Аффиннопараллельные поверхности

Д. З. Гордевский

В метрической геометрии довольно хорошо изучены так называемые параллельные поверхности. Естественно поставить аналогичную задачу в аффинной геометрии. Но здесь при её решении встречаются трудности, главным образом технического порядка, иногда значительные.

Мной найдены основные тензоры и инварианты аффиннопараллельных поверхностей. Найдена также аффинная нормаль и выяснены условия существования взаимноаффиннопараллельных поверхностей.

Пусть задана поверхность $\bar{x}(u, v)$. Обозначим вектор её аффинной нормали через $\bar{y}$ и назовём поверхность $\overset{*}{\bar{x}} = \bar{x} + \sigma\bar{y}$, где $\sigma = \text{const.}$, поверхностью аффиннопараллельной к поверхности $\bar{x}$.

Проверим основное свойство поверхности $\overset{*}{\bar{x}}$: касательные плоскости к поверхности $\overset{*}{\bar{x}}$ параллельны соответствующим касательным плоскостям поверхности $\bar{x}$ (соответствие устанавливается аффинными нормалями к поверхности $\bar{x}$).

Пусть $\sigma = \sigma(u, v)$. Потребуем, чтобы

$$(\overset{*}{\bar{x}}_u\, \bar{x}_u\, \bar{x}_v) = 0 \quad \text{и} \quad (\overset{*}{\bar{x}}_v\, \bar{x}_u\, \bar{x}_v) = 0\ ^{1)}$$

т. е.

$$\sigma_u\, (\bar{y}\, \bar{x}_u\, \bar{x}_v) + \sigma\, (\bar{y}_u\, \bar{x}_u\, \bar{x}_v) = 0$$

и

$$\sigma_v\, (\bar{y}\, \bar{x}_u\, \bar{x}_v) + \sigma\, (\bar{y}_v\, \bar{x}_u\, \bar{x}_v) = 0.$$

Но, как известно [1], $(\bar{y}\ \bar{x}_u\ \bar{x}_v) \neq 0$, а $(\bar{y}_u\ \bar{x}_u\ \bar{x}_v) = (\bar{y}_v\ \bar{x}_u\ \bar{x}_v) = 0$; следовательно, $\sigma_u = 0$, $\sigma_v = 0$, т. е. $\sigma = \text{const}$.

Условие $\sigma = \text{const.}$ является необходимым и достаточным, чтобы поверхность $\overset{*}{\bar{x}} = \bar{x} + \sigma\bar{y}$ имела указанное выше свойство.

§ 1.

Приведём сначала несколько формул, которые можно получить из формул Бляшке (см. т. II, § 63) в тех же обозначениях.

Непосредственно можно проверить формулу

$$B_{i\alpha} B^{\alpha j} = -K\delta_i^j - 2HB_i^j\ ; \tag{1,1}$$

---

1) Принимаются обыкновенные обозначения частных производных $\bar{x}_u = \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}$ и смешанных произведений $(\overset{*}{\bar{x}}_u\ \bar{x}_u\ \bar{x}_v)$.

отсюда

$$B_{\alpha\beta} B^{\alpha\beta} = 4H^2 - 2K. \tag{1,2}$$

Введём тензор $S^{ij} = 2HG^{ij} + B^{ij}$. (1,3)

Из (1,1) и (1,3) получаем:

$$B_{i\alpha} S^{\alpha j} = -K\delta_i^j \tag{1,4}$$

и

$$B_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} = -2K. \tag{1,5}$$

Сворачивая (1,3) с G_{ij}, имеем:

$$G_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} = 2H. \tag{1,6}$$

Отметим соотношения

$$S^{11} = -\frac{B^{22}}{G}, \tag{1,7}$$

$$S^{12} = -\frac{B^{12}}{G}, \tag{1,8}$$

$$S^{22} = -\frac{B^{11}}{G}, \tag{1,9}$$

которые легко проверяются.

Проверим, например, соотношение (1,7):

$$S^{11} = 2HG^{11} + B^{11} = 2HG^{11} + G^{1\alpha} G^{1\beta} B_{\alpha\beta} =$$

$$= -(G^{11} B_{11} + 2G^{12} B_{12} + G^{22} B_{22}) G^{11} + G^{11} G^{11} B_{11} + 2G^{11} G^{12} B_{12} +$$

$$+ G^{12} G^{12} B_{22} = (G^{12} G^{12} - G^{11} G^{22}) B_{22} = -\frac{B_{22}}{G}.$$

Введём ещё такие тензоры:

$$M^{ij} = G^{ij} - \sigma S^{ij} = G^{ij}(1 - 2H\sigma) - \sigma B^{ij}, \tag{1,10}$$

$$N_{ij} = G_{ij} + \sigma B_{ij}. \tag{1,11}$$

С помощью (1,1) и (1,4) убеждаемся в справедливости соотношений

$$N_{i\alpha} M^{\alpha j} = \psi \delta_i^j, \quad N_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta} = 2\psi, \tag{1,12}$$

$$B_{i\alpha} M^{\alpha j} = B_i^j + \sigma K \delta_i^j, \tag{1,13}$$

где

$$\psi = K\sigma^2 - 2H\sigma + 1. \tag{1,14}$$

Обозначив

$$2\beta_{ij,k} = \frac{\partial B_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial B_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial B_{ij}}{\partial u^k} \tag{1,15}$$

выведем формулу

$$H_i = B^{\mu\nu} \Gamma_{i\mu,\nu} - G^{\mu\nu} \beta_{i\mu,\nu}, \tag{1,16}$$

где

$$2\Gamma_{i\mu,\nu} = \frac{\partial G_{i\nu}}{\partial u^{\mu}} + \frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial u^{i}} - \frac{\partial G_{i\mu}}{\partial u^{\nu}}.$$

1-й вывод. Диференцируя по u^k соотношение $G_{i\alpha} G^{\alpha j} = \delta^j_i$ и заменяя $\frac{\partial G_{i\alpha}}{\partial u^k}$ на $\Gamma_{ki,\alpha} + \Gamma_{k\alpha,i}$, получаем:

$$2G^{\alpha j}\Gamma_{ki,\alpha} = -G_{i\alpha} \cdot \frac{\partial G^{\alpha j}}{\partial u_k}. \tag{a}$$

Свернём (a) с G^{ri}:

$$\frac{\partial G^{rj}}{\partial u^k} = -2G^{ri} G^{\alpha j}\Gamma_{ki,\alpha}. \tag{в}$$

Диференцируя по u^k соотношение $2H = -G^{rj} B_{rj}$ и заменяя $\frac{\partial B_{rj}}{\partial u^k}$ на $\beta_{kr,j} + \beta_{kj,r}$, получим:

$$2H_k = -\frac{\partial G^{rj}}{\partial u^k} \cdot B_{rj} - 2G^{rj}\beta_{kr,j}. \tag{c}$$

Из (в) и (c) вытекает (1,16).

2-й вывод. Принимая во внимание, что $G^{\alpha\beta}\Gamma_{i\alpha,\beta} = \frac{1}{2G} \cdot \frac{\partial G}{\partial u^i}$, имеем:

$$-2H = G^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} = \frac{1}{G}(G_{22}B_{11} - 2G_{12}B_{12} + G_{11}B_{22}),$$

$$-2H_i = -\frac{1}{G^2}\cdot\frac{\partial G}{\partial u^i}(G_{22}B_{11} - 2G_{12}B_{12} + G_{11}B_{22}) +$$

$$+\frac{1}{G}\left(G_{22}\cdot\frac{\partial B_{11}}{\partial u^i} - 2G_{12}\frac{\partial B_{12}}{\partial u^i} + G_{11}\frac{\partial B_{22}}{\partial u^i}\right) +$$

$$+\frac{1}{G}\left(B_{11}\frac{\partial G_{22}}{\partial u^i} - 2B_{12}\frac{\partial G_{12}}{\partial u^i} + B_{22}\frac{\partial G_{11}}{\partial u^i}\right).$$

Воспользовавшись формулами (1,7), (1,8), (1,9), получаем.

$$-2H_i = 2H\cdot\frac{1}{G}\cdot\frac{\partial G}{\partial u^i} + G^{\alpha\beta}\cdot\frac{\partial B_{\alpha\beta}}{\partial u^i} - S^{\alpha\beta}\frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial u^i},$$

$$-2H_i = 4HG^{\alpha\beta}\Gamma_{i\alpha,\beta} + 2G^{\alpha\beta}\beta_{i\alpha,\beta} - 2S^{\alpha\beta}\Gamma_{i\alpha,\beta}.$$

Но из (1,3) $S^{\alpha\beta} - 2HG^{\alpha\beta} = B^{\alpha\beta}$; следовательно, получаем (1,16).

Выведем, далее, соотношения:

$$K_i = -2\left(S^{\alpha\beta}\beta_{i\alpha,\beta} + KG^{\alpha\beta}\Gamma_{i\alpha,\beta}\right). \tag{1.17}$$

1-й вывод. Воспользовавшись формулой (b), находим:

$$\frac{\partial B^{\mu\nu}}{\partial u^i}=\frac{\partial}{\partial u^i}\left(G^{\mu l}G^{\nu s}B_{ls}\right)=$$

$$=-2G^{\mu m}G^{\nu n}\Gamma_{im,n}-2G^{\nu m}B^{\mu n}\Gamma_{im,n}+2G^{\mu l}G^{\nu s}\beta_{il,s}. \qquad (d)$$

Потом диференцируя соотношение (1,5) по u^i и с помощью формул (1,13), (d), (1,16) найдём (1,17).

2-й вывод. Напомним известную формулу [см. Blaschke, l. c., т. II, § 68, формула (22.a)]

$$K=\frac{1}{G}\left(B_{11}B_{22}-B_{12}^2\right).$$

Диференцируем по u^i.

$$K_i=-\frac{1}{G^2}\cdot G_i\left(B_{11}B_{22}-B_{12}^2\right)+\frac{1}{G}\left(B_{11}\frac{\partial B_{22}}{\partial u^i}+B_{22}\frac{\partial B_{11}}{\partial u^i}-2B_{12}\frac{\partial B_{12}}{\partial u^i}\right)$$

или с помощью (1,7), (1,8), (1,9)

$$K_i=-2KG^{\mu\nu}\Gamma_{i\mu,\nu}-2S^{\mu\nu}\beta_{i\mu,\nu}.$$

Сообщим формулам (1,16) и (1,17) несколько иной вид, вводя обозначения

$$2\gamma_{ij,k}=\frac{\partial N_{ik}}{\partial u^j}+\frac{\partial N_{jk}}{\partial u^i}-\frac{\partial N_{ij}}{\partial u^k}. \qquad (1,18)$$

Принимая во внимание (1,11), очевидно, имеем:

$$\gamma_{ij,k}=\Gamma_{ij,k}+\sigma\beta_{ij,k}. \qquad (1,19)$$

Умножая (1,16) на σ и заменяя $\sigma\beta_{i\mu,\nu}$ из (1,19), получаем:

$$\sigma H_i=N^{\mu\nu}\Gamma_{i\mu,\nu}-G^{\mu\nu}\gamma_{i\mu,\nu}. \qquad (1,20)$$

Если умножить (1,17) на σ^2 и (1,16) на -2σ и сложить, потом из (1,19) заменить $\sigma\beta_{i\mu,\nu}$ и, наконец, учесть формулы (1,3), (1,10), (1,11) и (1,14), то получим:

$$\psi_i=2\left(M^{\mu\nu}\gamma_{i\mu,\nu}-\psi G^{\mu\nu}\Gamma_{i\mu,\nu}\right). \qquad (1,21)$$

§ 2.

Первый основной тензор поверхности $\overset{*}{\bar{x}}$.

Обозначения тензоров и инвариантов поверхности $\overset{*}{\bar{x}}$ будут отличаться от обозначений тензоров и инвариантов поверхности $\bar{x}$ (которыми пользуется Бляшке) звездочкой вверху.

Непосредственным подсчётом находим:

$$(\overset{*}{\bar{x}}_{ij}\,\overset{*}{\bar{x}}_1\,\overset{*}{\bar{x}}_2)=|G|^{1/2}\psi(G_{ij}+\sigma B_{ij})\,[1]; \qquad (2,1)$$

[1]) $\overset{*}{\bar{x}}_{ij}=\overset{*}{\bar{x}}_{i,j}$ обозначает ковариантную производную от $\overset{*}{\bar{x}}_i$ по первому основному тензору поверхности $\bar{x}$.

отсюда первый основной тензор поверхности x будет иметь вид:

$$\overset{*}{G}_{ij} = \lambda\,(G_{ij} + \sigma B_{ij}) = \lambda N_{ij}, \tag{2,2}$$

где

$$\lambda = |\psi|^{1/4}, \tag{2,3}$$

причём λ берём со знаком ψ.

Опираясь на соотношения (1,7), (1,8), (1,9), находим:

$$\overset{*}{G}{}^{ij} = \tau\,(G^{ij} - \sigma S^{ij}) = \tau M^{ij}, \tag{2,4}$$

где

$$\tau = \frac{1}{\lambda\psi}, \tag{2,5}$$

причём $\overset{*}{G}{}^{ij}$ определяется как обыкновенно:

$$\overset{*}{G}_{i\alpha}\,\overset{*}{G}{}^{\alpha j} = \delta_i^j .$$

Символы Кристоффеля задаются формулами:

$$2\overset{*}{\Gamma}_{ij,k} = 2\lambda\gamma_{i.jk} + \lambda_i N_{jk} + \lambda_j N_{ik} - \lambda_k N_{ij}, \tag{2,6}$$

$$\frac{2}{\tau}\overset{*}{\Gamma}{}^r_{ij} = \psi\left(\lambda_i \delta_j^r + \lambda_j \delta_i^r\right) - N_{ij} M^{r\alpha}\lambda_\alpha + 2\lambda M^{r\alpha}\gamma_{ij,\alpha}. \tag{2,7}$$

Отметим соотношение, которое получаем с помощью (1,12) (2,4) и (2,7):

$$\overset{*}{G}{}^{\alpha\beta}\,\overset{*}{\Gamma}{}^r_{\alpha\beta} = \tau^2\lambda M^{rm} M^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta,m}. \tag{2,8}$$

§ 3.

Вектор аффинной нормали поверхности $\overset{*}{\bar{x}}$.

Условимся обозначать ковариантные производные по тензору $\overset{*}{G}_{ij}$ косой черточкой.

$$2\overset{*}{\bar{y}} = \overset{*}{G}{}^{\mu\nu}\,\overset{*}{\bar{x}}_{\mu/\nu} = \overset{*}{G}{}^{\mu\nu}\left(\bar{x}_{\mu/\nu} + \sigma B^s_{\mu/\nu}\,\bar{x}_s + \sigma B^s_\mu\,\bar{x}_{s/\nu}\right). \tag{3,1}$$

Воспользовавшись формулами

$$\overset{*}{\bar{x}}_{\mu/\nu}\;\bar{x}_{\mu\nu} + \left(\Gamma^s_{\mu\nu} - \overset{*}{\Gamma}{}^s_{\mu\nu}\right)\bar{x}_s = A^s_{\mu\nu}\,\bar{x}_s + G_{\mu\nu}\,\bar{y} + \left(\Gamma^s_{\mu\nu} - \overset{*}{\Gamma}{}^s_{\mu\nu}\right)\bar{x}_s,$$

$$B^s_{\mu/\nu} = G^{sm}\left(\beta_{\mu\nu,m} + \beta_{m\nu,\mu}\right) - \overset{*}{\Gamma}{}^m_{\mu\nu} B^s_m - \Gamma^m_{l\nu} B_{m\mu} G^{sl} - \left(\Gamma^s_{m\nu} - \overset{*}{\Gamma}{}^s_{m\nu}\right) B^m_\mu,$$

получим:

$$2\overset{*}{\bar{y}} = \overset{*}{G}{}^{\mu\nu}\Big\{A^s_{\mu\nu} + \Gamma^s_{\mu\nu} - \overset{*}{\Gamma}{}^s_{\mu\nu} + \sigma\Big[B^m_\mu A^s_{m\nu} + G^{sm}\left(\beta_{\mu\nu,m} + \beta_{m\nu,\mu}\right) -$$

$$- \overset{*}{\Gamma}{}^m_{\mu\nu} B^s_m - \Gamma^l_{m\nu} B_{l\mu} G^{ms}\Big]\Big\}\bar{x}_s + \overset{*}{G}{}^{\mu\nu} N_{\mu\nu}\,\bar{y}. \tag{3,2}$$

При вычислении коэфициента при $\bar{x}_s$ принимаем во внимание, что

$$\overset{*}{G}{}^{\mu\nu}\left(A^s_{\mu\nu} + \sigma B^m_\mu A^s_{m\nu}\right) = 0.$$

В самом деле, если учесть формулы (2,4), (1,10), (1,13) и условия аполярности $G^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta r} = 0$, то

$$M^{\mu\nu}\left(A^s_{\mu\nu} + \sigma B^m_\mu A^s_{m\nu}\right) = \left[(1-2H\sigma)G^{\mu\nu} - \sigma B^{\mu\nu}\right] A^s_{\mu\nu} + \sigma M^{\mu\nu} B^m_\mu A^s_{m\nu} =$$

$$= -\sigma B^{\mu\nu} A^s_{\mu\nu} + \sigma M^{\mu\nu} B^m_\mu A^s_{m\nu} = -\sigma B^{\mu\nu} A^s_{\mu\nu} + \sigma\left(B^{\nu m} + \sigma K G^{\nu m}\right) A^s_{m\nu} = 0.$$

Формула (3,2) в таком случае будет иметь вид:

$$\frac{2}{\tau}\overset{*}{\bar{y}} = M^{\mu\nu}\left\{\Gamma^s_{\mu\nu} - \overset{*}{\Gamma}{}^s_{\mu\nu} + \sigma\left[G^{sm}\left(\beta_{\mu\nu,m} + \beta_{m,\mu\nu}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \overset{*}{\Gamma}{}^m_{\mu\nu} B^s_m - \Gamma^l_{m\nu} B_{l\mu} G^{ms}\right]\right\} \bar{x}_s + 2\psi\bar{y}\ . \tag{3,3}$$

Пусть

$$\frac{2}{\tau}\overset{*}{\bar{y}} = A^r \bar{x}_r + 2\psi\bar{y}\,, \tag{3,3'}$$

тогда, принимая во внимание формулу (2,8), будем иметь

$$A^r = M^{\mu\nu}\left\{\Gamma^r_{\mu\nu} - \tau\lambda M^{rm}\gamma_{\mu\nu,m} + \sigma G^{rm}\left(\beta_{\mu\nu,m} + \beta_{m\nu,\mu}\right) - \right.$$

$$\left. - \sigma\tau\lambda M^{km}\gamma_{\mu\nu,m} B^r_k - \sigma\Gamma^n_{m\nu} B_{n\mu} G^{mr}\right\}\ .$$

Но (см. 1,10 и 1,13)

$$M^{rm}\gamma_{\mu\nu,m} + \sigma M^{km} B^r_k \gamma_{\mu\nu,m} = \gamma_{\mu\nu,m}\left[M^{rm} + \sigma\left(B^{mr} + \sigma K G^{mr}\right)\right] = \gamma_{\mu\nu,m} G^{mr}\psi.$$

И, следовательно, если принять во внимание соотношение $\tau\lambda\psi = 1$,

$$A^r = M^{\mu\nu}\left\{\Gamma^r_{\mu\nu} - G^{mr}\gamma_{\mu\nu,m} + \sigma G^{rm}\left(\beta_{\mu\nu,m} + \beta_{m\nu,\mu}\right) - \sigma\Gamma^n_{m\nu} B_{n\mu} G^{mr}\right\}\ .$$

Замечая, что

$$\Gamma^r_{\mu\nu} + \sigma G^{mr}\beta_{\mu\nu,m} = G^{mr}\left(\Gamma_{\mu\nu,m} + \sigma\beta_{\mu\nu,m}\right) = G^{mr}\gamma_{\mu\nu,m}\,,$$

имеем

$$A^r = \sigma M^{\mu\nu} G^{mr}\left(\beta_{m\nu,\mu} - \Gamma^n_{m\nu} B_{n\mu}\right) = M^{\mu\nu} G^{mr}\left(\gamma_{m\nu t}\,, \Gamma_\mu - \Gamma_{m\nu,\mu} - \sigma\Gamma^n_{m\nu} B_{n\mu}\right) =$$

$$= M^{\mu\nu} G^{mr}\left(\gamma_{m\nu,\mu} - \Gamma_{m\nu,\mu} - \sigma G_{\mu k} B^{nk}\Gamma_{m\nu,n}\right) = M^{\mu\nu} G^{mr}\gamma_{m\nu,\mu} -$$

$$- G^{mr}\left\{\left[G^{\mu\nu}(1-2H\sigma) - \sigma B^{\mu\nu}\right]\Gamma_{m\nu,\mu} - \sigma\left[G^{\mu\nu}(1-2H\sigma) - \sigma B^{\mu\nu}\right] G_{\mu k} B^{nk}\Gamma_{m\nu,\mu}\right\}$$

$$A^r = M^{\mu\nu} G^{mr}\gamma_{m\nu,\mu} - G^{mr}\left\{\left[G^{\mu\nu}(1-2H\sigma) - \sigma B^{\mu\nu}\right]\Gamma_{m\nu,\mu} - \right.$$

$$\left. - (1-2H\sigma) B^{n\nu}\Gamma_{m\nu,n} - \sigma^2\left(-KG^{\nu n} - 2HB^{\nu n}\right)\Gamma_{m\nu,n}\right\}$$

$$A^r = M^{\mu\nu} G^{mr}\gamma_{m\nu,\mu} - \psi G^{mr} G^{\mu\nu}\Gamma_{m\nu,\mu}$$

или (см. 1,21)

$$A^r = \frac{1}{2} G^{mr}\psi_m\ .$$

Следовательно, окончательно приходим к такой формуле:

$$\frac{4}{\tau}\overset{*}{\bar{y}} = G^{\alpha\beta}\psi_\alpha \bar{x}_\beta + 4\psi\bar{y}. \tag{3,4}$$

Примечание 1. Поверхность $\overset{*}{\bar{x}} = \bar{x} + \sigma\bar{y}$ будет иметь общие аффинные нормали (в соответственных точках) с поверхностью $\bar{x}$ при всяком $\sigma = \text{const.}$ лишь тогда, если на поверхности осуществлены соотношения

$$G^{i\alpha}\psi_\alpha = 0 \tag{3,5}$$

или, свернув (3,5) с G_{kl},

$$\psi_k = 0 \tag{3,6}$$

или (см. 1,14)

$$K_u\sigma - 2H_u = 0 \quad \text{и} \quad K_v\sigma - 2H_v = 0, \tag{3,6'}$$

т. е.

$$K = \text{const.} \quad H = \text{const.} \tag{3,7}$$

Класс поверхностей, характеризующихся условиями (3,7), как известно, состоит из собственно аффиннсфер и линейчатых поверхностей постоянной аффинной кривизны (см. Бляшке, т. II, § 88).

Примечание 2. Если не требовать, чтобы условия (3,6) выполнялись для всякого σ, то из этих условий получим линейное соотношение между аффинными кривизнами:

$$K\sigma - 2H = \text{const.}$$

Наоборот, если между аффинными кривизнами K и H поверхности $\bar{x}$ существует линейная зависимость с постоянными коэфициентами

$$AK + BH + C = 0 \tag{3,8}$$

где $A \neq 0$, $B \neq 0$, то при

$$\sigma = -\frac{2A}{B} \tag{3,9}$$

будут выполняться условия (3,6'), т. е. среди поверхностей $\overset{*}{\bar{x}} = \bar{x} + \sigma\bar{y}$, аффиннопараллельных к поверхности $\overset{*}{x}$, аффинные кривизны которой связаны соотношеннем (3,8), всегда существует одна, именно поверхность $\bar{x} - \frac{2A}{B}\bar{y}$, которая будет иметь в соответственных точках общие аффинные нормали с поверхностью $\bar{x}$.

Результат, который указан в примечаниях 1 и 2, был получен ранее W. van der Woude [2], с помощью асимптотических линий, взятых в качестве параметрических, и W. Süss'om [3] с помощью линий аффинной кривизны, взятых в качестве параметрических.

Очень простое решение дал Я. П. Бланк[1]), воспользовавшись

[1]) См. помещённую далее заметку.

формулами Родрига. Для классов поверхностей (3,7) и (3,8) формула (3,4) будет иметь вид

$$\overset{*}{\bar{y}} = \psi\tau\bar{y}, \tag{3,10}$$

где ψ и τ для класса поверхностей (3,8) вычисляются при

$$\sigma = -\frac{2A}{B}.$$

§ 4.

Основные инварианты поверхности $\overset{*}{\bar{x}}$.

Найдём сначала тензор $\overset{*}{B}_{ij}$, пользуясь соотношениями

$$\overset{*}{\bar{y}}_i = \overset{*}{B}{}_i^\alpha \overset{*}{x}_\alpha \ . \tag{4,1}$$

Ищем $\overset{*}{\bar{y}}_i$ как ковариантную производную по тензору G_{ij}, пользуясь формулами (3,4) и приравнивая нулю коэфициент при $\bar{y}$ (ведь касательные плоскости к поверхностям $\bar{x}$ и $\overset{*}{\bar{x}}$ в соответствующих точках параллельны между собой, следовательно векторы $\overset{*}{\bar{y}}_i$ компланарны векторам $\bar{x}^k$).

$$\overset{*}{\bar{y}}_i = P_i^\beta \bar{x}_\beta , \tag{4,2}$$

где

$$P_i^j = \frac{1}{4}\left[G^{\alpha j}(\psi_\alpha\tau)_{,i} + \tau\psi_\alpha A_i^{\alpha j}\right] + \tau\psi B_i^j \tag{4,3}$$

и $(\psi_\alpha\tau)_{,i}$ есть ковариантная производная по тензору G_{ij} от $\psi_\alpha\tau$.

Далее из (4,1) получаем:

$$\overset{*}{\bar{y}}_i = \left(\overset{*}{B}{}_i^\beta + \sigma\overset{*}{B}{}_i^\alpha B_\alpha^\beta\right)\bar{x}_\beta . \tag{4,4}$$

Сравнение формул (4,2) и (4,4) даёт:

$$\overset{*}{B}{}_i^j + \sigma\overset{*}{B}{}_i^\alpha B_\alpha^j = P_i^j . \tag{4,5}$$

Свернём (4,5) с B_j^k и заменим $B_\alpha^j B_j^k$ по формуле (1,1), тогда

$$-K\sigma\overset{*}{B}{}_i^j + (1-2H\sigma)\overset{*}{B}{}_i^\alpha B_\alpha^j = P_i^\alpha B_\alpha^j . \tag{4,6}$$

Умножив (4,5) на $(1-2H\sigma)$ и (4,6) на $-\sigma$ и, сложив, получим:

$$\psi\overset{*}{B}{}_i^j = P_i^j(1-2H\sigma) - \sigma P_i^\alpha B_\alpha^j . \tag{4,7}$$

Отсюда, с помощью формул (2,4), (1,1), (1,13) и 4,3), после некоторых вычислений, находим:

$$\frac{4}{\lambda}\overset{*}{B}_{ik} = (\psi_k\tau)_{,i} + \tau\psi_\alpha A_{ik}^\alpha + 4\psi\tau B_{ik} \ . \tag{4,8}$$

Сворачивая (4,8) с $\overset{*}{G}{}^{ik}$ и принимая во внимание, что $\overset{*}{G}{}^{\alpha\beta}\overset{*}{B}_{\alpha\rho} = -2\overset{*}{H}$, получим:

$$8\psi\overset{*}{H} = 8\tau\psi(H - K\sigma) - M^{\alpha\beta}(\psi_\alpha\tau)_{,\beta} + \sigma\tau\psi_\alpha A^{\alpha\beta\omega}B_{\beta\omega}\,. \tag{4,9}$$

Вторую аффинную кривизну поверхности $\overset{*}{x}$ найдём по формуле $2\overset{*}{K} = 4\overset{*}{H}{}^2 - \overset{*}{B}{}^{\alpha\beta}\overset{*}{B}_{\alpha\beta}$ (см. 1,12). Опуская несложные вычисления, приводим результат:

$$32\psi^2\overset{*}{K} = \left[M^{\alpha\beta}(\psi_\alpha\tau)_{,\beta} - \sigma\tau\psi_\alpha A^{\alpha\beta\omega}B_{\beta\omega} + 8\tau\psi(K\sigma - H)\right]^2 -$$

$$- M^{s\alpha}M^{r\beta}\left[(\psi_s\tau)_{,r} + \tau\psi_\mu A^\mu_{rs} + 4\psi\tau B_{rs}\right]\left[(\psi_\alpha\tau)_{,\beta} + \tau\psi_\nu A^\nu_{\alpha\beta} + 4\psi\tau B_{\alpha\beta}\right]. \tag{4,10}$$

Для поверхностей, рассмотренных в примечаниях § 3 ($\psi = \text{const.}$), формулы (4,9) и (4,10) значительно упрощаются:

$$\overset{*}{H} = \tau(H - K\sigma), \tag{4,11}$$

$$\overset{*}{K} = \tau^2\psi K. \tag{4,12}$$

Впрочем, эти формулы можно получить, и не пользуясь общими координатами. В самом деле, имея в виду формулу (3,10), применим формулу Родрига к данной поверхности $d\overline{x} + Kd\overline{y} = 0$ и к аффиннопараллельной поверхности $d\overline{x} + (\sigma + \overset{*}{K}\psi\tau)\,d\overline{y} = 0$. Тогда из соотношений

$$\sigma + \overset{*}{R}_1\psi\tau = R_1 \quad \text{и} \quad \sigma + \overset{*}{R}_2\psi\tau = R_2,$$

опираясь на определение аффинных кривизн, получаем (4,11) и (4,12).

Если на данной поверхности имеет место соотношение

$$AK + BH + C = 0,$$

то (см. § 3, примечание 2) из (4,11) и (4,12) получим:

$$\overset{*}{H} = \frac{\tau}{B}(-BH - 2C), \tag{4,13}$$

$$\overset{*}{K} = -\frac{\tau^2\psi}{A}(BH + C). \tag{4,14}$$

Из (4,13) и (4,14) выходит, что на поверхности $\overset{*}{\overline{x}}$ также будет осуществляться линейная зависимость между аффинными кривизнами, а именно:

$$A\overset{*}{K} - B\tau\psi\overset{*}{H} - C\tau^2\psi = 0. \tag{4,15}$$

Следовательно, для неё также можно построить единственную аффиннопараллельную поверхность с общими аффинными нормалями. Легко видеть, что этой поверхностью будет исходная поверхность $\overline{x}$.

В самом деле, по аналогии с формулой (3,9), из (4,15) находим

$$\overset{*}{\sigma} = \frac{2A}{B\tau\psi}.$$

Поверхность $\overset{*}{\overset{*}{x}} = \overset{*}{x} + \overset{*}{\sigma}\,\overset{*}{\bar{y}}$, если заменить $\overset{*}{x}$ на $\bar{x} - \frac{2A}{B}\bar{y}$, $\overset{*}{\sigma}$ на $\frac{2A}{B\tau\psi}$ и $\overset{*}{\bar{y}}$ на $\tau\psi\bar{y}$, есть поверхность $\bar{x}$. Коротко скажем, что мы имеем в данном случае пару аффиннопараллельных поверхностей с общими аффинными нормалями.

Интересен частный случай: $C = 0$; тогда

$$\frac{H}{K} = -\frac{A}{B} \quad \text{или} \quad R_1 + R_2 = \text{const.} = \sigma,$$

т. е. поверхности пары аффиннопараллельных поверхностей с общими аффинными нормалями в этом случае симметричны между собой относительно средней поверхности конгруэнций их общих аффинных нормалей.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА:

[1] Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie, т. II, § 59, форм. (134) и § 40, форм. (27).

[2] W. van der Woude, Ein Problem der Affingeometrie, Math. Ztschr. 26, S. 186—95.

[3] W. Süss, Wechselseitig affinparallele Kurven und Flächen, Math. Ann., Bd. 98, S. 313—320.