Мы должны быть благодарны Господу за то, что Он создал мир таким, что всё простое в нём истинно, а всё сложное – ложно.

Григорий Сковорода
(украинский философ XVIII века)

Одна из основных целей теоретического исследования в любой области знаний состоит в том, чтобы найти такую точку зрения, с которой объект представляется в своей предельной простоте.

Джосайя Уиллард Гиббс
(американский физик-теоретик конца XIX века)

Не следует слишком полагаться на проницательность читателей: иной раз полезно разжевать свою мысль.

Антуан де Ривароль
(французский писатель XVIII века)

Когда преподаёшь, можно думать о самых простых вещах, в которых очень хорошо разбираешься. Это даже развлечение и удовольствие. Совсем неплохо обдумать все эти простые вопросы ещё раз. Нет ли лучшего объяснения? Нет ли связанных с этой темой новых проблем? Нельзя ли тут придумать что-нибудь новое? Про простые вещи легко думать. Если вы не можете придумать ничего нового, не беда: студентам можно рассказать, что вы думали об этом раньше. Если вы придумаете что-то новое, будет тем более приятно.

Ричард Фейнман
(американский физик-теоретик XX века)

ПРЕДИСЛОВИЕ

В учебном пособии дано элементарное изложение теории сингулярных и гиперсингулярных интегральных операторов, а также операторов с логарифмическим ядром в пространствах тригонометрических и алгебраических полиномов.

В пространстве тригонометрических полиномов со скалярным произведением

$$\left(f,g\right)_L = \int_0^{2\pi} f(\varphi)\overline{g(\varphi)}\,d\varphi$$

описано действие указанных операторов на ортогональный базис $\left\{e^{in\varphi}\right\}_{n\in Z}$. Дано элементарное доказательство спектральных соотношений для оператора Гильберта, после чего легко получаются спектральные соотношения как для гиперсингулярных, так и для операторов с логарифмическим ядром.

Пополняя пространство тригонометрических полиномов по метрике, порожденной скалярным произведением, и расширяя по непрерывности оператор Гильберта, приходим к гильбертову пространству $L_2(0,2\pi)$ и непрерывному оператору Гильберта в нем.

Пополняя пространство тригонометрических полиномов по метрике, порожденной скалярным произведением

$$(f,g)_W = \int_0^{2\pi} \left\{ f(\varphi)\overline{g(\varphi)} + f'(\varphi)\overline{g'(\varphi)} \right\} d\varphi,$$

приходим к гильбертову пространству $W_2^1(0,2\pi)$ и непрерывному гиперсингулярному оператору адамаровского типа в нем.

Сингулярные интегральные операторы с ядром Коши изучаются в парах пространств алгебраических полиномов со скалярными произведениями

$$(p,q)_I = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \text{ и } (p,q)_{II} = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\sqrt{1-t^2}\,dt .$$

Ортогональные базисы в этих пространствах - системы полиномов Чебышева I и II рода соответственно:

$$\{T_n(t)\}_{n=0}^{\infty} \text{ и } \{U_{n-1}(t)\}_{n=1}^{\infty}$$

Описано действие сингулярных интегральных операторов на введенные базисы в пространствах алгебраических полиномов. Далее, пополняя введенные пары пространств по метрикам, порожденным соответствующими скалярными произведениями, и продолжая по непрерывности сингулярные интегральные операторы в этих парах пространств, приходим к парам гильбертовых пространств

$$\{L_{2,\rho}(-1,1), L_{2,\rho^{-1}}(-1,1)\},\ \{L_{2,\rho^{-1}}(-1,1), L_{2,\rho}(-1,1)\},\ \rho = \rho(t) = \left(1-t^2\right)^{-1/2}$$

и непрерывным сингулярным интегральным операторам с ядром Коши в них.

Изучено действие гиперсингулярного интегрального оператора на базисные элементы пространства полиномов, а также действие интегральных операторов с логарифмическим ядром на базисы из полиномов Чебышева. Это позволяет построить расширение рассматриваемых операторов на соответствующие пары гильбертовых пространств.

Значительная часть материала, изложенного в учебном пособии, посвящена квадратурным формулам интерполяционного типа для несобственных, сингулярных и гиперсингулярных интегралов с использованием подготовленной теории интегральных операторов в пространствах полиномов. Приведены оригинальные элементарные доказательства квадратурных формул для сингулярных и гиперсингулярных интегралов.

Эти результаты образуют надежную теоретическую базу для построения дискретных математических моделей ряда двумерных краевых задач математической физики и численных методов решения сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений.

С.В. Жученко и С.А. Стешенко прочитали рукопись учебного пособия и сделали ряд замечаний, способствовавших улучшению текста. Автор выражает им глубокую благодарность.