u = r_0 \cos \varphi \\ v = r_0 \sin \varphi \end{cases}, \ \varphi \in \mathbb{R}.$$

После переобозначений, напоминающих полярные координаты, становится очевидно, что это многократно пробегаемая против часовой стрелки окружность радиуса $r_0 = e^{x_0}$.

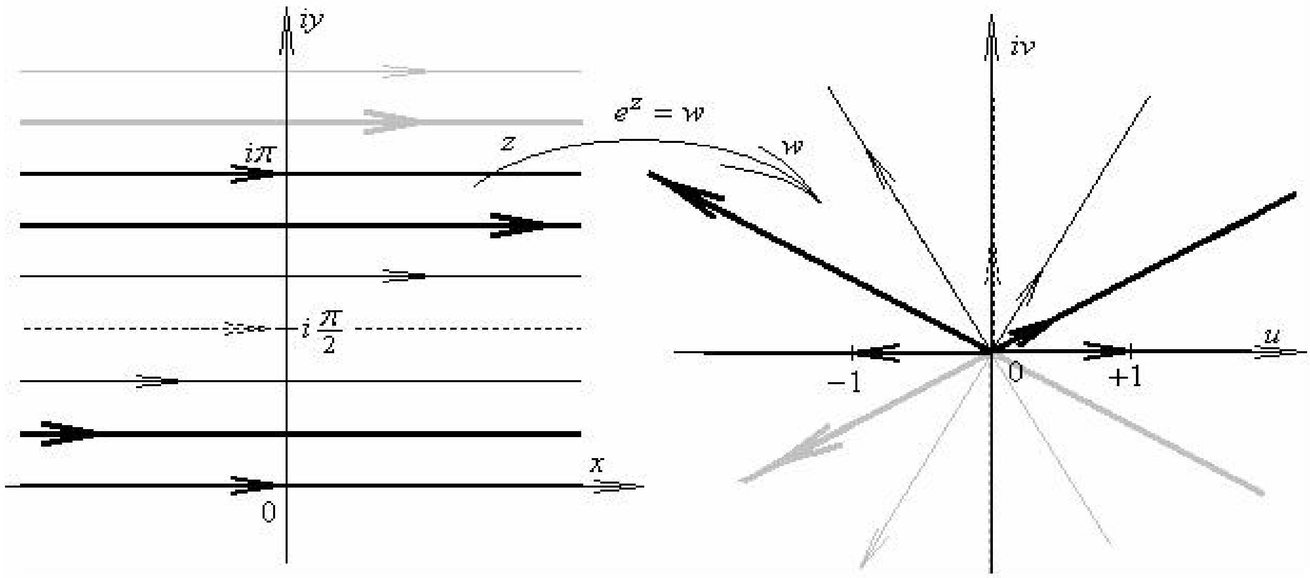


Рассмотрим в z-плоскости горизонтальные прямые $y = y_0$, $(x \in \mathbb{R})$. Данное отображение преобразует всякую такую прямую в кривую, задаваемую параметрическими уравнениями

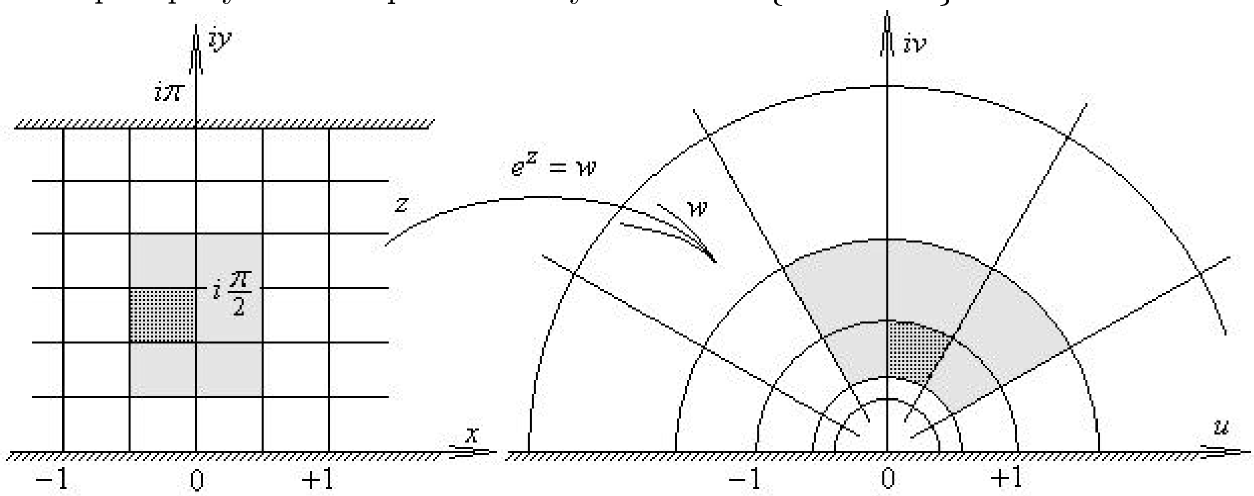
$$\begin{cases} u = e^x \cos y_0 \\ v = e^x \sin y_0 \end{cases}, \ x \in \mathbb{R} \ \left[\quad r = e^x, \varphi_0 = y_0 \quad \right] \Rightarrow \begin{cases} u = r \cos \varphi_0 \\ v = r \sin \varphi_0 \end{cases}, \ r \in (0; +\infty).$$

После переобозначений, снова напоминающих полярные координаты, становится очевидно, что это луч, выходящий из начала координат под углом $\varphi_0 = y_0$.

Таким образом, декартова прямоугольная сетка $x = const, y = const$ в z-плоскости отображением $w = e^z$ преобразуется в полярную сетку w-плоскости $r = const, \varphi = const$.



2) Горизонтальная полоса $\{0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ в z-плоскости отображением $w = e^z$ преобразуется в верхнюю полуплоскость $\{\operatorname{Im} w > 0\}$ в w-плоскости.



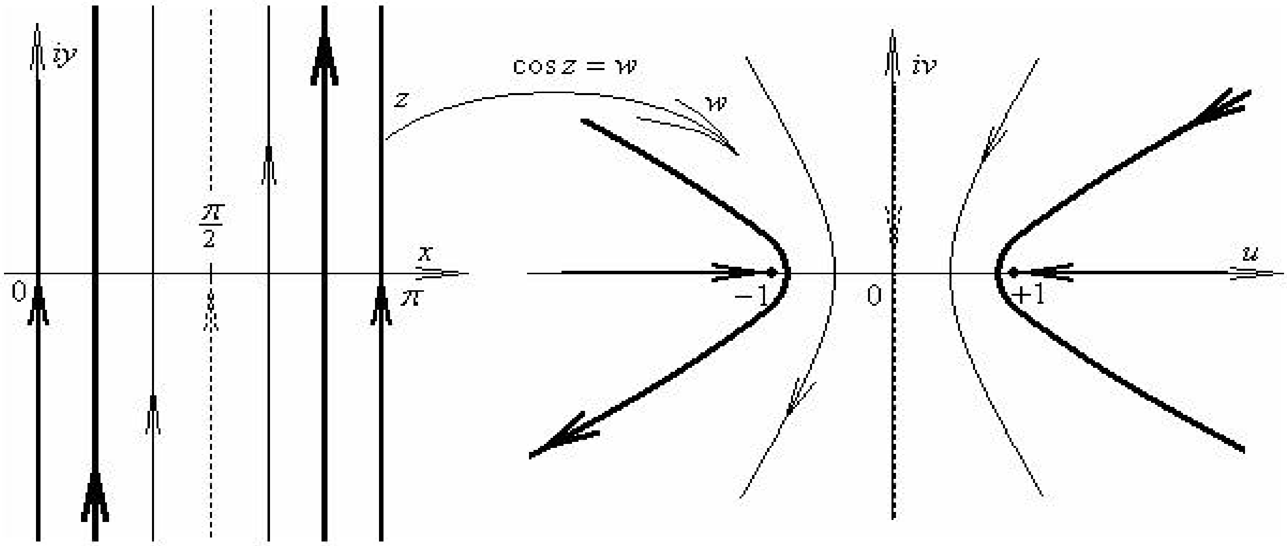
2.8. *Выяснить, во что превращается при отображении* $w = \cos z$
1) прямоугольная сетка $x = x_0,\ y = y_0$;
2) полуполоса $0 < x < \pi, y < 0$.

Пусть $w = u + iv,\ z = x + iy$. Тогда $w = u + iv = \cos(x + iy) = \cos x \mathrm{ch} y - i \sin x \mathrm{sh} y$, так что $\begin{cases} u = \cos x \ \mathrm{ch}\ y \\ v = -\sin x \ \mathrm{sh}\ y \end{cases}$.

1) Рассмотрим сначала в z-плоскости семейство вертикальных прямых $x = x_0$ $(y \in \mathbb{R})$. Данное отображение преобразует всякую такую прямую в кривую, задаваемую параметрическими уравнениями $(y \in \mathbb{R})$

$$\begin{cases} u = \cos x_0 \ \mathrm{ch}\ y \\ v = -\sin x_0 \ \mathrm{sh}\ y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{u}{\cos x_0} = \mathrm{ch}\ y \\ \frac{v}{\sin x_0} = -\mathrm{sh}\ y \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{u}{\cos x_0}\right)^2 - \left(\frac{v}{\sin x_0}\right)^2 = \mathrm{ch}^2 y - \mathrm{sh}^2 y = 1$$

После переобозначений $a^2 = \cos^2 x_0, b^2 = \sin^2 x_0$, становится очевидно, что это ветвь гиперболы $\frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} = 1$ с фокусами в точках $(1;0)$ и $(-1;0)$.

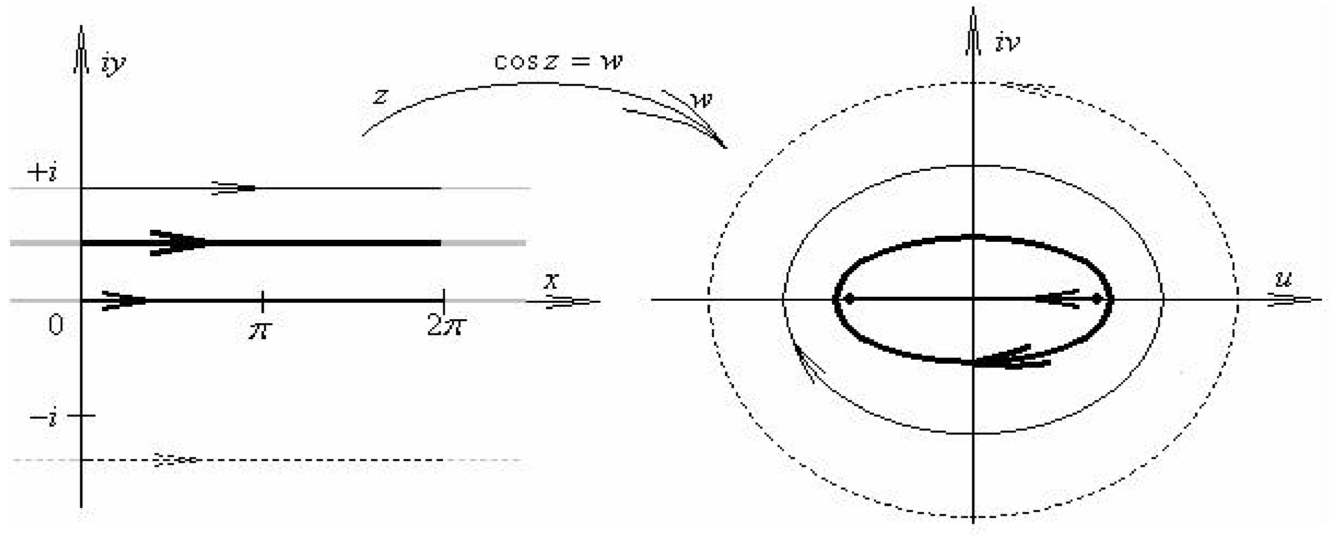


Рассмотрим далее в z-плоскости семейство горизонтальных прямых $y = y_0$, $(x \in \mathbb{R})$. Данное отображение преобразует всякую такую прямую в кривую, задаваемую параметрическими уравнениями

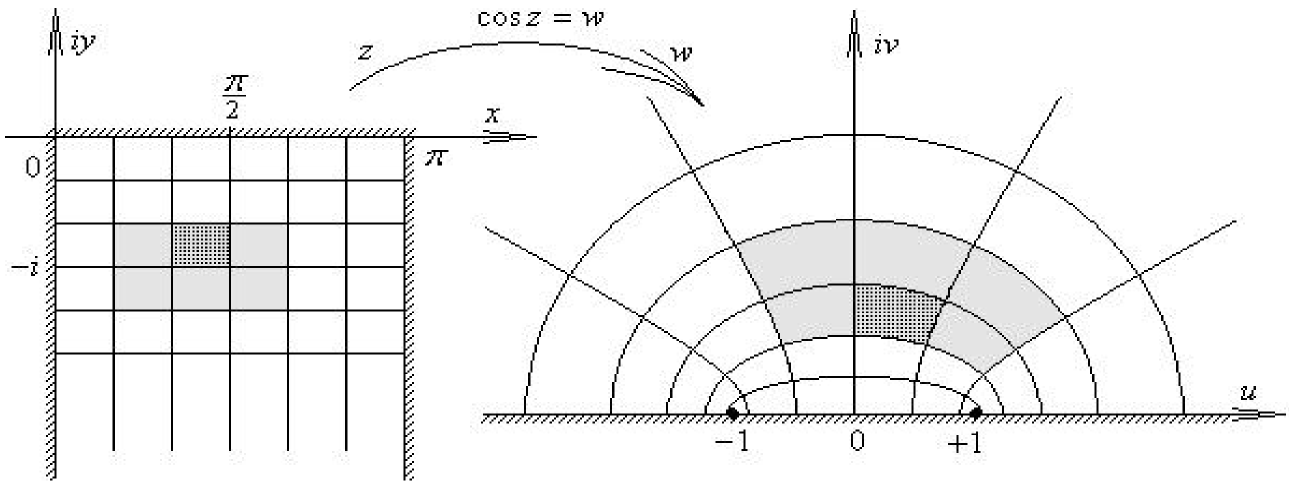
$$\begin{cases} u = \cos x \operatorname{ch} y_0 \\ v = -\sin x \operatorname{sh} y_0 \end{cases}, \; x \in \mathbb{R} \;\Rightarrow \begin{cases} \frac{u}{\operatorname{ch} y_0} = \cos x \\ \frac{v}{\operatorname{sh} y_0} = -\sin x \end{cases} \;\Rightarrow$$

$$\left(\frac{u}{\operatorname{ch} y_0}\right)^2 + \left(\frac{v}{\operatorname{sh} y_0}\right)^2 = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

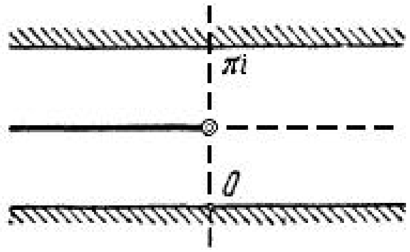
После переобозначений, $a^2 = \operatorname{ch}^2 y_0, b^2 = \operatorname{sh}^2 y_0$, видно, что это многократно пробегаемый эллипс $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$ с фокусами в точках $(1;0)$ и $(-1;0)$.



2) Вертикальная нижняя полуполоса $\{0 < \operatorname{Re} z < \pi, \; -\infty < \operatorname{Im} z < 0\}$ в z-плоскости отображением $w = \cos z$ преобразуется в верхнюю полуплоскость $\{\operatorname{Im} w > 0\}$ в w-плоскости.



2.9. *Найти конформное отображение области изображенной на рисунке, на верхнюю полуплоскость.*

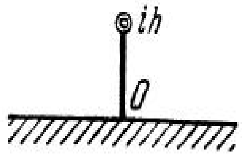


1) Полоса с вырезом по лучу $\{z = x + iy \ : y = \frac{\pi}{2}, x \le 0\}$ с помощью функции $w_1 = e^z$ отображается на верхнюю полуплоскость с вырезом по мнимой оси от 0 до i. Так как

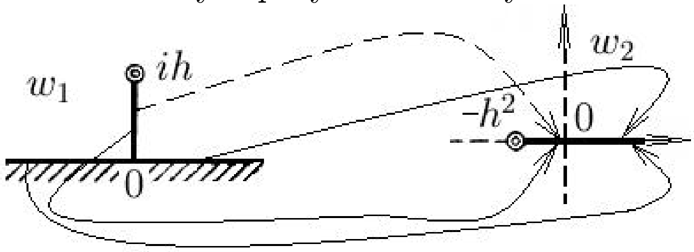
$$w_1(x + \tfrac{\pi}{2}i) = e^x e^{\frac{\pi}{2}i} = ie^x,$$

причем $0 < e^x \le 1$, при $x \le 0$.

2) Решим вспомогательную задачу: *найдем конформное отображение верхней полуплоскости с вырезом величины h по мнимой оси от начала координат на верхнюю полуплоскость.*



2.1) Задача состоит в том, чтобы, как бы "убрать" разрез, расправить его в участок вещественной оси. Воспользуемся отображением $w_2 = w_1^2$, которое углы выходящие из начала координат удваивает. Поэтому в результате получим



При этом луч $\varphi = 0$ перейдет в себя, луч $\varphi = \pi$ – в луч $\varphi = 2\pi$, разрез в отрезок вещественной оси $[-h^2, 0]$.

2.2) Сдвинем начало разреза в начало координат: $w_3 = w_2 + h^2$. Теперь имеем плоскость с разрезом по вещественной оси.

2.3) В этой области можно выделить однозначную ветвь функции $w_4 = \sqrt{w_3}$. Главная ветвь функции $w_4 = \sqrt{w_3}$ отображает плоскость с разрезом по положительной вещественной оси на верхнюю полуплоскость.

Итак, конформное отображение верхней полуплоскости с вырезом $[0i; hi]$ по мнимой оси на верхнюю полуплоскость – это $w_4 = \sqrt{w_2 + h^2} = \sqrt{w_1^2 + h^2}$.

3) Используя вспомогательную задачу, ответ: $w = \sqrt{e^{2z} + 1}$.

3 Производная. Геометрический смысл.

3.1. Проверить выполнение условий Коши-Римана для функций e^z, $\cos z$. Доказать: $(e^z)' = e^z$, $(\cos z)' = -\sin z$.	**3.1.** Проверить выполнение условий Коши-Римана для функций $\sin z$, $\mathrm{Ln}\ z$. Доказать: $(\sin z)' = \cos z$, $(\mathrm{Ln}\ z)' = \frac{1}{z}$.
3.2. Доказать, что функция $\overline{z}$ нигде не дифференцируема.	**3.2.** Доказать, что функция $z\mathrm{Re}\ z$ дифференцируема только в 0.
Отображение совершается с помощью функции z^2. Найти угол поворота θ направления, выходящего из точки z_0 и коэффициент растяжения k в точках:	
3.3. $z_0 = 1 + i$; **3.4.** $z_0 = -\frac{1}{4}$.	**3.3.** $z_0 = 1$; **3.4.** $z_0 = -3 + 4i$.
Какая часть плоскости сжимается, а какая растягивается, если отображение осуществляется функцией:	
3.5. z^2; **3.6.** e^z.	**3.5.** $\frac{1}{z}$; **3.6.** $z^2 + 2z$.
Отобразить полуплоскость $\mathrm{Im}\ z > 0$ на единичный круг $\lvert w\rvert < 1$ так, чтобы	
3.7. $w(i) = 0$, $\arg w'(i) = \frac{3\pi}{2}$.	**3.7.** $w(2i) = 0$, $\arg w'(2i) = 0$.
Отобразить круг $\lvert z\rvert < 1$ на круг $\lvert w\rvert < 1$ так, чтобы	
3.8. $w(\frac{1}{2}) = 0$, $\arg w'(\frac{1}{2}) = 0$; **3.9.** $w(\frac{i}{2}) = 0$, $\arg w'(\frac{i}{2}) = \frac{\pi}{2}$.	**3.8.** $w(0) = 0$, $\arg w'(0) = \frac{3\pi}{2}$; **3.9.** $w(a) = a$, $\arg w'(a) = \alpha$.
Найти аналитическую функцию $w = f(z)$ по изветной ее	
3.10. мнимой части $v(x,y) = 3x + 2xy$ при условии $f(-i) = 2$.	**3.10.** действительной части $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2x$ при условии $f(i) = 2i - 1$.

Теория.

Пусть функция $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$ определена в некоторой области G. Возьмем некоторую точку $z_0 = x_0 + iy_0 \in G$ и придадим ей приращение $z_0 + \triangle z \in G$ и тогда

$$\triangle w = f(z_0+\triangle z) - f(z_0) = \triangle u + i\triangle v, \begin{cases} \triangle u = u(x_0 + \triangle x; y_0 + \triangle y) - u(x_0; y_0), \\ \triangle v = v(x_0 + \triangle x; y_0 + \triangle y) - v(x_0; y_0). \end{cases}$$

Def. *Производной* функции $w = f(z)$ в точке z_0 называется

$$f'(z_0) = \lim_{\triangle z \to 0} \frac{\triangle w}{\triangle z} = \lim_{\triangle z \to 0} \frac{f(z_0+\triangle z) - f(z_0)}{\triangle z},$$

если этот предел существуети не зависит от способа стремления $\triangle z$ к нулю.

Th.

В точке z_0 существует $f'(z)$

$\Longleftrightarrow$

приращение функции $\triangle f(z_0) = f(z_0 + \triangle z) - f(z_0)$ в точке z_0 допускает выделение линейной главной части $\triangle f(z_0) = A \cdot \triangle z + \bar{0}(\lvert\triangle z\rvert)$,
(т.е. $f(z)$ дифференцируема в точке z_0). Причем $A = f'(z_0)$.

Th. *Для того, чтобы функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ была дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$*

$\Leftrightarrow$

1) существовали непрерывные частные производные $u(x, y)$ и $v(x, y)$;

2) выполнялись **условия Коши-Римана:** $\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases}.$

Замечание.

Если аргумент функции $f(z)$ задан в тригонометрической форме $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то условия Коши-Римана удобнее записать в виде:

$$\begin{cases} ru'_r = v'_\varphi \\ u'_\varphi = -rv'_r \end{cases}.$$

Доказательство замечания.

Пусть $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ и $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = u(x(r, \varphi), y(r, \varphi)) + iv(x(r, \varphi), y(r, \varphi))$.

По правилам дифференцирования сложной функции

$u'_r = u'_x x'_r + u'_y y'_r = u'_x \cos\varphi + u'_y \sin\varphi$,

$v'_\varphi = v'_x x'_\varphi + v'_y y'_\varphi = v'_x(-r\sin\varphi) + v'_y r\cos\varphi = r(-v'_x \sin\varphi + v'_y \cos\varphi)$.

В силу условий Коши-Римана: $\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases}.$

Поэтому $v'_\varphi = r(u'_y \sin\varphi + u'_x \cos\varphi)$. Таким образом $v'_\varphi = ru'_r$.

Аналогично,

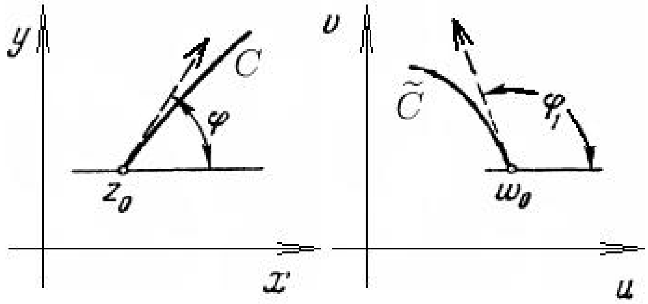
$u'_\varphi = u'_x x'_\varphi + u'_y y'_\varphi = u'_x(-r\sin\varphi) + u'_y r\cos\varphi = r(-u'_x \sin\varphi + u'_y \cos\varphi) =$
$- r(v'_x \cos\varphi + v'_y \sin\varphi)$.

Таким образом $u'_\varphi = -rv'_r$. ■

Def. Функция $w = f(z)$ называется *аналитической* в области G, если она в каждой точке этой области имеет непрерывную производную.

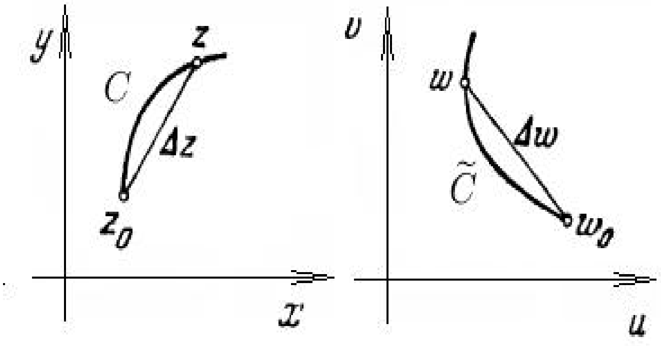
Замечание. Требование непрерывности производной в этом определении введено лишь для упрощения доказательств некоторых теорем в дальнейшем.

Пусть $w = w(z)$ – аналитическая функция в некоторой окрестности точки z_0 (функции Re $w(x + iy)$ и Im $w(x + iy)$ имеют непрерывные частные производные в этой окрестности точки z_0) и $w'(z_0) \neq 0$. Для каждой гладкой кривой C, проходящей через точку z_0, определим две величины.



• Пусть φ-угол, образуемый касательным вектором к кривой C в точке z_0 и положительным направлением действительной оси в z-плоскости, а φ_1-угол, образуемый касательным вектором к кривой $\widetilde{C}$-образу кривой при отображении

$w = w(z)$, с положительным направлением действительной оси в w-плоскости (у обеих кривых есть направление, и касательные вектора считаются направленными в ту же сторону, что и кривые). Величина $\varphi_1 - \varphi = \theta$ называется *углом поворота кривой* в точке z_0.



• Пусть z – произвольная точка кривой C, расположенная достаточно близко к точке z_0. Обозначим $\triangle z = z - z_0$, $\triangle w = w(z) - w(z_0)$. *Коэффициентом линейного растяжения (сжатия) кривой* в точке z_0 называется предел $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{|\triangle w|}{|\triangle z|} = k$, который существует из-за аналитичности функции $w = w(z)$ в окрестности точки z_0.

Геометрический смысл

• модуля производной $|f'(z_0)|$ состоит в том, что он равен коэффициенту линейного растяжения (сжатия) бесконечно малых векторов в точке z_0 :

$$|f'(z_0)| = k;$$

• аргумента производной $\operatorname{Arg} f'(z_0)$ состоит в том, что он равен углу поворота бесконечно малых векторов в точке z_0 :

$$\operatorname{Arg} f'(z_0) = \theta.$$

Def. Взаимнооднозначное и непрерывное отображение плоской области G на плоскую область $\widetilde{G}$ называется *конформным,* если оно в любой точки области G обладает свойствами

• постоянства растяжений и

• сохранения углов,

(т.е. является конформным в любой точке области G).

Th. (Риман.)

Пусть G и $\widetilde{G}$ односвязные области, их границы состоят более чем из одной точки.

$\Longrightarrow \qquad \exists\ w = f(z)$ *отображающая конформно G на $\widetilde{G}$.*

Такое отображение не единственно. Чтобы выделить единственное отображение достаточно потребовать, чтобы $z_0 \in G \mapsto f(z_0) = w_0 \in \widetilde{G}$ и $\arg f'(z_0) = \theta$.

Принцип соответствия границ.

Пусть G и $\widetilde{G}$ односвязные области с границами ∂G и $\partial\widetilde{G}$. Причем $\partial\widetilde{G}$ ограничена. Пусть в G определена функция $f(z)$ удовлетворяющая условиям:

1) $f(z)$ – однозначна и аналитична в G;
2) $f(z)$ – непрерывна в $\overline{G}$;
3) $f(z)$ отображает ∂G и $\partial\widetilde{G}$ взаимнооднозначно с сохранением направления обхода (относительно областей G и $\widetilde{G}$)
$\Longrightarrow$
функция $w = f(z)$ отображает G на $\widetilde{G}$ конформно.

Решение примеров.

3.1. *Проверить выполнение условий Коши-Римана для функций* z^n. *Доказать, что* $(z^n)' = nz^{n-1}$.

$$w = z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r^n\cos n\varphi + ir^n\sin n\varphi, \begin{cases} u = r^n\cos n\varphi \\ v = r^n\sin n\varphi \end{cases}.$$

Тогда из $\begin{cases} u'_r = nr^{n-1}\cos n\varphi \\ u'_\varphi = -nr^n\sin n\varphi \\ v'_r = nr^{n-1}\sin n\varphi \\ v'_\varphi = \quad nr^n\cos n\varphi \end{cases}$ и $\begin{cases} ru'_r = \ nr^n\cos n\varphi \ = \ v'_\varphi \\ \ u'_\varphi \ = -nr^n\sin n\varphi = -rv'_r \end{cases}$

следует выполнение условий Коши-Римана. В силу очевидной дифференцируемости данных функций, как вещественных функций двух переменных, получаем, что z^n дифференцируема в комплексном смысле в $\mathbb{C}$.

3.2. *Показать, что фунция* $f(z) = \sqrt[3]{xy}$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$ *удовлетворяет в точке* $z = 0$ *условиям Коши-Римана, но не дифференцируема в этой точке. Исследовать* $f(z)$ *на дифференцируемость в других точках плоскости* $\mathbb{C}$.

Пусть $w = f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, тогда $\begin{cases} u = \sqrt[3]{xy} \\ v = 0 \end{cases}$.

Вычислив (по определению) частные производные получаем

$$u'_x = \lim_{\triangle x\to 0}\frac{u(0+\triangle x;0) - u(0;0)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\triangle x\cdot 0}}{\triangle x} = [\triangle x \neq 0] = 0,$$

аналогично, $u'_y = 0$, $v'_y = 0$, $-v'_x = 0$. Таким образом, условия Коши-Римана в точке $z = 0$ выполнены.

Докажем, что $f(z)$ не дифференцируема в точке $z = 0$, т.е. не существует конечного предела при $\triangle z \to 0$ выражения

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(0+\triangle z) - f(0)}{\triangle z} = \lim_{\triangle x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\triangle x\triangle y}}{\triangle x + i\triangle y}.$$

Если $\triangle x \neq 0$, а $\triangle x = 0$, то предел существует и равен 0. Если же $\triangle x = \triangle y \neq 0$, то

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\sqrt[3]{(\triangle x)^2}}{(1+i)\triangle x} = \lim_{\triangle x\to 0}\frac{1}{(1+i)\sqrt[3]{\triangle x}} = \infty.$$

Пусть $z = x + iy \neq 0$. Тогда функции $u(x, y),\ v(x, y)$, как функции двух вещественных переменных, дифференцируемы в точке (x, y) и

$$u'_x = \frac{y}{3\sqrt[3]{x^2y^2}} = \frac{\sqrt[3]{y}}{3\sqrt[3]{x^2}} \neq 0, \quad u'_y = \frac{x}{3\sqrt[3]{x^2y^2}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{y^2}} \neq 0; \quad v'_y = 0, \quad -v'_x = 0.$$

Следовательно, условия Коши-Римана не выполняются и поэтому функция $f(z)$ не является дифференцируемой в точке $z = 0$.

3.3. *Является ли функция $w = z\overline{z}$ аналитической хотя бы в одной точке?*

Так как $z\overline{z} = x^2 + y^2$, то $u(x, y) = x^2 + y^2, \quad v(x, y) = 0$.

Условия Коши-Римана в этом случае имеют вид $\begin{cases} u'_x = 2x = v'_y = 0 \\ u'_y = 2y = -v'_x = 0 \end{cases}$ и удовлетворяются только в точке $(0; 0)$.

Следовательно, функция $w = z\overline{z}$ дифференцируема только в точке $z = 0$ и нигде не аналитична.

Покажем ее дифференцирумость в точке $z = 0$ по определению. Так как $w(0) = 0$, то $\triangle w = w(0 + \triangle z) - w(0) = \triangle z\overline{\triangle z}$ и

$$w'(0) = \lim_{\triangle z \to 0} \frac{\triangle w}{\triangle z} = \lim_{\triangle z \to 0} \frac{\triangle z\overline{\triangle z}}{\triangle z} = \lim_{\triangle z \to 0} \overline{\triangle z} = \lim_{\triangle z \to 0} (\triangle x - i\triangle y) = 0.$$

Таким образом, производная $w'(0)$ существует и равна 0.

3.4. *Отображение совершается с помощью функции $f(z) = z^3$. Найти угол поворота θ направления, выходящего из точки $z_0 = 1 + i$ и коэффициент растяжения k.*

Так как $f'(z_0) = 3z_0^2 = 3(1 + i)^2 = 3(1 + 2i + i^2) = 3(1 + 2i - 1) = 6i$, то угол поворота бесконечно малых векторов в точке z_0 равен

$$\theta = \arg f'(z_0) = \arg 6i = \frac{\pi}{2},$$

а коэффициент растяжения равен

$$k = |f'(z_0)| = |6i| = 6.$$

3.5. *Какая часть плоскости сжимается, а какая растягивается, если отображение осуществляется функцией* $\ln z$.

Так как $k = |w'(z)| = \left|\frac{1}{z}\right|$, то сжатие происходит при $k < 1$, т.е. при $|z| > 1$ (внешность единичного круга); растяжение – $k > 1$, при $|z| < 1$ (внутренность единичного круга).

3.6. *Отобразить полуплоскость* $\operatorname{Im} z > 0$ *на единичный круг* $|w| < 1$ *так, чтобы* $w(z_0) = 0,\ \arg w'(z_0) = \alpha,\ \operatorname{Im} z_0 > 0$.

Дробно-линейная функция вида

$$w = e^{i\theta}\frac{z-a}{z-\overline{a}}, \quad \frac{a-\overline{a}}{2i} = \operatorname{Im} a > 0,\ \theta \in \mathbb{R}$$

переводит верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\, z > 0$ во внутренность единичного круга $|w| < 1$, вещественную ось в единичную окружность, нижнюю полуплоскость во внешность единичного круга, $a \to 0$ (см. стр. 14).

Возьмем $a = z_0$, осталось выбрать θ, используя условие $\arg w'(z_0) = \alpha$.

$$w'(z) = e^{i\theta}\frac{z-\overline{z}_0 - z + z_0}{(z-\overline{z}_0)^2} = e^{i\theta}\frac{z_0-\overline{z}_0}{(z-\overline{z}_0)^2};$$

$$w'(z_0) = \frac{e^{i\theta}}{z_0-\overline{z}_0} = \frac{e^{i\theta}}{2i\cdot \operatorname{Im} z_0} = \frac{-i\ e^{i\theta}}{2\ \operatorname{Im} z_0} = \frac{e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}}{2\ \operatorname{Im} z_0},\ \frac{1}{2\ \operatorname{Im} z_0} > 0, \text{ т.к.} \operatorname{Im} z_0 > 0;$$

$$\operatorname{Arg}\, w'(z_0) = \theta - \frac{\pi}{2} = \alpha \qquad \Longrightarrow \qquad \theta = \frac{\pi}{2} + \alpha.$$

Ответ: $w(z) = e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)}\frac{z-z_0}{z-\overline{z}_0}$.

3.7. *Отобразить круг* $|z| < 1$ *на круг* $|w| < 1$, *чтобы* $w(z_0) = 0, \arg w'(z_0) = \alpha$.

Дробно-линейная функция вида

$$w = e^{i\theta}\frac{R(z-a)}{R^2-\overline{a}z}, \quad |a| < R,\ \theta \in \mathbb{R}$$

переводит внутренность круга $|z| < R$ во внутренность единичного круга $|w| < 1$, границу в границу, внешность во внешность, $a \to 0$ (см. стр. 13).

Возьмем $a = z_0$, $R = 1$ осталось выбрать θ, используя условие $\arg w'(z_0) = \alpha$.

$$w'(z) = e^{i\theta}\frac{1-z\overline{z}_0 + \overline{z}_0(z-z_0)}{(1-z\overline{z}_0)^2} = e^{i\theta}\frac{1-|z_0|}{(1-z\overline{z}_0)^2};$$

$$w'(z_0) = e^{i\theta}\frac{1}{1-|z_0|} = \frac{1}{1-|z_0|}\ e^{i\theta},\ \frac{1}{1-|z_0|} > 0, \text{ так как } |z_0| < 1;$$

$$\operatorname{Arg}\, w'(z_0) = \theta = \alpha.$$

Ответ: $w(z) = e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{1-z\overline{z}_0}$.

Связь аналитических функций с гармоническими.

Можно доказать, что если $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$ аналитическая функция, то $u(x,y)$ и $v(x,y)$ бесконечно дифференцируемы. Предположим, что $u(x,y)$ и $v(x,y)$ имеют непрерывные вторые частные производные, тогда из условий Коши-Римана, получаем

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 - \text{ уравнение Лапласа для } u(x,y).$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{cases} \implies \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 - \text{ уравнение Лапласа для } v(x, y).$$

Def. Функция $f(x, y)$, удовлетворяющая в области G уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

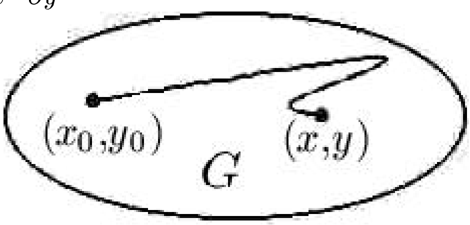
называется *гармонической* в этой области.

Таким образом, вещественная и мнимая части аналитической функции являются гармоническими функциями.

Def. Гармонические функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, удовлетворяющие условиям Коши-Римана, называются *сопряженными гармоническими функциями.*

Причем, если одна из сопряженных гармонических функций задана, то вторую легко найти с точность до постоянного слагаемого.

Пусть $u(x, y)$ одна из сопряженных гармонических функций. Так как они удовлетворяют условиям Коши-Римана, то нам известны не только $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$, но и $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$. Значит,



$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy.$$

$$v(x, y) = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} dv = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy + C.$$

3.8. *Найти аналитическую функцию $w = f(z)$ по изветной ее действительной части $u(x, y) = 2e^x \cos\ y$ при условии $f(0) = 4$.*

Так как $u'_x = 2e^x \cos\ y$, то по первому из условий Коши-Римана $v'_y = u'_x = 2e^x \cos\ y$. Отсюда

$$v(x, y) = \int v'_y\, dy = \int 2e^x \cos\ y\, dy = 2e^x \sin\ y + \varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)$ пока неизвестна. Дифференцируя $v(x, y)$ по x и используя второе из условий Коши-Римана, получим

$$v'_x = (2e^x \sin\ y + \varphi(x))'_x = 2e^x \sin\ y + \varphi'(x) = -u'_y = 2e^x \sin\ y,$$

откуда $\varphi'(x) = 0$, а значит, $\varphi(x) = C = const$.

Итак, $v(x, y) = 2e^x \sin\ y + C$, и, следовательно,

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = 2e^x \cos\ y + i(2e^x \sin\ y + C) = 2e^z + iC.$$

Постоянную C найдем из условия $f(0) = 4$, т.е. $2e^0 + iC = 4$; отсюда $C = -2i$.

Значит, $f(z) = 2e^z + 2$.

Физическое применение конформных отображений.

Так как вещественная часть $u(x, y)$ аналитической функции есть функция гармоническая, то, она может быть представлена как потенциал плоского поля. Следовательно, уравнение $u(x, y) = const$ есть уравнение линий равного потенциала (эквипотенциальных линий). При этом семейство $v(x, y) = const$, где $v(x, y)$ – мнимая часть аналитической функции, есть семейство кривых, ортогональных к линиям $u(x, y) = const$. Тогда $v(x, y) = const$ – силовые линии поля.

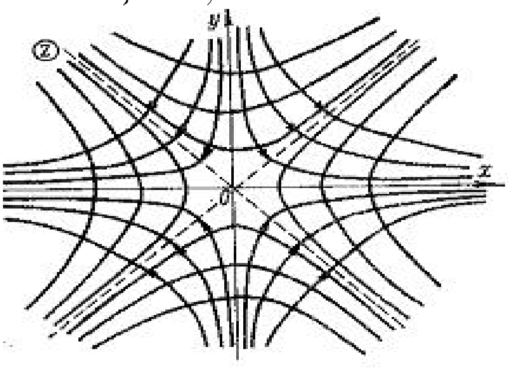
Таким образом, всякая аналитическая функция $w = u(x, y) + iv(x, y)$ дает картину плоского поля: электрического, магнитного, гидродинамического или теплового. Если поле гидродинамическое $u = const$ есть линии равного потенциала скорости, то $v(x, y) = const$ есть линии тока или траектории частиц жидкости. В случае теплового поля, если $u(x, y) = const$ есть изотермы, то $v(x, y) = const$ есть линии теплового потока. Иногда предполагается, что потенциал плоского поля есть не вещественная, а мнимая часть $v(x, y)$ аналитической функции $w = u(x, y) + iv(x, y)$. Тогда уравнение силовых линий или линий тока будет $u(x, y) = const$, а уравнение линий равного потенциала будет $v(x, y) = const$.

Def. Функция $w = u(x, y) + iv(x, y)$ называется *комплексным потенциалом* или *характеристической функцией* данного поля.

Установившееся плоское безвихревое течение несжимаемой жидкости характеризуется аналитической функцией $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, которая, является комплексным потенциалом или характеристической функцией течения; $u(x, y)$ есть потенциальная функция,$v(x, y)$ – функция тока. Линии $u(x, y) = const$ есть линии равного потенциала, $u(x, y) = const$ – линии тока.

Величина скорости $|\overline{v}|$ равна $|f'(z)|$, а направление скорости образует с положительным направлением оси Ox угол $\alpha = -\arg f'(z)$. Иначе говоря, скорость потока в точке z определяется комплексным числом $f'(z)$ (геометрически комплексное число можно рассматривать как вектор), т. е. числом, сопряженным со значением производной $f'(z)$ в этой точке $\overline{v} = \overline{f'(z)}$.

3.9. *По заданному комплексному потенциалу $w = z^2$ найти линии равного потенциала, линии тока и определить скорость $\overline{v}$.*



$w = z^2$; $z = x + iy$, $z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$, $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$.
Линии равного потенциала $x^2 - y^2 = const$.
Линии тока $xy = const$.
Чтобы найти скорость $\overline{v}$, найдем производную

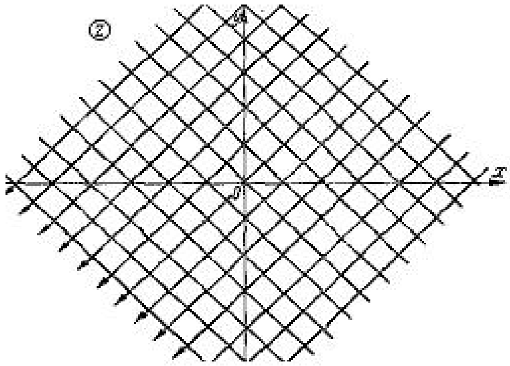
$$f'(z) = (z^2)' = 2z = 2x + i2y,\ \overline{2z} = 2x - i2y, \quad \Longrightarrow \quad \overline{v} = \overline{f'(z)}$$

Ответ: Линии равного потенциала $x^2 - y^2 = const$; линии тока $xy = const$; скорость $\overline{v} = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}$.

Плоское электростатическое поле с напряженностью $\overline{E}$ характеризуется аналитической функцией $f(z) = u + iv$, называемой комплексным потенциалом; v называется потенциальной, а u – силовой функцией. Линии $v = const$ – эквипотенциальные линии, а $u = const$ – силовые линии поля.

Напряженность $\overline{E} = -i\overline{f'(z)}$.

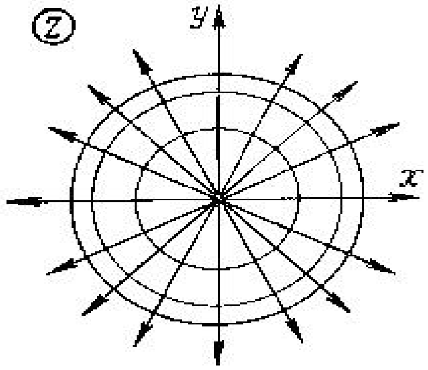
3.10. *По заданному комплексному потенциалу $f(z) = (1+i)z$ требуется определить силовую и потенциальную функции, эквипотенциальные линии, силовые линии поля и напряженность $\overline{E}$.*



$w = (1+i)z = (1+i)(x+iy) = x-y+i(x+y)$.
$u(x,y) = x - y$ – силовая функция;
$v(x,y) = x + y$ – потенциальная функция;
$x - y = const$ – силовые линии;
$x + y = const$ – эквипотенциальные линии.
$w' = (1+i)z' = 1 + i$,
$\overline{w'} = 1^{-}i,\ -i\overline{w'} = {}^{-}i(1-i) = -i - 1$.

Ответ: $u(x,y) = x - y,\ v(x,y) = x + y$.
Силовые линии $x - y = const$; эквипотенциальные линии $x + y = const$; напряженность $\overline{E} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3.11. *Найти поле скоростей движения несжимаемой жидкости, линии тока и эквипотенциальные линии, зная комплексный потенциал $w = \ln z$.*



$w = \ln z = u(x,y) + iv(x,y) = \ln r + i\varphi$,
$\ln r = const$, т. е.
$r = const$ – эквипотенциальные линии,
$\varphi = const$ – линии тока.

$$w' = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x - iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2};$$

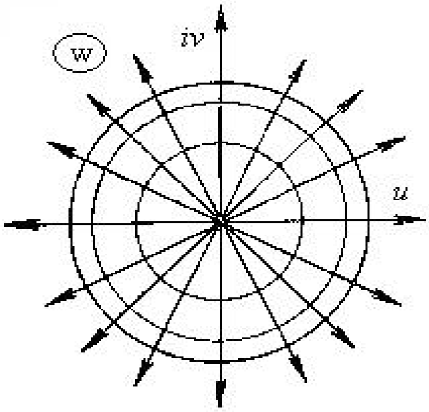
$\overline{w'} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2}$; $\overline{v} = \overline{w'}$,

Ответ: $\overline{v} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$; $r = const$ – эквипотенциальные линии, $\varphi = const$ – линии тока.

Конформное отображение широко применяется при изучении различных векторных и скалярных полей. Если гармоническая функция является потенциалом некоторого поля и это поле отображается при помощи аналитической функции на некоторое другое поле, то потенциалы в соответствующих точках этих полей равны. Линии равного потенциала и силовые линии одного поля переходят в линии равного потенциала и силовые линии другого поля. Это дает возможность по хорошо изученным полям изучать другие, более сложные поля.

Если найдена аналитическая функция $w(z)$, которая отображает z-плоскость на w-плоскость так, что линии равного потенциала и силовые линии поля преобразуются в прямые, параллельные координатным осям Ou и Ov w-плоскости, то $w(z)$ является комплексным потенциалом данного поля Через комплексный же потенциал выражаются основные величины, связанные с полем, и картина поля станет ясной.

3.12. *Определить силовые и эквипотенциальные линии поля, образованного двумя точечными зарядами* $+e$ *и* $-e$, *помещенными в точках* $(-1;0)$ *и* $(+1;0)$, *а также потенциал в точке* $(1;-1)$, *считая известным поле, образованное точечным зарядом. (В плоском поле точечного заряда* q, *помещенного в начале координат, потенциал* U_0 *в точке* w_0 *определяется по формуле* $U_0 = \frac{q}{\varepsilon}\ln|w_0|$, *где* ε *– диэлектрическая постоянная.)*



В поле точечного заряда, помещенного в начале координат, линиями равного потенциала являются концентрические окружности с центром в начале координат, а силовыми линиями – лучи, исходящие из начала координат. Преобразуем заданное в условии задачи поле в поле точечного заряда.

Для этого вещественную ось z-плоскости конформно отобразим в вещественную ось w-плоскости, например так, чтобы три точки $\{z_1 = -1,\ z_2 = 0,\ z_3 = 1\}$ z-плоскости отобразились в три точки $\{w_1 = 0,\ w_2 = -1,\ w_3 = \infty\}$ w-плоскости. Это преобразование второй заряд заданного в условии задачи поля переводит в бесконечно удаленную точку и, следовательно, оставляет в плоскости только один заряд. Использую формулу (2.1) получаем $w = \frac{z+1}{z-1}$. Данная функция преобразует данное поле в поле точечного заряда.

Запишем w в показательной форме: $w = re^{i\varphi}$. Линии равного потенциала в поле точечного заряда – окружности $|w| = r = C$, $C \geq 0$, силовые линии поля – лучи $\varphi = const$. Найдем прообразы указанных линий.

$$w = \frac{z+1}{z-1},\ |w| = \left|\frac{z+1}{z-1}\right| = C,\ z = x+iy,$$

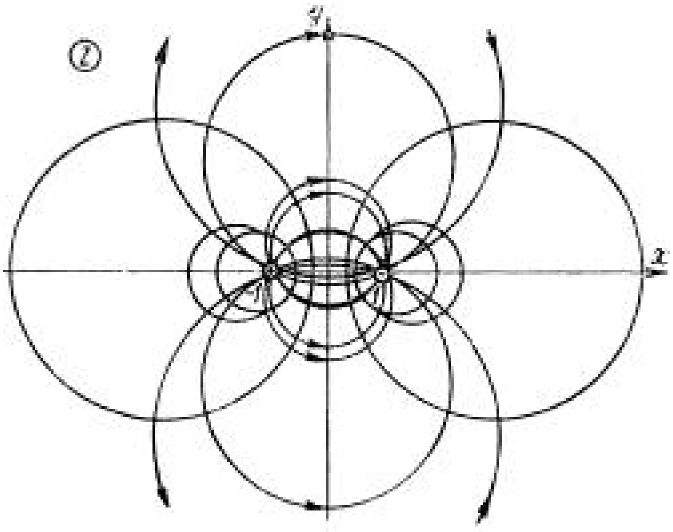
$$\left|\frac{x+iy+1}{x+iy-1}\right| = \frac{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}{(x-1)^2+y^2} = C \text{ или } (x+1)^2+y^2 = C^2(x-1)^2+C^2y^2.$$

После преобразований получаем $\left(x+\frac{1+C^2}{1-C^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2C}{1-C}\right)^2$ – линии равного потенциала. Это окружности с центрами на оси Ox.

Теперь найдем аргумент φ комплексной переменной $w = \frac{z+1}{z-1}$:

$$w = \frac{x+iy+1}{x+iy-1} = \frac{(x+1+iy)(x-1-iy)}{(x-1+iy)(x-1-iy)} = \frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2} - i\frac{2y}{(x-1)^2+y^2},$$

отсюда $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{2y}{x^2+y^2-1}$ $\left(\text{если } w = u+iv, \text{то } \operatorname{tg}\varphi = \frac{v}{u}\right)$.



Так как уравнение силовых линий и w-плоскости точечного заряда есть $\varphi = const$, то уравнение силовых линий в данном поле будет $\frac{2y}{x^2+y^2-1} = C_1$. После преобразований получаем $x^2 + \left(y+\frac{1}{C_1}\right)^2 = \frac{1+C_1^2}{C_1^2}$.

Это окружности с центром на оси Oy. Каждая из них проходит через точки $(^-1;0)$ и $(1;0)$, т. е. через точки, в которых помешены заряды. Поле имеет вид, изображенный на рисунке.

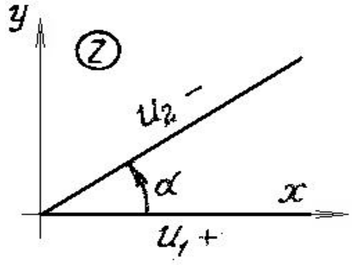
Найдем потенциал в точке $1-i$, зная, что в плоском поле точечного заряда q, помещенного в начале координат, потенциал в точке w_0 определяется по формуле $U_0 = \frac{q}{\varepsilon}\ln|w_0|$, где ε – диэлектрическая постоянная.)

Так как значения потенциалов в соответствующих точках z-плоскости и w-плоскости равны, то потенциал в точке $z_0 = 1-i$ определяется по формуле

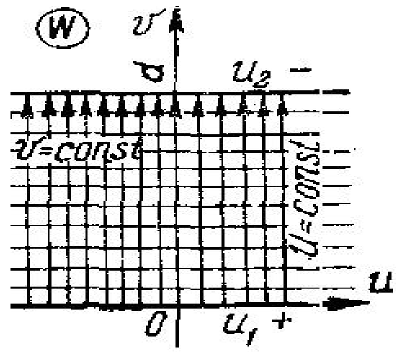
$$U_0 = \frac{e}{\varepsilon}\ln|w_0| = \frac{e}{\varepsilon}\ln\left|\frac{z_0+1}{z_0-1}\right| = \frac{e}{\varepsilon}\ln\left|\frac{1-i+1}{1-i-1}\right| = \frac{e}{\varepsilon}\ln|1+2i| = \frac{e}{2\varepsilon}\ln 5.$$

Ответ. Силовые линии: $x^2+\left(y+\frac{1}{C_1}\right)^2 = \frac{1+C_1^2}{C_1^2}$. Эквипотенциальные линии: $\left(x+\frac{1+C^2}{1-C^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2C}{1-C}\right)^2$. Потенциал в точке $1-i$ равен $U_0 = \frac{e}{2\varepsilon}\ln 5$.

3.13. *Найти потенциал в точке z_0, а также линии равного потенциала и силовые линии поля, образованного двумя заряженными бесконечными пластинами, сходящимися под углом α и разделенными изолятором, значения потенциалов на которых U_1 и U_2, считая известным поле идеального плоского конденсатора. Потенциал в точке $w_0 = u_0 + iv_0$ плоского идеального* *конденсатора определяется по формуле $U = \frac{U_2 - U_1}{d} v_0 + U_1$, где U_1 и U_2 – значения потенциалов на обкладках, а d – расстояние между пластинами.*



Пересечем данные пластины плоскостью, им перпендикулярной. В сечении получим плоское поле. Пусть одна из прямых сечения является вещественной осью z-плоскости, а положение изолятора выберем в качестве начала координат.



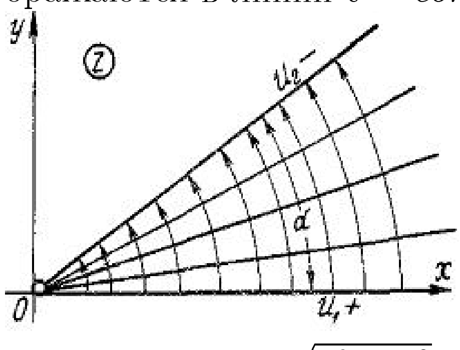
Рассмотрим поле идеального плоского конденсатора (расстояние между пластинами $d \leq 2\pi$). Силовые линии его – прямые, параллельные оси Ov, эквипотенциальные линии – прямые, параллельные оси Ou.

Преобразуем поле идеального конденсатора в поле данных двух пластин, сходящихся под углом α. Сначала полосу $0 \leq \mathrm{Im} w \leq d$ преобразуем в угол $0 \leq \arg z_1 \leq d$ при помощи функции $z_1 = e^w$, а затем полученный угол преобразуем в угол z-плоскости : $0 \leq \arg z \leq \alpha$ при помощи степенной функции $z = (z_1)^{\alpha/d}$, т. е. $z = e^{\frac{\alpha}{d} w}$. Функция, обратная найденной, т. е. $w = \frac{d}{\alpha} \ln z$, преобразует поле данного угла в поле идеального конденсатора.

Так как потенциалы в соответствующих точках двух полей равны и известно, что потенциал U в точке $w_0 = u_0 + iv_0$ определяется по формуле $U = \frac{U_2 - U_1}{d} v_0 + U_1$, то имеем $w_0 = u_0 + iv_0 = \frac{d}{\alpha}(\ln|z_0| + i\arg z_0)$, т.е. $v_0 = \frac{d}{\alpha} \arg z_0$.

Отсюда получаем, что потенциал U в точке z_0 поля данного угла определяется по формуле $U = \frac{U_2 - U_1}{d} \frac{d}{\alpha} \arg z_0 + U_1 = \frac{U_2 - U_1}{\alpha} \arg z_0 + U_1$.

Эквипотенциальные и силовые линии поля данного угла z-плоскости отображаются в линии $v = const$ и $u = const$ w-плоскости.



Найдем вещественную и мнимую части функции $w = \frac{d}{\alpha} \ln z$:
$w = u + iv = \frac{d}{\alpha}(\ln|z| + i\arg z)$,
$u(x, y) = \frac{d}{\alpha} \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, $v(x, y) = \frac{d}{\alpha} \arg z$.
Эквипотенциальные линии $\arg z = \varphi = const$ – лучи.
Силовые линии $\sqrt{x^2 + y^2} = r = const$ – окружности.

Ответ. $U = \frac{U_2 - U_1}{\alpha} \arg z_0 + U_1$, $\varphi = const$ – эквипотенциальные линии; $r = const$ – силовые линии.

4 Интегралы функций комплексной переменной. Интегральная формула Коши.

Непосредственным суммированием доказать равенство	
4.1. $\int\limits_{z_1}^{z_2} 1dz = z_2 - z_1$.	**4.1.** $\int\limits_{z_1}^{z_2} z\ dz = \frac{1}{2}(z_2^2 - z_1^2)$.
Вычислить интеграл $I = \int x\ dz$: **4.2.** по радиус-вектору $z_0 = 2 + i$; **4.3.** по полуокружности $\|z\| = 1$, $0 \leq \arg z \leq \pi$ начало в 1; **4.4.** по окружности $\|z - a\| = R$.	Вычислить интеграл $I = \int y\ dz$: **4.2.** по радиус-вектору $z_0 = 2 + i$; **4.3.** по полуокружности $\|z\| = 1$, $0 \leq \arg z \leq \pi$ начало в 1; **4.4.** по окружности $\|z - a\| = R$.
Вычислить интеграл $I = \int \|z\|\ dz$	
4.5. по радиусу вектору $z_0 = 2 - i$; **4.6.** по полуокружности $\|z\| = 1$, $0 \leq \arg\ z \leq \pi$ начало в 1.	**4.5.** по окружности $\|z\| = R$; **4.6.** по полуокружности $\|z\| = 1$, $-\frac{\pi}{2} \leq \mathrm{Arg}\ z \leq \frac{\pi}{2}$ начало в $-i$.
Вычислить интеграл $I = \int \frac{dz}{\sqrt{z}}$	
4.7. по полуокружности $\|z\| = 1$, $y \geq 0$ начало в точке $z_0 = 1$; **4.8.** по окружности $\|z\| = 1$ начало в точке $z_0 = 1$.	**4.7.** по полуокружности $\|z\| = 1$, $y \geq 0$ начало в точке $z_0 = -1$; **4.8.** по окружности $\|z\| = 1$ начало в в точке $z_0 = i$.
Вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z^2+9}$: **4.9.** если $3i$ внутри Γ, $-3i$ вне Γ; **4.10.** если $-3i$ внутри Γ, $3i$ вне Γ.	Вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z(z^2-1)}$: **4.9.** при различных расположениях Γ не проходящих через $0, \pm 1$.
4.11. Вычислить интеграл $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{ze^z\ dz}{(z-a)^3}$, если a лежит внутри Γ.	Вычислить интеграл $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{e^z dz}{z(1-z)^3}$, **4.10.** если 0 внутри Γ, 1 вне Γ, **4.11.** если 1 внутри Γ, 0 вне Γ, **4.12.** если 0 и 1 внутри Γ.

Теория.

Пусть $L_{AB} = \{z = z(t), t \in [\alpha; \beta]\}$ кусочно-гладкая кривая с началом в точке $A = z(\alpha)$ и концом в точке $B = z(\beta)$. Пусть функция $w = f(z)$ определена и непрерывна на L_{AB}. Разбиение интервала $[\alpha; \beta]$ точками

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = \beta,$$

дает разбиение кривой на дуги $L_{AB} = \bigcup\limits_{k=1}^{n} L_k,\ L_k = \{z = z(t), t \in [t_{k-1}; t_k]\}$.

На каждой дуге L_k выберем произвольно точку $\xi_k \in L_k$. Составим интегральную сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k) \triangle z_k,\ \triangle z_k = z(t_k) - z(t_{k-1})$.

Def. Интегралом от функции $f(z)$ по кривой L_{AB} наывается предел интегральных сумм

$$\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\triangle z_k = \int\limits_{L_{AB}} f(z)dz,$$

где $d = \max|\triangle z_k|$, если он существует и конечен.

- Сведение к вещественному криволинейному интегралу.

  Пусть $z = x + iy,\ dz = dx + idy\ f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Тогда

$$\int\limits_{L_{AB}} f(z)dz = \int\limits_{L_{AB}} u(x, y)dx - v(x, y)dy + i\int\limits_{L_{AB}} v(x, y)dx + u(x, y)dy.$$

- Сведение к вещественному определенному интегралу.

$$\int\limits_{L_{AB}} f(z)dz = \Big[L_{AB} = \{z = z(t), t\in[\alpha;\beta]\}\Big] = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)dt. \qquad (4.2)$$

- Теоремы Коши.

Th. Пусть
$f(z)$ аналитическая в области G и на ее границе ∂G
$\Longrightarrow$
для любой замкнутой кривой $L\subset\overline{G}$ (в частности, $L = \partial G$)

$$\oint\limits_{L} f(z)dz = 0.$$

Th. (Интегральная формула Коши.) Пусть
$f(z)$ аналитическая в области G и на ее границе ∂G, $(\zeta\in G)$
$\Longrightarrow$

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{f(z)}{z-\zeta}dz. \qquad (4.3)$$

Th. Пусть
$f(z)$ аналитическая в области G и на ее границе ∂G, $(\zeta\in G)$
$\Longrightarrow$

$$\exists f^{(n)}(\zeta), n\in\mathbb{N}, \qquad f^{(n)}(\zeta) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{f(z)}{(z-\zeta)^{n+1}}dz. \qquad (4.4)$$

Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, содержащей точки z_0 и z_1, то имеет место **формула Ньютона-Лейбница**

$$\int\limits_{z_0}^{z_1} f(z)dz = F(z_1) - F(z_0) = F(z)\Big|_{z_0}^{z_1},$$

где $F(z)$–какая-либо первообразная для функции $f(z)$, т. е. в области D

$$F'(z) = f(z).$$

Решение примеров.

4.1. *Вычислить интеграл* $\int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{z-z_0}$.

Первый способ. Вычислим интеграл <u>непосредственным суммированием</u>. Кривая интегрирования полностью определяется уравнением

$$z = z_0 + re^{it} = z_0 + r(\cos t + i\sin t),\ t \in [0, 2\pi].$$

Разобьем отрезок $[0, 2\pi]$ на n равных частей точками $t_k = \frac{2\pi k}{n}, k = 0, \cdots, n$. При этом кривая разбивается на части точками $z(t_k) = z_0 + re^{i\frac{2\pi k}{n}}$. Выберем в качестве произвольных точек ξ_k точки соответствующие серединам отрезков $[t_{k-1}; t_k]$, т.е.

$$\xi_k = z_0 + re^{\frac{i}{2}(t_{k-1}+t_k)} = z_0 + re^{\frac{i}{2}\left(\frac{2\pi(k-1)}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)} = z_0 + re^{\frac{i\pi(2k-1)}{n}}.$$

Кроме того,

$$\triangle z_k = z(t_k) - z(t_{k-1}) = z_0 + re^{it_k} - z_0 - re^{it_{k-1}} = r(e^{it_k} - e^{it_{k-1}}) =$$

$$= r((\cos t_k - \cos t_{k-1}) + i(\sin t_k - \sin t_{k-1})) = 2r\left(-\sin\frac{t_k - t_{k-1}}{2}\sin\frac{t_{k-1}+t_k}{2} + \right.$$

$$\left. + i\sin\frac{t_k - t_{k-1}}{2}\cos\frac{t_{k-1}+t_k}{2}\right) = 2ir\sin\frac{t_k - t_{k-1}}{2}\left(\cos\frac{t_{k-1}+t_k}{2} + i\sin\frac{t_{k-1}+t_k}{2}\right),$$

$$= \left[\frac{t_k - t_{k-1}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi k}{n} - \frac{2\pi(k-1)}{n}\right) = \frac{2\pi}{n}\right] = 2ir\sin\frac{2\pi(}{n}e^{\frac{i\pi(2k-1)}{n}},$$

$$d = \max|\triangle z_k| = 2r\max\left|\sin\frac{2\pi}{n}\right| \longrightarrow 0, \text{при } n \to \infty.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\triangle z_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\xi_k - z_0}\triangle z_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z_0 + re^{\frac{i\pi(2k-1)}{n}} - z_0}2ir\sin\frac{2\pi}{n}e^{\frac{i\pi(2k-1)}{n}} =$$

$$2i\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{re^{\frac{i\pi(2k-1)}{n}}}r\sin\frac{2\pi}{n}e^{\frac{i\pi(2k-1)}{n}}=2i\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2\pi}{n}=2in\sin\frac{2\pi}{n},$$

поэтому

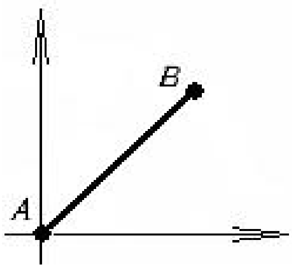
$$\int\limits_{|z-z_0|=r}\frac{dz}{z-z_0}=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\triangle z_k=\lim_{n\to\infty}2in\sin\frac{2\pi}{n}=2\pi i.$$

Второй способ. Используя (4.2), получаем

$$\int\limits_{|z-z_0|=r}\frac{dz}{z-z_0}=\left[\begin{matrix} z=z_0+re^{it} \\ dz=rie^{it}dt\end{matrix},t\in[0,2\pi]\right]=\int\limits_0^{2\pi}\frac{rie^{it}dt}{z_0+re^{it}-z_0}=2\pi i.$$

4.2. *Вычислить интеграл* $I=\int\limits_{L_{AB}}\overline{z}dz$

a) *по отрезку прямой, соединяющему точки* $A=0$ *и* $B=1+i$*;*



Напишем уравнение прямой, проходящей через точки $A=0$ и $B=1+i$

$$\tfrac{x-0}{1-0}=\tfrac{y-0}{1-0}\Longrightarrow y=x.$$

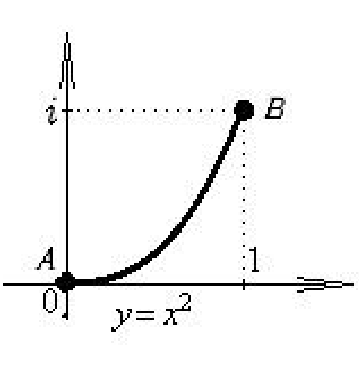
Тогда кривая интегрирования полностью определяется уравнением

$$z=x+iy=x+ix=(1+i)x,\ x\in[0,1].$$

Поэтому используя (4.2), получаем

$$I=\int\limits_0^1\overline{(1+i)x}d((1+i)x)=\int\limits_0^1(1-i)x(1+i)dx=2\int\limits_0^1 xdx=1.$$

b) *по отрезку параболы, соединяющему точки* $A=0$ *и* $B=1+i$*;*



Кривая интегрирования полностью определяется уравнением

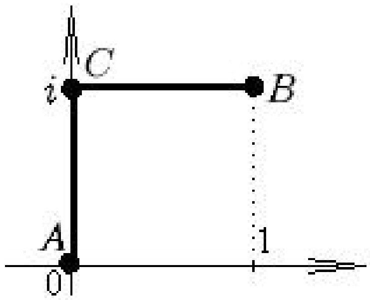
$$z=x+iy=x+ix^2,\ x\in[0,1].$$

Поэтому используя (4.2), получаем

$I=\int\limits_0^1\overline{(x+ix^2)}d(x+ix^2)=\int\limits_0^1(x-ix^2)(1+2ix)dx=$

$\int\limits_0^1(x+x^3+i(2x^2-x^2))dx=\frac{3}{4}+\frac{i}{3}.$

c) *по ломаной, соединяющей точки* $A=0$, $C=i$ *и* $B=1+i$.



Ломаная $L_{ACB} = L_{AC} \bigcup L_{CB}$ полностью определяется уравнениями

$$L_{AC} = \{z = iy,\ y \in [0,1]\},$$
$$L_{CB} = \{z = x + i,\ x \in [0,1]\}.$$

Поэтому используя (4.2), получаем

$$I = \int\limits_0^1 \overline{(iy)}d(iy) + \int\limits_0^1 \overline{(x+i)}d(x+i) = \int\limits_0^1 (-iy)idy + \int\limits_0^1 (x-i)dx = 1 - i.$$

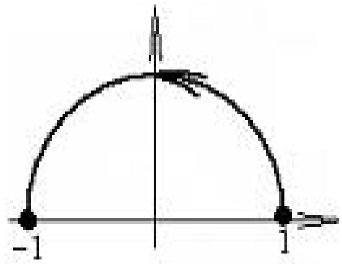
Замечание. Этот пример показывает, что интеграл от непрерывной, но не аналитической, функции зависит от кривой интегрирования.

4.3. *Вычислить интеграл* $\int\limits_\Gamma \frac{dz}{\sqrt{z}}$, *где* Γ*–верхняя дуга окружности* $|z| = 1$. *Для* $\sqrt{z}$ *берется та ветвь, для которой* $\sqrt{1} = -1$.

Первый способ. Функция $\sqrt{z}$ имеет два значения:
$\sqrt{z} = \sqrt{|z|}(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2})$,
$\sqrt{z} = \sqrt{|z|}(\cos(\frac{\varphi}{2} + \pi) + i\sin(\frac{\varphi}{2} + \pi)) = -\sqrt{|z|}(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2})$,
где $\varphi = \arg z$.

Так как значения z берутся на единичной окружности, то $|z| = 1$, и, следовательно, $\sqrt{z} = (\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2})$, $\sqrt{z} = -(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2})$.

Условию $\sqrt{1} = -1$ удовлетворяет второе значение $\sqrt{z} = -(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2})$. В самом деле, пусть $z = 1$, тогда $\arg z = 0$ и $\sqrt{1} = -\cos 0 - i\sin 0 = -1$.



Применяя формулу Ньютона-Лейбница, получим
$\int\limits_\Gamma \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int\limits_1^{-1} \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z}\Big|_1^{-1} = 2(\sqrt{-1} - \sqrt{1})$.
Найдем $\sqrt{-1} = -\left(\cos\frac{\arg(-1)}{2} + i\sin\frac{\arg(-1)}{2}\right) = -\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = -i$.

Окончательно получим

$$\int\limits_\Gamma \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2(1-i).$$

Второй способ. Полагаем $z = re^{i\varphi}$, где $r = 1$, а φ меняется от 0 до π. Из условия $\sqrt{1} = -1$ следует, что $\sqrt{e^{i\varphi}} = e^{i\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)}$. Теперь

$$\int\limits_\Gamma \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int\limits_1^\pi \frac{ie^{i\varphi}d\varphi}{\sqrt{e^{i\varphi}}} = \int\limits_1^\pi \frac{ie^{i\varphi}d\varphi}{e^{i\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)}} = \int\limits_1^\pi ie^{i\left(\frac{\varphi}{2}-\pi\right)}d\varphi =$$

$$= 2e^{i\left(\frac{\varphi}{2}-\pi\right)}\Bigg|_0^\pi = 2\left(e^{-i\frac{\pi}{2}} - e^{-i\pi}\right) = 2(1-i).$$

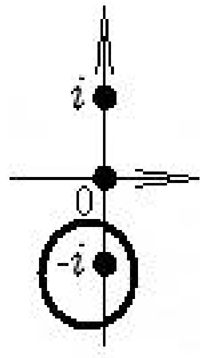
4.4. *Вычислить интеграл* $\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z(z^2+1)}$ *при различных расположениях кривой* Γ, *не проходящих через точки* $0, i, -i$.

Первый способ. Разложим дробь $\frac{1}{z(z^2+1)}$ на простейшие.

$$\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z(z-i)(z+i)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-i} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z+i}.$$

Подставив это в интеграл, получим

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z(z^2+1)} = \int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z} - \frac{1}{2} \int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z-i} - \frac{1}{2} \int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z+i}.$$



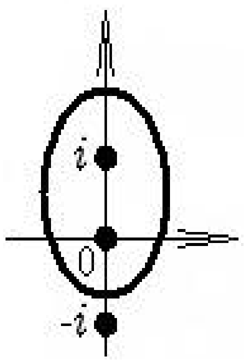
a) Рассмотрим кривую Γ содержащую внутри точку $-i$ и не содержащую точки $0, i$. Функцию $\frac{1}{z+i}$ можно записать в виде $\frac{1}{z+i} = \frac{f_1(z)}{z+i}$, где $f_1(z) \equiv 1$. Функция $f_1(z)$ аналитическая в замкнутой области, ограниченной кривой Γ. По формуле Коши (4.3) при $\zeta = -i$

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z+i} = 2\pi i f_1(-i) = 2\pi i.$$

Функции $\frac{1}{z}$ и $\frac{1}{z-i}$ аналитические в замкнутой области, ограниченной кривой Γ и на ее границе. По теореме Коши $\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z} = 0$ и $\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z-i} = 0$.

Таким образом,

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z(z^2+1)} = 0 - 0 - \frac{1}{2} \cdot 2\pi i = -\pi i.$$



b) Рассмотрим кривую Γ содержащую внутри точки $0, i$ и не содержащую точку $-i$. Функцию $\frac{1}{z}$ можно записать в виде $\frac{1}{z} = \frac{f_1(z)}{z}$, где $f_1(z) \equiv 1$. Эта функция аналитическая в замкнутой области, ограниченной кривой Γ. По формуле Коши (4.3) при $\zeta = 0$

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i f_1(0) = 2\pi i.$$

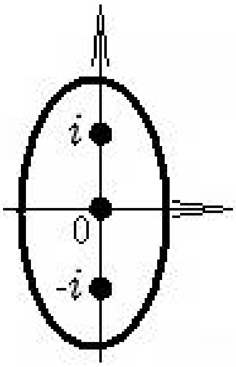
Функцию $\frac{1}{z-i}$ также можно записать в виде $\frac{1}{z-i} = \frac{f_1(z)}{z-i}$, где $f_1(z) \equiv 1$. Функция $f_1(z)$ аналитическая в замкнутой области, ограниченной кривой Γ. По формуле Коши (4.3) при $\zeta = i$

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z-i} = 2\pi i f_1(i) = 2\pi i.$$

Функция $\frac{1}{z+i}$ аналитическая в замкнутой области, ограниченной кривой Γ и на ее границе. По теореме Коши $\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z+i} = 0$.

Таким образом,

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z(z^2+1)} = 2\pi i - \frac{1}{2}\cdot 2\pi i - 0 = \pi i.$$



c) Рассмотрим кривую Γ содержащую внутри точки $0, i, -i$. Используя вычисления пунктов a) и b), получим

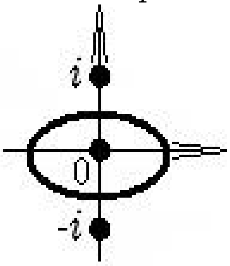
$$\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i f_1(0) = 2\pi i,$$

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z-i} = 2\pi i f_1(i) = 2\pi i, \quad \int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z+i} = 2\pi i f_1(-i) = 2\pi i.$$

Таким образом,

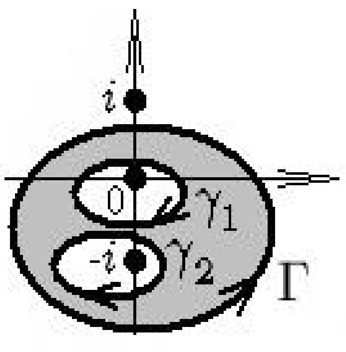
$$\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z(z^2+1)} = 2\pi i - \frac{1}{2}\cdot 2\pi i - \frac{1}{2}\cdot 2\pi i = 0.$$

Второй способ.



a) Рассмотрим кривую Γ содержащую внутри точку 0 и не содержащую точки $i, -i$. Функцию $f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)}$ можно записать в виде $f(z) = \frac{1}{z^2+1}\cdot\frac{1}{z} = \frac{f_1(z)}{z}$, где $f_1(z) = \frac{1}{z^2+1}$. Функция $f_1(z)$ аналитическая в замкнутой области, ограниченной кривой Γ. По формуле Коши (4.3) при $\zeta = 0$

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i f_1(0) = 2\pi i \cdot \left.\frac{1}{z^2+1}\right|_{z=0} = 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i.$$



b) Рассмотрим кривую Γ содержащую внутри точки $0, -i$ и не содержащую точку i. Достроим кривые γ_1 и γ_2, содержащие внутри точки $z = 0$ и $z = -i$ достаточно маленькие, чтобы они не пересекались и целиком лежали в внутри замкнутой области, ограниченной кривой Γ. В построенной трехсвязной области, ограниченной кривыми $\gamma_1, \gamma_2, \Gamma$, подынтегральная функция всюду аналитична.

Из теоремы Коши для многосвязной области

$$\int\limits_{\Gamma^+\bigcup\gamma_1^-\bigcup\gamma_2^-} f(z)dz = 0 \implies \int\limits_{\Gamma^+} f(z)dz = \int\limits_{\gamma_1^+} f(z)dz + \int\limits_{\gamma_2^+} f(z)dz.$$

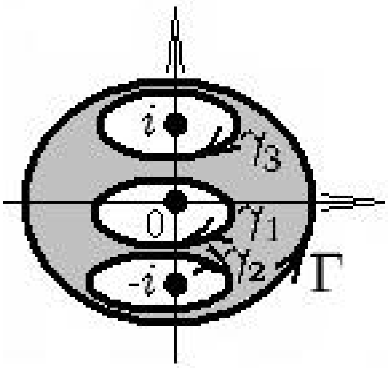
Интегралы по кривым γ_1 и γ_2 вычисляются с использование интегральной формулы Коши (4.3)

$$\int\limits_{\gamma_1^+} f(z)dz = \int\limits_{\gamma_1^+} \frac{1}{z^2+1}\cdot\frac{dz}{z} = 2\pi i\cdot\frac{1}{z^2+1}\bigg|_{z=0} = 2\pi i\cdot 1 = 2\pi i.$$

$$\int\limits_{\gamma_2^+} f(z)dz = \int\limits_{\gamma_2^+} \frac{1}{z(z-i)}\cdot\frac{dz}{z+i} = 2\pi i\cdot\frac{1}{z(z-i)}\bigg|_{z=-i} = 2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi i.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z(z^2+1)} = 2\pi i - \pi i = \pi i.$$



c) Рассмотрим кривую Г содержащую внутри точки $0, i, -i$. Достроим кривые γ_1, γ_2 и γ_3, содержащие внутри точки $z = i$, $z = 0$ и $z = -i$ достаточно маленькие, чтобы они не пересекались и целиком лежали в внутри замкнутой области, ограниченной кривой Г. В построенной четырехсвязной области, ограниченной кривыми $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \Gamma$, подынтегральная функция всюду аналитична.

По теореме Коши для многосвязной области

$$\int\limits_{\Gamma^+} f(z)dz = \int\limits_{\gamma_1^+} f(z)dz + \int\limits_{\gamma_2^+} f(z)dz + \int\limits_{\gamma_3^+} f(z)dz.$$

Интегралы по кривым γ_1, γ_2 и γ_3 вычисляются с использование интегральной формулы Коши (4.3)

$$\int\limits_{\gamma_1^+} f(z)dz = 2\pi i, \quad \int\limits_{\gamma_2^+} f(z)dz = -\pi i,$$

$$\int\limits_{\gamma_3^+} f(z)dz = \int\limits_{\gamma_3^+} \frac{1}{z(z+i)}\cdot\frac{dz}{z-i} = 2\pi i\cdot\frac{1}{z(z+i)}\bigg|_{z=i} = 2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi i.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z(z^2+1)} = 2\pi i - \pi i - \pi i = 0.$$

4.5. *Вычислить интеграл* $\int\limits_{|z|=2} \frac{\mathrm{ch} z\, dz}{(z+1)^3(z-1)}$.

Первый способ. Знаменатель $(z+1)^3(z-1)$ подынтегральной функции обращается в ноль в двух точках $z_1 = -1$, $z_2 = 1$, лежащих внутри круга $|z| \le 2$. Разложим на простейшие дроби функцию

$$\frac{1}{(z+1)^3(z-1)} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{z-1} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{z+1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(z+1)^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(z+1)^3}.$$

Используя линейность интеграла, получим

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\mathrm{ch} z\, dz}{(z+1)^3(z-1)} = \frac{1}{8} \int\limits_{|z|=2} \frac{\mathrm{ch} z\, dz}{z-1} -$$

$$-\frac{1}{8} \int\limits_{|z|=2} \frac{\mathrm{ch} z\, dz}{z+1} - \frac{1}{4} \int\limits_{|z|=2} \frac{\mathrm{ch} z\, dz}{(z+1)^2} - \frac{1}{2} \int\limits_{|z|=2} \frac{\mathrm{ch} z\, dz}{(z+1)^3}.$$

К первым двум интегралам применяем интегральную формулу Коши (4.3)

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\mathrm{ch} z\, dz}{z-1} = 2\pi i \,\mathrm{ch}\, 1,$$

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\mathrm{ch} z\, dz}{z+1} = 2\pi i \,\mathrm{ch}(-1) = 2\pi i \,\mathrm{ch}\, 1.$$

Третий и четвертый интегралы вычисляем с помощью формулы (4.4)

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\mathrm{ch} z\, dz}{(z+1)^2} = 2\pi i (\mathrm{ch} z)'\Big|_{z=-1} = -2\pi i \,\mathrm{sh}\, 1,$$

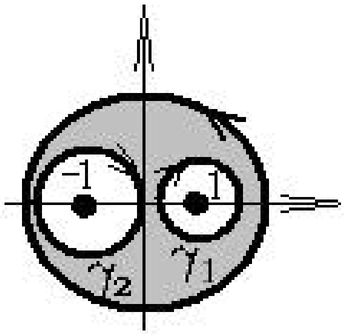
$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\mathrm{ch} z\, dz}{(z+1)^3} = \frac{2\pi i}{2!} (\mathrm{ch} z)''\Big|_{z=-1} = \pi i \,\mathrm{ch}\, 1.$$

Окончательно получаем

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\mathrm{ch} z\, dz}{(z+1)^3(z-1)} = \frac{2\pi i \,\mathrm{ch}\, 1}{8} - \frac{2\pi i \,\mathrm{ch}\, 1}{8} + \frac{2\pi i \,\mathrm{sh}\, 1}{4} - \frac{\pi i \,\mathrm{ch}\, 1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}(\mathrm{sh}\, 1 - \mathrm{ch} 1)\pi i = -\frac{\pi i}{2e}.$$

Второй способ.



Построим окружности γ_1 и γ_2 с центрами в точках $z_1 = {}^-1$ и $z_2 = 1$ достаточно малых радиусов таких, чтобы окружности не пересекались и целиком лежали в круге $|z| \leq 2$. В трехсвязной области, ограниченной окружностями $|z| = 2$, γ_1 и γ_2 подынтегральная функция всюду аналитична. По теореме Коши для многосвязной области имеем

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\text{ch}z\, dz}{(z+1)^3(z-1)} = \int\limits_{\gamma_1} \frac{\text{ch}z\, dz}{(z+1)^3(z-1)} + \int\limits_{\gamma_2} \frac{\text{ch}z\, dz}{(z+1)^3(z-1)}.$$

К первому интегралу правой части применим формулу (4.4), предварительно представив подынтегральную функцию в виде

$$\frac{\text{ch}z}{(z+1)^3(z-1)} = \frac{\frac{\text{ch}z}{z-1}}{(z+1)^3}.$$

Функция $\frac{\text{ch}z}{z-1}$ является аналитической внутри γ_1, поэтому по формуле (4.4)

$$\int\limits_{\gamma_1} \frac{\text{ch}z\, dz}{(z+1)^3(z-1)} = \int\limits_{\gamma_1} \frac{\frac{\text{ch}z}{z-1}}{(z+1)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!}\left(\frac{\text{ch}z}{z-1}\right)''\Bigg|_{z=-1} = -\frac{2e^{-1} + \text{ch}\,1}{4}\pi i.$$

Ко второму интегралу в правой части применяем интегральную формулу Коши (4.3)

$$\int\limits_{\gamma_2} \frac{\text{ch}z\, dz}{(z+1)^3(z-1)} = \int\limits_{\gamma_2} \frac{\frac{\text{ch}z}{(z+1)^3}}{z-1} dz = 2\pi i \frac{\text{ch}z}{(z+1)^3}\Bigg|_{z=1} = \pi i \frac{\text{ch}\,1}{4}.$$

Окончательно получаем

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\text{ch}z\, dz}{(z+1)^3(z-1)} = -\pi i \frac{2e^{-1} + \text{ch}\,1}{4} + \pi i \frac{\text{ch}\,1}{4} = -\frac{\pi i}{2e}.$$

5 Ряд Тейлора. Нули функции.

Найти радиус сходимости степенного ряда	
5.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$; **5.2.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$; **5.3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n\ z^{2n}$.	**5.1.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\ z^n}{2^n}$; **5.2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\ z^n}{n^n}$; **5.3.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{2n}$.
Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки z_0.	
5.4. $\operatorname{ch} z,\ z_0 = 0$. **5.5.** $\frac{z}{z+2}$; $z_0 = 1$. **5.6.** $\sin(2z - z^2)$; $z_0 = 1$.	**5.4.** $\operatorname{sh} z,\ z_0 = 0$. **5.5.** $\frac{z}{z^2-2z+5}$; $z_0 = 1$. **5.6.** $\ln z$; $z_0 = 1$.
Найти три первых отличных от нуля члена разложения в ряд Тейлора по степеням z, а также круг сходимости полученного ряда для	
5.7. $\frac{z}{e^z}$.	**5.7.** $\operatorname{tg} z$.
Точка z_0 является нулем порядка k для функции $f(z)$ и нулем порядка l для функции $\varphi(z)$. Нулем какого порядка является точка z_0 для	
5.8. $f(z)\varphi(z)$?	**5.8.** $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$?
Найти порядок нуля $z_0 = 0$ функции	
5.9. $z^2(e^{z^2} - 1)$.	**5.9.** $6\sin z^3 + z^3(z^6 - 6)$.
Найти порядок всех нулей функции (с учетом ∞)	
5.10. $\frac{z^2+9}{z^4}$; **5.11.** $(1 - e^z)(z^2 - 4)^3$; **5.12.** $1 - \cos z$.	**5.10.** $z^2 + 9$; **5.11.** $z \sin z$; **5.12.** $\cos z^3$.

Теория.

Def. *Степенным рядом* называется ряд вида

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

где a_n – постоянные комплексные числа, называемые *коэффициентами ряда,* а z_0 – произвольное фиксированное комплексное число — *центр ряда.*

Областью сходимости степенного ряда является круг $\{|z - z_0| < R\}$, $R \leq +\infty$. Радиус его называется *радиусом сходимости степенного ряда.*

Причем внутри круга сходимости (т.е. в любом круге меньшего радиуса) ряд сходится абсолютно и равномерно.

Для радиуса сходимости R имеют место формулы

Th. (формула Даламбера) (формула Коши)

$$\exists \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q \qquad \text{или} \qquad \exists \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = q \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{q} \tag{5.5}$$

Th. (Тейлор) $f(z)$ аналитична в круге $|z - z_0| < R \leq \infty$,
$\Longrightarrow$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

где $a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z-z_0|=r}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, $(0 < r < R)$.

Def. Этот степенной ряд называется *рядом Тейлора* аналитической в окрестности точки z_0 функции $f(z)$.

Такой ряд единственный. Круг сходимости этого ряда такой, что либо его граница обязательно проходит через ближайшую к z_0 особую точку функции $f(z)$ (т.е. точку, в которой функция не является аналитической), либо кругом сходимости является вся комплексная плоскость.

Разложение функции в ряд путем непосредственного вычисления коэффициентов не всегда является удобным. Перечислим наиболее употребительные косвенные способы разложения в ряд Тейлора.

- Использование рядов Тейлора основных элементарных функций:

$$\begin{aligned}
e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \tfrac{z^2}{2} + \tfrac{z^3}{6} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots, && R = +\infty,\\
\sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \tfrac{z^3}{6} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, && R = +\infty,\\
\cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \tfrac{z^2}{2} + \tfrac{z^4}{24} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots, && R = +\infty,\\
\ln(1+z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n} = z - \tfrac{z^2}{2} + \tfrac{z^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} + \ldots, && R = 1,\\
(1+z)^\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{C}_\alpha^n z^n = 1 + \alpha z + \tfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \ldots + \tfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \ldots, && R = 1.
\end{aligned}$$

  В частности, при $\alpha = -1,\ z := -z$ получаем известную формулу суммы геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots, \quad R = 1.$$

- Почленное дифференцирование или интегрирование рядов.

  Степенной ряд можно почленно дифференцировать и интегрировать внутри круга сходимости $|z - z_0| < r < R$.

$$\tfrac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tfrac{d}{dz} (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (z - z_0)^{n-1}.$$

$$\int\limits_L \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\zeta - \zeta_0)^n \right) d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int\limits_L (\zeta - \zeta_0)^n d\zeta,$$

$$\forall\ L \subset |z - z_0| < r < R.$$

- Метод неопределенных коэффициентов.

  Пусть $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z)$, $\psi(z)$ — аналитические в окрестности z_0 и

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n, \quad \psi(z_0) \neq 0.$$

Функция $f(z)$ является аналитической в окрестности точки z_0 и поэтому раскладывается в степенной ряд по степеням $z - z_0$. Операция нахождения этого ряда называется деление рядов, а его коэффициенты находятся методом неопределенных коэффициентов.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в равенстве

$$f(z) \cdot \psi(z) = \varphi(z),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

получаем бесконечную систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Первые n уравнений этой системы содержат лишь n первых неизвестных, что облегчает решение системы.

Def. Точка z_0 называется *нулем (корнем)* функции $f(z)$, если $f(z_0) = 0$.
Def. Ноль z_0 функции $f(z)$ называется *нулем кратности* k, если

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z), \qquad g(z_0) \neq 0.$$

Th. Аналитическая функция $f(z)$ имеет ноль порядка k в точке z_0

$$\Leftrightarrow \qquad f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \ldots = f^{(k-1)}(z_0) = 0, \qquad f^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

Решения примеров.

5.1. *Найти радиус сходимости степенного ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos(in) z^n$.

$a_n = \cos(in) = \operatorname{ch}(n)$, $a_{n+1} = \cos(in + i) = \operatorname{ch}(n + 1)$.
По формуле Даламбера
$\frac{1}{R} = q = \lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{\operatorname{ch}(n+1)}{\operatorname{ch}(n)} \right| = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{e^{n+1} + e^{-(n+1)}}{e^n + e^{-(n)}} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{e + e^{-2n-1}}{1 + e^{-2n}} = e$
Значит, $R = \frac{1}{e}$. Таким образом, ряд сходится внутри круга $|z| < \frac{1}{e}$.

5.2. *Найти радиус сходимости степенного ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{\pi i}{n}) z^n$.

$a_n = \sin(\frac{\pi i}{n}) = \operatorname{sh}(\frac{\pi}{n})$, $a_{n+1} = \sin(\frac{\pi i}{n+1}) = \operatorname{sh}(\frac{\pi}{n+1})$.
По формуле Даламбера
$\frac{1}{R} = q = \lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{\operatorname{sh}(\frac{\pi}{n+1})}{\operatorname{sh}(\frac{\pi}{n})} \right| = \begin{bmatrix} \operatorname{sh} x \sim x, \\ x \to 0 \end{bmatrix} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{\frac{\pi}{n+1}}{\frac{\pi}{n}} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$
Значит, $R = 1$. Таким образом, ряд сходится внутри круга $|z| < 1$.

5.3. *Найти радиус сходимости степенного ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2 - i)^n z^n$.

$a_n = (2 - i)^n$. По формуле Коши
$\frac{1}{R} = q = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|(2 - i)^n|} = \lim\limits_{n \to \infty} |(2 - i)| = \sqrt{5}$
Значит, $R = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Таким образом ряд сходится внутри круга $|z| < \frac{1}{\sqrt{5}}$.

5.4. *Найти радиус сходимости степенного ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z-2)^n}{e^{in}}$.

$a_n = \frac{1}{e^{in}}$. По формуле Коши

$\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{e^{in}}\right|} = \left[\ e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \varphi \in \mathbb{R}\right] = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{\cos^2 n + \sin^2 n}}} = 1.$

Значит, $R = 1$. Таким образом, ряд сходится внутри круга $|z-2| < 1$.

5.5. *Найти радиус сходимости степенного ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n^2} z^{2n}$.

В данном ряде коэффициенты при нечетных степенях z равны 0, т.е. $a_k = \frac{(-3)^{2n}}{(2n)^2}$, если $k = 2n$ и $a_k = 0$, если $k = 2n-1$. Поэтому нельзя воспользоваться формулами (5.5), т.к. соответствующие пределы не существуют. Введем новую переменную $t = z^2$. Тогда получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n^2} z^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n^2} t^n,$$

радиус сходимости этого ряда найдем с помощью формулы Даламбера

$\frac{1}{R} = q = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{(-3)^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{(-3)^n}{n^2}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{(-3)^{n+1}\cdot n^2}{(n+1)^2\cdot(-3)^n}\right| = 3 \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 3.$

Таким образом, радиус сходимости вспомогательного ряда — $R = \frac{1}{3}$, круг сходимости вспомогательного ряда — $|t| < \frac{1}{3}$, а круг сходимости исходного ряда — $|z| < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

5.6. *Найти радиус сходимости степенного ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{3n}} z^{2n-1}$.

В данном ряде коэффициенты при четных степенях z равны 0, т.е. $a_k = \frac{(2n-1)!}{(2n-1)^{3(2n-1)}}$, если $k = 2n-1$ и $a_k = 0$, если $k = 2n$. Поэтому нельзя воспользоваться формулами (5.5), т.к. соответствующие пределы не существуют. Введем новую переменную $t = z^2$. Тогда получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{3n}} z^{2n-1} = \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{3n}} z^{2n} = \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{3n}} t^n,$$

радиус сходимости этого ряда найдем с помощью формулы Даламбера

$\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{3(n+1)}}}{\frac{n!}{n^{3n}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\cdot n^{3n}}{(n+1)^{3(n+1)}\cdot n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot n!\cdot n^{3n}}{(n+1)^{3n+3}\cdot n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{3n}}{(n+1)^{3n+2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \cdot e^{3n\ln\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \cdot e^{3n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} = [\ln(1+x) \sim x, x \to 0] = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \cdot e^{-\frac{3n}{n+1}} = \{0 \cdot e^{-3}\} = 0.$

Значит, радиус сходимости вспомогательного ряда – $R = \left\{\frac{1}{0}\right\} = \infty$, круг сходимости вспомогательного ряда – $|t| < \infty$, а круг сходимости исходного ряда – $|z| < \infty$.

5.7. *Разложить функцию* $\cos^2 z$ *в ряд Тейлора в окрестности точки* $z_0 = 0$.

Преобразуем $\cos^2 z$ и воспользуемся разложением для $\cos z$.

$\cos^2 z = \frac{1}{2}(1+\cos 2z) = \frac{1}{2}\left(1+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2z)^{2n}}{(2n)!}\right) = 1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot 2^{2n-1}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$.

Так как ряд для $\cos z$ сходится во всей комплексной плоскости, то и полученный ряд для $\cos^2 z$ сходится во всей комплексной плоскости.

5.8. *Разложить функцию* $\frac{z}{z^2-2z-3}$ *в ряд Тейлора в окрестности точки* 0.

Для разложения в ряд рациональной функции, ее сначала представляют в виде суммы простых дробей, а затем каждую дробь раскладывают, используя формулу суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии.

$\frac{z}{z^2-2z-3} = \frac{z}{(z+1)(z-3)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z+1}+\frac{3}{z-3}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+z}-\frac{1}{1-z/3}\right) = \frac{1}{4}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n-\frac{1}{3^n}\right)z^n$.

Так как была использована формула суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии, то данное разложение верно лишь при $|-z|<1$ и $|z/3|<1$ т.е. при $|z|<1$.

5.9. *Разложить функцию* $\frac{2}{(1-z)^3}$ *в ряд Тейлора в окрестности точки* $z_0 = 0$.

Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots,$$

который сходится в единичном круге. Дифференцируя этот ряд почленно, получаем

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = 1+2z+3z^2+\ldots+(n+1)z^n+\ldots.$$

Полученный ряд снова дифференцируем:

$$\frac{2}{(1-z)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)z^{n-2} = 2+3\cdot 2z+4\cdot 3z^2+\ldots+(n+1)nz^{n-1}+\ldots$$

Таким образом,

$$\frac{2}{(1-z)^3} = \left(\frac{1}{1-z}\right)'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)z^{n-2}.$$

Данный ряд так же сходится в круге $|z|<1$.

5.10. *Разложить функцию* $\frac{z^2}{(z+1)^2}$ *в ряд Тейлора в окрестности точки* $z_0 = 1$.

$\frac{z^2}{(z+1)^2} = \left(\frac{(z-1)+1}{(z-1)+2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{(z-1)+1}{1+(z-1)/2}\right)^2 = \left[t=\frac{z-1}{2}\right] = \frac{1}{4}\left(\frac{2t+1}{1+t}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(2-\frac{1}{t+1}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(4-\frac{4}{t+1}+\frac{1}{(t+1)^2}\right) = \left[\frac{1}{(t+1)^2} = -\left(\frac{1}{t+1}\right)'\right] = 1-\frac{1}{t+1}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{t+1}\right)' = 1-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-t)^n-\frac{1}{4}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-t)^n\right)' = 1-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-t)^n+\frac{1}{4}\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(-t)^{n-1} = 1-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-t)^n+$

$\frac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(-t)^n = 1-1+t-\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n t^n + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sum\limits_{n=2}^{\infty}(n+1)(-1)^n t^n =$ $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n-3)t^n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n-3)}{2^n}(z-1)^n.$

Так как была использована формула суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии, то данное разложение верно лишь при
$|t| = \frac{1}{2}|z-1| < 1$, т.е. при $|z-1| < 2$.

5.11. *Найти три первых отличных от нуля члена разложения $\frac{z}{\cos z}$ в ряд Тейлора по степеням z, а также круг сходимости полученного ряда.*

Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов. Так как функция $\frac{z}{\cos z}$ аналитическая в окрестности точки $z_0 = 0$, то ее можно разложить в степенной ряд:

$$\frac{z}{\cos z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

Взяв в этом равенстве $z = 0$, найдем: $a_0 = 0$. Для определения других коэффициентов воспользуемся соотношением $\frac{z}{\cos z}\cdot\cos z = z$ Ряд косинуса нам известен. Поэтому

$$z = (a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots)\cdot(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots).$$

В силу единственности разложения функции в степенной ряд, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, получаем систему

$$\begin{cases} 0 &= a_0, \\ 1 &= a_1, \\ 0 &= a_2 - \frac{a_0}{2!}, \\ 0 &= a_3 - \frac{a_1}{2!}, \\ 0 &= a_4 - \frac{a_2}{2!} + \frac{a_0}{4!}, \\ 0 &= a_5 - \frac{a_3}{2!} + \frac{a_1}{4!}, \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_0 = 0, \\ a_1 = 1, \\ a_2 = 0, \\ a_3 = \frac{a_1}{2!} = \frac{1}{2}, \\ a_4 = 0, \\ a_5 = \frac{a_3}{2!} - \frac{a_1}{4!} = \frac{5}{24}, \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

Следовательно, $\frac{z}{\cos z} = z + \frac{1}{2}z^3 + \frac{5}{24}z^5 + \ldots$

Так как ближайшей к точке 0 особой точкой данной функции $\frac{z}{\cos z}$ является $\frac{\pi}{2}$, то этот ряд сходится в круге $|z| < \frac{\pi}{2}$.

5.12. *Точка z_0 является нулем порядка k для функции $f(z)$ и нулем порядка l для функции $\varphi(z)$. Нулем какого порядка является точка z_0 для $f(z)+\varphi(z)$?*

Пусть $k < l$. Тогда

$$f(z)+\varphi(z) = (z-z_0)^k f_1(z) + (z-z_0)^l \varphi_1(z) = (z-z_0)^k\left(f_1(z) + (z-z_0)^{l-k}\varphi_1(z)\right).$$

Каждая из функций $f_1(z)$ и $\varphi_1(z)$ в точке z_0 в ноль не обращается, но $f_1(z) + (z-z_0)^{l-k}\varphi_1(z)$ в точке z_0 может обратится в ноль.

Итак, если точка z_0 является нулем порядка k для функции $f(z)$ и нулем порядка l для функции $\varphi(z)$, то для функции $f(z)+\varphi(z)$ она является нулем, по крайней мере, порядка $\min\{k,\ l\}$.

5.13. *Найти порядок нуля* $z_0 = 0$ *функции* $f(z) = e^{\sin z} - e^{\operatorname{tg} z}$.

$f(0) = e^0 - e^0 = 0$;

$f'(z) = e^{\sin z}\cos z - e^{\operatorname{tg} z}\frac{1}{\cos^2 z}, \quad f'(0) = 0$;

$f''(z) = e^{\sin z}(\cos^2 z - \sin z) - e^{\operatorname{tg} z}\left(\frac{1}{\cos^4 z} + \frac{2\sin z}{\cos^3 z}\right), \quad f''(0) = 0$;

$f'''(z) = e^{\sin z}(\cos^3 z - 3\cos z\sin z - \cos z) - e^{\operatorname{tg} z}\left(\frac{1}{\cos^6 z} + \frac{6\sin z}{\cos^5 z} + \frac{2\cos^4 z + 6\cos^2 z\sin^2 z}{\cos^6 z}\right), f'''(0) = -3$.

$f'''(0) \neq 0, \Longrightarrow z_0 = 0$ ноль 3-го порядка для $f(z)$.

5.14. *Найти порядок всех нулей функции* $\frac{z^2+4}{z^5}$ *(с учетом* ∞*).*

Функция $f(z) = \frac{z^2+4}{z^5}$ обращается в ноль, если $z^2 + 4 = 0$, т.е. при $z_{1,2} = \pm 2i$, но уже первая ее производная в этих точках отлична от нуля

$$f'(\pm 2i) = -\left.\frac{3z^2+20}{z^6}\right|_{z=\pm 2i} = \frac{1}{8} \neq 0.$$

Значит, точки $z_{1,2} = \pm 2i$ являются простыми (т.е. первого порядка) нулями.

Для определения порядка нуля в бесконечно удаленной точке $z_3 = \infty$, сделаем замену $z = 1/t$, тогда

$$f(z) = f(1/t) =: \varphi(t) = t^5\left(\tfrac{1}{t^2} + 4\right) = 4t^5 + t^3 = t^3(4t^2+1).$$

Функция $\varphi(t)$ имеет при $t = 0$ нуль третьего порядка. Значит, точка $z_3 = \infty$ тоже являются нулем третьего порядка.

5.15. *Найти порядок нуля* $z_0 = 0$ *для функции* $\frac{z^8}{z-\sin z}$.

Используя разложение функции $\sin z$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$, получим

$$\frac{z^8}{z-\sin z} = \frac{z^8}{z - \left(z - \dfrac{z^3}{6} + \ldots + \dfrac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right)} =$$

$$= \frac{z^8}{\dfrac{z^3}{6} - \ldots + \dfrac{(-1)^{n+1}z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots} = \frac{z^5}{\dfrac{1}{6} - \ldots + \dfrac{(-1)^{n+1}z^{2n-2}}{(2n+1)!} + \ldots}.$$

Положим

$$\varphi(z) = \frac{1}{\dfrac{1}{6} - \ldots + \dfrac{(-1)^{n+1}z^{2n-2}}{(2n+1)!} + \ldots}.$$

Тогда $f(z) = z^5\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ – функция, аналитическая в точке $z_0 = 0$, причем $\varphi(0) = 6 \neq 0$. Следовательно, точка $z_0 = 0$ является для данной функции нулем пятого порядка.

6 Ряд Лорана. Особые точки аналитических функций.

Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точек 0 и ∞.	
6.1. $f(z)=\frac{1}{z-2}$.	**6.1.** $f(z)=\frac{1}{z(z-1)}$.
Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в в окрестности точек z_0 и ∞.	
6.2. $f(z)=\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$, $z_0=2$.	**6.2.** $f(z)=\frac{1}{(z-a)(z-b)}$, $z_0=a$.
Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в кольце	
6.3. $f(z)=\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$, $1<\|z\|<2$.	**6.3.** $f(z)=\frac{1}{(z-a)(z-b)}$, $\|a\|<\|z\|<\|b\|$, $(0<\|a\|<\|b\|)$.
Выяснить, допускает ли функция $f(z)$ разложение в ряд Лорана в окрестности точки z_0.	
6.4. $f(z)=\cos\dfrac{1}{z}$, $z_0=0$; **6.5.** $f(z)=\cos\dfrac{1}{z}$, $z_0=\infty$; **6.6.** $f(z)=\operatorname{ctg} z$, $z_0=\infty$; **6.7.** $f(z)=\ln z$, $z_0=0$.	**6.4.** $f(z)=\dfrac{z}{\sin z-3}$, $z_0=\infty$; **6.5.** $f(z)=\operatorname{th}\dfrac{1}{z}$, $z_0=0$; **6.6.** $f(z)=\dfrac{z^2}{\sin 1/z}$, $z_0=0$; **6.7.** $f(z)=1/\sin\frac{1}{z-1}$, $z_0=1$.
Выяснить, имеет ли многозначная функция $f(z)$ однозначные ветви, допускающие разложение в ряд Лорана в окрестности точки z_0.	
6.8. $f(z)=\sqrt{z}$, $z_0=0$; **6.9.** $f(z)=\sqrt{z(z-1)}$, $z_0=\infty$; **6.10.** $f(z)=\sqrt{z+\sqrt{z^2-1}}$, $z_0=\infty$.	**6.8.** $f(z)=\sqrt{\frac{z}{(z-1)(z-2)}}$, $z_0=\infty$; **6.9.** $f(z)=\sqrt[3]{(z-1)(z-2)(z-3)}$, $z_0=\infty$; **6.10.** $f(z)=\sqrt{z+\sqrt{z^2-1}}$, $z_0=1$.
Найти особые точки функций, выяснить их характер (включая ∞).	
6.11. $\dfrac{1}{z-z^3}$; **6.12.** $\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}$; **6.13.** $ze^{\frac{1}{z}}$; **6.14.** $e^{z-\frac{1}{z}}$; **6.15.** $\frac{\cos z}{z^2}$.	**6.11.** $\frac{z^5}{(1-z)^2}$; **6.12.** $\frac{1-e^z}{2+e^z}$; **6.13.** $\operatorname{ctg} z-\frac{2}{z}$; **6.14.** $\frac{1}{\sin z}$; $e^{\frac{z}{1-z}}$.

Теория.

Def. *Рядом Лорана* аналитической в кольце $r<|z-z_0|<R$ функции $f(z)$ называется обобщенный степенной ряд вида

$$f(z)=\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k}_{\text{правильная часть}}+\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}c_{-k}\frac{1}{(z-z_0)^k}}_{\text{главная часть}},$$

где $c_k=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_\rho(z_0)}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$, $r<\rho<R$.

Th. (Лорана) Аналитическая в кольце $r<|z-z_0|<R$ функции $f(z)$ раскладывается в ряд Лорана.

Def. Пусть функция $f(z)$ аналитическая в кольце $0 < |z-a| < \rho$, но не аналитическая в точке a $(a \neq \infty)$. Тогда точка a называется *изолированной особой точкой однозначного характера для функции* $f(z)$.

В зависимости от поведения функции $f(z)$ вблизи точки a различают три типа особых точек.

Def. Изолированная особая точка a однозначного характера функции $f(z)$ называется

- *устранимой особенностью,* если коэффициенты при отрицательных степенях ряда Лорана функции $f(z)$ в кольце $0 < |z-a| < \rho$, равны нулю, т.е. у ее ряд Лорана нулевая главная часть:

$$0 = c_{-1} = c_{-2} = \ldots$$

- *полюсом порядка* m*,* если коэффициенты ряда Лорана функции $f(z)$ в кольце $0 < |z-a| < \rho$, начиная с $m+1$ равны нулю, т.е. у ее ряд Лорана главная часть содержит лишь m слагаемых:

$$c_{-m} \neq 0,\ 0 = c_{-(m+1)} = c_{-(m+2)} = \ldots$$

- *существенной особенностью,* если среди коэффициентов ряда Лорана функции $f(z)$ в кольце $0 < |z-a| < \rho$, найдется бесконечно много отличных от нуля, т.е. у ее ряд Лорана главная часть содержит бесконечно много слагаемых.

Def. Бесконечно удаленная точка ∞ называется *изолированной особой точкой однозначного характера для функции* $f(z)$, если функция $f(z)$ аналитическая в области $\rho < |z| < +\infty$.

$a = \infty$ называется устранимой особенностью, полюсом или существенной особенностью функции $f(z)$ в зависимости от того, является ли $\zeta = 0$ устранимой особенностью, полюсом или существенной особенностью функции $g(\zeta) = f(\frac{1}{\zeta})$.

$$g(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{1}{\zeta^k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{-k} \zeta^k.$$

Характер поведения функции $f(z)$ в окрестности $a = \infty$ определяется правильной часть, а не главной, как для $a \in \mathbb{C}$.

Th.

Число $a \in \overline{\mathbb{C}}$ является устранимой особенностью функции $f(z)$

$\Longleftrightarrow$

функция $f(z)$ ограничена в окрестности числа a.

Th.
Число $a \in \overline{\mathbb{C}}$ является полюсом порядка m функции $f(z)$
$\Longleftrightarrow$
число a является нулем кратности m функции $\frac{1}{f(z)}$.

Th.
Число $a \in \overline{\mathbb{C}}$ является устранимой особенностью $f(z) \Longleftrightarrow \exists \lim\limits_{z\to a} f(z) \in \mathbb{C}$.

Th.
Число $a \in \overline{\mathbb{C}}$ является полюсом функции $f(z) \Longleftrightarrow \exists \lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$.

Th.
Число $a \in \overline{\mathbb{C}}$ является существенной особенностью $f(z) \Longleftrightarrow \nexists \lim\limits_{z\to a} f(z)$.

Решения примеров.

6.1. *Разложить функцию* $f(z) = \frac{1}{z-3}$ *в ряд Лорана в окрестности точек* 0 *и* ∞.

Функция $f(z) = \frac{1}{z-3}$ аналитическая внутри круга $|z| < 3$, поэтому она разлагается в этом круге в ряд Тейлора по степеням z, $z_0 = 0$. Используя формулу для геометрической прогрессии $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, $|q| < 1$, находим

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3}\frac{1}{\left(1-\frac{z}{3}\right)} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}} = -\frac{1}{3} - \frac{z}{3} - \frac{z^2}{27}\cdots$$

Ряд сходится при $\left|\frac{z}{3}\right| < 1$, т. е. при $|z| < 3$.

Функция $f(z) = \frac{1}{z-3}$ аналитическая в кольце $3 < |z| < \infty$, поэтому она разлагается в этом кольце в ряд Лорана по степеням z, $z_0 = \infty$. Используя формулу для геометрической прогрессии, находим

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{3}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}} = \frac{1}{z} + \frac{3}{z^2}\cdots$$

Ряд сходится при $\left|\frac{3}{z}\right| < 1$, т. е. при $|z| > 3$.

6.2. *Разложить в круге* $|z| < 3$ *функцию* $f(z) = \frac{1}{(z-3)^2}$ *по степеням* z.

Функция $\frac{1}{z-3}$ в круге $|z| < 3$ разлагается в ряд

$$\frac{1}{z-3} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}.$$

Продифференцируем обе части этого равенства:

$$-\frac{1}{(z-3)^2} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nz^{n-1}}{3^{n+1}}; \quad \frac{1}{(z-3)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{3^{n+1}}z^{n-1}.$$

Полученный ряд и будет рядом Тейлора данной функции и круге $|z| < 3$.

6.3. *Разложить функцию* $f(z) = \frac{1}{(1-z)(z+2)}$ *в ряд Лорана.*

Функция $f(z)$ аналитическая в областях $D_1 : |z| < 1$, $D_2 : 1 < |z| < 2$, $D_3 : |z| > 2$. Найдем разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в этих областях.

Представим функцию $f(z)$ в виде суммы простых дробей:

$$f(z) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{z+2}\right)$$

Если $|z| < 1$, то

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

а если $|z| > 1$, то

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}.$$

Аналогично, в круге $|z| < 2$ имеем разложение

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2(1+\frac{z}{2})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}},$$

а если $|z| > 2$, то

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z(1+\frac{2}{z})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{n-1}}{z^n}.$$

а) В области $D_1 : |z| < 1$ функция $f(z)$ разлагается в ряд Лорана

$$f(z) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right) z^n.$$

Этот ряд есть ряд Тейлора.

б) В области $D_2 : 1 < |z| < 2$ разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана имеет следующий вид:

$$f(z) = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}.$$

Этот ряд содержит как положительные, так и отрицательные степени z.

в) В области $D_3 : |z| > 2$ функция $f(z)$ представляется рядом Лорана, содержащим только отрицательные степени z

$$f(z) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1} 2^{n-1} - 1}{z^n}.$$

6.4. *Разложить функцию* $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z+2)}$ *в ряд Лорана в окрестности точек* $z = 0$ *и* $z = -2$.

Разложим сначала функцию $\frac{1}{(z-1)^2(z+2)}$ в сумму элементарных дробей:

$$\frac{1}{(z-1)^2(z+2)} = \frac{1}{9}\,\frac{1}{z+2} - \frac{1}{9}\,\frac{1}{z-1} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{(z-1)^2}.$$

В окрестности точки $z = 0$, а именно в круге $|z| < 1$, функция $\frac{1}{(z-1)^2(z+2)}$ и каждое слагаемое сумму аналитические. Разложим элементарные дроби в ряды Тейлора:

$$\frac{1}{9}\,\frac{1}{z+2} = \frac{1}{18}\,\frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \frac{1}{18}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n};$$

$$-\frac{1}{9}\,\frac{1}{z-1} = \frac{1}{9}\,\frac{1}{1-z} = \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Ряд для функции $\frac{1}{3}\,\frac{1}{(z-1)^2}$ найдем почленным дифференцированием ряда функции $-\frac{1}{9}\,\frac{1}{z-1}$:

$$\left(-\frac{1}{9}\,\frac{1}{z-1}\right)' = \frac{1}{9}\,\frac{1}{(z-1)^2} = \frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1};$$

$$\frac{1}{3}\,\frac{1}{(z-1)^2} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \Big[n-1=m\Big] = \frac{1}{3}\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)z^m.$$

Таким образом, в круге $|z| < 1$ имеем

$$\frac{1}{(z-1)^2(z+2)} = \frac{1}{18}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n} + \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \frac{1}{3}\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)z^m =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{18\cdot 2^n + \frac{1}{9} + \frac{1}{3}(n+1)}\right) z^n = \frac{17}{36} + \frac{27}{36}z + \ldots$$

В окрестности точки $z = 1$ функция $\frac{1}{(z-1)^2(z+2)}$ неаналитическая, но она является аналитической в кольце $0 < |z^{-}1| < 3$ Разложим ее в ряд Лорана по степеням $z - 1$. Для этого нужно разложить только слагаемое $\frac{1}{z+2}$. Эта функция аналитическая в круге $|z - 1| < 3$, поэтому она разлагается ряд по положительным степеням $z^{-}1$:

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z-1+3} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1+\frac{z-1}{3}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{3^n}, \quad |z-1| < 3,$$

следовательно,

$$\frac{1}{(z-1)^2(z+2)} = \frac{1}{3}\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{9}\,\frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-1)^n.$$

Это и есть ряд Лорана функции $\frac{1}{z+2}$ в кольце $0 < |z-1| < 3$.

6.5. *Разложить в ряд по степеням z функцию $z^2 e^{\frac{1}{z}}$.*

Функция $z^2 e^{\frac{1}{z}}$ неаналитическая в точке $z = 0$, поэтому ее разложения в ряд по степеням z будет содержать как положительные так и отрицательные степени z, т. е. она разлагается в ряд Лорана. Используя разложение в ряд Тейлора функции e^w, $w = \frac{1}{z}$, получим

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots$$

Умножая ряд для $e^{\frac{1}{z}}$ на z^2 получаем

$$z^2 e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{z^2}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^{n-2}} = z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!z} + \cdots$$

Этот ряд сходится в кольце $0 < |z| < \infty$.

6.6. *Разложить в ряд по степеням z функцию $(1+z^3)\sin\frac{1}{z^2}$.*

Функция $(1+z^3)\sin\frac{1}{z^2}$ неаналитическая в точке $z = 0$, поэтому ее разложения в ряд по степеням z будет содержать как положительные так и отрицательные степени z, т. е. она разлагается в ряд Лорана. Используя разложение в ряд Тейлора функции $\sin w$, $w = \frac{1}{z^2}$, получим

$$\sin\frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{2(2n+1)}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{4n+2}}.$$

Умножим ряд на $(1+z^3)$ и раскроем скобки:

$$(1+z^3)\sin\frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1+z^3}{z^{4n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{4n+2}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{4n-1}}$$

$$= z + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{6}\,\frac{1}{z^3} - \frac{1}{6}\,\frac{1}{z^6} + \frac{1}{120}\,\frac{1}{z^7} - \cdots$$

Этот ряд сходится в кольце $0 < |z| < \infty$.

6.7. *Найти особые точки функции* $f(z) = \frac{\sin z}{z}$, *выяснить их характер.*

Функция $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ аналитической во всей плоскости $\mathbb{C}$ кроме точки $z = 0$, в которой знаменатель обращается в ноль. Используя разложение в ряд Тейлора

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} = \lim_{z\to 0}\frac{z - \frac{z^3}{6} + \ldots + \dfrac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots}{z} = \lim_{z\to 0}\left(1 - \frac{z^2}{6} + \ldots\right) = 1 \in \mathbb{C}$$

видим, что точка $z = 0$ является устранимой особенностью.

6.8. *Найти особые точки функции* $f(z) = \frac{z^2}{z+1}$, *выяснить их характер (включая* ∞*).*

Точка $z = -1$ является полюсом функции $f(z) = \frac{z^2}{z+1}$, так как эта функция аналитическая при $z \neq -1$ и $\lim\limits_{z\to -1}\frac{z^2}{z+1} = \infty$.

Причем для функции $\frac{1}{f(z)} = \frac{z+1}{z^2}$ точка $z = -1$ ноль первой кратности, значит, для функции $f(z)$ $z = -1$ полюс первого порядка.

Рассмотрим точку $z = \infty$. Выполним замену $z = \frac{1}{\zeta}$ и будем исследовать поведение при $\zeta = 0$.

$$\lim_{z\to\infty}\frac{z^2}{z+1} = \left[z = \frac{1}{\zeta}\right] = \lim_{\zeta\to 0}\frac{\frac{1}{\zeta^2}}{\frac{1}{\zeta}+1} = \lim_{\zeta\to 0}\frac{1}{\zeta(\zeta+1)} = \infty$$

$\Longrightarrow$ $z = \infty$ является полюсом для функции $f(z)$.

Причем для функции $\frac{1}{f(z)} = \zeta(\zeta+1)$ точка $\zeta = 0$ ноль первой кратности, значит, для функции $f(z)$ $z = \infty$ полюс первого порядка.

6.9. *Найти особые точки функции* $f(z) = e^z$, *выяснить их характер (включая* ∞*).*

Точка $z = \infty$ является существенной особенностью для функции e^z, так как эта функция аналитическая во всей комплексной плоскости и не имеет предела при $z \to \infty$.

Действительно, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

6.10. *Найти особые точки функций* $f_1(z) = \sin z, f_2(z) = \cos z$, *выяснить их характер (включая* ∞*).*

Точка $z = \infty$ является существенной особенностью для функций $\sin z, \cos z$, так как эти функции аналитические во всей комплексной плоскости и у них не существует предела при $z \to \infty$.

6.11. *Найти особые точки функции* $f(z) = e^{1/z^2}$, *выяснить их характер (включая* ∞*).*

Для функции $f(z) = e^{1/z^2}$ точка $z = 0$ является существенной особенностью, так как функция $f(z)$ аналитическая при $z \neq 0$ и не имеет предела при

$z \to 0$. В самом деле, если $z =$, то

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} e^{\frac{1}{x^2}} = \infty.$$

а если $z = iy$, то

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} e^{\frac{1}{-y^2}} = 0.$$

Рассмотрим точку $z = \infty$. Выполним замену $z = \frac{1}{\zeta}$ и будем исследовать поведение при $\zeta = 0$.

$$\lim_{z\to\infty} e^{1/z^2} = \left[z = \frac{1}{\zeta}\right] = \lim_{\zeta\to 0} e^{1/\frac{1}{\zeta^2}} = \lim_{\zeta\to 0} e^{\zeta^2} = 1 \in \mathbb{C}.$$

$\Longrightarrow$ $z = \infty$ является устранимой особенностью функции $f(z)$.

7 Вычеты. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

<table>
<tr><td colspan="2">Найти вычеты функций относительно всех изолированных особенностей.</td></tr>
<tr><td>7.1. $\dfrac{1}{z^3-z^5}$; 7.2. $\dfrac{1}{z\left(1-z^2\right)}$;
7.3. $\dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}$; 7.4. $\dfrac{\sqrt{z}}{1-z}$, $z_0=1$.</td><td>7.1. $\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$; 7.2. $\dfrac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$;
7.3. $\dfrac{e^z}{z^2(z^2+9)}$; 7.4. $\dfrac{1}{\sqrt{2-z}+1}$, $z_0=1$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Вычислить интегралы, считая, что обход контуров происходит в положительном направлении.</td></tr>
<tr><td>7.5. $\int\limits_\Gamma \dfrac{dz}{z^4+1}$ $\Gamma:\quad x^2+y^2=2x$;
7.6. $\int\limits_\Gamma \dfrac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$ $\Gamma: |z|=2$;
7.7. $\int\limits_\Gamma \sin\frac{1}{z}\,dz$ $\Gamma: |z|=r$;</td><td>7.5. $\int\limits_\Gamma \dfrac{zdz}{(z-1)(z-2)^2}$ $\Gamma: |z-2|=\frac{1}{2}$.
7.6. $\int\limits_\Gamma \dfrac{z^3dz}{2z^4+1}$ $\Gamma: |z|=1$;
7.7. $\int\limits_\Gamma \sin^2\frac{1}{z}\,dz$ $\Gamma: |z|=r$.</td></tr>
</table>

Теория.

Def. Вычетом функции $f(z)$, аналитической в проколотой окрестности точки $z_0:\ 0<|z-z_0|<r$, называется число

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_\rho(z_0)} f(\zeta)d\zeta,\ 0<\rho<r.$$

По теореме Лорана $f(z)$ разлагается в ряд Лорана в кольце $0<|z-z_0|<r$

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k+\sum_{k=1}^{\infty}c_{-k}\frac{1}{(z-z_0)^k},$$

где, в частности, $c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_\rho(z_0)}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{-1+1}}=\operatorname*{res}_{z_0} f(z)$.

Вычисление вычета сводится к нахождению коэффициента c_{-1} при $(z-z_0)^{-1}$.

Th.

- z_0– устранимая особенность $f(z)\Longrightarrow \operatorname*{res}_{z_0} f(z)=0$.
- z_0– полюс порядка m функции $f(z)\Longrightarrow$

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\Big((z-z_0)^m f(z)\Big)^{(m-1)} \qquad (7.6)$$

- z_0– полюс порядка 1 функции $f(z)\Longrightarrow \operatorname*{res}_{z_0} f(z)=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$.
- z_0– корень порядка 1 функции $\psi(z)$ и не является корнем $\varphi(z)\Longrightarrow$

$$\operatorname*{res}_{z_0}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \qquad (7.7)$$

Th. $f(z)$ аналитическая в $\mathbb{C}$ кроме конечного числа точек $\{z_1, \dots z_n\} \subset \mathbb{C}$
$\Longrightarrow$
$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_k} f(z) + \operatorname*{res}_{\infty} f(z) = 0.$$

Th. (Коши о вычетах.) $f(z)$ аналитическая в области D и на ее границе ∂D, кроме конечного числа точек $\{z_1, \dots z_n\}$ лежащих внутри D
$\Longrightarrow$
$$\oint\limits_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_k} f(z). \tag{7.8}$$

устранимая особенность $f(z)$ в точке $a \in \mathbb{C}$	$\operatorname*{res}_{a} f(z) = 0$
полюс первого порядка $f(z)$ в точке $a \in \mathbb{C}$	$\operatorname*{res}_{a} f(z) = \lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)$; $f(z) = \frac{\phi(z)}{\psi(z)}$, $\operatorname*{res}_{a} f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$
полюс m-го порядка $f(z)$ в точке $a \in \mathbb{C}$	$\operatorname*{res}_{a} f(z) =$ $= \frac{1}{(m-1)!} \lim\limits_{z\to a} \left((z-a)^m f(z)\right)^{(m-1)}$
существенная особенность $f(z)$ в точке $a \in \mathbb{C}$	$\operatorname*{res}_{a} f(z) = c_{-1}$
изолированная особенность $f(z)$ в точке $a = \infty$	$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = -c_{-1}$
устранимая особенность $f(z)$ в точке $a = \infty$	$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) =$ $= \lim\limits_{z\to\infty} \left(z(f(\infty) - f(z))\right)$.

Решения примеров.

7.1. *Найти вычеты функции* $f(z) = \frac{1}{z^3(z^2+4)^2}$ *относительно всех изолированных особенностей.*

Особые точки функции $f(z) = \frac{1}{z^3(z^2+4)^2}$: $z_1 = 0$– полюс третьего порядка, $z_{2,3} = \pm 2i$ – полюсы второго порядка. Применяя формулу (8.9), находим:

$$\operatorname*{res}_{0} \frac{1}{z^3(z^2+4)^2} = \frac{1}{2!} \lim_{z\to 0} \left(z^3 \frac{1}{z^3(z^2+4)^2} \right)'' = \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} \left(\frac{1}{(z^2+4)^2} \right)'' =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} \left(4\frac{5z^2-4}{(z^2+4)^4} \right) = -\frac{1}{32}.$$

$$\operatorname*{res}_{2i} \frac{1}{z^3(z^2+4)^2} = \frac{1}{1!} \lim_{z\to 2i} \left((z-2i)^2 \frac{1}{z^3(z-2i)^2(z+2i)^2} \right)' = \lim_{z\to 2i} \left(\frac{1}{z^3(z+2i)^2} \right)' =$$

$$= \lim_{z\to 2i} \left(-\frac{3}{z^4(z+2i)^2} - \frac{2}{z^3(z+2i)^3} \right) = \frac{1}{64}.$$

$$\operatorname*{res}_{-2i} \frac{1}{z^3(z^2+4)^2} = \frac{1}{1!} \lim_{z\to -2i} \left((z+2i)^2 \frac{1}{z^3(z-2i)^2(z+2i)^2} \right)' = \lim_{z\to -2i} \left(\frac{1}{z^3(z-2i)^2} \right)' =$$

$$= \lim_{z\to 2i}\left(-\frac{-3}{z^4(z-2i)^2}-\frac{2}{z^3(z-2i)^3}\right)=\frac{1}{64}.$$

$$\underset{\infty}{\operatorname{res}} f(z) = -\underset{0}{\operatorname{res}} f(z) - \underset{2i}{\operatorname{res}} f(z) - \underset{-2i}{\operatorname{res}} f(z) = \frac{1}{32}-\frac{1}{64}-\frac{1}{64}=0.$$

7.2. *Найти вычеты функции $f(z)=\frac{z}{\sin z}$ относительно всех изолированных особенностей.*

Функция $f(z)=\frac{z}{\sin z}$ имеет в точке $z_0=0$ устранимую особенность, в точках $z_k=\pi k, k\in\mathbb{Z}, k\neq 0$,– полюсы первого порядка. Вычет в устранимой особой точке равен 0, в вычеты в точках πk найдем по формуле (7.7), $\varphi(z)=z,\ \psi(z)=\sin z$.

$$\underset{0}{\operatorname{res}}\ \frac{z}{\sin z}=\frac{\pi k}{(\sin z)'|_{\pi k}}=\frac{\pi k}{\cos\pi k}=(-1)^k\pi k,\ k\in\mathbb{Z}, k\neq 0.$$

Бесконечно удаленная точка изолированоой особенностью $f(z)$ не является, так как она предельная для полюсов z_k.

7.3. *Найти вычеты функции $f(z)=z^2e^{1/z}$ в нуле.*

Функция $f(z)=z^2e^{1/z}$ имеет в точке 0 существенную особенность, поэтому ее вычет можно найти только из ряда Лорана. Он имеет вид

$$f(z)=z^2e^{1/z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,\frac{1}{z^{n-2}}=z^2+z+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!z}+\ldots,$$

поэтому $\underset{0}{\operatorname{res}}\ z^2e^{1/z}=c_{-1}=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}.$

7.4. *Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z+2i|=3}\frac{dz}{z^3(z^2+4)^2}$, считая, что обход контура происходит в положительном направлении.*

Функция $f(z)=\frac{1}{z^3(z^2+4)^2}$ имеет три полюса: $z_1=0$– полюс третьего порядка, $z_{2,3}=\pm 2i$ – полюсы второго порядка. Точки $z_1=0, z_3=-2i$ лежат внутри контура интегрирования, поэтому по теорема Коши о вычетах

$$\oint\limits_{|z+2i|=3}\frac{dz}{z^3(z^2+4)^2}=2\pi i\left(\underset{0}{\operatorname{res}}\ f(z)+\underset{-2i}{\operatorname{res}}\ f(z)\right)=2\pi i\left(-\frac{1}{32}+\frac{1}{64}\right)=\frac{\pi i}{32}.$$

7.5. *Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=1}z^2e^{1/z}dz$, считая, что обход контура происходит в положительном направлении.*

Функция $f(z)=z^2e^{1/z}$ имеет в точке 0 существенную особенность с вычетом равным $\frac{1}{6}$. Точка лежит внутри контура интегрирования и не нет других особенностей.

$$\oint\limits_{|z|=1}z^2e^{1/z}dz=2\pi i\underset{0}{\operatorname{res}}\ z^2e^{1/z}=\frac{2\pi i}{6}=\frac{\pi i}{3}.$$

8 Вычисление определенных интегралов. Лемма Жордана.

Вычислить интегралы.	
8.1. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a+\cos\varphi}$ $(a>1)$	**8.1.** $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5-3\cos\varphi}$
8.2. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}$ $(0<a<1)$	**8.2.** $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\varphi\ d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}$ $(0<a<1)$
8.3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\ dx}{(x^2+4x+13)^2}$	**8.3.** $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$
8.4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ $(a>0, b>0)$	**8.4.** $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$

Вычислить интегралы.	
8.5. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x\ dx}{x^2-2x+10}$	**8.5.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x\ dx}{x^2-2x+10}$
8.6. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x\ dx}{x^2-5x+6}$	**8.6.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x\ dx}{x^2+4x+20}$
8.7. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x\ dx}{(x^2+4)(x-1)}$	**8.7.** $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin 2x\ dx}{x^3+9x}$

Вычислить интегралы.	
8.8. $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^p(x+1)}$ $(0<p<1)$	**8.8.** $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(x+2)\sqrt[4]{x}}$
8.9. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\ln x\ dx}{x^2+a^2}$, $(a>0)$	**8.9.** $\int\limits_0^{\infty} \frac{\ln^2 x\ dx}{x^2+a^2}$, $(a>0)$
8.10. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\ln x\ dx}{\sqrt{x}(x+1)^2}$	**8.10.** $\int\limits_0^{\infty} \frac{\ln x\ dx}{\sqrt{x}(x^2+a^2)^2}$, $(a>0)$

1. Вычисление интегралов вида $\int\limits_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx$,

где R– рациональная функция аргументов $\cos x$ и $\sin x$, ограниченная внутри промежутка интегрирования.

Полагаем $e^{ix}=z$, тогда $dx=\frac{dz}{iz}$ и

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{z+z^{-1}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}, \quad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \frac{z-z^{-1}}{2i} = \frac{z^2-1}{2iz}.$$

Очевидно, в этом случае $|z|=1$, $0\le x<2\pi$.

Интеграл принимает вид

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx = \frac{1}{i}\int\limits_{|z|=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{dz}{z} = \int\limits_{|z|=1} F(z)dz,$$

По теореме Коши о вычетах (7.8) интеграл равен $2\pi i$ на сумму вычетов $F(z)$ относительно полюсов, попавших внутрь окружности $|z|=1$.

8.1. *Вычислить интеграл* $I = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{13-12\sin x}$.

Сначала сделаем замену $\varphi = \pi + x,\ d\varphi = dx, x = \varphi - \pi$. По формулам приведения $\sin x = \sin(\varphi - \pi) = -\sin(\pi - \varphi) = -\sin\varphi$. Тогда $I = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{13+12\sin\varphi}$. Применяя подстановку $e^{i\varphi} = z$, получим после простых преобразований

$$I = \frac{1}{i}\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z\left(13 + 12\cdot\frac{z^2-1}{2iz}\right)} = \int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{6z^2 + 13iz - 6}.$$

Учитывая, что нули знаменателя $z_1 = -\frac{3}{2}i$, $z_2 = -\frac{2}{3}i$ являются полюсами первого порядка подынтегральной функции, причем внутрь контура $|z| = 1$ попал лишь $z_2 = -\frac{2}{3}i$, по теореме Коши о вычетах (7.8), получаем

$$I = 2\pi i \operatorname*{res}_{z_2} \frac{1}{6z^2 + 13iz - 6} = 2\pi i \lim_{z\to z_2}\left(\frac{z - z_2}{6(z - z_1)(z - z_2)}\right) = \frac{2\pi i}{6(\frac{3}{2}i - \frac{2}{3}i)} = \frac{2\pi}{5}.$$

8.2. *Вычислить интеграл* $I = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{(a+b\cos x)^2}$, $(a > b > 0)$.

Применяя подстановку $e^{ix} = z$, получим после простых преобразований

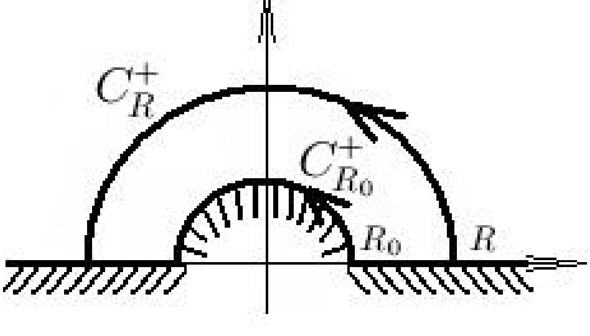
$$I = \frac{4}{i}\int\limits_{C} \frac{zdz}{(bz^2 + 2az + b)^2} = \frac{4}{i}\cdot 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_k} F(z).$$

Внутри единичного круга при условии $a > b > 0$, находится только один полюс (двукратный) $z_1 = \frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$. Вычет функции $F(z) = \frac{z}{(bz^2+2az+b)^2}$– относительно этого полюса

$$\operatorname*{res}_{z_1} F(z) = \lim_{z\to z_1}\left(\frac{z(z - z_1)^2}{b^2(z - z_1)^2(z - z_2)^2}\right)' = \frac{a}{4}(a^2 - b^2)^{-3/2}.$$

Итак, $I = \frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}}$.

2. Интегралы , от рациональных функции.



Th.
1) $f(z)$ – аналитическая в верхней полуплоскости вне полуокружности $C_{R_0}^+$,
2) $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = 0$,
$\Longrightarrow$

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R^+} f(z)dz = 0.$$

Th.

1) $f(z)$ – аналитическая в верхней полуплоскости и на вещественной оси, кроме конечного числа точек $\{z_k\}_{k=1}^{n}$, лежащих в верхней полуплоскости;

2) $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = 0$;

$\Longrightarrow$

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname*{res}\limits_{z_k} f(z)$.

Th.

1) $f(x)$– рациональная функция, $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$– многочлены соответственно степеней m и n.

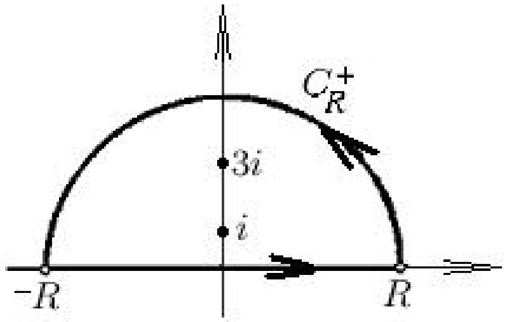
2) $f(x)$ непрерывна на всей действительной оси ($Q_n(x) \neq 0$) и $n \geq m+2$, т. е. степень знаменателя, по крайней мере, на две единицы больше степени числителя,

$\Longrightarrow$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname*{res}_{z_k} f(z), \tag{8.9}$$

здесь суммирование идет по всем полюсам $f(z)$, расположенным в верхней полуплоскости.

8.3. *Вычислить интеграл* $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2-x+2)dx}{x^4+10x^2+9}$.



Введем функцию $f(z) = \frac{z^2-z+2}{z^4+10z^2+9}$, которая на действительной оси, т. е. при $z = x$, совпадает с $f(x)$. Функция $f(z)$ имеет в верхней полуплоскости полюсы первого порядка в точках $z_1 = i$ и $z_2 = 3i$.

Вычет $f(z)$ относительно полюса $z_1 = i$ равен

$$\operatorname*{res}_{i} \frac{z^2-z+2}{z^4+10z^2+9} = \lim_{z\to i}\left(\frac{(z-i)(z^2-z+2)}{(z-i)(z+i)(z-3i)(z+3i)}\right) = \frac{1-i}{16i}.$$

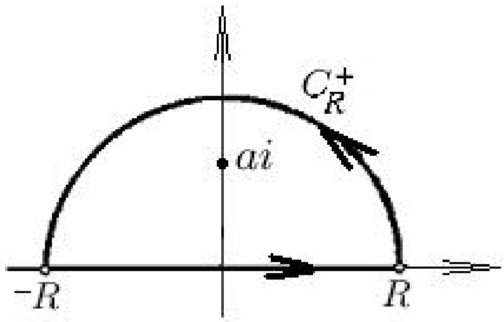
Вычет $f(z)$ относительно полюса $z_2 = 3i$ равен

$$\operatorname*{res}_{3i} \frac{z^2-z+2}{z^4+10z^2+9} = \lim_{z\to 3i}\left(\frac{(z-3i)(z^2-z+2)}{(z-i)(z+i)(z-3i)(z+3i)}\right) = \frac{-7-3i}{-48i}.$$

Тогда по формуле (7.8) получаем

$$I = 2\pi i\left(\frac{1-i}{16i} + \frac{-7-3i}{-48i}\right) = 2\pi i \cdot \frac{5}{24i} = \frac{5\pi}{12}.$$

8.4. *Вычислить интеграл* $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2}, \quad (a>0).$



$I = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2}$, т.к. подынтегральная функция $f(x) = \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}$– четная. Введем функцию $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$, которая на действительной оси, т. е. при $z = x$, совпадает с $f(x)$. Функция $f(z)$ имеет в верхней полуплоскости полюс второго порядка в точке $z = ai$.

Вычет $f(z)$ относительно этого полюса равен

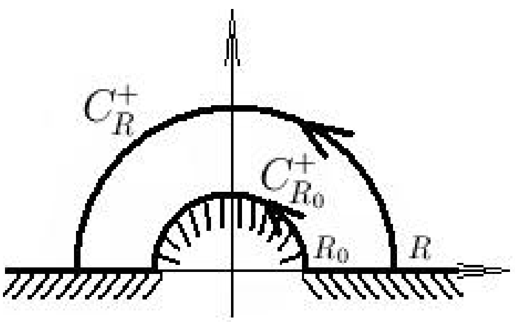
$$\operatorname*{res}_{ai} f(z) = \lim_{z\to ai}\left((z-ai)^2 f(z)\right)' = \lim_{z\to ai}\left(\frac{(z-ai)^2z^2}{(z-ai)^2(z+ai)^2}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to ai}\left(\frac{z^2}{(z+ai)^2}\right)' = \lim_{z\to ai}\frac{2aiz}{(z+ai)^3} = \frac{1}{4ai}.$$

Пользуясь, формулой (8.9), получим $I = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{4ai} = \frac{\pi}{4a}$.

3. Интегралы вида $\int\limits_0^{+\infty} R(x)\cos\lambda x dx, \quad \int\limits_0^{+\infty} R(x)\sin\lambda x dx,$

где $R(x)$– правильная рациональная дробь, $\lambda > 0$– любое вещественное число. При вычислении таких интегралов удобно пользоваться



Th. (лемма Жордана):

1) $f(z)$ – аналитическая в верхней полуплоскости вне полуокружности $C_{R_0}^+$,

2) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$,

$\Longrightarrow$

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{C_R^+} f(z)e^{i\lambda z}dz = 0, \qquad (\lambda>0). \quad (8.10)$$

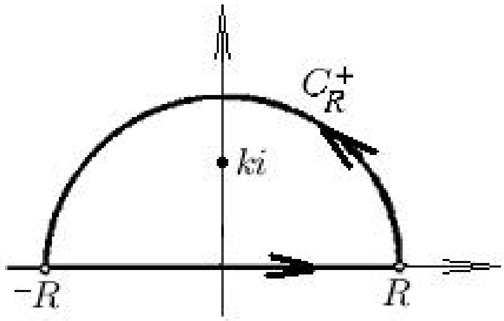
Th. 1) $f(z)$ – аналитическая в верхней полуплоскости и на вещественной оси, кроме конечного числа точек $\{z_k\}_{k=1}^n$, $\mathrm{Im} z_k > 0$;

2) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$;

$$\Longrightarrow \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\lambda x dx = \mathrm{Re}\left(2\pi i\sum_{k=1}^n \operatorname*{res}_{z_k} f(z)e^{i\lambda z}\right), \qquad (\lambda>0).$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\lambda x dx = \mathrm{Im}\left(2\pi i\sum_{k=1}^n \operatorname*{res}_{z_k} f(z)e^{i\lambda z}\right), \qquad (\lambda>0).$$

8.5. *Вычислить интеграл* $\quad I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax\, dx}{x^2+k^2}, \quad (a > 0, \ \ k > 0).$



Из формулы Эйлера $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, следует, что $\quad I = \mathrm{Re} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}\, dx}{x^2+k^2}$. Введем функцию $f(z) = \frac{e^{aiz}}{z^2+k^2}$. При $z = x$, $\mathrm{Im} f(z)$ совпадает с подынтегральной функцией. Рассмотрим контур $\Gamma_R = C_R^+ \bigcup [-R; R]$. При достаточно большом R на контуре C_R^+ функция $g(z) = \frac{1}{z^2+k^2}$ удовлетворяет неравенству $|g(z)| < \frac{1}{R^2-k^2}$ и, следовательно, $g(z)$ стремится к нулю при $R \to \infty$. Значит, по лемме Жордана (8.10)

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R^+} \frac{e^{iaz}\, dz}{z^2+k^2} = 0.$$

Для любого $R > k$ по теореме о вычетах (7.8) имеем

$$\int\limits_{\Gamma_R} \frac{e^{iaz}\, dz}{z^2+k^2} = \int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{iax}\, dx}{x^2+k^2} + \int\limits_{C_R^+} \frac{e^{iaz}\, dz}{z^2+k^2} = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{ki} \left(\frac{e^{iaz}}{z^2+k^2} \right) =$$

$$= 2\pi i \cdot \lim_{z\to ki} \left(\frac{e^{iaz}}{z^2+k^2}(z - ik) \right) = 2\pi i \cdot \lim_{z\to ki} \left(\frac{e^{iaz}}{z+ki} \right) = 2\pi i \cdot \frac{e^{-ak}}{2ik} = \frac{\pi}{k} e^{-ak}.$$

В пределе при $R \to \infty$ получим

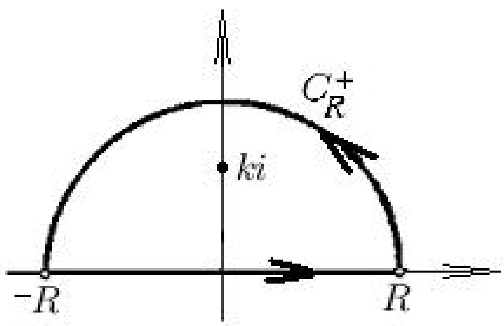
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}\, dx}{x^2+k^2} = \frac{\pi}{k} e^{-ak}.$$

Отделяя слева и справа вещественные и мнимые части, получим

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax\, dx}{x^2+k^2} = \mathrm{Re}(\tfrac{\pi}{k} e^{-ak}) = \tfrac{\pi}{k} e^{-ak}.$$

<u>Замечание.</u> $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax\, dx}{x^2+k^2} = \mathrm{Im}(\tfrac{\pi}{k} e^{-ak}) = 0.$$

8.6. *Вычислить интеграл* $\quad I = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x \sin ax\, dx}{x^2+k^2}, \quad (a > 0, \ \ k > 0).$



Введем функцию $f(z) = \frac{ze^{aiz}}{z^2+k^2}$. Нетрудно видеть, что если $z = x$, то $\mathrm{Im} f(z)$ совпадает с подынтегральной функцией. Рассмотрим контур $\Gamma_R = C_R^+ \bigcup [-R; R]$. При достаточно большом R на контуре C_R^+ функция $g(z) = \frac{z}{z^2+k^2}$ удовлетворяет неравенству $|g(z)| < \frac{R}{R^2-k^2}$ и, следовательно, $g(z)$ стремится к нулю при $R \to \infty$.

Значит, по лемме Жордана (8.10)

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{C_R^+}\frac{ze^{iaz}\,dz}{z^2+k^2}=0.$$

Для любого $R>k$ по теореме о вычетах (7.8) имеем

$$\int\limits_{\Gamma_R}\frac{ze^{iaz}\,dz}{z^2+k^2}=\int\limits_{-R}^{R}\frac{xe^{iax}\,dx}{x^2+k^2}+\int\limits_{C_R^+}\frac{ze^{iaz}\,dz}{z^2+k^2}=2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{ki}\left(\frac{ze^{iaz}}{z^2+k^2}\right)=$$

$$=2\pi i\cdot\lim_{z\to ki}\left(\frac{ze^{iaz}}{z^2+k^2}(z-ik)\right)=2\pi i\cdot\lim_{z\to ki}\left(\frac{ze^{iaz}}{z+ki}\right)=2\pi i\cdot\frac{e^{-ak}}{2}=\pi ie^{-ak}.$$

В пределе при $R\to\infty$ получим

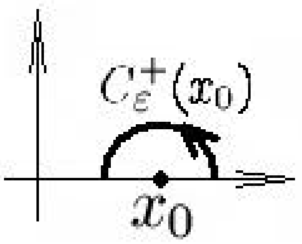
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{iax}\,dx}{x^2+k^2}=\pi ie^{-ak}.$$

Отделяя слева и справа вещественные и мнимые части, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin ax\,dx}{x^2+k^2}=\pi e^{-ak}.$$

В силу того, что подынтегральная функции четная: $\quad I=\frac{\pi}{2}e^{-ak}$.

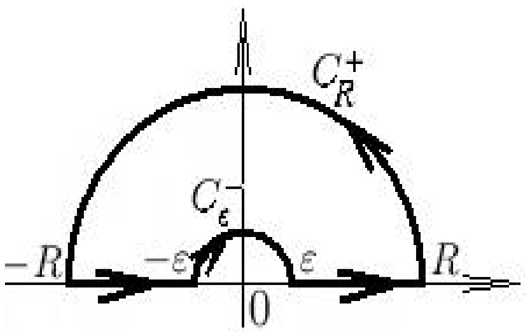
4. Интегралы с особыми точками на вещественной оси.



Th. (лемма о простом полюсе).
$f(z)$ – аналитическая в верхней полуплоскости и на вещественной оси, кроме точки $z_0=x_0\in\mathbb{R}$, в которой $f(z)$ имеет простой полюс;
$\Longrightarrow$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{C_\varepsilon^+(x_0)}f(z)dz=0.$$

8.7. *Найти интегральное представление единичной функции (функции Хевисайда)* $\eta(t)=\begin{cases}0 \text{ при } t<0,\\ 1 \text{ при } t>0.\end{cases}$



Рассмотрим функцию $f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{e^{-izt}\,dz}{z}$, где контур $C=[R;\varepsilon]\bigcup C_\varepsilon^+(0)\bigcup[-\varepsilon;-R]$. Замыкая контур полуокружностью $C_R^-(0)$, лежащей в верхней полуплоскости, замечаем, что при $t<0$ в силу леммы Жордана (8.10) интегралы $\int\limits_{C_R^-(0)}\frac{e^{-izt}\,dz}{z}\to0$ при $R\to\infty$, и, так как в области с таким замкнутым контуром подынтегральная функция аналитична, получаем, что $f(t) = 0$ при $t < 0$.

Построим теперь замыкание контура с помощью полуокружности $\widetilde{C}_R^+(0)$ лежащей в нижней полуплоскости. Теперь при $t > 0$ опять получаем в силу леммы Жордана (8.10), что интегралы $\int\limits_{C_R^-(0)} \frac{e^{-izt}\,dz}{z} \to 0$ при $R \to \infty$. Но теперь точка $z = 0$ лежит внутри контура интегрирования. Значит, в силу теоремы Коши о вычетах

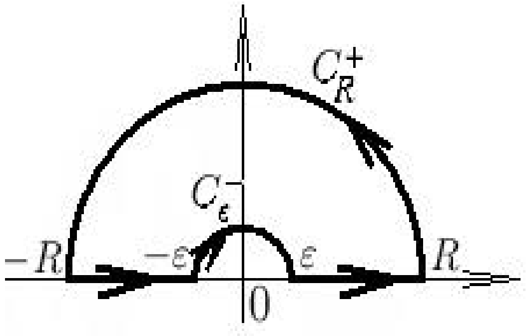
$$f(t) = \tfrac{1}{2\pi i}\int\limits_C \tfrac{e^{-izt}\,dz}{z} = 1, \quad (t > 0).$$

$$f(t) = \tfrac{1}{2\pi i}\int\limits_C \tfrac{e^{-izt}\,dz}{z} = \begin{cases} 0 \text{ при } t < 0, \\ 1 \text{ при } t > 0. \end{cases} = \eta(t).$$

Таким образом, рассмотренный интеграл представляет собой разрывную функцию.

8.8. *Вычислить интеграл* $\quad I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax\,dx}{x(x^2+b^2)}, \quad (a > 0, \;\; b > 0).$

Введем функцию $f(z) = \frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}$ такую, что при $z = x$ $\mathrm{Im} f(z)$ совпадает с подынтегральной функцией. Функция $f(z)$ имеет особенность на вещественной оси – полюс первого порядка в точке $z = 0$. Поэтому контур интегрирования Γ_R выберем так:



особая точка $z = 0$ обходится малым полукругом $C_\varepsilon^-(0)$ $(\varepsilon < b)$; полукруг C_R выбираем так, чтобы $b < R$.

Таким образом, внутри замкнутого контура находится лишь один полюс функции $f(z)$ в точке $z = bi$.

Согласно теореме Коши о вычетах

$$\int\limits_{\Gamma_R} \frac{e^{iaz}dz}{z(z^2+b^2)} = \int\limits_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{iax}dx}{x(x^2+b^2)} + \int\limits_{C_\varepsilon^-} \frac{e^{iaz}dz}{z(z^2+b^2)} + \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{iax}dx}{x(x^2+b^2)} + \int\limits_{C_R^+} \frac{e^{iaz}dz}{z(z^2+b^2)} =$$

$$= 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{bi} \frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)} = 2\pi i \cdot \lim_{z\to ki}\left(\frac{e^{iaz}(z-bi)}{z(z^2+b^2)}\right) = -\frac{\pi i e^{-ab}}{2b^2}.$$

Заменяя в первом интеграле x на $-x$ и объединяя его с третьим интегралом, получим

$$\int\limits_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{iax}dx}{x(x^2+b^2)} + \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{iax}dx}{x(x^2+b^2)} = \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{(e^{iax} - e^{-iax})dx}{x(x^2+b^2)} = 2i\int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin ax\;dx}{x(x^2+b^2)}.$$

Так как $\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}=\frac{1}{b^2}$, то подынтегральная функция $\frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}$ представима в виде $\frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}=\frac{1}{b^2}\cdot\frac{1}{z}+\frac{\psi(z)}{z}$, где $\lim\limits_{z\to 0}\psi(z)=0$.

Выполнив замену $z=re^{i\varphi},\ dz=ire^{i\varphi}d\varphi$ находим

$$\int\limits_{C_\varepsilon}\frac{e^{iaz}dz}{z(z^2+b^2)}=\frac{1}{b^2}\int\limits_{C_\varepsilon}\frac{dz}{z}+\int\limits_{C_\varepsilon}\frac{\psi(z)dz}{z}=$$

$$=\frac{1}{b^2}\int\limits_{\pi}^{0}\frac{ire^{i\varphi}d\varphi}{re^{i\varphi}}+\int\limits_{\pi}^{0}\frac{ire^{i\varphi}\psi(re^{i\varphi})d\varphi}{re^{i\varphi}}=-\frac{i\pi}{b^2}-i\int\limits_{0}^{\pi}\psi(re^{i\varphi})d\varphi.$$

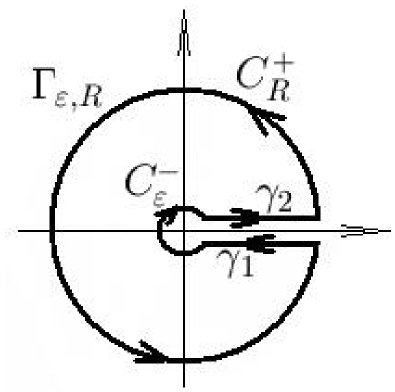
Причем $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^\pi\psi(re^{i\varphi})d\varphi=0$. Так как $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{1}{z(z^2+b^2)}=0$, то по лемме Жордана (8.10) $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R}\frac{e^{iaz}dz}{z(z^2+b^2)}=0$. Таким образом,

$$\int\limits_{\Gamma_R}\frac{e^{iaz}dz}{z(z^2+b^2)}=2i\int\limits_0^\infty\frac{\sin ax dx}{x(x^2+b^2)}-\frac{\pi i}{b^2}=-\pi i\frac{e^{-ab}}{b^2},$$

откуда $\int\limits_0^\infty\frac{\sin axdx}{x(x^2+b^2)}=\frac{\pi}{2b^2}(1-e^{-ab})$.

5. Интегралы от многозачных функций вида

$$\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}f(x)dx,\ (0<\alpha<1).$$



Пусть функция $f(z)$ аналитическая в $\mathbb{C}$, за исключением конечного числа особых точек $\{z_k\}_{k=1}^n$, не лежащих на положительной вещественной полуоси и точка $z=\infty$ является нулем функции $f(z)$. В области $G=\{z\in\mathbb{C}\ :\ 0<\arg z<2\pi\}$ выберем однозначную ветвь многозначной функции $z^{\alpha-1}$ так, чтобы $0<\arg z<2\pi$. Рассмоьрим контур $\Gamma_{\varepsilon,R}=C_R^+\bigcup\gamma_1\bigcup C_\varepsilon^-\bigcup\gamma_2$. По теореме Коши о вычетах

$$\int\limits_{\Gamma_R}z^{\alpha-1}f(z)dz=\int\limits_{C_R^+}z^{\alpha-1}f(z)dz+\int\limits_{\gamma_1}z^{\alpha-1}f(z)dz+\int\limits_{C_\varepsilon^-}z^{\alpha-1}f(z)dz+$$

$$+\int\limits_{\gamma_2} z^{\alpha-1}f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_k} z^{\alpha-1}f(z).$$

Рассмотрим каждый из этих интегралов отдельно. Из условий наложенных на функцию $f(z)$ найдется $M = const > 0$ такая, что в окрестности точки $z=\infty$ $|f(z)| < \frac{M}{|z|}$, а в окрестности точки $z=0$ $|f(z)| < M$, поэтому

$$\left|\int\limits_{C_R^+} z^{\alpha-1}f(z)dz\right| \le \frac{M}{R}R^{\alpha-1}2\pi R = \frac{2\pi M}{R^{1-\alpha}} \to 0,\ R\to+\infty;$$

$$\left|\int\limits_{C_\varepsilon^-} z^{\alpha-1}f(z)dz\right| \le M\varepsilon^{\alpha-1}2\pi\varepsilon = 2\pi M\varepsilon^{\alpha} \to 0,\ \varepsilon\to 0.$$

$$\int\limits_{\gamma_2} z^{\alpha-1}f(z)dz = \begin{bmatrix} z = x, \\ \arg z = 0\end{bmatrix} = \int\limits_{\varepsilon}^{R} x^{\alpha-1}f(x)dx$$

$$\int\limits_{\gamma_1} z^{\alpha-1}f(z)dz = \begin{bmatrix} z = xe^{2\pi i},\ \arg z = 2\pi \\ z^{\alpha-1} = x^{\alpha-1}e^{2\pi i(\alpha-1)} = x^{\alpha-1}e^{2\pi i\alpha}, \end{bmatrix} = -e^{2\pi i\alpha}\int\limits_{\varepsilon}^{R} x^{\alpha-1}f(x)dx.$$

Таким образом, при $\varepsilon\to 0$ и $R\to\infty$ получаем

$$\int\limits_{0}^{\infty} x^{\alpha-1}f(x)dx = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i\alpha}}\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_k}(z^{\alpha-1}f(z)) =$$

$$= -\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}e^{-\pi i\alpha}\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_k}(z^{\alpha-1}f(z)),\quad (0<\alpha<1). \tag{8.11}$$

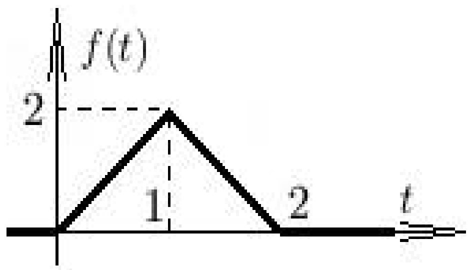
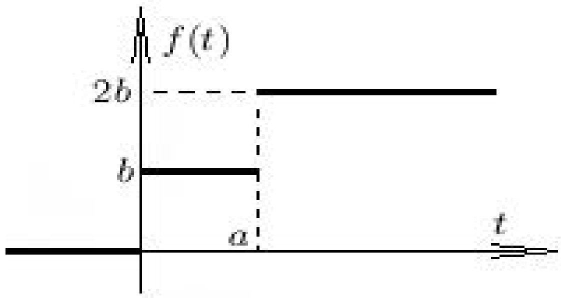
8.9. *Вычислить интеграл* $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt[3]{x}}$.

Используя формулу (8.11) с $\alpha = 2/3$ получаем

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt[3]{x}} = \int\limits_0^\infty \frac{x^{2/3-1}dx}{(x^2+4)} = -\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{3}}e^{\frac{-2\pi i}{3}}\left(\operatorname*{res}_{2i}\frac{z^{-1/3}}{z^2+4} + \operatorname*{res}_{-2i}\frac{z^{-1/3}}{z^2+4}\right) =$$

$$= -\frac{\pi}{\sqrt{3}/2}e^{\frac{-2\pi i}{3}}\left(\frac{2^{-1/3}e^{-\pi i/6}}{4i} - \frac{2^{-1/3}e^{-\pi i/2}}{4i}\right) = \frac{\pi}{2^{4/3}\sqrt{3}}.$$

9 Операционное исчисление. Преобразование Лапласа.

Найти решения уравнений:	
9.1. $y''+y=0, \quad y(0)=1, y'(0)=0;$	**9.1.** $y''+y'=1, \quad y(0)=0, y'(0)=1;$
9.2. $y''-2y'+y=e^t,$ $y(0)=0,\ y'(0)=1;$	**9.2.** $y''+3y'=e^t,$ $y(0)=0,\ y'(0)=-1;$
9.3. $y''+y=2\cos t,$ $y(0)=0,\ y'(0)=-1;$	**9.3.** $y''+2y'=t\sin t,$ $y(0)=0,\ y'(0)=0;$
9.4. $ty''-2y'=0;$	**9.4.** $y''+(t+1)y'+ty=0,$ $y(0)=1,\ y'(0)=-1;$
Решить задачу Коши, если функция $f(t)$ задана графически	
9.5. $y''+4y=f(t),$ $y(0)=0,\ y'(0)=0.$ 	**9.5.** $y''+y=f(t),$ $y(0)=1,\ y'(0)=0.$ 
Решить системы уравнений:	
9.6. $\begin{cases} x'=-y, & x(0)=2, \\ y'=2x+2y, & y(0)=2; \end{cases}$	**9.6.** $\begin{cases} x'+y=0, & x(0)=1, \\ y'+x=0, & y(0)=-1; \end{cases}$
9.7. $\begin{cases} 4x'-y'+3x=\sin t, & x(0)=2, \\ x'+y=\cos t, & y(0)=-1; \end{cases}$	**9.7.** $\begin{cases} x'+y'-y=e^t, & x(0)=0, \\ 2x'+y'+2y=\cos t, & y(0)=0; \end{cases}$
9.8. $\begin{cases} x'=-y-z, & x(0)=-1, \\ y'=-x-z, & y(0)=0, \\ z'=-x-y; & z(0)=1. \end{cases}$	**9.8.** $\begin{cases} x''=x-y-z, & x(0)=1, x'(0)=0, \\ y''=y-x-z, & y(0)=y'(0)=0, \\ z''=z-x-y; & z(0)=z'(0)=0. \end{cases}$

Теория.

Def. *Оригиналом* называется функция $f(t)=u(t)+iv(t),\ t\in\mathbb{R}:$

1) $f(t)$ кусочно-гладкая на $\mathbb{R}$;
2) $f(t)=0$ при $t<0$;
3) $\exists\, M>0\ \exists\, s>0\ \forall\, t>0 \quad |f(t)|<Me^{st}.$

Def. *Изображением* функции-оригинала $f(t)$ называется функция $F(p)$ комплексного переменного $p=s+i\sigma$, определяемая интегралом Лапласа

$$F(p)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-p\cdot t}f(t)dt.$$

Таким образом функции $f(t)$ ставится в соответствие определенная функция $F(p)$, это соответствие называют *преобразованием Лапласа.* Соответствие между оригиналом $f(t)$ и изображением $F(p)$ обозначают:

$$\begin{array}{lll} f(t) \to F(p) & \text{или} & F(p) \to f(t) \\ f(t) \risingdotseq F(p) & \text{или} & F(p) \fallingdotseq f(t) \\ f(t) = L^{-1}F(p) & \text{или} & F(p) = Lf(t) \end{array}$$

Оригинал будем обозначать маленькой буквой, а его изображение – соответствующей большой: $x(t) \to X(p)$.

Def. Функция $\eta(t) = \begin{cases} 1, \, t > 0; \\ 0, \, t < 0 \end{cases}$ назыв. *единичной функцией Хевисайда.* Если функция $f(t)$ удовлетворяет условиям 1) и 3) из определения оригинала, то функция $f(t)\eta(t)$– оригинал.

Изображения некоторых функций:

- единичной функции Хевисайда $\quad \eta(t) \to \frac{1}{p}$, $\mathrm{Re}\, p > 0$;
- $e^{at} \to \frac{1}{p-a}$, $\mathrm{Re}\, p > \mathrm{Re}\, a$;
- $t^a \to \frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}$, $a > 0$; $t^n \to \frac{n!}{p^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Свойства преобразования Лапласа.

1. *Линейность*

$$\left.\begin{array}{l} f_1(t) \to F_1(p) \\ f_2(t) \to F_2(p) \end{array}\right\} \Rightarrow \forall a_1, a_2 \in \mathbb{C}: \quad a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \to a_1 F_1(p) + a_2 F_2(p)$$

2. *Подобие* $\qquad f(t) \to F(p) \Rightarrow \forall a > 0: \quad f(at) \to \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right).$
3. *Запаздывание* $\quad f(t) \to F(p) \Rightarrow \forall\, t_o > 0: \quad f(t - t_o) \to e^{-t_o p} F(p).$
4. *Опережение*

$$f(t) \to F(p) \Rightarrow \forall\, t_o > 0: \quad f(t + t_o) \to e^{t_o p} \left(F(p) - \int\limits_0^{t_o} e^{tp} f(t) dt \right).$$

5. *Смещение* $\quad f(t) \to F(p) \Rightarrow \forall\, a \in \mathbb{C}: \quad e^{-at} f(t) \to F(p + a).$
6. *Дифференцирование оригинала*

$$\left.\begin{array}{l} 1) f(t) \to F(p) \\ 2) f(t), f'(t), \ldots, f^{(n)}(t)- \\ \text{оригиналы} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f'(t) \to pF(p) - f(0); \\ f''(t) \to p^2 F(p) - pf(0) - f'(0); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f^{(n)}(t) \to p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0); \end{array}$$

где $f^{(k)}(0) = \lim\limits_{t \to +0} f^{(k)}(t), \quad k = 0, \ldots n - 1.$

7. *Дифференцирование изображения*

$$\left.\begin{array}{l} 1) F(p) \to f(t) \\ 2) \mathrm{Re}\, p > s_o \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} F'(p) \to -tf(t); \\ F''(p) \to t^2 f(t); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F^{(n)}(p) \to (-1)^n t^n f(t); \end{array} \quad \text{где } \mathrm{Re}\, p > s_1 > s_o.$$

8. *Формула включения*

Если выполнены все условия теоремы о дифференцировании оригинала (см. 6), то $\lim\limits_{\mathrm{Re} p \to +\infty} pF(p) = f(0)$ (т.е. $\lim\limits_{p \to +\infty} pF(p) = f(0)$).

9. *Интегрирование оригинала*

$$f(t) \to F(p) \quad \mathrm{Re}\, p > s_o \Rightarrow \quad \int\limits_0^t f(\tau)d\tau \to \tfrac{F(p)}{p},\ \mathrm{Re}\, p > s_o.$$

10. *Интегрирование изображения*

$$\left.\begin{array}{l} 1) f(t) \to F(p) \quad \mathrm{Re}\, p > s_0; \\ 2) \int\limits_p^\infty F(p)dp \text{ сх. при } \mathrm{Re}\, p > s_1 > s_0; \end{array}\right\} \Rightarrow \int\limits_p^\infty F(p)dp \to \tfrac{f(t)}{t},\ \mathrm{Re}\, p > s_1 > s_0.$$

11. *Первая теорема разложения*

Пусть изображение $F(p)$ аналитическая в окрестности бесконечности, и его разложение в этой окрестности бесконечности $|p| > R$ имеет вид

$$F(p) = \tfrac{c_1}{p} + \tfrac{c_2}{p^2} + \ldots = \sum_{k=1}^\infty \tfrac{c_k}{p^k}.$$

Тогда оригиналом для $F(p)$ является функция $\eta(t)f(t)$, где

$$f(t) = \sum_{k=1}^\infty \tfrac{c_k}{(k-1)!} t^{k-1}$$

причем ряд сходится при всех t.

12. *Вторая теорема разложения*

Если изображение $F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}$– дробно-рациональная функция, то оригиналом является функция $\eta(t)f(t)$, где $\eta(t)$– функция Хевисайда, а

$$f(t) = \sum_{p_k} \operatorname*{res}_{p_k} (F(p)e^{p\,t}),$$

причем сумма вычетов берется по всем полюсам p_k функции $F(p)$.

Следствие.

Если $F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}$– дробно-рациональная функция и все ее полюсы простые, то

$$f(t) = \sum_{p_k} \tfrac{P(p_k)}{Q'(p_k)}\, e^{p_k t}.$$

Таблица оригиналов и изображений преобразования Лапласа.

Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$
1	$\frac{1}{p}$
$\begin{cases} 0, \ t < \alpha \\ 1, \ t > \alpha \end{cases}$	$\frac{e^{-\alpha p}}{p}$
t	$\frac{1}{p^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}$
$t^\alpha, \ \mathrm{Re}\,\alpha > -1$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$
$J_n(t), \ n \in \mathbb{N}$	$\frac{\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^n}{\sqrt{p^2+1}}$
$J_0(t)$	$\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$

Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$
0	0
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
$t^b e^{at}, \ \mathrm{Re}\, b > -1$	$\frac{\Gamma(b+1)}{(p-a)^{b+1}}$
$\sin at$	$\frac{a}{p^2+a^2}$
$\cos at$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
$\mathrm{sh}\, at$	$\frac{a}{p^2-a^2}$
$\mathrm{ch}\, at$	$\frac{p}{p^2-a^2}$
$e^{-bt}\sin at$	$\frac{a}{(p+b)^2+a^2}$
$e^{-bt}\cos at$	$\frac{p+b}{(p+b)^2+a^2}$

Решение дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.

Пусть требуется найти решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(t),$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = y_0, \ y'(0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}.$$

Предположим, что искомая функция y, ее производные $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ и функция $f(t)$ являются оригиналами. Пусть $y \to Y$, $f \to F$ по правилу дифференцирования оригинала:

$$\begin{aligned}
&y'(t) \to pY(p) - y(0);\\
&y''(t) \to p^2 Y(p) - py(0) - y'(0);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y^{(n)}(t) \to p^n Y(p) - p^{n-1} y(0) - \ldots - y^{(n-1)}(0);
\end{aligned}$$

Пользуясь свойством линейности получим линейное уравнение в изображениях, соответствующее данному дифференциальному уравнению вместе с начальными условиями:

$$p^n Y(P) - p^{n-1} y(0) - \ldots - y^{(n-1)}(0) +$$

$$+ a_1 (p^{n-1} Y(P) - p^{n-2} y(0) - \ldots - y^{(n-2)}(0)) + \ldots + a_n Y = F(p).$$

Члены уравнения содержащие $Y(p)$, перенесем в левую часть, а остальные перенесем в правую и таким образом найдем изображение $Y(p)$ искомого решения

$$Y = \frac{F(p) + p^{n-1}y(0) + \ldots + y^{(n-1)} + a_1(p^{n-2}y(0) - \ldots - y^{(n-2)}(0)) + \ldots + a_{n-1}y(0)}{p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n.}$$

Обозначим множитель при $Y(p)$ через $\chi(p)$:

$$\chi(p) = p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Это *характеристический многочлен* однородного линейного уравнения, соответствующего данному неоднородному. Оставшийся, кроме $F(p)$, многочлен в правой части обозначим $B(p)$, этот многочлен выражает влияние начальных условий и при нулевых начальных данных $B(p) \equiv 0$. Тогда

$$Y(p) = \frac{F(p)}{\chi(p)} + \frac{B(p)}{\chi(p)}.$$

Далее по $Y(p)$ находим оригинал $y(t)$, который и будет являться решением данного дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям.

Решения примеров.

9.1. *Найти решение дифференциального уравнения* $y'' - y' = 1$, *удовлетворяющее начальным условиям* $y(0) = y'(0) = 0$.

Положим $y \to Y$. Тогда $y'(t) \to pY(P); y''(t) \to p^2Y(P)$, а так как $1 \to \frac{1}{p}$, то уравнение в изображениях будет иметь вид $p^2Y - pY = \frac{1}{p}$. Отсюда

$$Y = \frac{1}{p(p^2 - p)} = \frac{1 - p^2 + p^2}{p^2(p-1)} = \frac{-1 - p}{p^2} + \frac{1}{p-1} = \frac{-1}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p-1}.$$

Но $\frac{1}{p^2} \to t$, $\frac{1}{p} \to 1$, $\frac{1}{p-1} \to e^t$, поэтому $y = -t - 1 + e^t$.

9.2. *Найти решение дифференциального уравнения* $y''' - 2y'' + y' = 4$, *удовлетворяющее начальным условиям* $y(0) = 1,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = -2$.

Пусть $y \to Y$. Тогда по теореме дифференцирования оригинала (свойство 6), находим изображения:

$$4 \to \frac{4}{p};$$
$$y'(t) \to pY(p) - y(0) = pY(p) - 1;$$
$$y''(t) \to p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - p - 2;$$
$$y'''(t) \to p^3Y(p) - p^2y(0) - py'(0) - y''(0) = p^3Y(p) - p^2 - 2p + 2.$$

Уравнение в изображениях будет иметь вид

$$Y(p^3 - 2p^2 + p) = \frac{4}{p} + p^2 - 5.$$

Отсюда

$$Y = \frac{4}{p^2(p-1)^2} + \frac{p^2-5}{p\,(p-1)^2} = \frac{p^3-5p+4}{p^2(p-1)^2}.$$

Для нахождения решения можно

• применить вторую теорему разложения (свойство 12)

$$y(t) = \operatorname*{res}_0\, Y(p)e^{p\,t} + \operatorname*{res}_1\, Y(p)e^{p\,t}$$

$$\operatorname*{res}_0\, Y(p)e^{p\,t} = \begin{bmatrix} p=0 \\ \text{полюс 2-го порядка} \end{bmatrix} = \lim_{p\to 0}\left(p^2Y(p)e^{p\,t}\right)' =$$

$$= \lim_{p\to 0} e^{p\,t}\left(\frac{3p^2-5}{(p-1)^2} + t\frac{p^3-5p+4}{(p-1)^2} - 2\frac{p^3-5p+4}{(p-1)^3}\right) = 3+4t.$$

$$\operatorname*{res}_1\, Y(p)e^{p\,t} = \begin{bmatrix} p=1 \\ \text{полюс 2-го порядка} \end{bmatrix} = \lim_{p\to 1}\left(p^2Y(p)e^{p\,t}\right)' =$$

$$= \lim_{p\to 1} e^{p\,t}\left(\frac{3p^2-5}{p^2} + t\frac{p^3-5p+4}{p^2} - 2\frac{p^3-5p+4}{p^3}\right) = -2e^t.$$

$y(t) = \operatorname*{res}_0\, Y(p)e^{p\,t} + \operatorname*{res}_1\, Y(p)e^{p\,t} = 3 + 4t - 2e^t$

• воспользоваться разложением на простейшие дроби:

$$Y = \frac{p^3-5p+4}{p^2(p-1)^2} = \frac{3}{p} + \frac{4}{p^2} + \frac{-2}{p-1} + \frac{0}{(p-1)^2}.$$

Но $\frac{4}{p^2} \to 4t$, $\frac{3}{p} \to 3$, $\frac{-2}{p-1} \to -2e^t$, поэтому $y = 3 + 4t - 2e^t$.

9.3. *Найти решение дифференциального уравнения $y'' - 3y' + 2y = e^t$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = y'(0) = 0$.*

Пусть $y \to Y$. Тогда по теореме дифференцирования оригинала (свойство 6), находим изображения:

$$\begin{aligned}
&e^t \to \frac{1}{p-1};\\
&y'(t) \to pY(p) - y(0) = pY(p);\\
&y''(t) \to p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p).
\end{aligned}$$

Уравнение в изображениях будет иметь вид

$$Y(p^2 - 3p + 2) = \frac{1}{p-1}.$$

Отсюда

$$Y = \frac{1}{(p^2-3p+2)(p-1)} = \frac{1}{(p-1)^2(p-2)}.$$

Для отыскания решения воспользуемся разложением на простейшие дроби:

$$Y = \frac{1}{(p-1)^2(p-2)} = \frac{-1}{p-1} + \frac{-1}{(p-1)^2} + \frac{1}{p-2}.$$

Но $\frac{1}{(p-1)^2} \to te^t$ (свойство 7), $\frac{1}{p-1} \to e^t$, $\frac{1}{p-2} \to e^2t$, поэтому $y = e^2t - e^t - te^t$.

9.4. *Найти решение дифференциального уравнения*

$$ty'' + (2t-1)y' + (t-1)y = 0.$$

Пусть $y(t) \to Y(p)$. Тогда из свойств дифференцирования изображения и оригинала (свойство 7 и 6), находим изображения:

$$\begin{array}{ll} y(t) \to Y(p) & y'(t) \to pY(p) - y(0) \\ ty(t) \to -Y'(p); & ty'(t) \to -(pY(p)-y(0))' = -pY'(p) - Y(p) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} y''(t) \to p^2Y(p) - py(0) - y'(0) \\ ty''(t) \to -(p^2Y(p) - py(0) - y'(0))' = -p^2Y'(p) - 2pY(p) + y(0). \end{array}$$

Уравнение в изображениях будет иметь вид

$$Y'(p+1)^2 + 3(p+1)Y = 2y(0).$$

Отсюда

$$Y = \frac{y(0)}{p+1} + \frac{c_1}{(p+1)^3} \longrightarrow y(0) + c_1 \operatorname*{res}_{-1} \frac{e^{p\,t}}{(p+1)^3}.$$

$$\operatorname*{res}_{-1} \frac{e^{p\,t}}{(p+1)^3} = \left[\begin{array}{c} p=-1 \\ \text{полюс 3-го порядка} \end{array}\right] = \frac{1}{2}\lim_{p\to-1}\left((p+1)^3\frac{e^{p\,t}}{(p+1)^3}\right)' =$$

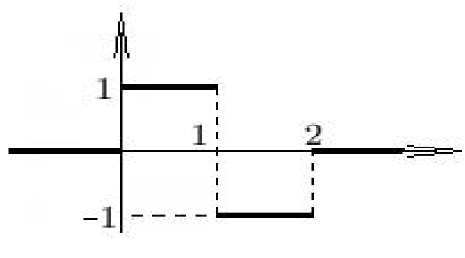
$$= \frac{1}{2}\lim_{p\to-1}\left(e^{p\,t}\right)'' = \frac{1}{2}\lim_{p\to-1} t^2e^{p\,t} = \frac{t^2}{2}e^{-t},$$

поэтому $y(t) = y(0)e^{-t} + \frac{c_1}{2}t^2e^{-t}$.

9.5. *Решить задачу Коши*

$$y'' + y = f(t), \qquad y(0) = y'(0) = 0,$$

если функция $f(t)$ задана графически



Пусть $\eta(t) = \begin{cases} 1, t > 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$ – функция Хевисайда, тогда

$$f(t) = \eta(t) - 2\eta(t-1) + \eta(t-2).$$

Применяя формулу запаздывания (свойство 3) $\boxed{f(t-t_0) \to e^{-pt_0}F(p),}$ получим

$$f(t) \to \frac{1}{p} - 2\frac{e^{-p}}{p} + \frac{e^{-2p}}{p}.$$

Полагая $y(t) \to Y(p)$ и учитывая начальные условия

$$y''(t) \to p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p),$$

получим операторное уравнение $\quad (p^2+1)Y(p) = \frac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p}$, откуда
$Y(p) = \frac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p(p^2+1)} = \frac{1}{p(p^2+1)} - \frac{2e^{-p}}{p(p^2+1)} + \frac{e^{-2p}}{p(p^2+1)}$.
Так как $\frac{1}{p(p^2+1)} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1} \to (1-\cos t)\eta(t)$, то по теореме запаздывания (свойство 3)

$$\frac{e^{-p}}{p(p^2+1)} \to (1-\cos(t-1))\eta(t-1),\ \frac{e^{-2p}}{p(p^2+1)} \to (1-\cos(t-2))\eta(t-2).$$

Значит,

$$y(t) = (1-\cos t)\eta(t) - 2(1-\cos(t-1))\eta(t-1) + (1-\cos(t-2))\eta(t-2)$$

или

$$y(t) = 2\left(\sin^2\frac{t}{2}\eta(t) - 2\sin^2\frac{t-1}{2}\eta(t-1) + \sin^2\frac{t-2}{2}\eta(t-2)\right).$$

9.6. *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} x + x' = y + e^t, & x(0) = 1, \\ y + y' = x + e^t, & y(0) = 1. \end{cases}$$

Пусть $x(t) \to X(p)$, $y(t) \to Y(p)$. Тогда по теореме дифференцирования оригинала (свойство 6), находим изображения:

$$\begin{aligned} &e^t \to \tfrac{1}{p-1}, \\ &x'(t) \to pX(p) - x(0) = pX(p) - 1, \\ &y'(t) \to pY(p) - y(0) = pY(p) - 1. \end{aligned}$$

Система в изображениях будет иметь вид

$$\begin{cases} X(p) + pX(p) - 1 = Y(p) + \frac{1}{p-1}, \\ Y(p) + pY(p) - 1 = X(p) + \frac{1}{p-1}. \end{cases}$$

Находя из этой системы $X(p), Y(p)$ и переходя к оригиналам получим

$$\begin{cases} X(p) = \frac{1}{p-1} \to x(t) = e^t, \\ Y(p) = \frac{1}{p-1} \to y(t) = e^t. \end{cases}$$

9.7. *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} x' = y + z, & x(0) = 3, \\ y' = x + z, & y(0) = -1, \\ z' = x + y, & z(0) = 2. \end{cases}$$

Пусть $x(t) \to X(p),\ y(t) \to Y(p),\ z(t) \to Z(p)$. Тогда по теореме дифференцирования оригинала (свойство 6), находим изображения:

$$\begin{aligned} x'(t) &\to pX(p) - x(0) = pX(p) - 3, \\ y'(t) &\to pY(p) - y(0) = pY(p) + 1, \\ z'(t) &\to pZ(p) - z(0) = pZ(p) - 2. \end{aligned}$$

Система в изображениях будет иметь вид

$$\begin{cases} pX(p) - 3 = Y(p) + Z(p), \\ pY(p) + 1 = X(p) + Z(p), \\ pZ(p) - 2 = X(p) + Y(p). \end{cases}$$

Решая эту систему, например, по правилу Крамера, тогда

$$X(p) = \frac{\triangle_x}{\triangle}, Y(p) = \frac{\triangle_y}{\triangle}, Z(p) = \frac{\triangle_z}{\triangle},$$

$$\triangle = \begin{vmatrix} p & -1 & -1 \\ -1 & p & -1 \\ -1 & -1 & p \end{vmatrix} = p^3 - 3p - 2 = (p+1)^2(p-2),$$

$$\triangle_x = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & p & -1 \\ 2 & -1 & p \end{vmatrix} = p^2 + p - 2 = 3(p+1)\left(p - \frac{2}{3}\right),$$

$$\triangle_y = \begin{vmatrix} p & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & p \end{vmatrix} = -p^2 + 5p + 6 = -(p+1)(p-6),$$

$$\triangle_z = \begin{vmatrix} p & -1 & 3 \\ -1 & p & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2p^2 + 2p = 2p(p+1);$$

следовательно,

$$X(p) = \frac{3(p+1)\left(p - \frac{2}{3}\right)}{(p+1)^2(p-2)} = \frac{3p-2}{(p+1)(p-2)},$$

$$Y(p) = \frac{-(p+1)(p-6)}{(p+1)^2(p-2)} = -\frac{p-6}{(p+1)(p-2)},$$

$$Z(p)=\frac{2p(p+1)}{(p+1)^2(p-2)}=\frac{2p}{(p+1)(p-2)}.$$

Находя оригиналы для $X(p), Y(p), Z(p)$ с помощью второй теоремы разложения (свойство 12) получаем

$$x(t)=\operatorname*{res}_{-1}\frac{3p-2}{(p+1)(p-2)}e^{p\,t}+\operatorname*{res}_{2}\frac{3p-2}{(p+1)(p-2)}e^{p\,t}=\frac{5}{3}e^{-t}+\frac{4}{3}e^{2t},$$

$$y(t)=\operatorname*{res}_{-1}\frac{-(p-6)}{(p+1)(p-2)}e^{p\,t}+\operatorname*{res}_{2}\frac{-(p-6)}{(p+1)(p-2)}e^{p\,t}=-\frac{7}{3}e^{-t}+\frac{4}{3}e^{2t},$$

$$z(t)=\operatorname*{res}_{-1}\frac{2p}{(p+1)(p-2)}e^{p\,t}+\operatorname*{res}_{2}\frac{2p}{(p+1)(p-2)}e^{p\,t}=\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{4}{3}e^{2t}.$$

9.8. *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} x''=3(y-x+z), & x(0)=0, \quad x'(0)=0,\\ y''=x-y, & y(0)=0, \quad y'(0)=-1,\\ z''=-z, & z(0)=1, \quad z'(0)=0. \end{cases}$$

Пусть $x(t)\to X(p),\ y(t)\to Y(p),\ z(t)\to Z(p)$. Тогда по теореме дифференцирования оригинала (свойство 6), находим изображения:

$$\begin{aligned} &x''(t)\to p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p),\\ &y''(t)\to p^2Y(p)-py(0)-y'(0)=p^2Y(p)+1,\\ &z''(t)\to p^2Z(p)-pz(0)-z'(0)=p^2Z(p)-p. \end{aligned}$$

Система в изображениях будет иметь вид

$$\begin{cases} p^2X(p)=3(Y(p)-X(p)+Z(p)),\\ p^2Y(p)+1=X(p)-Y(p),\\ p^2Z(p)-p=-Z(p). \end{cases}$$

Решая эту систему относительно $X(p), Y(p), Z(p)$ получим

$$X(p)=\frac{3(p-1)}{p^2(p^2+4)},\quad Y(p)=\frac{3(p-1)}{p^2(p^2+1)(p^2+4)}-\frac{1}{p^2+1},\quad Z(p)=\frac{p}{p^2+1}.$$

Находя оригиналы для $X(p), Y(p), Z(p)$ получаем

$$\begin{aligned} &x(t)=\frac{3}{4}(1-t)-\frac{3}{4}\cos 2t+\frac{3}{8}\sin 2t,\\ &y(t)=\frac{3}{4}(1-t)+\frac{1}{4}\cos 2t-\frac{1}{8}\sin 2t-\cos t,\\ &z(t)=\cos t. \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА.

1. Лаврентьев М.А. Шабат Б.В. "Методы теории функций комплексной переменной", 1985.
2. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабинин М.Н. "Лекции по теории функций комплексной переменной", 1982.
3. Соломенцев Е.Д. "Функции комплексного переменного и их применения", 1988.
4. Гольдберг А.А., Шеремета М.М., Заблоцький М.В., Скасків О.Б. "Комплексний аналіз", 2002.
5. Свешников Ю.В., Тихонов А.Н. "Теория функций комплексной переменной", 1979.
6. Волковыский Л.И., Лунщ Г.Л., Араманович И.Г. "Сборник задач по теории функций комплексной переменной",
7. Шелковников Ф.А., Такайшвили К.Г. "Сборник упражнений по операционному исчислению", 1978.
8. Павлова Л.В., Редькіна О.І. "Теорія аналітичних функцій. Збірник вправ", 1980.
9. Ангиленко И.М., Козлова Р.В. "Задачи по теории функций комплексной переменной", 1976.
10. Краснов М.Л., Кисилев А.И., Макаренко Г.И. "Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости", 1981.
11. Фаворов С.Ю. "Методические указания на тему: "Вычисление некоторых типов несобственных интегралов методами комплексного анализа", 2001.
12. Зиненко С.Н. "Математический анализ: в 2-х частях. - Ч.1. Функции одной переменной", Харьков: ХНУ, 2005.