УДК 513.88

М. И. ОСТРОВСКИЙ

ОБЛАСТИ СУММ УСЛОВНО СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Ряд $\sum x_k \left(= \sum_{k=1}^{\infty} x_k\right)$ в вещественном банаховом пространстве X будем называть сходящимся, если он сходится в сильной топологии. Сходящийся ряд называется условно сходящимся, если при некоторой перестановке его членов получается расходящийся ряд. Областью сумм $\sigma\left(\sum x_k\right)$ условно сходящегося ряда называется множество сумм всех его сходящихся перестановок. Известная теорема Римана утверждает, что область сумм условно сходящегося ряда в $\boldsymbol{R}$ совпадает с $\boldsymbol{R}$. Описание областей сумм условно сходящихся рядов в $\boldsymbol{R}^n$ дает следующая теорема, доказанная Леви для $n = 2$, а Штейницем — в общем случае.

Теорема А. (Леви—Штейниц). *Область сумм условно сходящегося ряда в $\boldsymbol{R}^n$ — смещенное подпространство (размерности от 1 до n).*

Пусть $\sum x_k$ — условно сходящийся ряд в X. Элемент $x^* \in X^*$ называется функционалом абсолютной сходимости [1], если сходится ряд $\sum |x^*(x_k)|$. Множество функционалов абсолютной сходимости обозначим $\Gamma\left(\sum x_k\right)$; это линейное, но в бесконечномерном случае не обязательно замкнутое подмножество в X^*. Через $A_\perp$ обозначим аннулятор множества $A \subset X^*$, то есть $A_\perp = \{x \in X : x^*(x) = 0,\ \forall x^* \in A\}$.

Теорема Б. (Штейниц). *Пусть $\sum x_k$ — условно сходящийся ряд в $\boldsymbol{R}^n$; x_0 — сумма ряда в его исходной перестановке. Тогда $\sigma\left(\sum x_k\right) = x_0 + \Gamma_\perp\left(\sum x_k\right)$.*

Заметим, что включение $\sigma\left(\sum x_k\right) \subset x_0 + \Gamma_\perp\left(\sum x_k\right)$ имеет место для всех условно сходящихся рядов. Это следует из того, что сумма абсолютно сходящегося ряда $\sum x^*(x_k)$ $\left(x^* \in \Gamma\left(\sum x_k\right)\right)$ не меняется при перестановке членов.

М. И. Кадец [2] доказал следующий аналог теоремы Леви—Штейница для рядов в пространствах L^p.

Теорема В [2]. *Пусть $\sum x_k$ — условно сходящийся ряд в L^p и пусть $\sum \|x_k\|^p < \infty$, если $1 \leqslant p \leqslant 2$; $\sum \|x_k\|^2 < \infty$, если $p > 2$. Тогда $\sigma\left(\sum x_k\right)$ — замкнутое смещенное подпространство в L^p.*

Пусть функция $\Phi : (\boldsymbol{R}^+)^{\boldsymbol{N}} \to \tilde{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{R}^+ \cup \{+\infty\}$ удовлетворяет условиям:

1) $a_i \leqslant b_i,\ \forall i \in \boldsymbol{N} \Rightarrow \Phi((a_i)) \leqslant \Phi((b_i))$;

2) $\Phi((a_i)) = \Phi((a_{\pi(i)}))$;

3) $\Phi((a_1, \ldots, a_n, \ldots)) < \infty \Rightarrow \Phi((a_n, a_{n+1}, \ldots)) \to 0$ при $n \to \infty$;

4) $\Phi((a \cdot a_i)) \leqslant a^{C_1}\Phi((a_i)),\ 0 < C_1 < \infty$;

5) $\Phi((a_i + b_i)) \leqslant C_2(\Phi((a_i)) + \Phi((b_i))),\ 0 < C_2 < \infty$.

Будем говорить, что Φ является функцией Штейница для банахова пространства X, если для любого набора $\{x_k\}_{k=1}^n \subset X$, $\sum x_k = 0$, найдется перестановка $\{x_{\pi(k)}\}_{k=1}^n$ такая, что

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left\| \sum_{k=1}^{j} x_{\pi(k)} \right\| \leqslant \Phi(\|x_1\|, \ldots, \|x_n\|, 0, \ldots)$$

Анализируя доказательство теоремы В в [2], видим, что оно естественным образом распадается на две части. Первую часть можно рассматривать как доказательство существования величин $C_p < \infty$ $(1 \leqslant p < \infty)$ таких, что функции

$$\Phi_p((a_i)) = \begin{cases} C_p\left(\sum a_k^p\right)^{1/p}, & 1 \leqslant p \leqslant 2, \\ C_p\left(\sum a_k^2\right)^{1/2}, & p > 2, \end{cases}$$

являются функциями Штейница пространств L^p. Во второй части по существу доказана следующая теорема.

Теорема В′. *Пусть* Φ *является функцией Штейница пространства* X, $\sum x_k$ — *условно сходящийся ряд в пространстве* X. *Если* $\Phi(\|x_1\|, \|x_2\|, \ldots) < \infty$, *то* $\sigma\left(\sum x_k\right)$ — *замкнутое смещенное подпространство.*

Анализируя последующие работы [3, 4], посвященные обобщениям теоремы Леви—Штейница, видим, что в них, по существу, дело сводится к отысканию функций Штейница различных классов пространств и применению теоремы В′. В частности, основной результат работы [4] можно сформулировать так:

Теорема Г [4]. *Пространство* X *имеет инфратип* p *в том и только в том случае, когда существует постоянная* $C < \infty$ *такая, что* $C\left(\sum a_k^p\right)^{1/p}$ *является функцией Штейница пространства* X.

Напомним, что, по определению [5], банахово пространство X имеет инфратип p $(p \geqslant 1)$, если для некоторой постоянной $C < \infty$ и произвольного конечного набора $\{x_k\}_{k=1}^n \subset X$ существует набор $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^n$; $\varepsilon_k = \pm 1$, такой, что

$$\left\|\sum \varepsilon_k x_k\right\| \leqslant C\left(\sum \|x_k\|^p\right)^{1/p}.$$

Если пространство имеет инфратип $p > 1$, то он называется B-выпуклым.

Работы [1, 6] посвящены перенесению на бесконечномерный случай теоремы Штейница. Используя понятие функции Штейница и развивая методы этих работ, покажем, что такое перенесение возможно в следующей общей форме.

Теорема 1. *Пусть* Φ *является функцией Штейница пространства* X, $\sum x_k$ — *условно сходящийся ряд в* X, $x_0 = \sum x_k$. *Если* $\Phi(\|x_1\|, \|x_2\|, \ldots) < \infty$, то $\sigma\left(\sum x_k\right) = x_0 + \Gamma_\perp\left(\sum x_k\right)$.

Доказательство. Поскольку включение $\sigma\left(\sum x_k\right) \subset x_0 + \Gamma_\perp\left(\sum x_k\right)$ имеет место для всех условно сходящихся рядов, то достаточно доказать включение в противоположную сторону.

Введем обозначения: $s_m = \sum\limits_{k=1}^{m} x_k$; $s\left(\sum_m\right) = \{y : y = x_{k_1} + \cdots + x_{k_n},\ m \leqslant k_1 < \cdots < k_n,\ 1 \leqslant n < \infty\}$. Очевидно, что доказываемое включение $\sigma\left(\sum x_k\right) \supset x_0 + \Gamma_\perp\left(\sum x_k\right)$ непосредственно вытекает из следующих соотношений:

$$\overline{\mathrm{conv}}\left(s_m + s\left(\textstyle\sum_{m+1}\right)\right) \supset x_0 + \Gamma_\perp\left(\textstyle\sum x_k\right); \tag{1}$$

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{\mathrm{conv}}\left(s_m + s\left(\textstyle\sum_{m+1}\right)\right) = \sigma\left(\textstyle\sum x_k\right). \tag{2}$$

Докажем (1). Пусть $y \in \Gamma_\perp\left(\sum x_k\right)$ таков, что $x_0 + y \notin \overline{\mathrm{conv}}(s_m + s\left(\sum_{m+1}\right))$. Тогда найдется функционал $f \in X^*$ такой, что $f(x_0 + y) > f(z)$ для любого z из $\overline{\mathrm{conv}}\left(s_m + s\left(\sum_{m+1}\right)\right)$. Полагая $z = x_0$, отсюда получаем $f(y) > 0$, следовательно, $f \notin \Gamma\left(\sum x_k\right)$. Это противоречит тому, что для любого конечного набора $x_{k_1}, \ldots, x_{k_n}$, $m + 1 \leqslant k_1 < \cdots < k_n$, выполняется $f(x_{k_1} + \cdots + x_{k_n}) < f(x_0 + y)$.

Чтобы получить (2) нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть Φ — функция Штейница банахова пространства X. Тогда для любого конечного набора векторов $\{h_i\}_{i=1}^n$ существует такой набор $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$; $\varepsilon_i = \pm 1$, что* $\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i h_i \right\| \leqslant 5C_2\Phi(\|h_1\|, \ldots, \|h_n\|, 0, \ldots)$.

Доказательство. Пусть $S = h_1 + \cdots + h_n$, а функционал $F \in X^*$ таков, что $F(S) = 1$; $\|F\| = 1/\|S\|$. Полагая $g_k = h_k - F(h_k)S$, имеем $\sum_{k=1}^n g_k = 0$; $\|g_k\| \leqslant 2\|h_k\|$. По определению функции Штейница найдется перестановка $\{k_i\}_{i=1}^n$ такая, что $\max\limits_{1 \leqslant r \leqslant n} \left\| \sum_{i=1}^r g_{k_i} \right\| \leqslant \Phi(2\|h_1\|, \ldots, 2\|h_n\|, 0, \ldots) \leqslant 2C_2\Phi(\|h_1\|, \ldots, \|h_n\|, 0, \ldots)$. Так как $\sum_{i=1}^n F(h_{k_i}) = 1$, то существует r такое, что $\left| \frac{1}{2} - \sum_{i=1}^r F(h_{k_i}) \right| \leqslant \frac{1}{2}\max|F(h_k)| \leqslant \frac{1}{2}\max\|h_k\|/\|S\|$. Следовательно,

$$\left\|2\sum_{i=1}^r h_{k_i} - \sum_{k=1}^n h_k\right\| = \left\|2\sum_{i=1}^r g_{k_i} + 2\sum_{i=1}^r F(h_{k_i})S - \sum_{k=1}^n h_k\right\| \leqslant$$
$$\leqslant 2\left\|\sum_{i=1}^r g_{k_i}\right\| + \|S\| \cdot \left|2\sum_{i=1}^r F(h_{k_i}) - 1\right| \leqslant 4C_2\Phi(\|h_1\|, \ldots$$
$$\ldots, \|h_n\|, 0, \ldots) + \max\|h_k\| \leqslant 4C_2\Phi(\|h_1\|, \ldots, \|h_n\|, 0, \ldots) +$$
$$+ C_2\Phi(\|h_1\|, \ldots, \|h_n\|, 0, \ldots) = 5C_2\Phi(\|h_1\|, \ldots$$
$$\ldots, \|h_n\|, 0, \ldots).$$

Так как сумма $2\sum_{i=1}^{r} h_{k_i} - \sum_{k=1}^{n} h_k$ имеет требуемый вид, то лемма доказана.

Замечание. Из этой леммы и результатов работы [5] следует, что пространство, имеющее нетривиальную функцию Штейница (то есть, не удовлетворяющую неравенству $\Phi((a_1, \ldots, a_n, \ldots)) \geqslant C\sum_{i=1}^{n} a_i$ ни с каким $C > 0$) является B — выпуклым.

Перейдем к доказательству (2). Рассуждениями, аналогичными проведенным в [7], доказывается.

Лемма 2. *Пусть Φ — функция Штейница банахова пространства X; $\sum x_k$ — условно сходящийся ряд в X, x — предельная точка частичных сумм некоторой его перестановки. Если при этом $\Phi(\|x_1\|, \ldots, \|x_n\|, \ldots) < \infty$, то $x \in \sigma(\sum x_k)$.*

Ясно, что для доказательства (2) нужно установить лишь включение $\bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{\operatorname{conv}}\,(s_m + s(\sum_{m+1})) \subset \sigma(\sum x_k)$. В силу леммы 2 для этого достаточно для произвольного $x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{\operatorname{conv}}\,(s_m + s(\sum_{m+1}))$ найти перестановку ряда $\sum x_k$, для которой x был бы предельной точкой частичных сумм. Будем строить такую перестановку. Зададимся последовательностью $\varepsilon_i \downarrow 0$.

Выберем m_1 таким, чтобы $\Phi(\|x_{m_1+1}\|, \|x_{m_1+2}\|, \ldots) < \varepsilon_1/(10C_2\sum 2^{-kC_1})$. Так как $x \in s_{m_1} + \overline{\operatorname{conv}}\,(s(\sum_{m_1+1}))$, то существуют числа $\delta_1, \ldots, \delta_k \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{k}\delta_i = 1$, такие, что $\|x - s_{m_1} - \sum_{i=1}^{k}\delta_i x_{n_i}\| < \varepsilon_1/2$; $m_1 + 1 \leqslant n_1 < \cdots < n_k$. Ясно, что числа δ_i можем считать двоично-рациональными. Пусть r — максимальное количество знаков в двоичном разложении δ_i. В силу леммы 1 найдутся $0 \leqslant \delta_i^1 \leqslant 1$, имеющие не более $(r-1)$ двоичных знаков после запятой, и такие, что $\|\sum \delta_i x_{n_i} - \sum \delta_i^1 x_{n_i}\| \leqslant 5C_2\Phi(2^{-r} \times \|x_{m_1+1}\|, 2^{-r}\|x_{m_1+2}\|, \ldots) \leqslant 5C_2 2^{-rC_1}\Phi(\|x_{m_1+1}\|, \ldots)$. Применив лемму 1 еще раз, найдем числа $0 \leqslant \delta_i^2 \leqslant 1$, имеющие не более чем $(r-2)$ двоичных знаков после запятой и такие, что $\|\sum \delta_i^1 x_{n_i} - \sum \delta_i^2 x_{n_i}\| \leqslant 5C_2\Phi(2^{-r+1}\|x_{m_1+1}\|, \ldots) \leqslant 5C_2 2^{(-r+1)C_1}\Phi(\|x_{m_1+1}\|, \|x_{m_1+2}\|, \ldots)$ и т. д. Применив лемму еще $(r-2)$ раза, найдем набор $\{q_{11}, \ldots, q_{1l_1}\} \subset \{n_1, \ldots, n_k\}$ такой, что $\|\sum_{i=1}^{k}\delta_i x_{n_i} - \sum_{i=1}^{l_1} x_{q_{1i}}\| \leqslant$

$\leqslant 5C_2 \sum_{n=1}^{r} 2^{-nC_1} \Phi(\|x_{m_1+1}\|, \|x_{m_1+2}\|, \ldots)$, и, следовательно, $\| x -$
$$- s_{m_1} - \sum_{i=1}^{l_1} x_{q_{1i}} \Big\| \leqslant 5C_2 \sum_{n=1}^{r} 2^{-nC_1} \Phi(\|x_{m_1+1}\|, \ldots) + \frac{\varepsilon_1}{2} < \varepsilon_1.$$

Выберем $m_2 > m_1$ так, чтобы $m_2 > q_{1l_1}$ и $\Phi(\|x_{m_2+1}\|, \|x_{m_2+2}\|, \ldots$ $\ldots) < \varepsilon_2 / (10C_2 \sum 2^{-kC_1})$. Проведя аналогичное рассуждение, найдем набор $\{q_{21}, \ldots, q_{2l_2}\} \subset \{m_2+1, m_2+2, \ldots\}$ такой, что $\| x - s_{m_2} - \sum_{i=1}^{l_2} x_{q_{2i}} \| < \varepsilon_2$ и т. д. Рассмотрим теперь следующую перестановку натурального ряда. Сначала поставим числа $1, 2, \ldots$ $\ldots, m_1$, за ними числа $q_{11}, \ldots, q_{1l_1}$, далее числа из множества $\{m_1+1, \ldots, m_2\} \setminus \{q_{11}, \ldots, q_{1l_1}\}$, за ними числа $\{q_{21}, \ldots, q_{2l_2}\}$, далее числа из множества $\{m_2+1, \ldots, m_3\} \setminus \{q_{21}, \ldots, q_{2l_2}\}$, и т. д. Ясно, что для соответствующей перестановки ряда $\sum x_k$ точка x является предельной для частичных сумм. Теорема доказана.

Из теоремы 1 и теоремы Г непосредственно вытекает

Теорема 2. *Пусть банахово пространство X имеет инфратип p, а $\sum x_k$ — условно сходящийся ряд с суммой x_0. Если $\sum \|x_k\|^p < \infty$, то $\sigma(\sum x_k) = x_0 + \Gamma_\perp(\sum x_k)$.*

Теорема 1 показывает, что для рядов, удовлетворяющих условию $\Phi(\|x_1\|, \ldots, \|x_n\|, \ldots) < \infty$, выполняется аналог не только теоремы Леви—Штейница, но и теоремы Штейница. В связи с этим возникает вопрос: существуют ли ряды, для которых имеет место утверждение теоремы Леви—Штейница, но не имеет места утверждение теоремы Штейница? Следующая теорема показывает, что такие ряды существуют.

Теорема 3. *В l_2 существует ряд, множество сумм которого одноточечно, но множество функционалов абсолютной сходимости не тотально.*

Доказательство. Обозначим через $e_0, e_1, \ldots, e_n, \ldots$ ортонормированный базис в l_2. Пусть $0 < \alpha < 1/2$. Рассмотрим ряд $\sum x_k$, где $x_{2n-1} = n^{-2\alpha} e_0 + n^{-\alpha} e_n$, $x_{2n} = -x_{2n-1}$. Покажем, что элемент $h = (h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots) \in l_2$ с $h_0 \neq 0$ не принадлежит $\Gamma(\sum x_k)$. В самом деле, имеем:

$$\sum_{k=1}^{2m} |(h, x_k)| \geqslant 2 \sum_{n=1}^{m} (|h_0| n^{-2\alpha} - |h_n| n^{-\alpha}) \geqslant$$
$$\geqslant 2|h_0| \sum_{n=1}^{m} n^{-2\alpha} - 2\Big(\sum_{n=1}^{m} n^{-2\alpha}\Big)^{1/2} \Big(\sum_{n=1}^{m} h_n^2\Big)^{1/2} \geqslant$$
$$\geqslant 2\Big(\sum_{n=1}^{m} n^{-2\alpha}\Big)^{1/2} \Big(|h_0| \Big(\sum_{n=1}^{m} n^{-2\alpha}\Big)^{1/2} - \|h\|\Big) \to \infty$$

при $m \to \infty$. Отсюда следует, что множество $\Gamma\left(\sum x_k\right)$ не является тотальным.

Покажем, что $\sigma\left(\sum x_k\right)$ состоит из единственной точки 0. Так как при $i > 0$ имеем $\sum_{k=1}^{\infty}(e_i, \ x_{\pi(k)}) = 0$, то сумма ряда $\sum x_{\pi(k)}$ должна иметь вид βe_0. Чтобы доказать, что при $\beta \neq 0$ будет $\beta e_0 \notin \sigma\left(\sum x_k\right)$, предположим противное. Пусть $\sum x_{\pi(k)} = \beta e_0$. Найдем n такое, что для $S_n^\pi = \sum_{i=1}^{n} x_{\pi(i)}$ имеем

$$\| S_n^\pi - \beta e_0 \| < \varepsilon. \tag{3}$$

Ясно, что $S_n^\pi = \tilde{S}_n^\pi$, где $\tilde{S}_n^\pi$ — сумма тех векторов x из $\{x_{\pi(i)}\}_{i=1}^n$, для которых $(-x) \notin \{x_{\pi(i)}\}_{i=1}^n$. Разобьем $\tilde{S}_n^\pi$ на две суммы: $\tilde{S}_n^\pi = \sum_{i \in M_1} x_{\pi(i)} + \sum_{i \in M_2} x_{\pi(i)}$, где $i \in M_1$ при четном $\pi(i)$ и $i \in M_2$ при нечетном $\pi(i)$. Рассматривая проекцию $\tilde{S}_n^\pi$ на e_0, получаем:

$$\left| \sum_{i \in M_1} (\pi(i)/2)^{-2\alpha} - \sum_{i \in M_2} ((\pi(i)+1)/2)^{-2\alpha} \right| > |\beta| - \varepsilon.$$

Рассмотрим ортопроектор P, проектирующий l_2 на подпространство, натянутое на $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$. Имеем

$$\| P\tilde{S}_n^\pi \| = \left(\sum_{i \in M_1} (\pi(i)/2)^{-2\alpha} + \sum_{i \in M_2} ((\pi(i)+1)/2)^{-2\alpha} \right)^{1/2} > (|\beta| - \varepsilon)^{1/2}.$$

Отсюда и из (3) получаем $(|\beta| - \varepsilon)^{1/2} < \varepsilon$. Выбирая ε достаточно малым, приходим к противоречию. Теорема доказана.

В работе [8] показано, что если не налагать никаких ограничений на условно сходящийся ряд в бесконечномерном пространстве, то область его сумм может не быть выпуклой. Оказывается, что при отсутствии ограничений, нельзя утверждать также и замкнутость $\sigma\left(\sum x_k\right)$. Модифицируя конструкцию работы [8], построим пример условно сходящегося ряда в $L^1([0, 1] \times [0, 1])$ с незамкнутой областью сумм.

Введем, следуя [8], в рассмотрение следующие функции из $L^1[0, 1]$: φ_{ik}^+, φ_{ik}^-; $i = 0, 1, 2, \ldots$; $k = 1, 2, \ldots, 2^i$:

$$\varphi_{ik}^{\pm}(x) = \begin{cases} \pm 1 & \text{при } x \in ((k-1)2^{-i}, \ k2^{-i}), \\ 0 & \text{при } x \in [0, 1] \setminus ((k-1)2^{-i}, \ k2^{-i}). \end{cases}$$

Исходной перестановкой ряда назовем следующую:

$$\varphi_{01}^+ + \varphi_{01}^- + \varphi_{11}^+ + \varphi_{11}^- + \varphi_{12}^+ + \varphi_{12}^- + \varphi_{21}^+ + \varphi_{21}^- + \cdots$$

Ясно, что в исходной перестановке ряд сходится к нулю, а также, что любая сходящаяся перестановка этого ряда сходится к почти всюду целозначной функции. Нам понадобится следующее замечание: для любого целого a существует перестановка с суммой $S(x)\equiv a$. Действительно, если $a>0$, то искомая перестановка — следующая:

$$\begin{gathered}\varphi_{01}^{+}+(\varphi_{11}^{+}+\varphi_{12}^{+})+(\varphi_{21}^{+}+\varphi_{22}^{+}+\varphi_{23}^{+}+\varphi_{24}^{+})+\cdots+\\+(\varphi_{a-1,1}^{+}+\varphi_{a-1,2}^{+}+\cdots+\varphi_{a-1,2^{a-1}}^{+})+\varphi_{01}^{-}+(\varphi_{a1}^{+}+\varphi_{a2}^{+}+\cdots+\\+\varphi_{a2^a}^{+})+\varphi_{11}^{-}+(\varphi_{a+1,1}^{+}+\cdots+\varphi_{a+1,2^a})+\varphi_{12}^{-}+\\+(\varphi_{a+1,\,2^a+1}^{+}+\cdots+\varphi_{a+1,\,2^{a+1}}^{+})+\varphi_{21}^{-}+(\varphi_{a+2,1}^{+}+\cdots\end{gathered}\qquad(4)$$

Чтобы получить перестановку с суммой $S(x)\equiv -a,\ a>0$, нужно в (4) вместо $\varphi_{ik}^{\pm}$ писать $\varphi_{ik}^{\mp}$.

Введем теперь систему функций в $L^1([0,1]\times[0,1])$: $g_{ik}^{+}(s,t)=\varphi_{ik}^{+}(s)$, $h_{ik}^{+}(s,t)=\sqrt{2}\,\varphi_{ik}^{+}(t)$, $g_{ik}^{-}(s,t)=\varphi_{ik}^{-}(s)$, $h_{ik}^{-}(s,t)=\sqrt{2}\varphi_{ik}^{-}(t)$.

Так как $g_{ik}^{+}=-g_{ik}^{-}$, $h_{ik}^{+}=-h_{ik}^{-}$ и нормы $\|g_{ik}^{\pm}\|$, $\|h_{ik}^{\pm}\|$ стремятся к нулю при $i\to\infty$, то из функций $\{g_{ik}^{+},\ g_{ik}^{-},\ h_{ik}^{+},\ h_{ik}^{-};\ i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ 2^i\}$ можно образовать условно сходящийся ряд.

Теорема 4. *Область сумм ряда, составленного из функций* $\{g_{ik}^{+},\ g_{ik}^{-},\ h_{ik}^{+},\ h_{ik}^{-};\ i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ 2^i\}$ — *незамкнутое множество.*

Доказательство. Из замечания следует, что плотное в $\boldsymbol{R}$ множество $D=\{a+b\sqrt{2}\colon a,\ b\in \boldsymbol{Z}\}$ содержится в области сумм этого ряда. Поэтому теорема будет доказана, если установим, что функции $f(s,t)\equiv\alpha$ при $\alpha\notin D$ не принадлежат области сумм. Предположим, что удалось расположить функции $g_{ik}^{\pm}$ и $h_{ik}^{\pm}$ в последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ так, чтобы ряд $\sum x_k$ сходился к $f(s,t)\equiv\alpha\notin D$. Найдем натуральное N такое, что

$$\Big\|\sum_{k=n}^{m}x_k\Big\|<\frac{1}{8}\ \text{при любых}\ m\geqslant n\geqslant N.\qquad(5)$$

Значение функции $\sum\limits_{k=1}^{N}x_k$ в точке (s,t) имеет вид $a(s)+\sqrt{2}\,b(t)$, где $a(s)$ и $b(t)$ — целые числа, по модулю не превосходящие N. Пусть $\delta_1=\min\limits_{1<|a|,\ |b|<N}|a+\sqrt{2}b-\alpha|$, N_1 таково, что $\Big\|\sum\limits_{k=1}^{N_1}x_k-f\Big\|<\delta_1/2$. Тогда мера множества тех точек квадрата, где $\Big|\sum\limits_{k=1}^{N_1}x_k(s,t)-\alpha\Big|\geqslant\delta_1$ меньше $1/2$. Следовательно, на множестве меры $>1/2$ значение функции $\sum_{k=1}^{\cdot\cdot 1} x_k$ отличается от значения функции $\sum_{k=1}^{N} x_k$. Разобьем сумму $\sum_{k=N+1}^{N_1} x_k$ на две: S_1 — составленную из функций $g_{ik}^{\pm}$, и S_2 — составленную из функций $h_{ik}^{\pm}$. Хотя бы одна из этих сумм является ненулевой на множестве меры $>1/4$. Пусть это будет S_1. Запишем $S_1 = \sum_{j=1}^{l} x_{k_j}$, $N < k_1 < \cdots < k_l \leqslant N_1$. Функции $x_{k_j}(s, t)$ имеют вид $\varphi_{ik}^{\pm}(s)$, и из (5) следует, что их носители имеют меру $<1/8$. Поэтому в S_1 можно выделить часть $\tilde{S}_1 = \sum_{i=1}^{p} x_{k_i}$ такую, что ее носитель Δ будет иметь меру $m(\Delta)$, удовлетворяющую условию $1/8 < m(\Delta) < 3/8$. Отсюда, ввиду целозначности $\tilde{S}_1$ следует, что $\|\tilde{S}_1\| > 1/8$. Так как $\left\| \sum_{k=N+1}^{k_p} x_k \right\| = \|\tilde{S}_1 + \tau\|$, где τ зависит только от t, то, обозначая через χ_Δ индикатор Δ, имеем

$$\left\| \sum_{k=N+1}^{k_p} x_k \right\| \geqslant \|\tilde{S}_1\| - \|\tau\chi_\Delta\| + \|\tau\chi_{([0,1]\times[0,1])\setminus\Delta}\| \geqslant$$
$$\geqslant \|\tilde{S}_1\| + \|\tau\|(1 - 2m(\Delta)) \geqslant \|\tilde{S}_1\| > 1/8.$$

Полученное неравенство противоречит (5). Теорема доказана.

Замечание. Для построенного ряда множество предельных точек частичных сумм не совпадает с областью сумм.

Автор выражает благодарность М. И. Кадецу за ряд ценных советов.

Список литературы: 1. *Фонф В. П.* Об условно сходящихся рядах в равномерно гладком пространстве Банаха.— Мат. заметки, 1972, **11**, № 2, с. 209—214. 2. *Кадец М. И.* Об условно сходящихся рядах в пространстве L_p.— Успехи мат. наук, 1954, **9**, вып. 1, с. 107—109. 3. *Троянски С.* Об условно сходящихся рядах в некоторых пространствах.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1967, вып. 5, с. 102—107. 4. *Кадец В. М.* B-выпуклость и лемма Штейница.— Изв. СКНЦ ВШ, 1984, № **4**, с. 69—72. 5. *Maurey B., Pisier G.* Series de variables aleatoires vectorielles independantes et proprietes geometriques des espaces de Banach.— Stud. math., 1976, **58**, p. 45—90. 6. *Печерский Д. В.* Теорема о проекциях переставленных рядов с членами из L_p.— Изв. АН СССР, 1977, **41**, № 1, с. 203—211. 7. *Кадец М. И.* Об одном свойстве ломаных в n-мерном пространстве.— Успехи мат. наук, 1953, **8**, вып. 1, с. 139—143. 8. *Корнилов П. А.* О перестановках условно сходящихся функциональных рядов.— Мат. сб., 1980, **113**, № 4. с. 598—616.

Поступила в редколлегию 30.01.85.