Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Соловйова Марія В'ячеславівна

УДК 517.982.22

ДИСЕРТАЦІЯ

"НАБЛИЖЕННЯ ОПЕРАТОРАМИ І ФУНКЦІОНАЛАМИ, ЩО ДОСЯГАЮТЬ НОРМИ"

Спеціальність 01.01.01 – "математичний аналіз"
(фізико-математичні науки)

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата
фізико-математичних наук.
Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.
________________ Соловйова М.В.

Науковий керівник Кадець Володимир Михайлович, доктор фізико-математичних наук, доцент.

Харків – 2018

АНОТАЦІЯ

Соловйова М. В. "Наближення операторами і функціоналами, що досягають норми". – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 "Математичний аналіз". – Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна Міністерства освіти і науки України, Харків, 2018.

У вступі обґрунтовано актуальність досліджуваної задачі, наведено зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Сформульовано мету, задачі та методи дослідження. Визначено наукову новизну і значення отриманих результатів. Надано відомості про публікації, особистий внесок здобувача та апробацію результатів дисертації.

Перший розділ присвячений огляду та аналізу літератури. Відправною точкою нашого дослідження є той факт, що множина функціоналів, що досягають норми, є щільною у спряженому просторі. Ця класична теорема була доведена у 1961 році Бішопом і Фелпсом. Через декілька років, Болобаш надав точнішу версію цієї теореми, яка дозволяє водночас наближувати функціонал та вектор, на якому норма майже досягається. Сьогодні цей дуже корисний результат називається *Теорема Бішопа-Фелпса-Болобаша.*

Лінденштраус досліджував узагальнення теореми Бішопа-Фелпса для лінійних векторозначних операторів. Він показав, що множина операторів, які досягають норми, не завжди є щільною у просторі всіх лінійних неперервних операторів, які діють з простору X у простір Y.

У 2008 Акоста, Арон, Гарсія та Маестре ввели властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша як поширення теореми Бішопа-Фелпса-Болобаша на векторозначний випадок.

Означення. Пара банахових просторів (X, Y) має *властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для операторів*, якщо для будь-якого $\delta > 0$ існує

такий $\varepsilon(\delta) > 0$, що для кожного $T \in S_{L(X,Y)}$, якщо $x \in S_X$ та $\|T(x)\| > 1 - \varepsilon(\delta)$, тоді існує $z \in S_X$ та $F \in S_{L(X,Y)}$ такі, що $\|F(z)\| = 1, \|x - z\| < \delta$ та $\|T - F\| < \delta$.

Під час огляду літератури було визначено мету роботи та важливі відкриті проблеми у цій галузі.

Другий розділ присвячений вивченню зв'язку між параметром рівномірної неквадратності та сферичним модулем Бішопа-Фелпса-Болобаша $\Phi^S_X(\varepsilon)$. Нещодавно Чіка, Кадець, Мартін, Морено-Пулідо, Рамбла-Барено у роботі "Bishop-Phelps-Bollobás moduli of a Banach space" ввели два модулі, які вимірюють для даного банахового простору, що є найкращою можливою теоремою Бішопа-Фелпса-Болобаша у цьому просторі. Ми будемо використовувати такі позначення:

$$\Pi(X) := \big\{(x, x^*) \in X \times X^* \,:\, \|x\| = \|x^*\| = x^*(x) = 1\big\}.$$

$$\Pi_\varepsilon(X) = \{(x, x^*) \in X \times X^* : \|x\| = \|x^*\| = 1,\, x^*(x) \geqslant 1 - \varepsilon\}.$$

Означення. Нехай X – банаховий простір. *Модулем Бішопа-Фелпса-Болобаша* простору X називається функція $\Phi_X : (0, 2) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ така, що для $\varepsilon \in (0, 2)$ значення $\Phi_X(\varepsilon)$ – це інфімум тих $\delta > 0$, що для будь-якої пари $(x, x^*) \in B_X \times B_{X^*}$ з $x^*(x) > 1 - \varepsilon$, існує пара $(y, y^*) \in \Pi(X)$ з $\|x - y\| < \delta$ та $\|x^* - y^*\| < \delta$. Підставляючи в це означення $(x, x^*) \in S_X \times S_{X^*}$ замість $(x, x^*) \in B_X \times B_{X^*}$ ми отримуємо означення *сферичного модуля Бішопа-Фелпса-Болобаша* $\Phi^S_X(\varepsilon)$.

У тій самій статті було показано, що $\Phi_X(\varepsilon) \leqslant \sqrt{2\varepsilon}$ для будь-якого банахового простору X і всіх $\varepsilon \in (0, 2)$. Більш того, у Теоремі 5.9 було доведено, що для рівномірно неквадратного простору X для всіх $\varepsilon \in (0, 1/2)$ виконується нерівність $\Phi^S_X(\varepsilon) < \sqrt{2\varepsilon}$. Доведення цього факту було важким, до цього ж з нього не було можливо отримати оцінку для $\Phi^S_X(\delta)$. У розділі 2 ми надаємо простіше доведення, з якого випливає кількісна оцінка у термінах параметру рівномірної неквадратності банахового простору X.

Ми нагадуємо, що рівномірно неквадратні простори були введені Джеймсом як ті простори, двовимірні підпростори яких рівномірно віддалені від $\ell_1^{(2)}$.

Іншими словами, банаховий простір X є *рівномірно неквадратним* тоді і тільки тоді, коли існує число $\alpha > 0$ таке, що

$$\frac{1}{2}(\|x+y\| + \|x-y\|) \leqslant 2 - \alpha$$

для всіх $x, y \in B_X$. *Параметром рівномірної неквадратності* простору X, який ми позначаємо $\alpha(X)$, є найкраще можливе значення α у попередній нерівності:

$$\alpha(X) := 2 - \sup_{x,y \in B_X} \left\{ \frac{1}{2}(\|x+y\| + \|x-y\|) \right\}.$$

У цих позначеннях X є рівномірно неквадратним тоді і тільки тоді, коли $\alpha(X) > 0$.

Центральний результат *підрозділу 2.2* – Теорема 2.8 – становить кількісну версію Теореми 5.9 зі статті "Bishop-Phelps-Bollobás moduli of a Banach space". А саме, модуль Бішопа-Фелпса-Болобаша Φ_X^S може бути оцінений зверху через параметр рівномірної неквадратності таким чином: $\Phi_X^S(\varepsilon) \leqslant \sqrt{2\varepsilon}\sqrt{1 - \frac{1}{3}\alpha(X)}$ для маленьких ε. У Теоремі 2.11 ми показуємо, що ця оцінка не є дуже далекою від точної. А саме, права частина у попередній нерівності не може бути замінена на щось менше за $\sqrt{2\varepsilon}\sqrt{1 - \alpha(X)}$.

Твердження 2.14 показує, що Φ_X^S не може бути виражений через параметр рівномірної неквадратності. Ми наводимо приклад двох просторів з однаковим параметром рівномірної неквадратності та з різними значеннями модуля Бішопа-Фелпса-Болобаша.

У **підрозділі 2.3** ми працюємо з одною модифікацією теореми Бішопа-Фелпса-Болобаша. Клічовим моментом для отримання точної оцінки у теоремі Бішопа-Фелпса-Болобаша є наступна лема, яка може бути виведена з варіаційного принципу Бронстеда-Рокафеллара або з Леми Фелпса:

Лема. Нехай X – банаховий простір, $\varepsilon > 0$ та $(x, x^*) \in \Pi_\varepsilon(X)$. Тоді для будь-якого $k \in (0,1)$ існують такі $y^* \in X^*$ та $y \in S_X$, що

$$\|y^*\| = y^*(y), \qquad \|x - y\| \leqslant \frac{\varepsilon}{k}, \qquad \|x^* - y^*\| \leqslant k.$$

Підставляючи $k = \sqrt{\varepsilon}$ у твердження леми можна отримати наступну модифіковану теорему Бішопа-Фелпса-Болобаша:

Теорема (модифікована теорема Бішопа-Фелпса-Болобаша). Нехай X – банаховий простір, $\varepsilon \in (0,1)$, нехай $(x, x^*) \in \Pi_\varepsilon(X)$. Тоді існує $(y, y^*) \in S_X \times X^*$, що $\|y^*\| = y^*(y)$, та

$$\max\{\|x - y\|, \|x^* - y^*\|\} \leqslant \sqrt{\varepsilon}.$$

У підрозділі 2.3 ми досліджуємо точність модифікованої теореми Бішопа-Фелпса-Болобаша. Ми показуємо, що цей результат є точним, а також, що присутність майже ізометричних копій $\ell_\infty^{(2)}$-підпросторів у X не є необхідною умовою для точності цієї версії теореми Бішопа-Фелпса-Болобаша (Теорема 2.20).

У **третьому розділі** ми вивчаємо можливість поширити теореми Бішопа-Фелпса та Бішопа-Фелпса-Болобаша на випадок нелінійних ліпшицевих функцій $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Нагадаємо, що банаховий простір $\mathrm{Lip}_0(X)$ складається з функцій $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ з $f(0) = 0$, які задовольняють (глобально) умову Ліпшиця. Норма у цьому просторі задається наступним чином:

$$\|f\| = \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|} : x, y \in X, x \neq y\right\}.$$

По-перше, найбільш природним визначенням досягнення норми для функції $f \in \mathrm{Lip}_0(X)$ є наступне.

Означення. Функція $f \in \mathrm{Lip}_0(X)$ *досягає норми у строгому сенсі*, якщо існують $x, y \in X$, $x \neq y$ такі, що $\|f\| = \dfrac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|}$. Підмножину тих функцій $f \in \mathrm{Lip}_0(X)$, що досягають норми у строгому сенсі, ми позначаємо $\mathrm{SA}(X)$.

На жаль, у сенсі теореми Бішопа-Фелпса, це визначення занадто обмежувальне. Ми показуємо у Теоремі 3.2, що навіть в одновимірному випадку ($X = \mathbb{R}$), підмножина $\mathrm{SA}(X)$ не є щільною у $\mathrm{Lip}_0(X)$. Таким чином зрозуміло, що ми повинні знайти менш обмежувальне поняття. Ми використовуємо наступне означення.

Означення. Функція $g \in \mathrm{Lip}_0(X)$ *досягає норми за напрямком* $u \in S_X$, якщо існує послідовність $\{(x_n, y_n)\}$ з $X \times X$, $x_n \neq y_n$ такі, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - y_n}{\|x_n - y_n\|} = u \quad \text{та} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{g(x_n) - g(y_n)}{\|x_n - y_n\|} = \|g\|.$$

У цьому випадку ми кажемо, що g *досягає норми за напрямком.* Множину тих $f \in \mathrm{Lip}_0(X)$, які досягають норми за напрямком, ми позначаємо $\mathrm{DA}(X)$.

Також ми вводимо наступне означення.

Означення. Банаховий простір X *має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для ліпшицевих функцій* ($X \in$ LipBPB), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для будь-якої функції $f \in \mathrm{Lip}_0(X)$ з $\|f\| = 1$ і для будь-якої пари $x, y \in X, x \neq y$ такої, що $\dfrac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|} > 1 - \delta$ існує функція $g \in \mathrm{Lip}_0(X)$ з $\|g\| = 1$ та існує таке $u \in S_X$, що g досягає норми у напрямку u, $\|g - f\| < \varepsilon$, та $\left\| \dfrac{x - y}{\|x - y\|} - u \right\| < \varepsilon$.

Основний результат третього розділу – це наступна теорема.

Теорема 3.11. Кожний рівномірно опуклий банаховий простір X має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для ліпшицевих функцій.

У **четвертому розділі** ми поширюємо результати щодо властивості Бішопа-Фелпса-Болобаша для асплундових операторів, які були доведені Ароном, Каскалесом і Кожушкіною у роботі "The Bishop-Phelps-Bollobás theorem and Asplund operators" та Каскалесом, Кадецем і Гуірао у роботі "A Bishop-Phelps-Bollobás type theorem for uniform algebras", на більш широкий клас просторів.

Означення. Банаховий простір Y має *властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для асплундових операторів*, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta(\varepsilon) > 0$, що для будь-якого банахового простору X та будь-якого асплундового оператору $T \in S_{L(X,Y)}$ і $x_0 \in S_X$, якщо виконується нерівність $\|T(x_0)\| > 1 - \delta(\varepsilon)$, тоді існують $u_0 \in S_X$ та асплундовий оператор $\widetilde{T} \in$

$S_{L(X,Y)}$, що

$$\|\widetilde{T}(u_0)\| = 1, \|x_0 - u_0\| < \varepsilon \text{ та } \|T - \widetilde{T}\| < \varepsilon.$$

Наступне означення має технічний характер. У ньому ми зосереджуємо усі властивості, що мають значення для подальшого застосування обраної процедури наближення.

Означення. Банаховий простір Y має *структуру АСК з параметром* $\rho \in (0,1)$ (скорочено $Y \in \mathrm{ACK}_\rho$), якщо існує 1-нормуюча множина $\Gamma \subset B_{Y^*}$ така, що для будь-якого $\varepsilon' > 0$ та для будь-якої w^*-відкритої підмножини $U \neq \emptyset, U \subset \Gamma$ існують w^*-відкрита підмножина $V \neq \emptyset, V \subset U$, функціонал $y_1^* \in V$, елемент $e \in S_Y$ та оператор $F \in L(Y)$ з наступними властивостями:

(I) $\|F(e)\| = \|F\| = 1$;

(II) $y_1^*(F(e)) = 1$;

(III) $F^*(y_1^*) = y_1^*$;

(IV) $|y^*(F(e))| + (1-\varepsilon')\|(I_{Y^*} - F^*)(y^*)\| \leqslant 1$ для будь-якого $y^* \in V$;

(V) $\mathrm{dist}\,(F^*(y^*), \mathrm{aconv}\{0, V\}) < \varepsilon'$ для будь-якого $y^* \in \Gamma$;

(VI) $|v^*(e) - 1| \leqslant \varepsilon'$ для будь-якого $v^* \in V$;

(VII) $|v^*(F(e))| \leqslant \rho$ для будь-якого $v^* \in \Gamma \setminus V$.

Банаховий простір Y має *просту структуру АСК* ($Y \in \mathrm{ACK}$), якщо попереднє означення виконується з двома змінами: по-перше, властивість (IV) змінюється на сильнішу:

(IV)' $|y^*(F(e))| + (1-\varepsilon')\|(I_{Y^*} - F^*)(y^*)\| \leqslant 1$ для всіх $y^* \in \Gamma$,

і по друге, властивість (VII) зникає. Головний результат цього розділу – наступна теорема.

Теорема 4.11. Кожний банаховий простір $Y \in \mathrm{ACK}$ та кожний банаховий простір $Y \in \mathrm{ACK}_\rho$ має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для асплундових операторів.

У **підрозділі 4.3** ми показуємо, що рівномірні алгебри та простори з властивістю β мають структуру ACK$_\rho$ (Теорема 4.16 та Теорема 4.17). Після цього ми вивчаємо стабільність ACK$_\rho$ відносно деяких стандартних операцій над банаховими просторами, і як наслідок, отримуємо багато прикладів пар (X,Y), що мають властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для операторів Асплунда (Теорема 4.19 та Теорема 4.20).

У **п'ятому розділі** ми надаємо оцінку наближення Бішопа-Фелпса-Болобаша для операторів, які діють у простір з властивістю β. Властивість β ввів Лінденштраус. Її мають, зокрема, скінченновимірні простори, чия сфера є багатогранником (поліедральні простори), та всі підпростори ℓ_∞, які містять c_0.

Означення. Банаховий простір Y має властивість β, якщо існують дві множини $\{y_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \subset S_Y$, $\{y^*_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \subset S^*_Y$ та число $0 \leqslant \rho < 1$ такі, що виконуються наступні умови

(I) $y^*_\alpha(y_\alpha) = 1$,

(II) $|y^*_\alpha(y_\gamma)| \leqslant \rho$ якщо $\alpha \neq \gamma$,

(III) $\|y\| = \sup\{|y^*_\alpha(y)| : \alpha \in \Lambda\}$, для всіх $y \in Y$.

У роботі Акости, Арона, Гарсії та Маестре "The Bishop-Phelps-Bollobás theorem for operators" було доведено, що якщо Y має властивість β, тоді для будь-якого банахового простору X пара (X,Y) має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для операторів. Ми вводимо аналог модулів Бішопа-Фелпса-Болобаша для векторозначного випадку.

Означення. Нехай X, Y банахові простори. *Модулем Бішопа-Фелпса-Болобаша* (*сферичним модулем Бішопа-Фелпса-Болобаша*) для пари просторів (X,Y) називається функція $\Phi(X,Y,\cdot) : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ ($\Phi^S(X,Y,\cdot) : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^+$), значення якої у точці $\varepsilon \in (0,1)$ визначається як інфімум тих $\delta > 0$ що для будь-якої пари $(x,T) \in B_X \times B_{L(X,Y)}$ ($(x,T) \in S_X \times S_{L(X,Y)}$ відповідно) з $\|Tx\| > 1-\varepsilon$, існує пара $(z,F) \in S_X \times S_{L(X,Y)}$ з $\|Fz\| = 1$, $\|x - z\| < \delta$ та $\|T - F\| < \delta$.

Ми надаємо оцінку зверху для $\Phi(X,Y,\varepsilon)$, коли Y має властивість β:

Теорема 5.3. Нехай X та Y – банахові простори та Y має властивість β з відповідним параметром $\rho < 1$. Тоді для будь-якого $\varepsilon \in (0, 1)$

$$\Phi^S(X, Y, \varepsilon) \leqslant \Phi(X, Y, \varepsilon) \leqslant \min\left\{\sqrt{2\varepsilon}\sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho}},\ 2\right\}.$$

Підрозділ 5.3 присвячений отриманню оцінки знизу для $\Phi(X, Y, \varepsilon)$ (Теорема 5.10, Теорема 5.12 і Теорема 5.17). З цих оцінок ми отримаємо цікавий ефект (Теорема 5.13), що $\Phi(X, Y, \varepsilon)$ не є неперервним відносно простору Y.

У **підрозділі 5.4** ми розглядаємо модифіковану версію модулів, яка виникає, якщо ми наближуємо парою (y, F) з $\|F\| = \|Fy\|$ без умови $\|F\| = 1$.

Ключові слова: властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша, функціонал, що досягає норми, оператор, що досягає норми, ліпшицеві функції, рівномірно опуклий банаховий простір, рівномірно неквадратний банаховий простір, властивість β, асплундовий оператор.

ABSTRACT

Soloviova Maria. “Approximation by norm attaining functionals and operators”.

A thesis on the degree of Candidate of Science on specialty 01.01.01 "Mathematical analysis". – V.N.Karazin Kharkiv National University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kharkiv, 2018.

In **the introduction** the actuality of studied problems and the connection with academic programs, plans and themes are given. The aim, problems and methods of research are formulated. Scientific novelty and significance of results are determined. The information about publications, personal contribution and the approbation of results is provided.

First section is devoted to the survey and analysis of the literature. The starting point of our investigation is the fact that the set of norm-attaining functionals is always dense in the corresponding dual space. This classical theorem was demonstrated in 1961 by Bishop and Phelps. Few years later, B. Bollobás gave a sharper version of this theorem allowing to approximate at

the same time a functional and a vector in which it almost attains the norm. Nowadays this very useful fact is called the *Bishop-Phelps-Bollobás theorem.*

Lindenstrauss examined the extension of the Bishop-Phelps theorem for vector-valued linear operators. He showed that the set of norm-attaining operators is not always dense in the space of all linear operators acting from X to Y.

In 2008, Acosta, Aron, García and Maestre introduced the following Bishop-Phelps-Bollobás property as an extension of the Bishop-Phelps-Bollobás theorem to the vector-valued case.

Definition. A couple of Banach spaces (X, Y) is said to have *the Bishop-Phelps-Bollobás property for operators* if for any $\delta > 0$ there exists a $\varepsilon(\delta) > 0$, such that for every operator $T \in S_{L(X,Y)}$, if $x \in S_X$ and $\|T(x)\| > 1 - \varepsilon(\delta)$, then there exist $z \in S_X$ and $F \in S_{L(X,Y)}$ satisfying $\|F(z)\| = 1, \|x - z\| < \delta$ and $\|T - F\| < \delta$.

During the review of the literature we explain the purpose of our work in relationship with the actual open problems in this.

The second section is devoted to the study of the connection between the parameter of the uniformly non-squareness and the spherical Bishop-Phelps-Bollobás modulus $\Phi_X^S(\varepsilon)$. Recently, Chica, Kadets, Martín, Moreno-Pulido, Ramlba-Barreno introduced two moduli which measure, for a given Banach space, what is the best possible Bishop-Phelps-Bollobás theorem for linear continuous functionals in that space. We will use the following notations:

$$\Pi(X) := \big\{(x, x^*) \in X \times X^* \,:\, \|x\| = \|x^*\| = x^*(x) = 1\big\}.$$

$$\Pi_\varepsilon(X) = \{(x, x^*) \in X \times X^* : \|x\| = \|x^*\| = 1,\ x^*(x) \geqslant 1 - \varepsilon\}.$$

Definition. Let X be a Banach space. The *Bishop-Phelps-Bollobás modulus* of X is the function $\Phi_X : (0, 2) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ such that given $\varepsilon \in (0, 2)$, $\Phi_X(\varepsilon)$ is the infimum of those $\delta > 0$ satisfying that for every $(x, x^*) \in B_X \times B_{X^*}$ with $x^*(x) > 1 - \varepsilon$, there is $(y, y^*) \in \Pi(X)$ with $\|x - y\| < \delta$ and $\|x^* - y^*\| < \delta$.

Substituting $(x, x^*) \in S_X \times S_{X^*}$ instead of $(x, x^*) \in B_X \times B_{X^*}$ in the above sentence, we obtain the definition of the *spherical Bishop-Phelps-Bollobás* *modulus* $\Phi_X^S(\varepsilon)$.

It was shown in the paper "Bishop-Phelps-Bollobás moduli of a Banach space" that for every Banach space X and every $\varepsilon \in (0,2)$ one has $\Phi_X(\varepsilon) \leqslant \sqrt{2\varepsilon}$. Moreover, it was demonstrated that for a uniformly non-square space X and $\varepsilon \in (0,1/2)$ one has $\Phi_X^S(\varepsilon) < \sqrt{2\varepsilon}$. The proof of this fact is involved and it is impossible to extract from it any estimate for $\Phi_X^S(\delta)$. In Section 2 we give a simpler proof that provides a quantification of the inequality above in terms of a parameter that measures the uniformly non-squareness of the Banach space X.

We recall that uniformly non-square spaces were introduced by James as those spaces whose two-dimensional subspaces are uniformly separated from $\ell_1^{(2)}$.

A Banach space X is *uniformly non-square* if and only if there is $\alpha > 0$ such that

$$\frac{1}{2}(\|x+y\| + \|x-y\|) \leqslant 2 - \alpha$$

for all $x, y \in B_X$. The *parameter of uniform non-squareness* of X, which we denote $\alpha(X)$, is the best possible value of α in the above inequality:

$$\alpha(X) := 2 - \sup_{x,y \in B_X} \left\{ \frac{1}{2}(\|x+y\| + \|x-y\|) \right\}.$$

With this notation X is uniformly non-square if and only if $\alpha(X) > 0$.

The central result of **Subsection 2.2** is Theorem 2.8. This theorem is a quantitative version of Theorem 5.9] from "Bishop-Phelps-Bollobás moduli of a Banach space". Namely, we demonstrate that the Bishop-Phelps-Bollobás modulus Φ_X^S of a Banach spaces X can be estimated from above through the parameter of uniform non-squareness $\alpha(X)$ of X as follows: $\Phi_X^S(\varepsilon) \leqslant \sqrt{2\varepsilon}\sqrt{1 - \frac{1}{3}\alpha(X)}$ for small ε. In Theorem 2.11 we demonstrate that the above estimate is not too far from being sharp. Namely, the right-hand side in the above theorem cannot be substituted by something smaller than $\sqrt{2\varepsilon}\sqrt{1-\alpha(X)}$.

Proposition 2.14 shows that the Bishop-Phelps-Bollobás modulus Φ_X^S cannot be expressed through the parameter of uniform non-squareness. We present two spaces with the same value of the uniform-nonsquareness parameter but with different values of the Bishop-Phelps-Bollobás modulus.

In **Subsection 2.3** we deal with a modification of the Bishop-Phelps-Bollobás theorem. The key to the sharp estimate in the Bishop-Phelps-Bollobás theorem is the following lemma which can be deduced from the Brøndsted-Rockafellar variational principle:

Lemma. Let X be a real Banach space, $\varepsilon > 0$ and $(x, x^*) \in \Pi_\varepsilon(X)$. Then, for any $k \in (0,1)$ there exist $y^* \in X^*$ and $y \in S_X$ such that

$$\|y^*\| = y^*(y), \qquad \|x - y\| \leqslant \frac{\varepsilon}{k}, \qquad \|x^* - y^*\| \leqslant k.$$

From this lemma just substituting $k = \sqrt{\varepsilon}$ one can deduce the following modified version of the Bishop-Phelps-Bollobás theorem:

Theorem (Modified Bishop-Phelps-Bollobás theorem). Let X be a Banach space, $\varepsilon \in (0,1)$, and let $(x, x^*) \in \Pi_\varepsilon(X)$. Then there exists $(y, y^*) \in S_X \times X^*$ such that $\|y^*\| = y^*(y)$, and

$$\max\{\|x - y\|, \|x^* - y^*\|\} \leqslant \sqrt{\varepsilon}.$$

In Subsection 2.3 we investigate the sharpness of Modified Bishop-Phelps-Bollobás theorem. We demonstrate that this result is sharp but surprisingly the presence of (almost) $\ell_\infty^{(2)}$-subspaces in X is not a necessary condition for the sharpness of Modified Bishop-Phelps-Bollobás theorem in X (Theorem 2.20).

In **the third section** we are searching for possible extensions of Bishop-Phelps and Bishop-Phelps-Bollobás theorems for non-linear Lipschitz functionals $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Recall that the Banach space $\mathrm{Lip}_0(X)$ consists of functions $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ with $f(0) = 0$ which satisfy (globally) the Lipschitz condition. This space is equipped with the norm

$$\|f\| = \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|} : x, y \in X, x \neq y\right\}.$$

First, the most natural definition of norm attainment for a functional $f \in \mathrm{Lip}_0(X)$ is the following.

Definition. A functional $f \in \mathrm{Lip}_0(X)$ *attains its norm in the strong sense* if there are $x, y \in X$, $x \neq y$ such that $\|f\| = \dfrac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|}$. The subset of all functionals $f \in \mathrm{Lip}_0(X)$ that attain their norm in the strong sense is denoted $\mathrm{SA}(X)$.

Unfortunately, in the sense of the Bishop-Phelps theorem, this definition is too restrictive. In Theorem 3.2 we show that even in the one-dimensional case $X = \mathbb{R}$, the subset $\mathrm{SA}(X)$ is not dense in $\mathrm{Lip}_0(X)$. It is then clear that a less restrictive way for a Lipschitz functional to attain its norm is needed to get density. We introduce the following definition.

Definition. A functional $g \in \mathrm{Lip}_0(X)$ *attains its norm at the direction* $u \in S_X$ if there is a sequence of pairs $\{(x_n, y_n)\}$ in $X \times X$, with $x_n \neq y_n$, such that

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - y_n}{\|x_n - y_n\|} = u \quad \text{and} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{g(x_n) - g(y_n)}{\|x_n - y_n\|} = \|g\|.$$

In this case, we say that g *attains its norm directionally.* The set of all those $f \in \mathrm{Lip}_0(X)$ that attain their norm directionally is denoted by $\mathrm{DA}(X)$.

Also we introduce the following definition.

Definition. A Banach space X has the *directional Bishop-Phelps-Bollobás property* for Lipschitz functionals, if for every $\varepsilon > 0$ there is such a $\delta > 0$, that for every $f \in \mathrm{Lip}_0(X)$ with $\|f\| = 1$ and for every $x, y \in X$ with $x \neq y$ satisfying $\dfrac{f(x) - f(y)}{\|x - y\|} > 1 - \delta$, there is $g \in \mathrm{Lip}_0(X)$ with $\|g\| = 1$ and there is $u \in S_X$ such that g attains its norm at the direction u, $\|g - f\| < \varepsilon$, and $\left\| \dfrac{x - y}{\|x - y\|} - u \right\| < \varepsilon$.

So, with this notation the main result of the third section can be stated as follows.

Theorem 3.11. Every uniformly convex Banach space X has the directional Bishop-Phelps-Bollobás property for Lipschitz functionals.

In **the forth section** we extend the results about the Bishop-Phelps-Bollobás property for Asplund operators given by Aron, Cascales, and Kozhushkina and Cascales, Kadets, and Guirao, to a wider class of Banach spaces.

Definition. A Banach space Y is said to have the *Bishop-Phelps-Bollobás property for Asplund operators* if for any $\varepsilon > 0$ there exists a $\delta(\varepsilon) > 0$, such that for every Banach space X and every Asplund operator $T \in S_{L(X,Y)}$, if $x_0 \in S_X$ is such that $\|T(x_0)\| > 1 - \delta(\varepsilon)$, then there exist $u_0 \in S_X$ and an Asplund operator $\widetilde{T} \in S_{L(X,Y)}$ satisfying

$$\|\widetilde{T}(u_0)\| = 1, \|x_0 - u_0\| < \varepsilon \text{ and } \|T - \widetilde{T}\| < \varepsilon.$$

Instead of proving the Bishop-Phelps-Bollobás kind theorems for each space separately, we concentrate all the technicalities of the approximation procedure in one place by introducing a new Banach space property called ACK_ρ.

Definition. A Banach space Y is said to have the *ACK structure* with parameter $\rho \in (0,1)$ ($Y \in \mathrm{ACK}_\rho$ for short) if there is a 1-norming set $\Gamma \subset B_{Y^*}$ such that for every $\varepsilon' > 0$ and every relatively w^*-open subset $U \neq \emptyset$ of Γ there are relatively w^*-open subset $V \neq \emptyset$ of U, $y_1^* \in V$, $e \in S_Y$, $F \in L(Y)$ with the following properties:

(I) $\|F(e)\| = \|F\| = 1$;

(II) $y_1^*(F(e)) = 1$;

(III) $F^*(y_1^*) = y_1^*$;

(IV) $|y^*(F(e))| + (1 - \varepsilon')\|(I_{Y^*} - F^*)(y^*)\| \leqslant 1$ for every $y^* \in V$;

(V) $\mathrm{dist}\,(F^*(y^*), \mathrm{aconv}\{0, V\}) < \varepsilon'$ for every $y^* \in \Gamma$;

(VI) $|v^*(e) - 1| \leqslant \varepsilon'$ for every $v^* \in V$;

(VII) $|v^*(F(e))| \leqslant \rho$ for every $v^* \in \Gamma \setminus V$

A Banach space Y is said to have the *simple ACK structure* ($Y \in \mathrm{ACK}$) if the above definition holds true with the following two modifications: at first, the property (IV) changes to stronger version

(IV)' $|y^*(F(e))| + (1 - \varepsilon')\|(I_{Y^*} - F^*)(y^*)\| \leqslant 1$ for every $y^* \in \Gamma$,

and at second, the property (VII) disappears. The main results of this section is next theorem :

Theorem 4.11. Every $Y \in \mathrm{ACK}$ and every $Y \in \mathrm{ACK}_\rho$ have the Bishop-Phelps-Bollobás property for Asplund operators.

In **Subsection 4.3** we demonstrate that uniform algebras and spaces with property β have the ACK_ρ (Theorem 4.16 and Theorem 4.17). After that, we study the stability of ACK_ρ under some natural Banach space theory operations, which as a consequence gives us a wide collection of examples of pairs (X, Y) possessing the Bishop-Phelps-Bollobás property for Asplund operators (Theorem 4.19 and Theorem. 4.20).

In **the fifth section** we give an estimation of the Bishop-Phelps-Bollobás modulus for operators which act to a Banach space with the property β. The property β was introduced by Lindenstrauss. This property is possessed in particular by polyhedral finite-dimensional spaces, and by any subspace of ℓ_∞ that contains c_0.

Definition. A Banach space Y is said to have the property β if there are two sets $\{y_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \subset S_Y$, $\{y_\alpha^* : \alpha \in \Lambda\} \subset S_Y^*$ and $0 \leqslant \rho < 1$ such that the following conditions hold

(I) $y_\alpha^*(y_\alpha) = 1$,

(II) $|y_\alpha^*(y_\gamma)| \leqslant \rho$ if $\alpha \neq \gamma$,

(III) $\|y\| = \sup\{|y_\alpha^*(y)| : \alpha \in \Lambda\}$, for all $y \in Y$.

In the paper "The Bishop-Phelps-Bollobás theorem for operators" of Acosta, Aron, Garcia, and Maestre, it was proved that if Y has the property β, then for any Banach space X the pair (X, Y) has the Bishop-Phelps-Bollobás property for operators. We introduce an analogue of the Bishop-Phelps-Bollobás moduli for the vector-valued case.

Definition. Let X, Y be Banach spaces. The *Bishop-Phelps-Bollobás modulus* (*spherical Bishop-Phelps-Bollobás modulus*) of a pair (X, Y) is the function $\Phi(X, Y, \cdot) : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ ($\Phi^S(X, Y, \cdot) : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}^+$) whose value in point $\varepsilon \in (0, 1)$ is defined as the infimum of those $\delta > 0$ such that for every $(x, T) \in B_X \times B_{L(X,Y)}$ ($(x, T) \in S_X \times S_{L(X,Y)}$ respectively) with $\|T(x)\| > 1 - \varepsilon$, there is $(z, F) \in S_X \times S_{L(X,Y)}$ with $\|F(z)\| = 1$, $\|x - z\| < \delta$ and $\|T - F\| < \delta$.

We provide an estimation from above for $\Phi(X, Y, \varepsilon)$ for Y possessing the property β of Lindenstrauss:

Theorem 5.3. Let X and Y be Banach spaces such that Y possesses the property β with the corresponding parameter $\rho < 1$. Then for every $\varepsilon \in (0, 1)$

$$\Phi^S(X, Y, \varepsilon) \leqslant \Phi(X, Y, \varepsilon) \leqslant \min\left\{\sqrt{2\varepsilon}\sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho}},\ 2\right\}.$$

Subsection 5.3 is devoted to estimations of $\Phi(X, Y, \varepsilon)$ from below (Theorem 5.10, Theorem 5.12 and Theorem 5.17). As a bi-product of these estimations we obtain an interesting effect (Theorem 5.13) that $\Phi(X, Y, \varepsilon)$ is not continuous with respect to the variable Y.

In **subsection 5.4** we consider a modification of the above moduli which appear if we approximate by pairs (y, F) with $\|F\| = \|Fy\|$ without requiring $\|F\| = 1$.

Keywords: Bishop-Phelps-Bollobás property, norm-attaining functional, norm-attaining operator, Lipschitz functional, uniformly convex Banach space, uniformly non-square Banach space, property β, Asplund operator.

Список публікацій здобувача

Публікації у фахових виданнях України і виданнях України, що входять до міжнародних наукометричних баз:

1. Soloviova, M.: Bishop-Phelps-Bollobás modulus of a uniformly non-square Banach space. Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics 81, 4–9 (2015)

   (**Фахове** видання України; входить до міжнародних наукометричних баз Zentralblatt MATH, Google Scholar.)

2. Kadets, V., Soloviova, M.: A modified Bishop-Phelps-Bollobás theorem and its sharpness. Matematychni Studii 44(1), 84–88 (2015)

   (Входить до міжнародних наукометричних баз Zentralblatt MATH, Google Scholar, MathSciNet.)

3. Kadets, V., Soloviova, M.: Quantitative version of the Bishop-Phelps-Bollobás thorem for operators with values in a space with the property β. Matematychni Studii 47 (1) 71–90 (2017)

   (Входить до міжнародних наукометричних баз **Scopus**, Google Scholar, MathSciNet.)

Публікації у зарубіжних виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз:

4. Chica, M., Kadets, V., Martin, M., Meri, J., Soloviova, M.: Two refinements of the Bishop-Phelps-Bollobás modulus. Banach J. Math. Anal. 9(4), 296–315 (2015)

   (Входить до міжнародних наукометричних баз **Scopus, Web of Science** (Science Citation Index Expanded; Impact Factor: 0.8), Zentralblatt MATH, Google Scholar, MathSciNet.)

Особистий внесок здобувача. Результати автора містяться у розділі 3, а саме Proposition 3.1, Proposition 3.2, Theorem 3.3, Lemma 3.5.

5. Kadets, V., Martin, M., Soloviova, M.: Norm-attaining Lipschitz functionals. Banach J. Math. Anal. 10(3), 621–637 (2016)

   (Входить до міжнародних наукометричних баз **Scopus, Web of Science** (Science Citation Index Expanded; Impact Factor: 0.833), Zentralblatt MATH, Google Scholar, MathSciNet.)

   Особистий внесок здобувача. Здобувачу належать Lemma 4.1, Lemma 4.4, Theorem 5.3.

6. Cascales, B., Kadets, V., Guirao, A. J., Soloviova, M.: Γ-flatness and Bishop-Phelps-Bollobás type theorems for operators. J. Funct. Anal. 274(3), 863–888 (2018)

   (Входить до міжнародних наукометричних баз **Scopus, Web of Science** (Science Citation Index Expanded, CompuMath Citation Index; Impact Factor 2017: 1.254), Google Scholar, MathSciNet, Zentralblatt MATH.)

   Особистий внесок здобувача. Здобувачу належать Lemma 2.9, Theorem 3.4, Theorem 4.5, Theorem 4.9, Theorem 4.11.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

7. Соловьева, М.: О приближении функционалами, достигающими нормы. Сборник тезисов докладов IX международной конференции молодых ученых "Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях", Харьков, с. 43 (2014)

8. Soloviova, M.: A new estimate for the Bishop-Phelps-Bollobás modulus of a Banach space. In: Book of Abstracts of II International Conference "Analysis and mathematical physics", Kharkiv, pp. 43–44 (2014)

9. Kadets, V., Soloviova, M. Bishop-Phelps-Bollobás theorem for Lipschitz functionals in uniformly convex Banach spaces. In: Book of Abstracts of

III International Conference “Analysis and mathematical physics”, Kharkiv, p. 24 (2015)

10. Kadets, V., Martin, M., Soloviova, M.: Possible analogues of Bishop-Phelps and Bishop-Phelps-Bollobás theorems for Lipschitz functionals. In: Workshop on Banach spaces Granada 2015 on the occasion of the 60th birthday of Rafael Paya, Salobrena p. 13 (2015)

11. Kadets, V., Soloviova, M.: Quantitative versions of the Bishop-Phelps-Bollobás theorem. In: Book of Abstracts of International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach, Lviv, p. 30 (2017)

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

Усюди в даній роботі заголовні букви X, Y, Z використовуються для позначення банахових просторів, ε і δ – для додатних чисел. Для спрощення викладення усі банахові простори розглядаються над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Винятком є четвертий розділ, де ми вимушені розглядати і дійсні, і комплексні скаляри, щоб запобігти втраті таких важливих прикладів рівномірних алгебр, як диск-алгебра. Операторами ми називаємо лінійні неперервні оператори, а функціоналами – лінійні неперервні функціонали. Заголовна буква K використовуються для позначення компактного гаусдорфового топологічного простору, буква L для позначення локально компактного гаусдорфового топологічного простору. У тексті роботи зустрічаються такі позначення:

B_X – замкнена одинична куля простору X.

$C(K)$ – простір неперервних скалярних функцій на компакті K, з нормою $\|f\| = \max\limits_{t\in K}|f(t)|$.

$C_0(L)$ – простір неперервних скалярних функцій на локальному компакті L, що прямують до нуля на нескінченності, з нормою $\|f\| = \max\limits_{t\in L}|f(t)|$.

c_0 – простір послідовностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$, що збігаються до нуля, з нормою $\|x\| = \sup \|x_i\|$.

$\mathrm{DA}(X)$ – множина тих $f \in \mathrm{Lip}_0(X)$, які досягають норми за напрямком (Означення 3.4).

$L(X, Y)$ – простір неперервних лінійних операторів, що діють з X в Y, зі стандартною операторною нормою.

$L(X)$ – скорочене позначення для $L(X, X)$.

ℓ_∞ – простір обмежених послідовностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$ з нормою $\|x\| = \sup \|x_i\|$.

ℓ_p – простір послідовностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$ з $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < \infty$, наділений нормою $\|x\| = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p\right)^{1/p}$.

$NA(X, Y)$ – підпростір $L(X, Y)$, що складається з операторів, які досягають своєї норми.

$\mathrm{SA}(X)$ – множина тих $f \in \mathrm{Lip}_0(X)$, які досягають норми у строгому сенсі (Означення 3.1).

S_X – одинична сфера простору X.

$X \in \mathrm{LipBPB}$ – дивись Означення 3.5.

X^* – спряжений простір до банахового простору X.

$\alpha(X)$ – параметр рівномірної неквадратності (формула (2.3)).

$\delta_X(\varepsilon)$ – модуль рівномірної опуклості простору X (формула (2.4)).

$\Pi_\varepsilon(X)$, $\Pi(X)$ – дивись формулу (1.1).

$\Pi_\varepsilon(X,Y)$, $\Pi(X,Y)$, $\Pi_\varepsilon^S(X,Y)$ – дивись формулу (5.1)

$\Phi_X(\varepsilon), \Phi_X^S(\varepsilon)$ – дивись Означення 1.9

$\Phi(X,Y,\varepsilon), \Phi^S(X,Y,\varepsilon)$ – дивись Означення 5.18

$\widetilde{\Phi}(X,Y,\varepsilon), \widetilde{\Phi}^S(X,Y,\varepsilon)$ – дивись Означення 5.18

$\widetilde{\Phi}_X(\varepsilon), \widetilde{\Phi}_X^S(\varepsilon)$ – дивись Означення 2.16.

ВСТУП

Обгрунтування вибору теми дослідження.

У 1961 році Бішоп і Фелпс [13] довели, що у будь-якому банаховому просторі множина функціоналів, що досягають норми, є щільною у спряженому просторі. Болобаш [14] поглибив цей результат, показавши, що можна наближувати пару – функціонал та вектор, на якому майже досягається норма – функціоналом та вектором, на якому норма досягається. Цей факт має численні застосування, наприклад, у вивченні чисельного рангу операторів.

Лінденштраус розпочав вивчення властивості Бішопа-Фелпса для операторів, що діють між двома банаховими просторами [50]. Він показав, що результат Бішопа-Фелпса не можна перенести на векторозначний випадок, навівши приклад, коли множина операторів, що досягають норми, не є щільною у просторі всіх лінійних неперервних операторів, що діють між двома банаховими просторами. Незважаючи на те, що численні подальші дослідження (наприклад, у роботах [1], [8], [15], [27], [29], [30], [31], [35], [36], [58]) для багатьох пар банахових просторів X, Y надали відповідь на питання, чи є множина операторів, що досягають норми, щільною в $L(X,Y)$, багато простих на перший погляд питань залишається відкритими. Наприклад, невідомо, чи розповсюджується теорема Бішопа-Фелпса на оператори, що діють з довільного простору X у двовимірний евклідів простір $\ell_2^{(2)}$.

Дана дисертаційна робота присвячена властивості Бішопа-Фелпса-Болобаша для функціоналів, операторів та ліпшицевих функцій. Ця властивість для лінійних операторів була вперше введена у 2008 році у роботі [2] Акости, Арона, Гарсії та Маестре "Теорема Бішопа-Фелпса-Болобаша для операторів" (Означення 1.4). Ця властивість гарантує, що оператор та точку, на якій майже досягається норма, можна апроксимувати відповідно оператором та точкою, на якій норма в точності досягається, при чому наближення є тим краще, чим ближче було значення даного оператора на даній точці до норми. Подальші дослідження цієї властивості для різних просторів активно проводились протягом останніх років (наприклад, у роботах [3], [4], [5], [6], [7], [9], [21], [22], [23], [24], [25], [46], [47], [48], [49], [52]). Дослідження щодо найкращої можливої оцінки наближення у властивості Бішопа-Фелпса-Болобаша для операторів раніше не велись, тому їх проведення є актуальним.

У 2011 році у роботі [10] було показано, що простір $C(K)$ має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для асплундових операторів. Це стало першим прикладом, коли пара (c_0, Y) має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша та простір Y є нескінченновимірним. У 2013 Каскалес, Кадець та Гуірао у роботі [16] поширили цей результат на рівномірні алгебри $A \subset C(K)$.

У 2014 році у статті [18] "Модулі Бішопа-Фелпса-Болобаша банахового простору" Чіки, Кадеця, Мартіна, Морено-Пулідо та Рамбли-Барено були введені два модулі, що показували найкращу можливу оцінку у властивості Бішопа-Фелпса-Болобаша для функціоналів у даному просторі. У цій роботі також був виявленій цікавий зв'язок між цією характеристикою та геометричними властивостями банахового простору. А саме, якщо банаховий простір має максимальний (тобто найгірший можливий) модуль Бішопа-Фелпса-Болобаша, то цей простір містить майже ізометричні копії простору $\ell_1^{(2)}$. Таким чином, актуальним питанням залишилось, яку покращену оцінку для модуля можна отримати для просторів, які не містять майже ізометричних копій простору $\ell_1^{(2)}$ (такі простори називаються рівномірно неквадратними).

Ще одним актуальним питанням є поширення теореми Бішопа-Фелпса та Бішопа-Фелпса-Болобаша на нелінійні ліпшицеві функції, які діють з банахового простору X в $\mathbb{R}$. Ліпшицеві функції є важливим об'єктом у математичному аналізі. Відомо, що деякі важливі результати для лінійних неперервних функціоналів можуть бути доведені для ліпшицевих функцій (наприклад, ще у 1934 році у роботі [53] Макшейном була доведена теорема про продовження ліпшицевої функції з замкненої множини на весь простір зі збереженням ліпшицевої константи, що є аналогом класичного результату про продовження лінійного неперервного функціоналу зі збереженням норми).

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є отримання аналогів теореми Бішопа-Фелпса-Болобаша для різних випадків та одержання найкращих можливих оцінок наближення, що виникає у цих теоремах.

Об'єкт дослідження – нескінченновимірні банахові простори, лінійні неперервні функціонали, лінійні неперервні оператори, ліпшицеві функції.

Предметом дослідження служать властивості банахових просторів, пов'язані з властивістю Бішопа-Фелпса-Болобаша.

Завдання дослідження:

- встановити зв'язок між параметром рівномірної неквадратності банахового простору (параметром, який показує наскільки двовимірні підпростори віддалені від $\ell_1^{(2)}$) та сферичним модулем Бішопа-Фелпса-Болобаша;
- довести аналог теореми Бішопа-Фелпса-Болобаша для ліпшицевих функцій;
- поширити результат статті [16] на більш широкий клас просторів Y, які не є рівномірними алгебрами;
- ввести поняття модулів Бішопа-Фелпса-Болобаша для операторів та отримати оцінки для цих модулів у випадку, коли оператор діє у простір з властивістю β.

Методи дослідження. Для отримання результатів дисертаційної роботи використовуються загальні методи функціонального аналізу, теорії функцій дійсної та комплексної змінної і геометрії банахових просторів у поєднанні з методами розробленими такими математиками, як Кадець В., Каскалес Б., Гуірао А., Мартин М. та інших. Для отримання результатів розділу два ми використовуємо властивості рівномірно неквадратних просторів, які були введені Джеймсом. Результати третього розділу отримані за допомогою техніки вільних ліпшицевих просторів. У розділі чотири ми користуємось концепцією асплундових просторів. Результати розділу п'ять отримані з використанням техніки, розробленої у роботі Акости М., Арона Р., Гарсії Д. та Маестре М. "The Bishop-Phelps-Bollobás theorem for operators".

Наукова новизна одержаних результатів. У роботі досліджений зв'язок між параметром рівномірної неквадратності банахового простору та сферичним модулем Бішопа-Фелпса-Болобаша. Також вперше введено поняття модифікованого модуля Бішопа-Фелпса-Болобаша, отримана його оцінка зверху для всіх банахових просторів, та показано, що ця оцінка не може бути покращена у деяких рівномірно неквадратних просторах. В роботі вперше розглядається поняття досягнення норми для ліпшицевої функції у строгому сенсі та досягнення норми за напрямком з точки зору узагальнень теорем Бішопа-Фелпса та Бішопа-Фелпса-Болобаша. Введене поняття модулів Бішопа-Фелпса-Болобаша для операторів та досліджені оцінки цих модулів для деяких випадків. Зокрема, отримані такі результати.

- Отримана оцінка зверху для сферичного модуля Бішопа-Фелпса-Болобаша через параметр рівномірної неквадратності.
- Доведено, що рівномірно опуклі простори мають властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для ліпшицевих функцій.
- Введена нова властивість банахових просторі – АСК структура, яка гарантує, що пара просторів (X, Y) має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для асплундових операторів, якщо простір Y має таку структуру. Показано, що клас просторів зі структурою АСК включає в себе простори, що є рівномірними алгебрами, але не вичерпується

тільки ними.

– Отримана оцінка зверху для модулів Бішопа-Фелпса-Болобаша для операторів, що діють з простору X у простір Y у випадку, коли простір Y має властивість β та досліджена точність цієї оцінки.

Практичне значення отриманих результатів. Робота має теоретичний характер. Отримані результати поглиблюють наше уявлення про банахові простори і можуть бути використані в теорії банахових просторів, теорії операторів і інших розділах математики.

Особистий внесок здобувача. Постановки задач належать науковому керівникові. Всі результати дисертації отримані авторкою самостійно. Зі статей, які опубліковані у співавторстві, у дисертацію включені лише ті результати, які належать авторці. А саме: робота [59] написана без співавторів, роботи [40] та [45] написані у співавторстві з науковим керівником, йому належить постановка задачі та загальний план дослідження. У роботі [19] результати автора містяться у розділі 3, а саме Proposition 3.1, Proposition 3.2, Theorem 3.3, Lemma 3.5. У роботі [44] автору належить Lemma 4.1, Lemma 4.4, Theorem 5.3. У роботі [17] особистий внесок здобувача - це Lemma 2.9, Theorem 3.4, Theorem 4.5, Theorem 4.9, Theorem 4.11. Результати, що належать співавторам та іншим математикам, згадуються за необхідністю для повноти викладу та супроводжуються відповідними посиланнями.

Апробація результатів дисертації.

Результати дисертації доповідалися й обговорювалися на:

1. IX Міжнародній конференції молодих вчених "Сучасні проблеми та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях", Харків, 2014 р.

2. II Міжнародній конференції "Аналіз та математична фізика", Харків, 2014 р.

3. III Міжнародній конференції “Аналіз та математична фізика”, Харків, 2015 р.

4. Семинарі по банаховим просторам з нагоди 60-річчя Рафаеля Пайа у Салобренії (Іспанія), 2015.

5. Міжнародній науковій конференції, присвяченій 120-річчю з дня народження С. Банаха, Львів, 2017 р.

6. Семінарі з функціонального аналізу у Мурсії (Іспанія), 2016.

7. Семінарі з функціонального аналізу у Гранаді (Іспанія), 2017.

Публікації. Всі основні результати роботи в повній мірі опубліковані у фахових журналах, пройшли апробацію на наукових конференціях та семінарах. Результати дисертації знайшли відображення в 11 наукових публікаціях, в тому числі в 6 статтях [17], [19], [40], [44], [45], [59] у специалізованих журналах, з яких одна написана без співавторів, і в тезах виступів [41], [42], [43], [60], [66] на 5 конференціях.

Структура дисертації Дисертація складається з анотації, змісту, переліку умовних позначень, вступу, п’яти розділів, висновків до дисертації, списку використаних джерел, які́ містить 66 найменувань, та додатків. Повний обсяг роботи – 149 сторінки. Обсяг основної частини дисертації – 116 сторінок. Розділ 1, присвячений огляду літератури, займає 22 сторінки.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційну роботу виконано на кафедрі фундаментальної математики факультету математики та інформатики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна у відповідності до тематики пріоритетних досліджень кафедри та в рамках державної науково-дослідної роботи за темою «Оператори в банахових, гільбертових, функціональних просторах та квазікришталі Фур’є» (номер державної реєстрації: 0118U002036).

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА ВИБІР НАПРЯМКУ ДОСЛІДЖЕННЯ

Функціонал $x^* \in X^*$ досягає своєї норми, якщо існує такий $x \in S_X$, що $x^*(x) = \|x^*\|$. Якщо X – рефлексивний простір, то кожний лінійний неперервний функціонал досягає норми, бо одинична куля є слабко компактною множиною. У статтях [32] та [33] Джеймсом була надана характеризація рефлексивних просторів у термінах функціоналів, що досягають норми.

Теорема (Джеймс). *Нехай X – банаховий простір. Наступні умови еквівалентні.*

(I) X – не рефлексивний простір.

(II) Існує функціонал $x^* \in X^*$, який не досягає своєї норми.

Термін *субрефлексивні простори* був введений для нормованих просторів, у яких множина функціоналів, що досягають норми, щільна в спряженому просторі. Існують неповні нормовані простори, які не є субрефлексивними. У 1961 році [13] Бішоп та Фелпс довели, що будь-який банаховий простір є субрефлексивним. Тобто будь-який неперервний лінійний функціонал може бути наближений функціоналом, що досягає норми. Трохи пізніше Болобаш [14] поширив цей результат, показавши, що можна наближувати пару – функціонал та вектор, на якому майже досягається норма – функціоналом та вектором, на якому норма досягається. Цей факт має численні застосування, наприклад, у вивченні чисельного рангу операторів. Сьогодні цей результат відомий як теорема Бішопа-Фелпса-Болобаша.

Теорема (Болобаш). *Нехай X – банаховий простір, $0 < \varepsilon < 1/2$, $x \in S_X$ та $x^* \in S_{X^*}$ задовольняє нерівності $|1 - x^*(x)| \leqslant \varepsilon^2/2$. Тоді існує* *така пара* $(y, y^*) \in X \times X^*$ *з* $\|y\| = \|y^*\| = y^*(y) = 1$, *що* $\|x - y\| < \varepsilon + \varepsilon^2$ *та* $\|x^* - y^*\| \leqslant \varepsilon$.

Цей результат дав поштовх для подальшого вивчення точності кількісної оцінки в теоремі Бішопа-Фелпса-Болобаша. У своїй роботі 1974 року Фелпс надає інший варіант теореми, який дозволяє наближувати з різною точністю функціонал та вектор. Відмінність цієї версії також у тому, що функціонал, яким наближують, не повинен мати одиничну норму. Протягом нашого дослідження ми багато разів будемо використовувати саме цей результат, наданий у [56, Corollary 2.2].

Теорема (Фелпс). *Нехай* C *– замкнена опукла підмножина банахового простору* X *та* $\varepsilon > 0$. *Нехай* $x^* \in S_{X^*}, x \in C$ *та*

$$x^*(x) \geqslant \sup x^*(C) - \varepsilon.$$

Тоді для будь-якого $k \in (0, 1)$ *існує функціонал* $y^* \in X^*$ *та вектор* $y \in \partial C$ *такий, що*

$$y^*(y) = \sup y^*(C), \|x - y\| \leqslant \varepsilon / k \text{ та } \|x^* - y^*\| \leqslant k.$$

Лінденштраус розпочав вивчення властивості Бішопа-Фелпса для операторів, що діють між двома банаховими просторами. Оператор $T \in L(X, Y)$ досягає своєї норми, якщо існує такий $x \in S_X$, що $\|T(x)\| = \|T\|$. Ми використовуємо позначення $NA(X, Y)$ для підмножини операторів, що діють з X в Y та досягають своєї норми.

Означення 1.1. Пара банахових просторів (X, Y) має *властивість Бішопа-Фелпса*, якщо множина операторів, що діють з X в Y, які досягають норми, щільна в $L(X, Y)$, тобто

$$\overline{NA(X, Y)} = L(X, Y).$$

Класична теорема Бішопа-Фелпса говорить, що підпростір $NA(X, \mathbb{R})$ щільний у $L(X, \mathbb{R})$. Бішоп і Фелпс порушили питання, чи можна поширити цей результат на оператори, що діють між довільними банаховими просторами. У роботі Лінденштрауса [50] у 1963 році була надана негативна відповідь на це запитання. Найпростіший такий приклад ґрунтується на тому, що ін'єктивний оператор, що діє в строго опуклий простір (тобто простір, в якому для всі точки одиничної сфери є екстремальними точками одиничного шару), може досягати норми лише в екстремальній точці сфери. Таким чином, якщо ми розглянемо пару просторів $X = c_0$ та Y – строго опуклий простір ізоморфний до c_0 з нормою

$$\|(y_i)\| = \sup_{i\in\mathbb{N}} |y_i| + \sqrt{\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^i} y_i^2},$$

тоді жодний оборотний оператор не досягає норми (бо c_0 не має екстремальних точок). Множина оборотних операторів – відкрита, і це означає, що оборотний оператор (наприклад, тотожний оператор) не можна наблизити оператором, що досягає норми. Це міркування належить Лінденштраусу. У тій самій роботі Лінденштраус відокремлює дві властивості, які заслуговують на дослідження:

1. Банаховий простір X має властивість A, якщо для будь-якого банахового простору Y підмножина $NA(X,Y)$ є щільною у $L(X,Y)$

2. Банаховий простір Y має властивість B, якщо для будь-якого банахового простору X підмножина $NA(X,Y)$ є щільною у $L(X,Y)$

Лінденстраус довів слабшу версію теореми Бішопа-Фелпса для операторів, а саме, що для будь-якої пари банахових просторів (X,Y) множина операторів, другий спряжений до яких досягає своєї норми, є щільною в $L(X,Y)$ [50, Theorem 1]. Звідси випливає, що кожний рефлексивний простір має властивість A. Також Лінденштраус показав, що ℓ_1 має властивість A, а такі простори, як $L_1[0,1], C_0(L)$ не мають властивості A. Очікувало свого розв'язання питання, чи кожний рефлексивний простір має властивість B, а також чи є серед класичних банахових просторів такі, що не мають цієї властивості.

Один зі значних результатів Лінденштрауса стосовно другої властивості – достатня умова, яка була названа властивістю β. Цю властивість мають будь-які скінченновимірних простори, чия одинична сфера є багатогранником, а також будь-який підпростір простору ℓ_∞, який містить c_0. Пізніше Партінгтон [55] довів, що будь-який банаховий простір може бути еквівалентно перенормований, щоб мати властивість β.

Означення 1.2 ([50])**.** Банаховий простір Y має властивість β, якщо існують дві множини $\{y_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \subset S_Y$, $\{y_\alpha^* : \alpha \in \Lambda\} \subset S_Y^*$ та число $0 \leqslant \rho < 1$ такі, що виконуються наступні умови

(I) $y_\alpha^*(y_\alpha) = 1$,

(II) $|y_\alpha^*(y_\gamma)| \leqslant \rho$ якщо $\alpha \neq \gamma$,

(III) $\|y\| = \sup\{|y_\alpha^*(y)| : \alpha \in \Lambda\}$, для всіх $y \in Y$.

Теорема (Лінденштраус)**.** *Нехай Y – банаховий простір що має властивість β. Тоді Y має властивість B.*

Прикладом простору, що не має властивості B, може бути будь-який строго опуклий простір, який містить ізоморфну копію c_0.

У 1977 у статті [15] Бургейн дослідив зв'язок властивості Бішопа-Фелпса та властивості Радона-Нікодима. Нагадаємо, що властивість Радона-Нікодима мають всі сепарабельні спряжені простори. Бургейн узагальнив результат Лінденштрауса:

Теорема (Бургейн)**.** *Нехай банаховий простір X має властивість Радона-Нікодима. Тоді X має властивість A.*

У роботах Шахермаєра [58] та Джонсона і Вольфа [36] було показано, що пара просторів $(L_1[0,1], C[0,1])$ не має властивості Бішопа-Фелпса. З цього випливає, що $C[0,1]$ не має властивості B. Але варто зазначити, що у роботі Іваника [31] властивість Бішопа-Фелпса була доведена для пари $(L_1[0,1], C[0,1])$ для деяких класів операторів, у тому числі для слабко компактних операторів. Також у цій роботі було доведено, що для будь-якої пари банахових просторів, множина операторів, чий спряжений досягає норми, щільна у $L(X,Y)$ [31, Theorem 3].

Наступний крок був зроблений у статті [29] Гауерса, де було показано, що нескінченновимірні простори ℓ_p $(1 < p < \infty)$ не мають властивості B.

Нагадаємо означення рівномірно опуклого простору та модуля рівномірної опуклості, до яких ми не раз будемо звертатися.

Означення 1.3. Модулем рівномірної опуклості банахового простору X називається функція $\delta_X(\varepsilon) : [0,2] \to [0,1]$, яка визначається наступним чином:

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \frac{\|x+y\|}{2} : x, y \in S_X, \|x-y\| = \varepsilon\right\}.$$

Банаховий простір X називається рівномірно опуклим, якщо $\delta_X(\varepsilon) > 0$ для всіх $\varepsilon > 0$.

У роботі Агіре [8, Corollary 9] було доведено, що кожний нескінченно-вимірний рівномірно опуклий простір не має властивості B. У статті [1] Акости було доведено, що нескінченновимірний строго опуклий простір також не має властивості B:

Теорема (Акоста). *Існує банаховий простір X такий, що для будь-якого нескінченновимірного простору Y, що є строго опуклим, множина операторів, що досягають норми, не щільна у $L(X,Y)$.*

Приклади пар просторів, що мають властивість Бішопа-Фелпса, були отримані в роботах [30], [27], [35], а саме:

Теорема (Джонсон, Вольф). *Пара $(C(K), C(S))$ має властивість Бішопа-Фелпса для будь-яких компактів K, S.*

Теорема (Іваник). *Пара $(L_1[0,1], L_1[0,1])$ має властивість Бішопа-Фелпса.*

Теорема (Фінет, Пая). *Пара $(L_1[0,1], L_\infty[0,1])$ має властивість Бішопа-Фелпса.*

Після цих видатних результатів численні дослідження сучасних математиків були спрямовані на поширення такого типу теорем на інші випадки, пошук прикладів пар просторів з властивістю Бішопа-Фелпса та без неї, узагальнення теореми Бішопа-Фелпса-Болобаша для операторів, а також на дослідження точності оцінок, з якими можна наближувати вектор та функціонал, та зв'язок з різними характеристиками банахових просторів.

Властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша була введена у 2008 році в роботі [2] з метою поширити результат Болобаша на векторозначний випадок. Починаючи з цього часу багато робіт було присвячено цій властивості. Ми хочемо звернути увагу на найбільш важливі з нашої точки зору результати.

Означення 1.4 ([2, Definition 1.1])**.** Пара банахових просторів (X, Y) має *властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для операторів*, якщо для будь-якого $\delta > 0$ існує $\varepsilon(\delta) > 0$ таке, що для будь-якого оператора $T \in S_{L(X,Y)}$, якщо $x \in S_X$ та $\|T(x)\| > 1 - \varepsilon(\delta)$, тоді існує $z \in S_X$ та $F \in S_{L(X,Y)}$ такий, що

$$\|F(z)\| = 1, \|x - z\| < \delta \text{ та } \|T - F\| < \delta.$$

Очевидно, що з властивості Бішопа-Фелпса-Болобаша для операторів випливає властивість Бішопа-Фелпса для операторів. У [2, Theorem 2.2] автори довели, що якщо Y має властивість β, тоді для будь-якого простору X пара (X, Y) має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для операторів, посиливши таким чином результат Лінденштрауса. Також була доведена теорема Бішопа-Фелпса-Болобаша у випадку, коли обидва простори скінченновимірні. У цій роботі також була надана характеризація простору Y такого, що пара (ℓ_1, Y) має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша. Нагадаємо, що (ℓ_1, Y) завжди має властивість Бішопа-Фелпса. Як було показано у статті [2] (ℓ_1, Y) не завжди має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша. Прикладом цього являється пара $(\ell_1, \oplus_2 \ell_\infty^{(n)})$. Необхідна і достатня умова на простір Y для того, щоб (ℓ_1, Y) мала властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша, була названа властивістю $AHSP$. Геометрично ця властивість означає наступне: якщо ми маємо будь-який опуклий ряд векторів з одиничної сфери (тобто $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k$, де $x_k \in S_X, \alpha_k \in (0, 1)$, та

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k = 1$), і норма цього ряду близька до 1, тоді існує такий функціонал одиничної норми, що переважна частина цих векторів рівномірно близька до одиничних векторів, що лежать у гіперплощині, де даний функціонал набуває значення 1.

Означення 1.5 ([2, Definition 3.1]). Банаховий простір Y має властивість $AHSP$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $0 < \eta < \varepsilon$ таке, що для будь-якої послідовності $\{x_k\} \subset S_X$, та для будь-якого опуклого ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ з

$$\|\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k\| > 1 - \eta$$

існують підмножина $A \subset \mathbb{N}$ та підмножина $\{z_k : k \in A\} \subset S_X$ такі, що

(I) $\sum\limits_{k \in A} \alpha_k > 1 - \eta$;

(II) $\|z_k - x_k\| < \varepsilon$ для будь-якого $k \in A$;

(III) існує такий $x^* \in S_{X^*}$, що $x^*(z_k) = 1$ для будь-якого $k \in A$.

Прикладами банахових просторів, що мають властивість $AHSP$, є всі скінченновимірні простори, рівномірно опуклі простори, а також $L_1(\mu)$, коли μ – це σ-скінченна міра, та $C(K)$.

Теорема (Акоста, Арон, Гарсія, Маестре). *Пара (ℓ_1, Y) має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша тоді і тільки тоді, коли Y має властивість $AHSP$.*

Ще одним результатом статті [2] є теорема, що пара $(\ell_\infty^{(n)}, Y)$ має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша, якщо Y – рівномірно опуклий простір. Також у [2, Example 6.3] було показано, що неможливо поширити результат Лінденштрауса про щільність у $L(X, Y)$ множини операторів, чий другий спряжений досягає норми, в сенсі властивості Бішопа-Фелпса-Болобаша.

Наступним кроком стала стаття [9] Арона, Чоі, Гарсії, Маестре у 2011 році, в якій була доведена теорема Бішопа-Фелпса-Болобаша для пари $(L_1[0,1], L_\infty[0,1])$ для дійсного і комплексного випадку.

У статті [21] було продовжено вивчення властивості $AHSP$:

Теорема (Чоі, Кім). *Якщо $(L_1[0,1], Y)$ має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша, тоді Y має властивість $AHSP$.*

Теорема (Чоі, Кім). *Нехай банаховий простір Y має властивість Радона-Нікодима. Тоді $(L_1[0,1], Y)$ має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша тоді і тільки тоді, коли Y має властивість $AHSP$.*

На той час залишалося відкритим питання, чи існує такий нескінченновимірний простір Y, що (c_0, Y) має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша. У 2011 році у роботі [10] Арона, Каскалеса та Кожушкіної вивчався випадок, коли T – це асплундовий оператор. Нагадаємо, що банаховий простір X називається асплундовим, якщо для будь-якої неперервної опуклої функції f, визначеної на відкритій опуклій множині $U \subset X$, множина точок із U в яких f диференційовна за Фреше є щільною G_δ множиною в U. Концепція асплундових просторів широко використовується та має декілька характеризацій. Наприклад, X є асплундовим простором тоді і тільки тоді, коли X^* має властивість Радона-Нікодима. Оператор $T \in L(X,Y)$ називається асплундовим оператором, якщо він факторизується через асплундовий простір, тобто існує асплундовий простір Z та оператори $T_1 \in L(X,Z), T_2 \in L(Z,Y)$ такі, що $T = T_2 \circ T_1$. Наприклад, кожний слабко компактний оператор є асплундовим оператором. Очевидно, що якщо X або Y є асплундовим простором, то $T \in L(X,Y)$ є асплундовим оператором. Основний результат [10] – доведення того, що пара просторів $(X, C(K))$ має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша, якщо X являється асплундовим простором. Це надало перший приклад пари (c_0, Y) з властивістю Бішопа-Фелпса-Болобаша, коли Y нескінченновимірний простір.

У 2013 році цей результат було посилено у роботі [16] Каскалеса, Кадеця, Гуірао, в якій цей факт був розповсюджений на випадок (X, A), де $A \subset C(K)$ є рівномірною алгеброю. Головний результат статті – це [16, Теорема 3.6]:

Теорема (Каскалес, Кадець, Гуірао). *Нехай $A \subset C(K)$ – рівномірна алгебра та $T\colon X \to A$ асплундовий оператор з $\|T\| = 1$. Нехай $0 < \varepsilon < \sqrt{2}$, $x_0 \in S_X$, і що $\|Tx_0\| > 1 - \dfrac{\varepsilon^2}{2}$. Тоді існують $u_0 \in S_X$ та асплундовий оператор $\widetilde{T} \in S_{L(X,A)}$ такі, що*

$$\|\widetilde{T}u_0\| = 1, \|x_0 - u_0\| \leqslant \varepsilon \quad \textit{та} \quad \|T - \widetilde{T}\| < 2\varepsilon.$$

У роботі [17] цей результат був доведений для більш широкого класу просторів X та більш широкого класу операторів, а також була отримана краща оцінка. Ми докладно розповімо про це у Розділі 4.

Ще один позитивний результат щодо прикладів просторів, для яких виконується властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша, був отриманий у [22, Теорема 3.1]

Теорема (Чоі, Кім, Лі, Мартін). *Нехай μ і ν – довільні міри. Тоді пара $(L_1(\mu), L_1(\nu))$ має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша.*

Також у тій самій статті був отриманий результат для пари просторів $(L_1[0,1], C[0,1])$. Нагадаємо, що пара просторів $(L_1[0,1], C[0,1])$ не має властивості Бішопа-Фелпса [58], отже, не може мати властивості Бішопа-Фелпса-Болобаша. Але в роботі [22] цей результат доводиться для деяких класів операторів, узагальнюючи таки чином результат статті [31].

Вивчення властивості $AHSP$ далі продовжувалося у статтях [4] та [23], у том числі, щоб отримати результати для певних класів операторів, коли $X = L_1(\mu)$. Було введене таке означення:

Означення 1.6 ([4, Definition 1.3]). Нехай X, Y банахові простори (дійсні або комплексні), $M \subset L(X,Y)$. M має *властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша*, якщо для будь-якого $\delta > 0$ існує $\varepsilon(\delta) > 0$, таке що для будь-якого оператора $T \in M$ одиничної норми, якщо $x \in S_X$ та $\|T(x)\| > 1 - \varepsilon(\delta)$, тоді існує $z \in S_X$ та оператор $F \in M$ одиничної норми такий, що

$$\|F(z)\| = 1, \|x - z\| < \delta \text{ та } \|T - F\| < \delta.$$

Очевидно, що коли $M = L(X, Y)$, це означення збігається з Означенням 1.4 властивості Бішопа-Фелпса-Болобаша для пари просторів (X, Y). Була отримана цікава характеризація властивості $AHSP$ [4, Corollary 2.4].

Теорема (Акоста, Гарсія, Гуерреро, Кім, Маестре)**.** *Наступні умови еквівалентні:*

(I) Y має властивість $AHSP$;

(II) $F(L_1(\mu), Y)$ (підпростір операторів скінченного рангу) має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша;

(III) $K(L_1(\mu), Y)$ (підпростір компактних операторів) має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша;

(IV) $W(L_1(\mu), Y)$ (підпростір слабко компактних операторів) має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша;

(V) $RN(L_1(\mu), Y)$ (множина операторів Радона-Нікодима) має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша.

Нагадаємо, що $T \in L(X, Y)$ називається оператором скінченного рангу, якщо $T(X)$ – скінченновимірний простір; $T \in L(X, Y)$ називається компактним оператором (слабко компактним), якщо $T(B_X)$ – компактна (слабко компактна) множина; $T \in L(X, Y)$ називається оператором Радона-Нікодима, якщо $T(B_X)$ має властивість Радона-Нікодима.

У роботі Чоі, Кіма, Лі, Мартіна [23] була надана достатня умова для того, щоб банаховий простір мав властивість $AHSP$. Також були отримані нові приклади просторів з властивістю $AHSP$, зокрема, $L_1(\mu, X)$, коли X скінченновимірний, або рівномірно опуклий, або має властивість β Лінденштрауса.

У роботах [46], [47], [48] та [49] досліджувався зв’язок властивості

Бішопа-Фелпса-Болобаша та рівномірної опуклості. У статті [47] була доведена теорема Бішопа-Фелпса-Болобаша для пари (X, Y), коли X являється рівномірно опуклим банаховим простором, при чому кількісна оцінка пов'язана з модулем рівномірної опуклості. Також була надана характеризація рівномірної опуклості у зв'язку з властивістю Бішопа-Фелпса-Болобаша [47, Theorem 3.6]:

Теорема (Кім, Лі). *Для банахового простору X наступні дві умови еквівалентні:*

(I) X є рівномірно опуклим;

(II) Для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\eta \in (0, 1)$ таке, що для всіх $x \in B_X$, $x^* \in S_{X^*}$, що задовольняють умову $|x^*(x)| > 1 - \eta$, існує $y \in S_X$, що $\|x - y\| < \varepsilon$ та $|x^*(y)| = 1$.

У статті Кіма [46] було доведено, що пара (c_0, Y) має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша, якщо Y – це рівномірно опуклий банаховий простір. Також було показано, що якщо Y є строго опуклим та (c_0, Y) має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша, тоді Y має бути рівномірно опуклим. У статті Кіма та Лі [48] було доведено, що пара $(C(K), Y)$ має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша, якщо Y являється рівномірно опуклим банаховим простором. Кімом, Лі та Ліном [49, Theorem 5, Theorem 6] була доведена властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для пари (X, Y), коли X – це дійсний чи комплексний простір $L_\infty(\mu)$ або c_0 та Y являється рівномірно опуклим банаховим простором.

У роботі [3] властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша була доведена для просторів неперервних функцій у дійсному випадку [3, Theorem 2.5]:

Теорема (Акоста, Бесера-Гереро, Чоі, Чисельський, Кім, Лі, Лоренсу, Мартін). *Нехай K та S – компактні гаусдорфові простори. Тоді, у дійсному випадку, пара $(C(K), C(S))$ має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для операторів.*

У тій самій статті подібний результат доводиться для класу компактних операторів, які діють з простору неперервних функцій на локально компактному гаусдорфовому топологічному просторі, що прямують до нуля на нескінченності, у рівномірно опуклий простір Y.

Відзначимо, що поширення [3, Theorem 2.5.] на комплексний випадок залишається відкритим і дуже не простим питанням. Більш того, невідомо, чи являється множина операторів, які діють між комплексними $C(K)$ та $C(S)$ та досягають норми, щільною у $L(C(K), C(S))$, хоча результат для дійсного випадку був доведений багато років тому. Але важливий позитивний результат для випадку коли X – це комплексний простір $C_0(L)$ був отриманий у [6, Theorem 2.4]:

Теорема (Акоста)**.** *Пара* $(C_0(L), Y)$ *має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для операторів, якщо* Y *являється* $\mathbb{C}$*-рівномірно опуклим банаховим простором.*

Нагадаємо, що $\mathbb{C}$-модулем опуклості простору Y називається величина

$$\delta_Y^{\mathbb{C}}(\varepsilon) = \inf_{x,y \in S_Y} \sup\{\|x + \lambda\varepsilon y\| - 1 : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1\}.$$

Банаховий простір Y називається $\mathbb{C}$-рівномірно опуклим, якщо $\delta_Y^{\mathbb{C}}(\varepsilon) > 0$ для будь-якого $\varepsilon > 0$.

Робота Акости, Бесеро-Гереро, Гарсії, Кіма та Маестре [5] присвячена вивченню властивості Бішопа-Фелпса-Болобаша для пари просторів $(\ell_\infty^{(3)}, Y)$. З цією метою автори ввели наступне поняття

Означення 1.7 ([5, Definition 2.1])**.** Банаховий простір X має властивість $AHSP - \ell_\infty^{(3)}$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що виконується наступне.

Нехай для множини $\{x_i : i = 1, 2, 3\} \subset B_X$ з $\|x_1 + x_2 - x_3\| \leqslant 1$ існує непорожня підмножина $C \subset \{1, 2, 3\}$ та існує $x^* \in S_{X^*}$, що

$$x^*(x_i) > 1 - \delta \text{ для будь-якого } i \in C.$$

Тоді існує множина $\{z_i : i = 1, 2, 3\} \subset B_X$ з $\|z_1 + z_2 - z_3\| \leqslant 1$ така, що $\|x_i - z_i\| < \varepsilon$ для $i = 1, 2, 3$, та $\|\sum_{i \in C} z_i\| = |C|$

Прикладами банахових просторів, що мають таку властивість, є всі скінченновимірні простори, простори з властивістю β Ліндενштрауса, всі рівномірно опуклі простори, а також простір $L_1(\mu)$. Не підпадає під це означення, наприклад, простір, що є строго опуклим та не є рівномірно опуклим. Головним результатом згаданої статті є [5, Theorem 2.9]:

Теорема (Акоста, Гарсія, Бесеро-Гереро, Кім, Маестре). *Пара* $(\ell_\infty^{(3)}, Y)$ *має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша тоді і тільки тоді, коли* Y *має властивість* $AHSP - \ell_\infty^{(3)}$.

Дослідження умов, коли пара (c_0, Y) має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша було продовжене у статті [7]. Головний результат цієї статті [7, Theorem 2.4]:

Теорема (Акоста, Гарсія, Кім, Маестре). *Нехай* Y *– дійсний чи комплексний банаховий простір. Нехай існують множини* $\{y_i : i \in I\} \subset S_Y$ *та* $\{y_i^* : i \in I\} \subset S_{Y^*}$*, підмножина* $E \subset S_Y$*, відображення* $F : E \to S_{Y^*}$*, число* $\rho \in [0, 1)$*, що виконуються наступні умови:*

(I) $y_i^*(y_i) = 1$;

(II) $|y_i^*(y_j)| \leqslant \rho$, *якщо* $i \neq j$;

(III) E *– рівномірно строго виступаюча множина відносно* F *(тобто* $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$*, що якщо* $e \in E, y \in B_Y$ *з* $ReF(e)(y) > 1 - \delta$*, тоді* $\|y - e\| < \varepsilon$*);*

(IV) $|F(e)(y_i)| \leqslant \rho$ *для всіх* $i \in I, e \in E$;

(V) $\|y\| = \max\{\sup\limits_{i \in I}|y_i^*(y)|, \sup\limits_{e \in E}|F(e)(y)|\}$ *для всіх* $y \in Y$.

Тоді пара (c_0, Y) *має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша.*

Таким чином був отриманий новий клас банахових просторів Y таких, що пара (c_0, Y) має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша. Цей клас містить в собі рівномірно опуклі простори, простори з властивістю β Ліндενштрауса та інші простори.

Цікавий напрямок досліджень був започаткований у роботі [52] Мігеля Мартіна стосовно компактних операторів. У всіх відомих прикладах оператори, що не могли бути апроксимовані операторами, що досягають норми, були некомпактними. Отже, до цієї роботи питання, чи може будь-який компактний оператор бути наближений оператором, що досягає норми, залишалось відкритим. У статті [52] була надана негативна відповідь на це питання.

Подальше вивчення властивості Бішопа-Фелпса-Болобаша для класу компактних операторів знайшло відображення у статті [25] Дантаса, Гарсії, Маестре і Мартіна. З властивості Бішопа-Фелпса-Болобаша для класу компактних операторів не випливає загальна властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша. Наприклад, пара $(L_1[0,1], C[0,1])$ має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для класу компактних операторів, але множина $N(L_1[0,1], C[0,1])$ не є щільною у $L(L_1[0,1], C[0,1])$, як було показано у більш ранніх роботах. Головні результати статті [25] можна сформулювати наступним чином:

Теорема (Дантас, Гарсія, Маестре, Мартін). *Справедливі наступні твердження:*

- *Якщо пара (c_0, Y) має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для компактних операторів, то це виконується і для пари $(C_0(L), Y)$.*
- *Якщо Y – рівномірно опуклий банаховий простір, то (X, Y) має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для компактних операторів.*
- *Якщо пара $(\ell_1(X), Y)$ має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для компактних операторів та X^* має властивість Радона-Нікодима, то пара $(L_1(\mu, X), Y)$ також має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша.*
- *Якщо пара $(X, \ell_p(Y))$ має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для компактних операторів та X^* має властивість Радона-Нікодима, то для будь-якої міри μ такої, що $L_p(\mu, Y)$ – нескінченновимірний*

простір, пара $(X, L_p(\mu, Y))$ *також має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша* $(1 \leqslant p < \infty)$.

- *Якщо пара* (X, Y) *має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для компактних операторів, то також її має пара* $(X, L_\infty(\mu, Y))$ *для будь-якої* σ*-скінченної міри.*
- *Якщо пара* (X, Y) *має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для компактних операторів, то також її має пара* $(X, C(K, Y))$.

Залишається невирішеним питання, чи випливає з властивості Бішопа-Фелпса-Болобаша властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для класу компактних операторів.

Цікава версія властивості Бішопа-Фелпса-Болобаша була запропонована у роботі Дантаса, Кіма та Лі [24]. У цій статті вводиться нова властивість, яка дозволяє наближувати оператор $T \in L(X, Y)$ таким оператором $F \in L(X, Y)$, який досягає норми у тій самій точці, в якій T майже досягає норми.

Означення 1.8 ([24, Definition 1.2])**.** Пара банахових просторів (X, Y) має *точкову властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для операторів*, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\eta(\varepsilon) > 0$, таке що для будь-якого оператора $T \in S_{L(X,Y)}$, якщо $x \in S_X$ та $\|T(x)\| > 1 - \eta(\varepsilon)$, тоді існує $F \in S_{L(X,Y)}$ такий, що $\|F(x)\| = 1$ та $\|T - F\| < \varepsilon$.

Ця властивість є сильнішою за властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша. Цікаво, що рівномірна гладкість простору X характеризується тим, що $(X, \mathbb{K})$ має точкову властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша [24, Proposition 2.1]. Також були отримані приклади пар банахових просторів, які мають цю властивість. Наприклад, пара (X, Y), де X – рівномірно гладкий простір та Y має властивість β Лінденштрауса; пара (H, Y), де H – гільбертовий простір; пара (X, A), де X – рівномірно гладкий простір та A – рівномірна алгебра.

У статтях, про які ми щойно розповіли, увага в першу чергу приділялася доведенню факту, що функціонал або оператор та точку, на якій майже досягається норма, можна апроксимувати. Хоча в багатьох теоремах надавалася деяка кількісна оцінка, питання точності цих оцінок не досліджувалися. У 2014 році у статті [18] Чіки, Кадеця, Мартіна, Морено-Пулідо і Рамбли-Барено були введені два модулі, що показували найкращу можливу оцінку у властивості Бішопа-Фелпса-Болобаша для функціоналів у даному просторі.

Введемо позначення:

$$\Pi_\varepsilon(X) = \{(x, x^*) \in X \times X^* : \|x\| = \|x^*\| = 1,\, x^*(x) \geqslant 1 - \varepsilon\}. \tag{1.1}$$

Для зручності будемо позначати $\Pi_0(X)$ (тобто, коли виконується рівність $x^*(x) = 1$) через $\Pi(X)$.

Означення 1.9 ([18, Definition 1.2])**.** Нехай X – банаховий простір. Модулем Бішопа-Фелпса-Болобаша простору X називається функція $\Phi_X : (0, 2) \longrightarrow \mathbb{R}^+$, чиє значення у точці $\varepsilon \in (0, 2)$ – це інфімум тих $\delta > 0$, що для будь-якої пари $(x, x^*) \in B_X \times B_{X^*}$, існує $(y, y^*) \in \Pi(X)$ з $\|x - y\| < \delta$ та $\|x^* - y^*\| < \delta$.

Сферичним модулем Бішопа-Фелпса-Болобаша простору X називається така функція $\Phi^S_X : (0, 2) \longrightarrow \mathbb{R}^+$, що для даного $\varepsilon \in (0, 2)$, її значення $\Phi^S_X(\varepsilon)$ – це інфімум тих $\delta > 0$, що для будь-якої пари $(x, x^*) \in \Pi_\varepsilon(X)$ з $x^*(x) > 1 - \varepsilon$, існує $(y, y^*) \in \Pi(X)$ з $\|x - y\| < \delta$ та $\|x^* - y^*\| < \delta$.

Очевидно, що $\Phi^S_X(\varepsilon) \leqslant \Phi_X(\varepsilon)$. У роботі [18] були доведені такі властивості вищезгаданих модулів:

- $\Phi^S_X(\varepsilon)$ та $\Phi_X(\varepsilon)$ є неперервними функціями відносно ε;
- $\Phi^S_X(\varepsilon)$ та $\Phi_X(\varepsilon)$ є зростаючими функціями;
- $\Phi_X \leqslant \Phi_{X^*}$ та $\Phi^S_X \leqslant \Phi^S_{X^*}$;
- $\Phi^S_X(\varepsilon) \leqslant \Phi_X(\varepsilon) \leqslant \sqrt{2\varepsilon}$;
- $\Phi_X(\varepsilon) = \sqrt{2\varepsilon}$ тоді і тільки тоді, коли $\Phi^S_X(\varepsilon) = \sqrt{2\varepsilon}$.

З оцінки $\Phi_X(\varepsilon) \leqslant \sqrt{2\varepsilon}$ випливає точна версія теореми Бішопа-Фелпса-Болобаша.

Теорема 1.10 (Точна теорема Бішопа-Фелпса-Болобаша [18]). *Нехай X – банаховий простір, $\varepsilon \in (0,2)$, та $(x, x^*) \in B_X \times B_{X^*}$ з $x^*(x) > 1-\varepsilon$. Тоді існує така пара $(y, y^*) \in \Pi(X)$, що*

$$\max\{\|x-y\|, \|x^*-y^*\|\} \leqslant \sqrt{2\varepsilon}. \tag{1.2}$$

Остання оцінка не може бути покращена у $\ell_1^{(2)}$ – двовимірному просторі з нормою $\|(x_1, x_2)\| = |x_1| + |x_2|$ (див. [14] або [18, Example 2.5]). Більш того, Теорема 5.8 з [18] стверджує, що простір $\ell_1^{(2)}$ – це єдиний (з точністю до ізометрії) двовимірний дійсний простір, в якому оцінка (1.2) не може бути покращена. Навіть для нескінченновимірних банахових просторів $\ell_1^{(2)}$ відіграє важливу роль у питанні точності теореми Бішопа-Фелпса-Болобаша: згідно з Теоремою 5.9 з [18], якщо у просторі X оцінка (1.2) для деякого $\varepsilon \in (0, 1/2)$ не може бути покращена, тоді X містить у собі майже ізометричні копії $\ell_1^{(2)}$. Нагадаємо, що X містить у собі майже ізометричні копії $\ell_1^{(2)}$ тоді і тільки тоді, коли існують такі елементи $u_n, v_n \in S_X$, що $\|u_n + v_n\| \to 2$ та $\|u_n - v_n\| \to 2$.

Простори, що не містять майже ізометричних копій $\ell_1^{(2)}$, були вперше розглянуті Джеймсом [34]. Головний результат [34] – рефлексивність таких просторів – поклав початок теорії суперрефлексивних просторів.

Означення 1.11 ([34, Definition 1.2]). Банаховий простір X називається рівномірно неквадратним, якщо існує $\alpha > 0$ таке, що

$$\frac{1}{2}(\|x+y\| + \|x-y\|) \leqslant 2-\alpha \text{ для всіх } x, y \in B_X.$$

У у літературі можна знайти різноманітні кількісні характеристики рівномірної неквадратності, їх властивості та зв'язок з іншими важливими геометричними характеристиками банахових просторів. У Розділі 2 ми розглядаємо такий параметр рівномірної неквадратності:

$$\alpha(X) := 2 - \sup_{x,y \in B_X} \left\{ \frac{1}{2}(\|x+y\| + \|x-y\|) \right\}.$$

Ми виявили, що одно з перших досліджень цього параметра було здійснено у роботі [12] Баронті, Касіні та Папіні у трохи іншому вигляді. У цій статті вводяться та вивчаються дві характеристики:

$$A_1(X) := \frac{1}{2} \inf_{x \in S_X} \sup_{y \in S_X} \left\{ \frac{1}{2}(\|x+y\| + \|x-y\|) \right\}.$$

$$A_2(X) := \frac{1}{2} \sup_{x \in S_X} \sup_{y \in S_X} \left\{ \frac{1}{2}(\|x+y\| + \|x-y\|) \right\}.$$

$A_2(X)$ було обчислено для просторів ℓ_p, $1 < p < \infty$:

$$A_2(\ell_p) = \max\{2^{1/p}, 2^{1-1/p}\}.$$

Далі, у тій самій статті встановлений зв'язок константи $A_2(X)$ з модулем рівномірної опуклості:

Теорема (Баронті, Касіні, Папіні [12, Proposition 2.2]). *Для будь-якого банахового простору X виконується рівність*

$$A_2(X) = A_2(X^*) = 1 + \sup\{\varepsilon/2 - \delta_X(\varepsilon) : \varepsilon \in [0, 2]\}.$$

Багато досліджень було проведено стосовно константи Джеймса $J(X) = \sup\{\min\{\|x+y\|, \|x-y\|\} : x, y \in S_X\}$, яка також показує, наскільки рівномірно неквадратним є банаховий простір.

У роботі Като, Малігранди та Такахаши [39] досліджуються деякі властивості $J(X)$. У статті Ванга [63, Теорема 1] доводиться такий зв'язок між $J(X)$ та $A_2(X)$:

$$A_2(X) \leqslant \frac{3J(X) - 2}{J(X)}.$$

У статтях [37] та [38] Комуро, Саіто і Танака глибоко вивчають властивості просторів, які мають параметр $J(X) = \sqrt{2}$, тобто найменше можливе значення цього параметра. Ми розглянемо випадок, коли $\alpha(X) = 2 - \sqrt{2}$.

Вивчення модулів Бішопа-Фелпса-Болобаша було продовжено у статтях [19] та [20]. Один з результатів роботи [19] – це більш детальна оцінка для модуля Бішопа-Фелпса-Болобаша, яка враховує норми вектора та функціонала. Якщо ми позначимо

$$\Pi_{\varepsilon,\mu,\theta}(X) = \{(x, x^*) \in X \times X^* : \|x\| = \mu, \|x^*\| = \theta, x^*(x) \geqslant 1 - \varepsilon\},$$

то більш тонкий модуль Бішопа-Фелпса-Болобаша визначається наступним чином:

$$\Phi_X(\mu,\theta,\varepsilon) = \sup_{(x,x^*)\in\Pi_{\varepsilon,\mu,\theta}(X)} \quad \inf_{(y,y^*)\in\Pi_0(X)} \quad \max\{\|x-y\|, \|x^*-y^*\|\}.$$

У статті [19, Theorem 2.1] була доведена така оцінка

$$\Phi_X(\mu,\theta,\varepsilon) \leqslant \min\left\{\Psi(\mu,\theta,\varepsilon), 1+\mu, 1+\theta\right\},$$

де $\Psi(\mu,\theta,\varepsilon) = 1 - \dfrac{\mu+\theta}{2} + \sqrt{\dfrac{(\mu-\theta)^2}{2} + 2(\mu\theta-(1-\varepsilon))}$ для $\varepsilon\in(0,1), \mu,\theta \in [1-\varepsilon, 1]$ з $\theta\mu > 1-\varepsilon$. Також було доведено, що ця оцінка є точною, і вона не може бути покращена для простору $\ell_1^{(2)}$. Легко бачити, що коли $\mu=1, \theta=1$, права частина нерівності перетворюється просто на $\sqrt{2\varepsilon}$.

Інший результат [19] – це оцінка сферичного модуля Бішопа-Фелпса-Болобаша через параметр рівномірної неквадратності. Більш докладно ми розповідаємо про це у Розділі 2 даної роботи.

У роботі [20] Чіка, Кадеця, Мартіна та Мері факт, що рівномірно неквадратний простір не може мати максимальний модуль Бішопа-Фелпса-Болобаша був наданий для всіх $\varepsilon\in(0,2)$ та з більш простим доведенням. Також була доведена неперервність обох модулів відносно простору X. Крім того була надана корисна характеризація рівномірно неквадратних просторів [20, Наслідок 2.6]:

Теорема (Чіка, Кадець, Мартін, Мері). *Для банахового простору X наступні умови еквівалентні:*

(I) X містить ізометричну копію простору $\ell_1^{(2)}$;

(II) існує число $k\in(0,1)$ та існують два вектори $x\in S_X, y\in X/\{0\}$ такі, що

$$\|x-y\| = k\ ma\left\|x - \frac{y}{\|y\|}\right\| = 2k.$$

У роботах [28] та [44] незалежно і одночасно було досліджено можливість отримання версії теореми Бішопа-Фелпса-Болобаша та Бішопа-Фелпса для ліпшицевих функціоналів. У цих статтях виникають різні підходи до розуміння, що означає, що ліпшицева функція досягає своєї норми. Нагадаємо, що банаховий простір $\mathrm{Lip}_0(X,Y)$ складається з функцій $f : X \longrightarrow Y$ з $f(0) = 0$, які задовольняють (глобально) умову Ліпшиця (тобто існує константа $a > 0$ така, що $\|f(x) - f(y)\| \leqslant a\|x - y\|$). Норма у цьому просторі задається наступним чином:

$$\|f\| = \sup\left\{\frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|x - y\|} : x, y \in X, x \neq y\right\}.$$

Іншими словами, $\|f\|$ – це найменша ліпшицева константа для f.

Годфруа у своїй роботі [28] використовує підхід, що відштовхується від поняття похідної.

Розглядаються ліпшицеві функції $f : X \to Y$, де X, Y – це банахові простори. Він визначає три різних поняття досягнення норми для ліпшицевої функції. Похідною ліпшицевої функції $f : X \to Y$ у точці $x \in X$ за напрямком $e \in S_X$ називається величина

$$f'(x, e) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + te) - f(x)}{t},$$

якщо ця границя існує в просторі Y

Означення 1.12 ([28]). Ліпшицева функція $f : X \to Y$ *досягає ліпшицевої норми на парі точок* $x \neq y$, якщо $\|f\| = \dfrac{\|f(x) - f(y)\|}{\|x - y\|}$.

Ліпшицева функція $f : X \to Y$ *досягає ліпшицевої норми в точці* $x \in X$ *за напрямком* $e \in S_X$, якщо виконується рівність:

$$\left\|\lim_{t \to 0} \frac{f(x + te) - f(x)}{t}\right\| = \|f\|.$$

Ліпшицева функція $f : X \to Y$ *досягає ліпшицевої норми за напрямком* $y \in Y$, якщо $\|f\| = \|y\|$ та існує послідовність пар $x_n, y_n \in X, x_n \neq y_n$ таких, що

$$\lim_{t \to \infty} \frac{f(x_n) - f(y_n)}{\|x_n - y_n\|} = y.$$

Легко бачити, що якщо f досягає норми на парі точок x, y, то вона досягає норми у точці x в напрямку $e = \dfrac{y - x}{\|y - x\|}$, і також f досягає норми за напрямком e. Якщо f досягає норми в точці x за напрямком e, то вона досягає норми за напрямком $y = \lim_{t \to 0} \dfrac{f(x + te) - f(x)}{t}$.

Зворотні твердження не виконуються. Щоб побачити це, достатньо розглянути функцію $f(x) = \sin(x)$, яка має $\|f\| = 1$ і досягає ліпшицевої норми у точці $x = 0$ за напрямком $e = 1$, але не досягає норми на жодній парі точок $x \neq y \in \mathbb{R}$. Другий приклад – функція $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, також з $\|f\| = 1$, яка досягає ліпшицевої норми за напрямком $y = 1$, але не досягає норми у жодній точці за напрямком e, та не досягає норми на жодній парі точок.

Наступна теорема показує, що навіть найслабша умова, що функція досягає норми за напрямком є досить-таки обмежувальною.

Теорема (Годфруа [28, Corollary 6]). *Нехай X – сепарабельний банаховий простір, ізоморфний деякому підпростору простору c_0, Y – банаховий простір з властивістю Кадеця-Клі, тобто у якому сильна і слабка топології узгоджені на одиничній сфері Y. Нехай $f : X \to Y$ – ліпшицевий ізоморфізм. Тоді f не досягає норми в жодному напрямку $y \in Y$.*

У статті [44] розглядається простір $\mathrm{Lip}_0(E)$ ліпшицевих функцій f, що діють із метричного простору E з виділеною точкою 0 у поле дійсних чисел з умовою $f(0) = 0$. У цьому просторі норма задається формулою

$$\|f\| = \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{\rho(x,y)} : x, y \in E, x \neq y\right\}.$$

По-перше, найбільш природне означення, що $f \in \mathrm{Lip}_0(E)$ досягає норми, можна сформулювати так:

Означення 1.13 ([44]). Функція $f \in \mathrm{Lip}_0(E)$ досягає норми у строгому сенсі, якщо існують $x, y \in E$, $x \neq y$ такі, що $\|f\| = \dfrac{|f(x) - f(y)|}{\rho(x,y)}$. Підмножину тих $f \in \mathrm{Lip}_0(E)$, що досягають норми у строгому сенсі, позначимо $\mathrm{SA}(E)$.

Однак такий підхід не дає можливості отримати аналог теореми Бішопа-Фелпса для ліпшицевих функцій навіть у випадку розмірності 1. Ми обґрунтуємо це у Розділі 3.

Але, як було показано у [44], для банахового простору X множина $\mathrm{SA}(X)$ не може бути дуже малою. Насправді $\mathrm{SA}(X)$ слабко секвенційно щільно у $\mathrm{Lip}_0(X)$ для будь-якого банахового простору X. Більше того, слабкий аналог теореми Бішопа-Фелпса був отриманий для ширшого класу метричних просторів у [44, Теорема 2.6].

Метричний простір E називається *локальним*, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ та для будь-якої функції $f \in \mathrm{Lip}_0(E)$ існують дві різні точки $t_1, t_2 \in E$ такі, що $\rho(t_1, t_2) < \varepsilon$ та

$$\frac{f(t_2) - f(t_1)}{\rho(t_1, t_2)} > \|f\| - \varepsilon.$$

Теорема (Кадець, Мартін)**.** *Нехай E – локальний метричний простір. Тоді* $\mathrm{SA}(E)$ *слабко секвенційно щільно у* $\mathrm{Lip}_0(E)$*, тобто для будь-якої $g \in \mathrm{Lip}_0(E)$ існує послідовність $\{g_n\}$ у* $\mathrm{SA}(E)$*, яка слабко збігається до g.*

Інший підхід, що використовується у [44] – це досягнення норми за напрямком (див. Означення 3.4). У Розділі 3 ми досліджуємо узагальнення теореми Бішопа-Фелпса-Болобаша в цьому сенсі для рівномірно опуклих просторів.

У Додатку Б ми надаємо таблицю (Табл. 1.1), в якій підсумовуються відомості щодо того, для яких пар просторів виконується властивість Бішопа-Фелпса, для яких виконується властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша, і для яких не виконується жодна.

РОЗДІЛ 2

КІЛЬКІСНІ ВЕРСІЇ ТЕОРЕМИ БІШОПА-ФЕЛПСА-БОЛОБАША ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛІВ

2.1 Рівномірно неквадратні простори

Нагадаємо, що банаховий простір називається рівномірно неквадратним, якщо всі його двовимірні підпростори рівномірно віддалені від простору $\ell_1^{(2)}$. Існують різноманітні числові характеристики, що вимірюють наскільки неквадратним є простір. Як вже було відмічено у Розділі 1, у статтях [12], [39] досліджувались такі параметри:

$$A_2(X) := \sup_{x,y\in S_X} \left\{\frac{1}{2}(\|x+y\| + \|x-y\|)\right\}. \tag{2.1}$$

$$J(X) = \sup_{x,y\in S_X} \{\min\{\|x+y\|, \|x-y\|\}\}. \tag{2.2}$$

Параметром рівномірної неквадратності простора X ми називаємо величину

$$\alpha(X) := 2 - \sup_{x,y\in B_X} \left\{\frac{1}{2}(\|x+y\| + \|x-y\|)\right\}. \tag{2.3}$$

У цих позначеннях X – це рівномірно неквадратний простір тоді та тільки тоді, коли $\alpha(X) > 0$. Ми визначали параметр $\alpha(X)$ таким чином, щоб нам було зручно отримати оцінку для сферичного модуля Бішопа-Фелпса -Болобаша. Під час вивчення літератури ми виявили, що набагато раніше був введений параметр $A_2(X)$, який явно виражається через $\alpha(X)$. Зауважимо, що основна відмінність між цими виразами полягає в тому, що в формулі (2.1) супремум береться за векторами з одиничної сфери, а в формулі (2.3) супремум береться за векторами з одиничної кулі. Але ця відмінність не є суттєвою.

Твердження 2.1. *Для будь-якого банахового простору* X

$$\alpha(X) = 2 - A_2(X).$$

Доведення. У [12, Proposition 2.2] встановлюється зв'язок $A_2(X)$ з модулем рівномірної опуклості δ_X простору X. Модуль рівномірної опуклості визначається наступною формулою:

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \frac{\|x+y\|}{2} : x, y \in S_X, \|x-y\| = \varepsilon\right\}, \qquad (2.4)$$

а вищезгаданий зв'язок полягає у формулі

$$A_2(X) = 1 + \sup\{\varepsilon/2 - \delta_X(\varepsilon) : \varepsilon \in [0,2]\}.$$

З іншого боку, відомо, що при визначенні модуля рівномірної опуклості інфімум можна брати хоч по $x, y \in B_X$, хоч по $x, y \in S_X$ (наприклад, див. [51, стор. 60]). З цього випливає, що

$$\begin{aligned} A_2(X) &= 1 + \sup\left\{\varepsilon/2 - 1 + \frac{\|x+y\|}{2} : x, y \in B_X, \|x-y\| = \varepsilon, \varepsilon \in [0,2]\right\} \\ &= \sup\left\{\frac{\|x-y\|}{2} + \frac{\|x+y\|}{2} : x, y \in B_X, \|x-y\| = \varepsilon, \varepsilon \in [0,2]\right\} \\ &= \sup_{x,y \in B_X}\left\{\frac{1}{2}(\|x+y\| + \|x-y\|)\right\}. \end{aligned}$$

Отже, $\alpha(X) = 2 - A_2(X)$. □

Проте, для повноти викладу, ми доводимо деякі властивості параметра $\alpha(X)$, які альтернативно можуть бути виведені із властивостей $A_2(X)$.

Твердження 2.2. *Для будь-якого банахового простору* X *виконується нерівність* $\alpha(X) \leqslant 2 - \sqrt{2}$.

Доведення. Згідно з теоремою Дея-Нордлендера [26, стор. 60], для довільного простору X має місце наступна оцінка модуля опуклості: $\delta_X(\varepsilon) \leqslant 1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}$. Отже, можемо написати:

$$
\begin{aligned}
\alpha(X) &= 2 - \sup_{x,y\in B_X}\left\{\frac{1}{2}(\|x+y\|+\|x-y\|)\right\}\\
&= 2 - \sup_{\varepsilon\in(0,2]}\left(\sup\left\{\frac{\|x+y\|}{2} : x,y\in B_X, \|x-y\|=\varepsilon\right\}+\varepsilon/2\right)\\
&= 2 - \sup_{\varepsilon\in(0,2]}\{1-\delta_X(\varepsilon)+\varepsilon/2\} \leqslant 2 - \sup_{\varepsilon\in(0,2]}\left\{\varepsilon/2+\sqrt{1-\varepsilon^2/4}\right\}\\
&= 2-\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

□

Зауваження 2.3. *Оскільки для гільбертого простору H має місце рівність $\delta_H(\varepsilon) = 1-\sqrt{1-\frac{\varepsilon^2}{4}}$, то для будь-якої розмірності починаючи з 2 виконується рівність*

$$\alpha(H) = 2-\sqrt{2}.$$

Нам також було цікаво дослідити, яку інформацію про довільний простір X ми маємо, якщо $\alpha(X) = 2-\sqrt{2}$.

У [37, Theorem 2.3] було доведено, що якщо у банахового простору X з $\dim(X) \geqslant 3$ константа Джеймса (альтернативний параметр рівномірної неквадратності, що визначений у формулі (2.2)) має таке ж саме значення, як у гільбертового простору, а саме $J(X) = J(H) = \sqrt{2}$, тоді цей простір є гільбертовим.

Можна бачити, що

$$\alpha(X) = 2-\sqrt{2} \Rightarrow J(X) = \sqrt{2}.$$

Пояснимо цю імплікацію трохи докладніше:

$$
\begin{aligned}
J(X) &= \sup_{x,y\in S_X}\{\min\{\|x+y\|,\|x-y\|\}\} \leqslant \sup_{x,y\in B_X}\left\{\frac{1}{2}(\|x+y\|+\|x-y\|)\right\}\\
&= A_2(X) = 2-\alpha(X).
\end{aligned}
$$

Отже, якщо $\alpha(X) = 2-\sqrt{2}$, то виконується $J(X) \leqslant \sqrt{2}$, і це означає, що $J(X) = \sqrt{2}$.

Таким чином ми отримали наступне твердження:

Твердження 2.4. *Нехай X – банаховий простір розмірності не менше ніж 3 та $\alpha(X) = 2 - \sqrt{2}$. Тоді X є гільбертовим простором.*

Наступна властивість параметра рівномірної неквадратності полягає в тому, що він не змінюється при переході до спряженого простору.

Твердження 2.5. *Параметр рівномірної неквадратності зберігається при переході до спряженого простору, тобто $\alpha(X) = \alpha(X^*)$ для будь-якого банахового простору X.*

Доведення. Для довільних $x, y \in B_X$ розглянемо опорні функціонали f, g у точках $x + y$ та $x - y$ відповідно, тобто для $f, g \in S_{X^*}$ виконується $f(x + y) = \|x + y\|$ та $g(x - y) = \|x - y\|$. Тоді,

$$\begin{aligned} \|f + g\| + \|f - g\| &\geqslant (f + g)(x) + (f - g)(y) \\ &= f(x + y) + g(x - y) = \|x + y\| + \|x - y\|. \end{aligned}$$

Отже, ми отримуємо

$$\sup_{f,g \in B_{X^*}} \{\|f + g\| + \|f - g\|\} \geqslant \|x + y\| + \|x - y\|.$$

Рухаючи $x, y \in B_X$, ми отримуємо $\alpha(X^*) \leqslant \alpha(X)$. Підставляючи X^* замість X ми отримуємо $\alpha(X^{**}) \leqslant \alpha(X^*)$. У випадку, коли $\alpha(X) > 0$, простір є рефлексивним, і тоді з цього випливає, що $\alpha(X) = \alpha(X^*)$. У іншому випадку $\alpha(X) = 0$, ми маємо $0 = \alpha(X) \geqslant \alpha(X^*) \geqslant 0$, що завершує доведення. □

У роботі [20] була отримана умова, еквівалентна тому, що $\alpha(X) = 0$ у термінах деяких рівностей для векторів, а саме [20, Corollary 2.6], що існує число $k \in (0, 1)$ та існують два вектори $x \in S_X, y \in X/\{0\}$ такі, що

$$\|x - y\| = k \text{ та } \left\| x - \frac{y}{\|y\|} \right\| = 2k.$$

Наступне твердження є кількісною версією цього факту. За допомогою нього ми зможемо оцінити сферичний модуль Бішопа-Фелпса-Болобаша через параметр рівномірної неквадратності.

Твердження 2.6. *Нехай* X *– банаховий простір,* $k \in (0, 1/2], r \in (0, k)$, $x \in S_X, y \in X/\{0\}$ *такі, що*

$$\|x - y\| \leqslant k \qquad \textit{та} \qquad \left\| x - \frac{y}{\|y\|} \right\| \geqslant 2k - r.$$

Тоді виконується наступна нерівність

$$\alpha(X) \leqslant \frac{3r}{2k} \tag{2.5}$$

Доведення. Ми маємо

$$2k - r \leqslant \left\| x - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leqslant \|x - y\| + |1 - \|y\||.$$

Також можемо написати, що

$$k \geqslant |1 - \|y\|| \geqslant \left\| x - \frac{y}{\|y\|} \right\| - \|x - y\| \geqslant \left\| x - \frac{y}{\|y\|} \right\| - k \geqslant k - r. \tag{2.6}$$

$$k \geqslant \|x - y\| \geqslant \left\| x - \frac{y}{\|y\|} \right\| - |1 - \|y\|| \geqslant k - r.$$

Нам потрібно показати, що існують такі вектори $u, v \in S_X$, що

$$\frac{1}{2}(\|u + v\| + \|u - v\|) \geqslant 2 - \frac{3r}{2k}. \tag{2.7}$$

Ми розглянемо два окремі випадки.

Випадок 1. Нехай $\|y\| \leqslant 1$.

Розглянемо вектори
$u = \dfrac{y}{\|y\|} \in S_X, \quad v' = \dfrac{1}{k}x + \left(1 - \dfrac{1}{k}\right)u, \quad v = \dfrac{v'}{\|v'\|} \in S_X,$
та покажемо, що для u, v виконується нерівність (2.7). Зауважемо, що $\|x - u\| \geqslant 2k - r$

Спочатку оцінимо $\|v - v'\|$. Очевидно, що $\|v'\| \geqslant \left| \dfrac{1}{k} - \left| 1 - \dfrac{1}{k} \right| \right| = 1$. Також, використовуючи, що $\|y\| \leqslant 1$ та нерівність (2.6), можемо написати

$$\big| k - 1 + \|y\| \big| = \big| k - (1 - \|y\|) \big| = k - \big| 1 - \|y\| \big| \leqslant 2k - \|x - u\| \leqslant r,$$

і таким чином,

$$\left\| v' - \frac{x - y}{k} \right\| = \left\| \frac{k - 1}{k} u + \frac{1}{k} y \right\| = \frac{1}{k} \big| k - 1 + \|y\| \big| \leqslant \frac{r}{k}\,.$$

Через те, що $\left\|\dfrac{x-y}{k}\right\| \leqslant 1$, ми маємо, що $\|v'\| \leqslant 1 + \dfrac{r}{k}$, тож

$$\|v - v'\| = \big|1 - \|v'\|\big| \leqslant 1 + \frac{r}{k} - 1 = \frac{r}{k}\,.$$

Далі оцінимо $\|u - v'\|$.

$$\|u - v'\| = \left\|u - \frac{1}{k}x - u + \frac{1}{k}u\right\| = \frac{\|x-u\|}{k} \geqslant \frac{2k - r}{k} = 2 - \frac{r}{k}\,.$$

Тепер можемо оцінити

$$\|u - v\| \geqslant \|u - v'\| - \|v - v'\| \geqslant 2 - \frac{2r}{k}. \tag{2.8}$$

Щоб оцінити $\|u + v'\|$ будемо використовувати, що $k \leqslant 1/2$.

$$\|u + v'\| = \frac{1}{k}\,\|x + (2k-1)u\| \geqslant \frac{1}{k}(1 - |1 - 2k|) = 2\,.$$

Тепер можемо оцінити

$$\|u + v\| \geqslant \|u + v'\| - \|v - v'\| \geqslant 2 - \frac{r}{k}. \tag{2.9}$$

Нерівності (2.8) та (2.9) дають нам, що

$$\frac{1}{2}(\|u+v\| + \|u-v\|) \geqslant 2 - \left(\frac{r}{k} + \frac{r}{2k}\right) \geqslant 2 - \frac{3r}{2k}.$$

Отже, нерівність (2.7) виконана. *Випадок 2.* Нехай $\|y\| > 1$.

На цей раз розглянемо такі вектори

$$u = \frac{y}{\|y\|} \in S_X, \quad v' = \frac{1}{k}x - \left(1 + \frac{1}{k}\right)u \quad v = \frac{v'}{\|v'\|} \in S_X.$$

Знов очевидно, що $\|v'\| \geqslant 1$. Використовуючи, що $\|y\| > 1$ та (2.6), отримуємо

$$\big|k + 1 - \|y\|\big| = \big|k - (\|y\| - 1)\big| = k - \big|\|y\| - 1\big| \leqslant r.$$

Таким чином,

$$\left\|v' - \frac{x-y}{k}\right\| = \left\|-\left(1 + \frac{1}{k}\right)u + \frac{1}{k}y\right\| = \frac{1}{k}\big|k + 1 - \|y\|\big| \leqslant \frac{r}{k}\,.$$

Через те, що $\left\|\dfrac{x-y}{k}\right\| \leqslant 1$, ми маємо, що $\|v'\| \leqslant 1 + \dfrac{r}{k}$, тож

$$\|v - v'\| = \big|1 - \|v'\|\big| = \|v'\| - 1 \leqslant \frac{r}{k}\,.$$

Тепер оцінимо $\|u+v'\|$ та $\|u-v'\|$.

$$\|u+v'\| = \left\|u + \frac{1}{k}x - u - \frac{1}{k}u\right\| = \frac{\|x-u\|}{k} \geqslant \frac{2k-r}{k} = 2 - \frac{r}{k}.$$

$$\|u-v'\| = \left\|(2+\frac{1}{k})u - \frac{1}{k}x\right\| \geqslant 2.$$

Таким чином, можемо оцінити

$$\|u+v\| \geqslant \|u+v'\| - \|v'-v\| \geqslant 2 - \frac{r}{k} - \frac{r}{k} = 2 - \frac{2r}{k}. \tag{2.10}$$

$$\|u-v\| \geqslant \|u-v'\| - \|v'-v\| \geqslant 2 - \frac{r}{k}. \tag{2.11}$$

Нерівності (2.10) та (2.11) дають нам, що у другому випадку нерівність (2.7) виконується. □

2.2 Оцінка сферичного модуля Бішопа-Фелпса-Болобаша для рівномірно неквадратних просторів

У цьому розділі ми отримаємо верхню границю для $\Phi_X^S(\varepsilon)$ у термінах параметра рівномірної неквадратності простору X. Мотивацією для отримання цієї оцінки послужила Теорема 5.9 з статті [18], яка стверджує, що якщо у просторі X сферичний модуль Бішопа-Фелпса-Болобаша приймає найбільше можливе значення, а саме $\Phi_X^S(\varepsilon) = \sqrt{2\varepsilon}$ для деякого $\varepsilon \in (0, 1/2)$, тоді X містить у собі майже ізометричні копії $\ell_1^{(2)}$, тобто не є рівномірно неквадратним.

Нагадаємо, що сферичним модулем Бішопа-Фелпса-Болобаша простору X називається функція $\Phi_X^S : (0,2) \longrightarrow \mathbb{R}^+$, яка визначається наступним чином:

$$\Phi_X^S(\varepsilon) = \sup_{(x,x^*)\in\Pi_\varepsilon(X)} \inf_{(y,y^*)\in\Pi(X)} \max\{\|x-y\|, \|x^*-y^*\|\},$$

де $\Pi_\varepsilon(X) = \{(x,x^*) \in X \times X^* : \|x\| = \|x^*\| = 1,\, x^*(x) \geqslant 1-\varepsilon\}$ та $\Pi(X) = \{(x,x^*) \in X \times X^* : \|x\| = \|x^*\| = 1,\, x^*(x) = 1\}$.

Для того, щоб отримати оцінку для Φ_X^S ми будемо використовувати вже цитовану нами у першому розділі теорему Фелпса [56, Corollary 2.2] у наступному вигляді:

Теорема 2.7 (Фелпс). *Нехай X – банаховий простір та $\varepsilon > 0$. Нехай $x^* \in S_{X^*}, x \in B_X$ та*

$$x^*(x) \geqslant \|x^*\| - \varepsilon.$$

Тоді для будь-якого $k \in (0,1)$ існує функціонал $y^* \in X^*$ та вектор $y \in S_X$ такий, що

$$y^*(y) = \|y^*\|, \|x - y\| \leqslant \varepsilon/k \text{ та } \|x^* - y^*\| \leqslant k.$$

Сформулюємо наш основний результат.

Теорема 2.8. *Нехай X – банаховий простір з $\alpha(X^*) > \tilde{\alpha} > 0$. Тоді*

$$\Phi_X^S(\varepsilon) \leqslant \sqrt{2\varepsilon}\sqrt{1 - \frac{1}{3}\tilde{\alpha}} \qquad \text{для} \quad \varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\tilde{\alpha}\right)$$

та

$$\Phi_X^S(\varepsilon) \leqslant 2\varepsilon \qquad \text{для} \quad \varepsilon \in \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\tilde{\alpha}, \frac{1}{2}\right).$$

Отже, з того, що $\alpha(X) = \alpha(X^*)$ у будь-якому банаховому просторі X, маємо

$$\Phi_X^S(\varepsilon) \leqslant \sqrt{2\varepsilon}\sqrt{1 - \frac{1}{3}\alpha(X)} \qquad \text{для} \quad \varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\alpha(X)\right)$$

та

$$\Phi_X^S(\varepsilon) \leqslant 2\varepsilon \qquad \text{для} \quad \varepsilon \in \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\alpha(X), \frac{1}{2}\right).$$

Перед тим, як доводити теорему, доведемо наступну лему.

Лема 2.9. *Нехай X – банаховий простір з $\alpha(X^*) > \tilde{\alpha}$. Тоді для будь-якого $\varepsilon \in (0,2)$, будь-якої пари $(x, x^*) \in \Pi_\varepsilon(X)$ з $x^*(x) > 1 - \varepsilon$, та будь-якого $k \in (0, 1/2]$ існує пара $(y, y^*) \in \Pi(X)$ така, що*

$$\|x - y\| \leqslant \frac{\varepsilon}{k} \qquad \text{та} \qquad \|x^* - y^*\| \leqslant 2k - \frac{2}{3}k\tilde{\alpha}.$$

Доведення. Зафіксуємо $(x, x^*) \in S_X \times S_{X^*}$ з $x^*(x) > 1 - \varepsilon$, та застосовуючи Теорему 2.7 знайдемо $y_0^* \in X^*$ та $y \in Y$ такі, що

$$\|y\| = 1, \quad y_0^*(y) = \|y_0^*\|, \quad \|x - y\| \leqslant \frac{\varepsilon}{k} \quad \text{та} \quad \|x^* - {y_0}^*\| \leqslant k.$$

Позначаючи $y^* = \dfrac{{y_0}^*}{\|{y_0}^*\|}$, маємо $(y, y^*) \in \Pi(X)$. Припустимо від супротивного, що
$$\|x^* - y^*\| > 2k - \frac{2}{3}k\tilde{\alpha}.$$
Тоді ми потрапляємо в умови Твердження 2.6 для простору X^*, з $r = \dfrac{2}{3}k\tilde{\alpha}$ та $k \in (0, 1/2]$. Очевидно, що $r \in (0, k)$, оскільки $\tilde{\alpha} \leqslant 2 - \sqrt{2}$. Отже, ми маємо, що $\alpha(X^*) \leqslant \dfrac{3r}{2k} = \tilde{\alpha}$, і це протиріччя завершує доведення. □

Доведення теореми 2.8. Нехай $(x, x^*) \in S_X \times S_{X^*}$ з $x^*(x) > 1 - \varepsilon$ зафіксовано. Якщо $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6}\tilde{\alpha}\right)$ ми розглянемо
$$k = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2 - \frac{2}{3}\tilde{\alpha}}},$$
що задовольняє $k < \dfrac{1}{2}$ та
$$2k - \frac{2}{3}k\tilde{\alpha} = \frac{\varepsilon}{k} = \sqrt{2\varepsilon}\sqrt{1 - \frac{\tilde{\alpha}}{3}}.$$
Таким чином, згідно з Лемою 5.4, існує пара $(y, y^*) \in \Pi(X)$ така, що
$$\|x - y\| \leqslant \sqrt{2\varepsilon}\sqrt{1 - \frac{\tilde{\alpha}}{3}} \qquad \text{та} \qquad \|x^* - y^*\| \leqslant \sqrt{2\varepsilon}\sqrt{1 - \frac{\tilde{\alpha}}{3}}.$$
Беручи супремум по всіх (x, x^*) ми отримуємо потрібну нерівність.

Якщо навпаки $\varepsilon \in \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6}\tilde{\alpha}, \dfrac{1}{2}\right)$, ми використовуємо Лему 5.4 з $k = \dfrac{1}{2}$ та отримуємо
$$\|x - y\| \leqslant 2\varepsilon \qquad \text{та} \qquad \|x^* - y^*\| \leqslant 1 - \frac{1}{3}\tilde{\alpha} < 2\varepsilon,$$
що завершує доведення теореми. □

Зауважимо, що границя для $\Phi^S_X(\delta)$, яку ми надали в цій теоремі, не претендує на те, щоб вважатися точною. Але ми покажемо, що ця оцінка не може бути покращена дуже сильно. А саме, ми покажемо, що для будь-якого значення $\alpha \in [0, 1/2]$ існує такий банаховий простір X з параметром рівномірної неквадратності α, що
$$\Phi^S_X(\varepsilon) \geqslant \sqrt{2\varepsilon}\sqrt{1 - \alpha(X)}.$$

Для цього ми будемо розглядати двовимірний простір чия одинична сфера є шестикутником. А саме, зафіксуємо $\rho > \dfrac{1}{2}$ та позначимо X_ρ лінійний простір $\mathbb{R}^2$ з такою нормою:

$$\|(x_1,x_2)\| = \|(x_1,x_2)\|_\rho = \max\left\{\left|x_1 - \frac{1-\rho}{\rho}x_2\right|, \left|x_2 - \frac{1-\rho}{\rho}x_1\right|, |x_1+x_2|\right\}.$$

Тобто,

$$\|(x_1,x_2)\| = \begin{cases} |x_1+x_2|, & \text{якщо } x_1x_2 \geqslant 0; \\ |x_1 - \frac{1-\rho}{\rho}x_2|, & \text{якщо } x_1x_2 < 0 \text{ та } |x_1| > |x_2|; \\ |x_2 - \frac{1-\rho}{\rho}x_1|, & \text{якщо } x_1x_2 < 0 \text{ та } |x_1| \leqslant |x_2|. \end{cases} \tag{2.12}$$

Одинична куля простору X_ρ – це шестикутник $absdef$, де $a = (1,0); b = (0,1); c = (-\rho,\rho); d = (-1,0); e = (0,-1)$; та $f = (\rho,-\rho)$.

Спряжений простір до X_ρ – це двовимірний простір з такою нормою:

$$\|(x_1,x_2)\|^* = \|(x_1,x_2)\|^*_\rho = \max\{|x_1|,|x_2|,\rho|x_1-x_2|\},$$

Тобто, одинична куля простору X^*_ρ – це шестикутник $a^*b^*c^*d^*e^*f^*$, де $a^* = (1,1); b^* = \left(-\dfrac{1-\rho}{\rho},1\right); c^* = \left(-1,\dfrac{1-\rho}{\rho}\right); d^* = (-1,-1); e^* = \left(\dfrac{1-\rho}{\rho},-1\right)$; та $f^* = \left(1,-\dfrac{1-\rho}{\rho}\right)$. Відповідні сфери S_ρ та S^*_ρ зображені на Рис 2.1.

Зауважимо, що у випадку, коли $\rho = \dfrac{1}{2}$ сфера X_ρ перетворюється на квадрат $abde$, тобто $X_{1/2}$ є ізометричним простору $\ell_1^{(2)}$ та $\ell_\infty^{(2)}$. Коли $\rho > \dfrac{1}{2}$, простір X_ρ не є ізометричним до $\ell_\infty^{(2)}$. Обчислимо параметр рівномірної неквадратності X_ρ.

Твердження 2.10. *Нехай $\rho \in [1/2,1]$. Тоді у просторі $X = X_\rho$*

$$\alpha(X_\rho) = 1 - \frac{1}{2\rho}$$

Доведення. Розглянемо $f(x,y) = \dfrac{1}{2}(\|x+y\| + \|x-y\|)$. Тоді $\alpha(X) = 2 - \sup\{f(x,y) : (x,y) \in B_{X_\rho} \times B_{X_\rho}\}$. Функція $f : B_{X_\rho} \times B_{X_\rho} \to \mathbb{R}$ є опуклою, тож досягає свого максимального значення в деякій крайній точці множини $S_{X_\rho} \times S_{X_\rho}$, тобто в точці (x, y) з $x, y \in \{a, b, c, d, e, f\}$. Також, $f(x, y) = f(y, x) = f(x, -y)$, отже через симетричність функції та симетричність одиничної кулі достатньо перевірити значення функції f у наступних точках (x, y): $x = a, y = b$ та $x = a, y = c$.

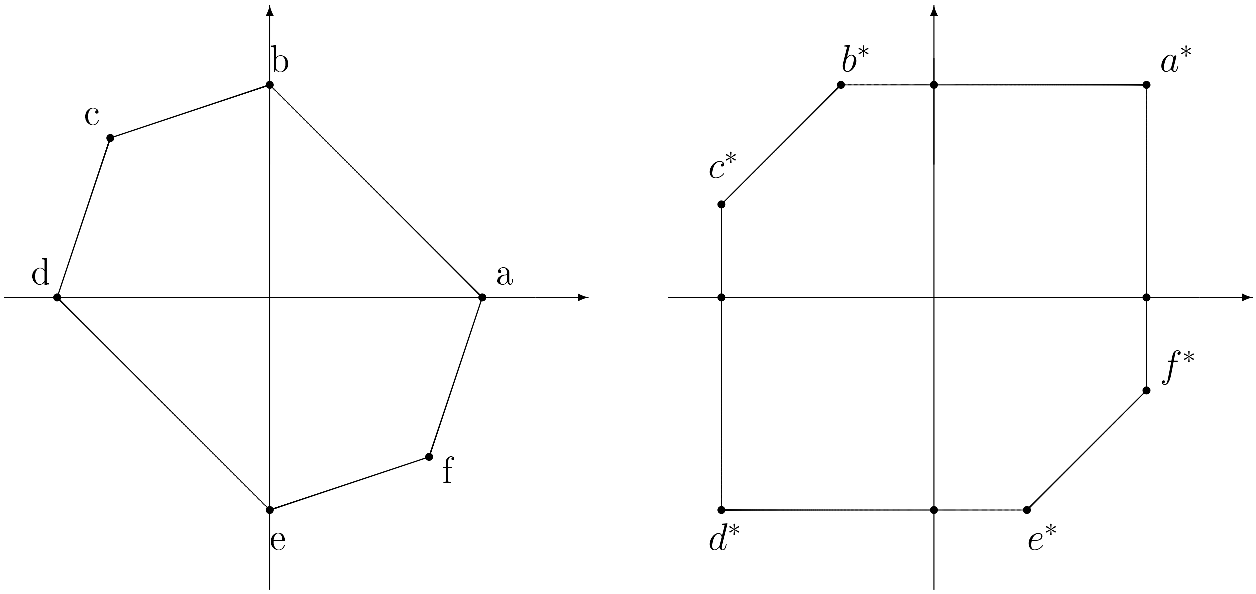

Рис. 2.1 Сфери S_p та S_p^*

Якщо $x = a = (1, 0), y = b = (0, 1)$, тоді $\|x+y\| = \|(1, 1)\| = 2, \|x-y\| = \|(1, -1)\| = 1 + \dfrac{1-\rho}{\rho} = \dfrac{1}{\rho}$. Отже, $f(a, b) = 1 + \dfrac{1}{2\rho}$.

Якщо $x = a = (1, 0), y = c = (-\rho, \rho)$, тоді $\|x + y\| = \|(1 - \rho, \rho)\| = 1 - \rho + \rho = 1, \|x - y\| = \|(1 + \rho, -\rho)\| = 1 + \rho + 1 - \rho = 2$. Отже, $f(a, c) = 1 + \dfrac{1}{2} \leqslant 1 + \dfrac{1}{2\rho}$.

Таким чином, $\max\{f(x, y) : (x, y) \in B_{X_\rho} \times B_{X_\rho}\} = 1 + \dfrac{1}{2\rho}$, та відповідно $\alpha(X_\rho) = 1 - \dfrac{1}{2\rho}$. $\square$

Щоб уникнути плутанини, ми використовуємо дужки $[\cdot, \cdot]$, $[\cdot, \cdot[$ щоб позначити лінійні сегменти, наприклад, $[a, b] = \{\lambda b + (1-\lambda)a : 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$; та використовуємо дужки $(\cdot, \cdot)$, щоб позначити елементи декартового здобутку.

Множина $\Pi(X_\rho)$ – це багатокутник у $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$:

$$
\begin{aligned}
\Pi(X_\rho) = \quad & \{(a,x^*) : x^* \in [f^*, a^*]\} \cup \{(x,a^*) : x \in [a,b]\} \\
& \cup\{(b,x^*) : x^* \in [a^*, b^*]\} \cup \{(x,b^*) : x \in [b,c]\} \\
& \cup\{(c,x^*) : x^* \in [b^*, c^*]\} \cup \{(x,c^*) : x \in [c,d]\} \\
& \cup\{(d,x^*) : x^* \in [c^*, d^*]\} \cup \{(x,d^*) : x \in [d,e]\} \\
& \cup\{(e,x^*) : x^* \in [d^*, e^*]\} \cup \{(x,e^*) : x \in [e,f]\} \\
& \cup\{(f,x^*) : x^* \in [e^*, f^*]\} \cup \{(x,f^*) : x \in [f,a]\}.
\end{aligned} \tag{2.13}
$$

Теорема 2.11. *Для будь-якого $\alpha \in [0, 1/2]$ існує банаховий простір X з $\alpha(X) = \alpha$ такий, що*

$$\Phi_X^S(\varepsilon) \geqslant \sqrt{2\varepsilon}\sqrt{1-\alpha(X)} \tag{2.14}$$

для всіх $\varepsilon \in]0, 1[$.

Доведення. Покажемо, що простір $X = X_\rho$ з $\rho = \dfrac{1}{2(1-\alpha)}$ відповідає вимогам теореми. Застосування Твердження 2.10 дає, що $\alpha(X) = \alpha$, тобто залишається перевірити тільки нерівність (2.14).

Позначимо $x = (1-\sqrt{\varepsilon\rho}, \sqrt{\varepsilon\rho})$, $x^* = (1, 1-\sqrt{\varepsilon/\rho})$. Тоді, $x \in]a, b[$, $x^* \in]a^*, f^*[$ та $x^*(x) = 1-\varepsilon$. Щоб перевірити справедливість (2.14), достатньо показати, що не існує такої пари $(y, y^*) \in \Pi(X)$, що $\max\{\|x-y\|, \|x^*-y^*\|\} < \sqrt{2\varepsilon}\sqrt{1-\alpha}$.

Позначимо $r = \sqrt{2\varepsilon}\sqrt{1-\alpha}$ та розглянемо множину U таких $y \in S_X$, що $\|x-y\| < r$. U – це перетин S_X з відкритою кулею з радіусом r та центром у x (U позначено жирною лінією на Рис 2.2). Радіус кулі дорівнює відстані від x до a:

$$\|x-a\| = \|(-\sqrt{\varepsilon\rho}, \sqrt{\varepsilon\rho})\| = \sqrt{\varepsilon\rho} + \frac{1-\rho}{\rho}\sqrt{\varepsilon\rho} = \sqrt{\varepsilon/\rho} = \sqrt{2\varepsilon}\sqrt{1-\alpha} = r,$$

а відстані від x до точок відрізків $]a, f[$ та $]f, e[$ є більшими.

Це пояснює малюнок для малих значень r. Також для більших значень r множина U може містити точки b та c, та ніколи не міститиме точок відрізку $[d, e]$, оскільки r менше ніж 2, та відстань від x до точок $[d, e]$ дорівнює 2. Таким чином, $U \subset]a, b] \cup [b, c] \cup [c, d[$. Також розглянемо множину V таких $y^* \in S_{X^*}$, що $\|x^* - y^*\| < r$. V – це перетин S_{X^*} з відкритою кулею радіуса r з центром у x^* (жирна лінія на Рис 2.3). Радіус кулі дорівнює відстані від x^* до a^*: $\|x^* - a^*\| = \|(0, -\sqrt{\varepsilon/\rho})\| = \sqrt{\varepsilon/\rho} = r$.

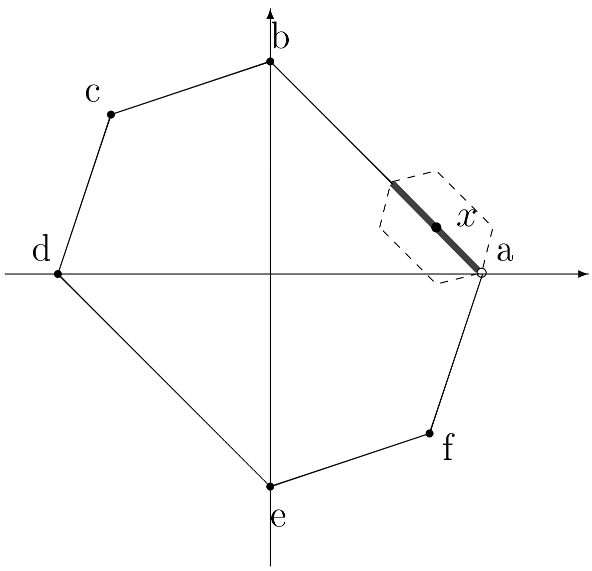

Рис 2.3 Множина U

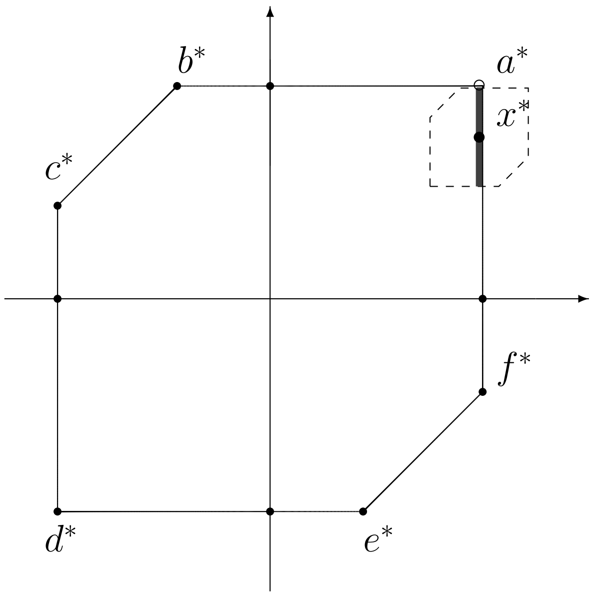

Рис. 2.2 Множина V

Залишилось показати, що $(y, y^*) \notin \Pi(X)$ для будь-яких $y \in U$ та $y^* \in V$. Цей факт випливає негайно з опису $\Pi(X_\rho)$, даного у (2.13), та U разом з тим, що $V \subset]d^*, e^*] \cup [e^*, f^*] \cup [f^*, a^*[$. $\square$

Наша остання мета у цьому підрозділі – показати, що модуль Бішопа-Фелпса-Болобаша неможливо виразити через параметр рівномірної неквадратності в загальному випадку. Ми надамо приклад банахового простору, який має параметр рівномірної неквадратності такий самий, як у гільбертового простору, та покажемо що сферичний модуль цього простору не дорівнює відповідному модулю гільбертового простору при малих $\varepsilon \in (0, 1)$.

У [18, Example 4.3] модуль Бішопа-Фелпса-Болобаша для гільбертового простору був обчислений наступним чином.

Твердження 2.12. *Нехай H – гільбертів простір з* $\dim X \geqslant 2$. *Тоді*

$$\Phi_H^S(\varepsilon) = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 2\varepsilon}}, \quad \varepsilon \in (0, 2).$$

Як вже було показано, гільбертовий простір має найбільший можливий параметр рівномірної неквадратності: $\alpha(H) = 2 - \sqrt{2}$, і як вже відмічалось раніше, знайти приклад простору з таким самим параметром рівномірної неквадратності, який не є гільбертовим, можливо лише у двовимірному випадку.

Позначимо X_{oct} лінійний простір $\mathbb{R}^2$ з нормою

$$\|(x_1, x_2)\| = \max\left\{|x_1| + (\sqrt{2}-1)|x_2|, (\sqrt{2}-1)|x_1| + |x_2|\right\}.$$

Одинична куля простору X_{oct} – це правильній восьмикутник $abcdefhg$, де $a = (1, 0); b = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}); c = (0, 1); d = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}); e = (-1, 0); f = (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}); h = (0, -1)$; та $g = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

Спряжений простір до X_{oct} – це $\mathbb{R}^2$ з нормою, що задається формулою

$$\|(x_1, x_2)\|^* = \max\left\{|x_1|, |x_2|, \frac{1}{\sqrt{2}}(|x_1| + |x_2|)\right\},$$

і одинична куля простору ${X_{oct}}^*$ – це восьмикутник $a^*b^*c^*d^*e^*f^*h^*g^*$, де $a^* = (1, \sqrt{2}-1); b^* = (\sqrt{2}-1, 1); c^* = (-(\sqrt{2}-1), 1); d^* = (\sqrt{2}-1, -1); e^* = (-(\sqrt{2}-1), -1); f^* = (-(\sqrt{2}-1), -1); h^* = (\sqrt{2}-1, -1)$; та $g^* = (1, -(\sqrt{2}-1))$. Відповідні сфери $S_{X_{oct}}$ та $S^*_{X_{oct}}$ показані на Рис 2.4:

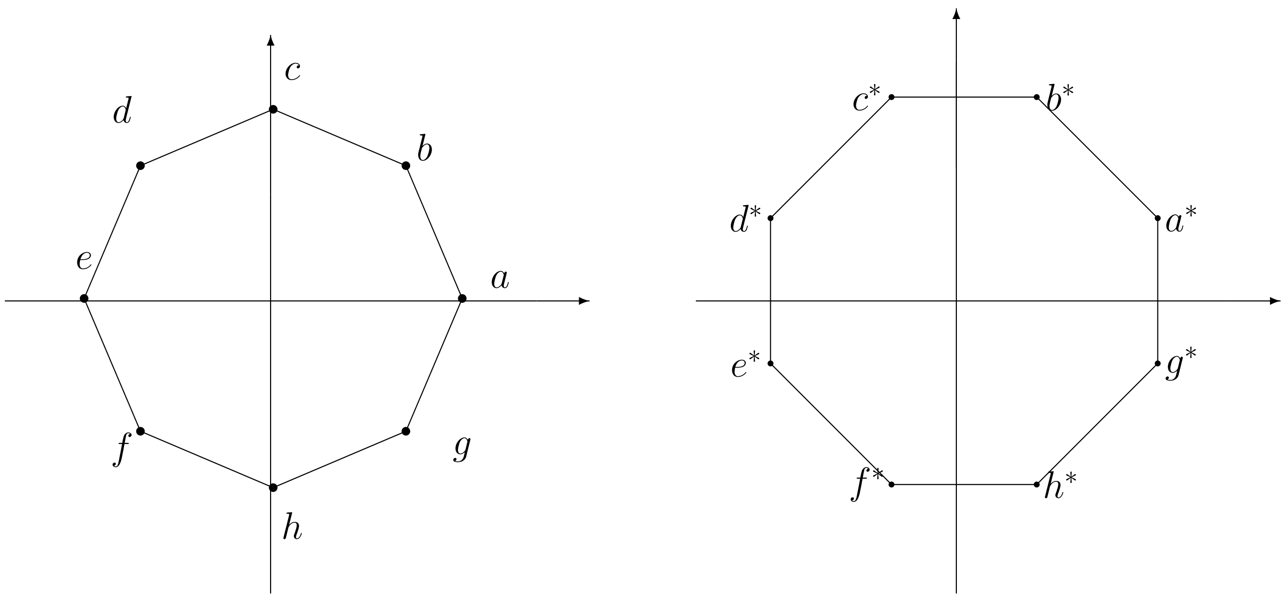

Рис. 2.4 Сфери $S_{X_{oct}}$ та $S^*_{X_{oct}}$

Перевіримо, що параметр рівномірної неквадратності у цьому просторі такий самий, як у гільбертовому просторі.

Твердження 2.13. $\alpha(X_{oct}) = 2 - \sqrt{2}$.

Доведення. Розглянемо функцію $f(x, y) = \dfrac{1}{2}(\|x + y\| + \|x - y\|)$. Тоді $\alpha(X_{oct}) = 2 - \sup\limits_{x,y \in B_{X_{oct}}} f(x, y)$.

Оскільки $f(x, y)$ – опукла функція, вона досягає максимуму в крайній точці багатогранника $B_{X_{oct}} \times B_{X_{oct}}$. Покажемо, що $\max f(x, y) = \sqrt{2}$, перебравши такі вершини $x = a, y = b$, $x = a, y = c$, $x = b, y = d$ (знову користуємось симетричністю функції та симетричністю кулі).

Якщо $x = a = (1, 0), y = b = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, то

$\|x + y\| = \|(1 + 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\| = 2,$

$\|x - y\| = \|(1 - 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})\| = (\sqrt{2} - 1)\left(\dfrac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}\right) + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 2(\sqrt{2} - 1).$

Отже, $f(a, b) = 1 + \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2}$.

Якщо $x = a = (1, 0), y = c = (0, 1)$, то

$\|x + y\| = \|(1, 1)\| = \sqrt{2},$

$\|x - y\| = \|(1, -1)\| = \sqrt{2}.$

Отже, $f(a, c) = \sqrt{2}$

Якщо $x = b = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), y = d = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, то

$\|x + y\| = \|(0, \sqrt{2})\| = \sqrt{2}$

$\|x - y\| = \|(\sqrt{2}, 0)\| = \sqrt{2}.$

Отже, $f(a, c) = \sqrt{2}$.

Таким чином, $\max f(x, y) = \sqrt{2}$. Отже, $\alpha(X_{oct}) = 2 - \sqrt{2}$. □

Твердження 2.14. *Нехай $0 < \varepsilon < 1$. Тоді для достатньо малих ε у просторі X_{oct} виконується оцінка*

$$\Phi^S_{X_{oct}}(\varepsilon) \geqslant \sqrt{2\varepsilon}\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

Таким чином,

$$\Phi^S_{X_{oct}}(\varepsilon) > \Phi^S_H(\varepsilon) \text{ } \textit{малих } \varepsilon > 0.$$

Доведення. Розглянемо пару

$$x = \left(1 - \delta, \frac{\delta}{\sqrt{2} - 1}\right), x^* = \left(1, (\sqrt{2} - 1)\left(1 - \frac{\varepsilon}{\delta}\right)\right),$$

де $\delta = \sqrt{\varepsilon}\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. Візьмемо ε досить маленьке, щоб $x \in [a, (a+b)/2]$. При такому виборі $\|x\| = \|x^*\| = 1$, $x^*(x) = 1 - \varepsilon$, тобто $(x, x^*) \in \Pi_\varepsilon(X_{oct})$.

Очевидно, що існують два найкращих варіанти, як наблизити (x, x^*) парою з $\Pi(X_{oct})$: наблизити x точкою $a = (1, 0)$, не змінюючи функціонал, або наблизити функціонал точкою $a^* = (1, \sqrt{2} - 1)$, не змінюючи вектор. У першому випадку ми маємо

$$\|x - a\| = \left\| \left(\delta, \frac{\delta}{\sqrt{2}-1} \right) \right\| = 2\sqrt{2}\delta = \sqrt{2\varepsilon}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

У другому випадку

$$\|x^* - a^*\| = \left\| \left(0, \frac{\varepsilon}{\delta}(\sqrt{2}-1) \right) \right\| = \frac{\varepsilon}{\delta}(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2\varepsilon}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Таким чином, $\Phi^S_{X_{oct}}(\varepsilon) \geqslant \sqrt{2\varepsilon}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ для малих ε, отже виконується нерівність $\Phi^S_{X_{oct}}(\varepsilon) > \Phi^S_H(\varepsilon)$. $\square$

2.3 Модифікована теорема Бішопа-Фелпса-Болобаша та її точність

З Теореми 2.7 можна легко вивести наступну модифіковану теорему Бішопа-Фелпса-Болобаша, просто підставивши $k = \sqrt{\varepsilon}$.

Теорема 2.15 (Модифікована теорема Бішопа-Фелпса-Болобаша)**.** *Нехай X – банаховий простір, $x \in B_X$ та $x^* \in S_{X^*}$ такі, що $x^*(x) \geqslant 1 - \varepsilon$ ($\varepsilon \in (0, 2)$). Тоді існує така пара $(y, y^*) \in S_X \times X^*$ з $\|y^*\| = y^*(y)$, що*

$$\max\{\|x - y\|, \|x^* - y^*\|\} \leqslant \sqrt{\varepsilon}.$$

Поліпшення оцінки порівняно з оригінальною версією виникає тому, що ми не вимагаємо $\|y^*\| = 1$. Виходячи з цього, ми можемо ввести такі означення.

Означення 2.16. Модифікований модуль Бішопа-Фелпса-Болобаша –

це функція, яка визначається наступним чином:

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}_X(\varepsilon) = \inf\{\delta > 0 : &\text{для всіх}\, (x, x^*) \in B_X \times B_{X^*},\ \text{якщо}\ x^*(x) > 1-\varepsilon,\\ &\text{то існує пара}\ (y, y^*) \in S_X \times X^*\, \text{така, що}\\ &|y^*(y)| = \|y^*\|,\ \text{та}\ \max\{\|x-y\|, \|x^*-y^*\|\} < \delta\}.\end{aligned}$$

Модифікований сферичний модуль Бішопа-Фелпса-Болобаша – це функція, яка визначається наступним чином:

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}^S_X(\varepsilon) = \inf\{\delta > 0 : &\text{для всіх}\, (x, x^*) \in S_X \times S_{X^*},\ \text{якщо}\ x^*(x) > 1-\varepsilon,\\ &\text{то існує пара}\ (y, y^*) \in S_X \times X^*\, \text{така, що}\\ &|y^*(y)| = \|y^*\|,\ \text{та}\ \max\{\|x-y\|, \|x^*-y^*\|\} < \delta\}.\end{aligned}$$

З означення очевидно випливають такі властивості модулів:

(I) $\widetilde{\Phi}^S_X(\varepsilon) \leqslant \widetilde{\Phi}_X(\varepsilon)$;

(II) $\widetilde{\Phi}^S_X(\varepsilon)$ та $\widetilde{\Phi}_X(\varepsilon)$ – це зростаючи функції.

Далі ми хочемо отримати точну верхню оцінку для $\widetilde{\Phi}_X(\varepsilon)$ та $\widetilde{\Phi}^S_X(\varepsilon)$. З Теореми 2.15 очевидно випливає, що $\widetilde{\Phi}^S_X(\varepsilon) \leqslant \sqrt{\varepsilon}$. Для того, щоб отримати таку ж саму оцінку для $\widetilde{\Phi}_X(\varepsilon)$, нам необхідно посилити Теорему 2.7, щоб замість $x^* \in S_{X^*}$ можна було брати $x^* \in B_{X^*}$.

Лема 2.17. *Нехай X – банаховий простір, $x \in B_X$, $x^* \in B_{X^*}$, $\varepsilon \in (0, 2)$ та $x^*(x) > 1-\varepsilon$. Тоді для будь-якого $k \in (0, 1)$ існують $y^* \in X^*$ та $z \in S_X$ такі, що*

$$y^*(z) = \|y^*\|, \qquad \|x - z\| < \frac{1 - \dfrac{1-\varepsilon}{\|x^*\|}}{k}, \qquad \|x^* - y^*\| < k\|x^*\|. \tag{2.15}$$

Більш того, для будь-якого $\tilde{k} \in [\varepsilon/2, 1)$ існують $z^* \in S_{X^*}$ та $z \in S_X$ такі, що

$$z^*(z) = 1, \qquad \|x - z\| < \frac{\varepsilon}{\tilde{k}}, \qquad \|x^* - z^*\| < 2\tilde{k}. \tag{2.16}$$

Доведення. Ми маємо, що $\dfrac{x^*}{\|x^*\|}(x) > 1-\eta$ для $\eta = 1-\dfrac{1-\varepsilon}{\|x^*\|}$, та можемо застосувати Теорему 2.7. Тоді для будь-якого $k \in (0, 1)$ існує $\zeta^* \in X^*$ та

$z \in S_X$ такі, що

$$\zeta^*(z) = \|\zeta^*\|, \qquad \|x - z\| < \frac{\eta}{k}, \qquad \left\| \frac{x^*}{\|x^*\|} - \zeta^* \right\| < k.$$

Щоб отримати (2.15), візьмемо $y^* = \|x^*\| \cdot \zeta^*$. Цей функціонал також досягає своєї норми у точці z та

$$\|x^* - y^*\| = \|x^*\| \cdot \big\| x^*/\|x^*\| - \zeta^* \big\| < k\|x^*\|.$$

Щоб довести другу частину нашої леми, для $\tilde{k} \in [\varepsilon/2, 1)$ візьмемо

$$k = \frac{\tilde{k}(\|x^*\| - (1-\varepsilon))}{\varepsilon\|x^*\|}.$$

З того, що $\|x^*\| \geqslant x^*(x) > 1 - \varepsilon$, випливає, що $k > 0$. З іншого боку, $k = \tilde{k}\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon\|x^*\|}\right) \leqslant \tilde{k}\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon}\right) = \tilde{k} < 1$, і для цього значення k ми можемо знайти $y^* \in X^*$ та $z \in S_X$, що (2.15) виконується. Позначимо $z^* = \frac{y^*}{\|y^*\|}$. Тоді $\|x - z\| < \varepsilon/\tilde{k}$ та

$$\begin{aligned} \|x^* - z^*\| &\leqslant \|x^* - y^*\| + \|y^* - z^*\| = \|x^* - y^*\| + |1 - \|y^*\|| \\ &\leqslant \|x^* - y^*\| + |1 - \|x^*\| + \|x^*\| - \|y^*\|| \leqslant 2\|x^* - y^*\| + 1 - \|x^*\|. \end{aligned}$$

Отже, ми маємо

$$\|x^* - z^*\| < 2k\|x^*\| + 1 - \|x^*\| = \frac{2\tilde{k} \cdot (\|x^*\| - (1-\varepsilon))}{\varepsilon} + 1 - \|x^*\| \leqslant 2\tilde{k}.$$

Остання нерівність виконується, тому що функція

$$f(t) = \frac{2\tilde{k} \cdot (t - (1-\varepsilon))}{\varepsilon} + 1 - t \quad \text{з } t \in (1-\varepsilon, 1)$$

зростає, коли $\tilde{k} \geqslant \varepsilon/2$, тож $\max f = f(1) = 2\tilde{k}$. □

Зауваження 2.18. *Легко бачити, що для* $\tilde{k} < \frac{\varepsilon}{2}$ *нерівність* (2.16) *вочевидь виконується та не є точною, тому що у цьому випадку нерівність* $\|x - z\| \leqslant \frac{\varepsilon}{\tilde{k}}$ *слабкіша за нерівність трикутника* $\|x - z\| \leqslant 2$, *тому, користуючись щільністю множини функціоналів, які досягають норми, можна знайти пару* $(z, z^*) \in \Pi(X)$ *з* $\|x^* - z^*\| < 2\tilde{k}$.

Теорема 2.19. *Для будь-якого банахового простору* X

$$\widetilde{\Phi}^S_X(\varepsilon) \leqslant \widetilde{\Phi}_X(\varepsilon) \leqslant \sqrt{\varepsilon}$$

Доведення. Нам потрібно показати, що для будь-якої пари $(x, x^*) \in B_X \times B_{X^*}$ з $x^*(x) \geqslant 1-\varepsilon$ існує пара $(y, y^*) \in B_X \times X^*$ така, що $y^*(y) = \|y^*\|$ та $\max\{\|x-y\|, \|x^*-y^*\|\} \leqslant \sqrt{\varepsilon}$. Скористаємось Лемою 2.17 з

$$k = \frac{\sqrt{\|x^*\| - 1 + \varepsilon}}{\|x^*\|}.$$

При такому виборі $k \in (0,1)$, тому що $\|x^*\| \geqslant 1-\varepsilon$, і виконується рівність

$$\frac{1 - \dfrac{1-\varepsilon}{\|x^*\|}}{k} = k\|x^*\| = \sqrt{\|x^*\| - 1 + \varepsilon}.$$

Отже, ми маємо пару $(y, y^*) \in B_X \times X^*$ з $y^*(y) = \|y^*\|$ та

$$\max\{\|x-y\|, \|x^*-y^*\|\} \leqslant \sqrt{\|x^*\| - 1 + \varepsilon}.$$

Зауважимо, що функція $f(t) = \sqrt{t-1+\varepsilon}$ зростає по t, і тому $f(t) \leqslant f(1) = \sqrt{\varepsilon}$. Таким чином, ми перевірили, що

$$\max\{\|x-y\|, \|x^*-y^*\|\} \leqslant \sqrt{\varepsilon}.$$

$\square$

Наша наступна мета – показати, що оцінка зверху для модифікованих модулів не може бути покращена. Ми знаємо що оцінка для класичного модуля Бішопа-Фелпса-Болобаша $\Phi_X^S(\varepsilon) \leqslant \sqrt{2\varepsilon}$ може бути точною тільки для просторів, що не є рівномірно неквадратними. Але для модифікованого модуля ситуація змінюється. Далі у цьому розділі ми представимо сім'ю рівномірно неквадратних двовимірних просторів, у яких Теорема 2.19 не може бути покращена.

Для цього ми розглянемо ту ж саму сім'ю просторів X_ρ з $\rho > \dfrac{1}{2}$ з нормою заданою формулою (2.12). Одиничні сфери простору X_ρ та його спряженого показані на Рис 2.1.

Теорема 2.20. *Нехай $\varepsilon \in (0,1)$, $\rho \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$. Тоді у просторі $X = X_\rho$ існує така пара $(x, x^*) \in \Pi_\varepsilon(X)$, що для будь-якої пари $(y, y^*) \in S_X \times X^*$ з $y^*(y) = \|y^*\|$ виконується $\max\{\|x-y\|, \|x^*-y^*\|\} \geqslant \sqrt{\varepsilon}$. Іншими словами, $\widetilde{\Phi}_X^S(\varepsilon) = \widetilde{\Phi}_X(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$.*

Доведення. Ми хочемо показати, що $x = (1-\rho\sqrt{\varepsilon}, \rho\sqrt{\varepsilon})$, $x^* = \left(1, 1-\dfrac{\sqrt{\varepsilon}}{\rho}\right)$ – це потрібна пара (x, x^*). Спочатку зауважимо, що $x \in (a, b)$, $x^* \in (a^*, f^*)$ та $x^*(x) = 1-\rho\sqrt{\varepsilon}+\rho\sqrt{\varepsilon}-\dfrac{\sqrt{\varepsilon}}{\rho}\cdot\rho\sqrt{\varepsilon} = 1-\varepsilon$, тобто $(x, x^*) \in \Pi_\varepsilon(X)$.

Припустимо від супротивного, що існує пара $(y, y^*) \in S_X \times X^*$ з $y^*(y) = \|y^*\|$, що $\max\{\|x-y\|, \|x^*-y^*\|\} < \sqrt{\varepsilon}$. Розглянемо множину U тих $y \in S_X$, що $\|x-y\| < \sqrt{\varepsilon}$. U – це перетин $S_X = S_\rho$ з відкритою кулею радіуса $\sqrt{\varepsilon}$ з центром у x (U було зображено на Рис 2.2). Радіус кулі дорівнює відстані від x до a:

$$\|x-a\| = \|(-\rho\sqrt{\varepsilon}, \rho\sqrt{\varepsilon})\| = \rho\sqrt{\varepsilon}+\rho\sqrt{\varepsilon}\cdot\frac{1-\rho}{\rho} = \sqrt{\varepsilon},$$

що пояснює малюнок для маленьких значень $\sqrt{\varepsilon}$. Також для більших значень радіуса множина U може містити точки b та c, але ніколи не буде вміщувати точок відрізку $[d, e]$, тому що радіус $\sqrt{\varepsilon}$ менше ніж 1, а відстань від x до відрізка $[d, e]$ дорівнює двом. Тому $U \subset (a, b] \cup [b, c] \cup [c, d)$.

Розглянемо також множину V тих $y^* \in B_{X^*}$, що $\|x^*-y^*\| < \sqrt{\varepsilon}$. V – це перетин $B_{X^*} = B_\rho^*$ з відкритою кулею радіуса $\sqrt{\varepsilon}$ з центром x^* (див. Рис 2.5 нижче).

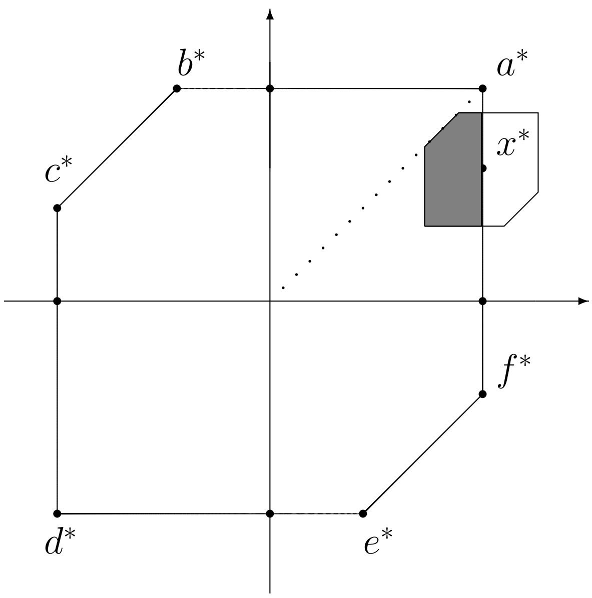

Рис. 2.5 Множина V

Щоб пояснити цей малюнок, покажемо, що внутрішність множини $x^*+\sqrt{\varepsilon}B_{X^*}$ лежить у відкритій півплощині, яка відмежовується діагоналлю (тобто елементами виду $y^* = (\eta, \eta)$, $\eta \in \mathbb{R}$). Для цього ми повинні перевірити, що $\|x^* - y^*\| \geqslant \sqrt{\varepsilon}$ для будь-якого $y^* = (\eta, \eta)$. Дійсно,

$$\|x^*-y^*\| = \left\|\left(1-\eta, 1-\eta-\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\rho}\right)\right\| = \max\left\{|1-\eta|, \left|1-\eta-\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\rho}\right|, \sqrt{\varepsilon}\right\} \geqslant \sqrt{\varepsilon}.$$

Для того, щоб довести справедливість теореми, нам залишається показати, що $\dfrac{y^*(y)}{\|y^*\|} \neq 1$ для будь-яких $y \in U$ та будь-яких $y^* \in V$, або ,іншими словами,

$$\left(y, \frac{y^*}{\|y^*\|}\right) \notin \Pi(X).$$

Цей факт очевидно випливає з опису множин $\Pi(X_\rho)$ (див. (2.13)) та U, разом з тим, що $\left\{\dfrac{y^*}{\|y^*\|} : y^* \in V\right\} \subset (d^*, e^*] \cup [e^*, f^*] \cup [f^*, a^*)$. □

Таким самим чином показується і точність Теореми 2.7. Як ми вже казали, деякі значення параметра k не повинні розглядатися у питанні точності, оскільки для $k \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ твердження є тривіальним та не точним. Для інших значень параметра Теорема 2.7 є точною.

Теорема 2.21. *Нехай* $\varepsilon \in (0, 2)$, $\rho \in \left[\dfrac{1}{2}, \min\left\{1, \dfrac{1}{\varepsilon}\right\}\right)$. *Тоді у просторі* $X = X_\rho$

(i) для будь-якого $k \in (\rho\varepsilon, 1)$ *та будь-якого* $h < \dfrac{\varepsilon}{k}$ *існує пара* $(x, x^*) \in \Pi_\varepsilon(X)$ *така, що для будь-якої пари* $(y, y^*) \in S_X \times X^*$ *з* $y^*(y) = \|y^*\|$ *якщо* $\|x - y\| < h$, *тоді виконується* $\|x^* - y^*\| > k$, *та*

(ii) для будь-якого $k \in (\rho\varepsilon, 1)$ *та будь-якого* $\tilde{h} < k$ *існує пара* $(x, x^*) \in \Pi_\varepsilon(X)$, *така, що для будь-якої пари* $(y, y^*) \in S_X \times X^*$ *з* $y^*(y) = \|y^*\|$ *якщо* $\|x^* - y^*\| < \tilde{h}$, *тоді* $\|x - y\| > \dfrac{\varepsilon}{k}$.

Доведення. Для (i) ми можемо обрати $x = (1-\rho h, \rho h), x^* = (1, 1-\dfrac{\varepsilon}{\rho h})$; для (ii) – $x = (1 - \dfrac{\rho\varepsilon}{\tilde{h}}, \dfrac{\rho\varepsilon}{\tilde{h}}), x^* = (1, 1 - \dfrac{\tilde{h}}{\rho})$. Малюнки та міркування такі самі як у Теоремі 2.20. □

2.4 Висновки до розділу 2

У цьому розділі ми дослідили деякі властивості параметра рівномірної неквадратності та встановили зв'язок з іншими характеристиками рівномірно неквадратних просторів. Ми отримали кількісну версію теореми, що рівномірно неквадратні простори не можуть мати максимальне можливе значення модуля Бішопа-Фелпса-Болобаша. Також ми навели приклад двовимірних просторів, які мають однакове значення параметра рівномірної неквадратності, але різне значення сферичного модуля Бішопа-Фелпса-Болобаша, що показує, що модуль Бішопа-Фелпса-Болобаша не можливо виразити через параметр рівномірної неквадратності.

В останньому підрозділі ми ввели означення модифікованих модулів Бішопа-Фелпса-Болобаша, отримали для них верхню границю, а також показали, що на відміну від класичного модуля, оцінка зверху залишається точною в деяких рівномірно неквадратних просторах.

До основних результатів цього розділу належать:

– Теорема 2.8, в якій надається оцінка зверху для сферичного модуля Бішопа-Фелпса-Болобаша через параметр рівномірної неквадратності.

– Теорема 2.11, в якій надається оцінка знизу для модуля Бішопа-Фелпса-Болобаша у конкретному рівномірно неквадратному просторі, щоб показати, що оцінка отримана в Теоремі 2.8 не може бути суттєво покращена.

– Твердження 2.14 у якому надається оцінка знизу для модуля Бішопа-Фелпса-Болобаша у двовимірному просторі, який має такий самий параметр рівномірної неквадратності, як гільбертовий простір, але відмінне значення сферичного модуля Бішопа-Фелпса-Болобаша.

– Лема 2.17, в якій ми трошки удосконалюємо Теорему Фелпса 2.7, щоб мати можливість розглядати функціонал з одиничної кулі, а не із одиничної сфери.

– Теорема 2.19, в якій ми надаємо точну оцінку для модифікованих модулів Бішопа-Фелпса-Болобаша.

– Теорема 2.20 про існування рівномірно неквадратних просторів, у яких оцінка для модифікованого модуля Бішопа-Фелпса-Болобаша залишається точною.

Цікавою, на наш погляд, нерозв'язаною задачею є дати опис тих просторів, для яких оцінка зверху для модифікованого модуля є точною.

Основні положення цього розділу викладені у публікаціях автора [19], [40], [59].

РОЗДІЛ 3

ТЕОРЕМА БІШОПА-ФЕЛПСА-БОЛОБАША ДЛЯ ЛІПШИЦЕВИХ ФУНКЦІОНАЛІВ

У цьому розділі ми досліджуємо поширення теореми Бішопа-Фелпса та Бішопа-Фелпса-Болобаша для нелінійних ліпшицевих функцій, які діють з банахового простору X в $\mathbb{R}$. Ми позначаємо через $\mathrm{Lip}_0(X)$ банаховий простір функцій $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ з $f(0) = 0$, які задовольняють умову Ліпшиця, тобто для будь-якої $f \in \mathrm{Lip}_0(X)$ існує таке число $L > 0$, що для всіх $x, y \in \mathbb{R}$ виконується $|f(x) - f(y)| \leqslant L\|x - y\|$. У цьому просторі норма визначається наступним чином:

$$\|f\| = \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|} : x, y \in X, x \neq y \right\}. \tag{3.1}$$

3.1 Досягнення норми у строгому сенсі та досягнення норми за напрямком

Як вже говорилось у Розділі 1, існують різні підходи до того, що вважати досягненням норми для ліпшицевих функцій. По-перше, найбільш природне означення:

Означення 3.1. Функція $f \in \mathrm{Lip}_0(X)$ *досягає норми у строгому сенсі*, якщо існує така пара точок $x, y \in X$, $x \neq y$, що $\|f\| = \dfrac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|}$. Ми будемо позначати підмножину тих $f \in \mathrm{Lip}_0(X)$, які досягають норми у строгому сенсі через $\mathrm{SA}(X)$.

Наведемо приклад функції, яка не досягає норми у вищезазначеному сенсі, і такої, яка досягає її.

Розглянемо найпростіший випадок $X = \mathbb{R}$ та функцію $f(x) = \sin(x)$. Очевидно, що $\|f\| \leqslant 1$, та оскільки $\lim_{x \longrightarrow 0} \sin(x)/x = 1$, то $\|f\| = 1$. Але для будь-яких точок $x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$ виконується строга нерівність $|\sin(x) - \sin(y)| < |x - y|$. Таким чином, $f(x)$ не досягає норми у строгому сенсі. Тепер наведемо приклад ліпшицевої функції, яка досягає норми у строгому сенсі:

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } |x| \leqslant 1; \\ \operatorname{sign} x, & \text{якщо } 1 < |x| < \pi/2; \\ \sin x, & \text{якщо } |x| \geqslant \pi/2. \end{cases} \cdot$$

Очевидно, що $g(x)$ досягає норми у строгому сенсі на будь-якій парі точок $x, y \in [-1, 1], x \neq y$.

Але, на жаль, це означення є занадто обмежувальним для того, щоб отримати аналог теореми Бішопа-Фелпса. Далі ми покажемо, що навіть у найпростішому випадку $X = \mathbb{R}$ множина $\mathrm{SA}(X)$ не є щільною у $\mathrm{Lip}_0(X)$

Теорема 3.2. *Множина* $\mathrm{SA}(\mathbb{R})$ *не є щільною у* $\mathrm{Lip}_0(\mathbb{R})$.

Щоб показати це ми маємо спочатку довести нескладну лему.

Лема 3.3. *Якщо* $f \in \mathrm{Lip}_0(\mathbb{R})$ *досягає норми на парі точок* $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $x < y$, *та* $z \in]x, y[$, *тоді* f *також досягає норми на парах* (x, z) *та* (y, z), *та виконується рівність*

$$f(z) = \frac{|z - y| f(x) + |x - z| f(y)}{|x - y|}. \tag{3.2}$$

Зокрема, для будь-якого числа $\theta \in [0, 1]$ *виконується* $f(\theta x + (1 - \theta) y) = \theta f(x) + (1 - \theta) f(y)$.

Доведення. Ми можемо вважати, що $f(x) - f(y) \geqslant 0$ (інакше ми помножимо f на -1). Через те, що f досягає своєї норми на парі (x, y), ми маємо

$$\begin{aligned} \|f\| |x - y| &= f(x) - f(y) = f(x) - f(z) + f(z) - f(y) \\ &\leqslant \|f\| |x - z| + \|f\| |z - y| = \|f\| |x - y|. \end{aligned}$$

Це означає, що нерівності $f(x) - f(z) \leqslant \|f\| |x - z|$ та $f(z) - f(y) \leqslant \|f\| |z - y|$ насправді є рівностями $f(x) - f(z) = \|f\| |x - z|$ та $f(z) - f(y) = \|f\| |z - y|$, і це означає, що f досягає норми на парах (x, z) та (y, z). Отже, $f(x) =$

$f(z) + \|f\||x - z|$ та $f(y) = f(z) - \|f\||z - y|$. Підставляючи останні дві формули у праву частину рівняння (3.2), ми отримуємо бажаний результат. $\square$

Доведення Теореми 3.2. Відомо, що $\mathrm{Lip}_0(\mathbb{R})$ є ізометричним до $L_\infty(\mathbb{R})$ (наприклад, див. [65, Твердження 6 та 2]), і потрібна бієктивна ізометрія $U : \mathrm{Lip}_0(\mathbb{R}) \longrightarrow L_\infty(\mathbb{R})$ – це оператор диференціювання (похідна ліпшицевої функції $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ існує майже всюди). Виходячи з цього та попередньої Леми 3.3, для будь-якої $f \in \mathrm{SA}(\mathbb{R})$ відповідна $U(f) = f'$ – це функція, яка дорівнює $\|f\|$ або $-\|f\|$ на деякому непорожньому інтервалі (тут ми використовуємо Лему 3.3).

Ми можемо побудувати множину $A \subset [0, 1]$, яка буде замкненою, ніде не щільною у $[0, 1]$ та мати позитивну міру Лебега. А саме, множина A може бути побудована подібно до множини Кантора, але інтервали, які "викидаються" мають бути достатньо маленькими. На першому кроці видаляється середня частина із одиничного інтервалу $[0, 1]$ довжиною $1/4$, залишаючи $[0, 3/8] \cup [5/8, 1]$. На наступному кроці, видаляється середня частина кожного із отриманих інтервалів, щоб їх загальна довжина дорівнювала $1/8$. Цей процес повторюється до нескінченності, і на n-ому кроці видаляються інтервали загальною довжиною $1/2^{n+1}$. Множина A складається з усіх точок інтервалу $[0, 1]$, які залишаються після всіх вилучень. При такій побудові міра Лебега множини A дорівнює $1/2$.

Тепер розглянемо $g \in \mathrm{Lip}_0(\mathbb{R})$, яка має похідну $\mathbf{1}_A$ (характеристична функція множини A). Тоді g не може бути наближена жодною функцією з $\mathrm{SA}(\mathbb{R})$. Насправді виконується, що для будь-якої $f \in \mathrm{SA}(\mathbb{R})$

$$\|g - f\| = \|\mathbf{1}_A - f'\|_\infty \geqslant \frac{1}{2}. \tag{3.3}$$

Дійсно, $\|g\| = \|\mathbf{1}_A\|_\infty = 1$, тобто, якщо $\|f'\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{2}$, тоді (3.3) випливає з нерівності трикутника. Якщо $\|f'\|_\infty > \dfrac{1}{2}$, тоді $|f'(t)| > \dfrac{1}{2}$ на якомусь відкритому інтервалі (a, b). Оскільки A є ніде не щільною множиною, існує менший інтервал $(c, d) \subset (a, b)$ такий, що $\mathbf{1}_A(t) = 0$ для всіх $t \in (c, d)$.

Таким чином, ми маємо, що $|(\mathbf{1}_A - f')(t)| > \dfrac{1}{2}$ на (c,d), і звідси випливає (3.3). Отже, множина $\mathrm{SA}(\mathbb{R})$ не є щільною в $\mathrm{Lip}_0(\mathbb{R})$. $\square$

Тож зрозуміло, що для отримання щільності множини ліпшицевих функцій, що досягають норми у $\mathrm{Lip}_0(X)$ необхідне менш обмежувальне поняття. Ми будемо використовувати наступне означення.

Означення 3.4. Нехай $u \in S_X$. Функція $f \in \mathrm{Lip}_0(X)$ *досягає норми за напрямком* u, якщо існує послідовність пар $x_n, y_n \in X, x_n \neq y_n$ таких, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - y_n}{\|x_n - y_n\|} = u \ \text{ та } \ \lim_{n\to\infty} \frac{|f(x_n) - f(y_n)|}{\|x_n - y_n\|} = \|f\|.$$

Ми кажемо, що функція f *досягає норми за напрямком*, якщо вона досягає норми за деяким напрямком $u \in S_X$. Множину тих $f \in \mathrm{Lip}_0(X)$, які досягають норми за напрямком, будемо позначати $\mathrm{DA}(X)$.

Повернемось до прикладу функції $f(x) = \sin(x)$, яка не досягає норми у строгому сенсі. Легко бачити, що вона досягає норми за напрямком $u = 1$ (можна взяти $x_n = 0, y_n = 1/n$).

Наведемо дві причини, чому можна вважати таке означення природним.

(a) Якщо X – це скінченновимірний простір, то $\mathrm{DA}(X) = \mathrm{Lip}_0(X)$ з міркувань компактності, тобто у цьому випадку теорема Бішопа-Фелпса виконується.

(b) Лінійний функціонал f досягає норми за напрямком u тоді і тільки тоді, коли $f(u) = \|f\|$, тобто він досягає норми у звичайному сенсі.

3.2 Властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для ліпшицевих функцій

Означення 3.5. Банаховий простір X *має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для ліпшицевих функцій* ($X \in \mathrm{LipBPB}$), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для будь-якої функції $f \in \mathrm{Lip}_0(X)$ з

$\|f\| = 1$ і для будь-якої пари $x, y \in X, x \neq y$ такої, що $\dfrac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|} > 1 - \delta$ існує функція $g \in \mathrm{Lip}_0(X)$ з $\|g\| = 1$ та існує $u \in S_X$ такі, що g досягає норми у напрямку u, $\|g - f\| < \varepsilon$, та $\left\|\dfrac{x - y}{\|x - y\|} - u\right\| < \varepsilon$.

У підрозділі 3.4 ми доводимо узагальнення теореми Бішопа-Фелпса-Болобаша у сенсі Означення 3.5 для рівномірно опуклих просторів.

Означення 3.6. Банаховий простір X *має ослаблену властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для ліпшицевих функцій* ($X \in \mathrm{rLipBPB}$), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для будь-якої функції $f \in \mathrm{Lip}_0(X)$ з $\|f\| = 1$ і для будь-якої пари $x, y \in X, x \neq y$ такої, що $\dfrac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|} > 1 - \delta$ існує функція $g_0 \in \mathrm{Lip}_0(X)$ з $\|g_0\| = 1$ та існує послідовність $v_n, w_n \in X, v_n \neq w_n$ така, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g_0(v_n) - g_0(w_n)}{\|v_n - w_n\|} = 1, \tag{3.4}$$

$\|g_0 - f\| < \varepsilon$, та $\left\|\dfrac{x - y}{\|x - y\|} - \dfrac{v_n - w_n}{\|v_n - w_n\|}\right\| < \varepsilon$.

Термін "ослаблений" в Означенні 3.6 ми використовуємо тому, що не вимагаємо, щоб послідовність $\dfrac{x_n - y_n}{\|x_n - y_n\|}$ збігалася до якогось $u \in S_X$. У наступній лемі ми покажемо, що насправді ослаблена властивість тягне за собою властивість у сенсі Означення 3.5.

Лема 3.7. *Якщо* $X \in \mathrm{rLipBPB}$, *то* $X \in \mathrm{LipBPB}$.

Доведення. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ та оберемо спадну послідовність $\varepsilon_n > 0$, щоб $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \varepsilon$. Для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ позначимо δ_n дельта з Означення 3.6, яке відповідає ε_n. Покажемо, що $\delta = \delta_1$ задовольняє умові Означення 3.5.

Застосуємо Означення 3.6 з ε_1 та δ_1 до ліпшицевої функції $f_1 = f$ та до даної пари $x_1, y_1 \in X, x_1 \neq y_1$ з $\dfrac{|f(x_1) - f(y_1)|}{\|x_1 - y_1\|} > 1 - \delta_1$. Ми отримаємо відповідну функцію g_0 та відповідну послідовність пар v_n, w_n. Згідно з (3.4), існує таке n_1, що

$$\frac{g_0(v_{n_1}) - g_0(w_{n_1})}{\|v_{n_1} - w_{n_1}\|} > 1 - \delta_2.$$

Позначимо $f_2 = g_0$, $x_2 = v_{n_1}$, та $y_2 = w_{n_1}$. Тоді $\|f_1 - f_2\| < \varepsilon_2$, $\left\|\frac{x_1 - y_1}{\|x_1 - y_1\|} - \frac{x_2 - y_2}{\|x_2 - y_2\|}\right\| < \varepsilon_2$, та

$$\frac{|f_2(x_2) - f_2(y_2)|}{\|x_2 - y_2\|} > 1 - \delta_2.$$

Остання умова дозволяє застосувати Означення 3.6 до ε_2, δ_2, f_2 та до x_2, y_2 таким самим чином, та отримати f_3 та x_3, y_3. Повторюючи цю процедуру зліченне число разів отримуємо $f_n \in \mathrm{Lip}_0(X)$, $\|f_n\| = 1$ та $x_n, y_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$ з наступними властивостями:

$$\|f_{n-1} - f_n\| < \varepsilon_n, \left\|\frac{x_{n-1} - y_{n-1}}{\|x_{n-1} - y_{n-1}\|} - \frac{x_n - y_n}{\|x_n - y_n\|}\right\| < \varepsilon_n, \text{ та} \tag{3.5}$$

$$\frac{|f_n(x_n) - f_n(y_n)|}{\|x_n - y_n\|} > 1 - \delta_n. \tag{3.6}$$

Умова (3.5) означає, що послідовність f_n має границю – якесь $g \in \mathrm{Lip}_0(X)$ з $\|g\| = 1$, і так само послідовність $\frac{x_n - y_n}{\|x_n - y_n\|}$ має границю $u \in S_X$. Більш того, $\|f - g\| < \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \varepsilon$, та $\left\|\frac{x_1 - y_1}{\|x_1 - y_1\|} - u\right\| < \varepsilon$. Також з (3.6) випливає, що

$$\frac{|g(x_n) - g(y_n)|}{\|x_n - y_n\|} \geqslant 1 - \delta_n - \|g - f_n\|,$$

тож $\lim_{n\to\infty} \frac{|g(x_n) - g(y_n)|}{\|x_n - y_n\|} = 1$, і це показує, що g досягає норми у напрямку u. □

3.3 Застосування вільних ліпшицевих просторів

У цьому підрозділі ми розробляємо засіб, що дозволить звести вивчення ліпшицевих відображень до вивчення лінійних неперервних функціоналів та застосувати теорему Бішопа-Фелпса-Болобаша. Для цього ми використовуємо концепцію вільних ліпшицевих просторів.

Для будь-якого $x \in X$ позначимо $\hat{x}$ відповідний лінійний функціонал "значення в точці" на $\mathrm{Lip}_0(X)$, тобто $\hat{x}(f) = f(x)$. Тоді $\hat{x}$ – це елемент простору $\mathrm{Lip}_0(X)^*$. Підпростір $\overline{Lin}\{\hat{x}, x \in X\}$ простору $\mathrm{Lip}_0(X)^*$ позначимо $\mathcal{F}$. Найбільш розповсюджена назва для $\mathcal{F}$ – *вільний ліпшицевий простір* (*free Lipschitz space*).

Елементи простору $\mathrm{Lip}_0(X)$ – це лінійні неперервні функціонали на $\mathcal{F}$, більш того $\mathcal{F}^* = \mathrm{Lip}_0(X)$ (див. [65, Твердження 2]). Відображення $x \mapsto \hat{x}$ – це нелінійне ізометричне вкладення простору X у $\mathcal{F}$: $\|\hat{x} - \hat{y}\|_{\mathcal{F}} = \|x - y\|_X$ для всіх $x, y \in X$.

Дію елемента $f \in \mathrm{Lip}_0(X)$ на $w \in \mathcal{F}$ будемо позначати $\langle f, w\rangle$. У цих позначеннях $\langle f, \hat{x}\rangle = f(x)$, та формулу для норми (3.1) можна переписати наступним чином:

$$\|f\| = \sup\left\{\left|\left\langle f, \frac{\hat{x} - \hat{y}}{\|x - y\|}\right\rangle\right| : x, y \in X, x \neq y\right\}. \tag{3.7}$$

Позначимо $W = \left\{\frac{\hat{x} - \hat{y}}{\|x - y\|} : x, y \in X, x \neq y\right\}$. Наступний результат є нескладним наслідком теореми Гана-Банаха.

Твердження 3.8.

$$\overline{B}_{\mathcal{F}} = \overline{\mathrm{conv}}\, W. \tag{3.8}$$

Доведення. Очевидно, що $W \subset S_{\mathcal{F}}$ – замкнута, врівноважена, опукла множина. Припустимо від супротивного, що $\overline{B}_{\mathcal{F}} \neq \overline{\mathrm{conv}}\, W$, тобто існує такий елемент $x \in \overline{B}_{\mathcal{F}}$, що $x \notin \overline{\mathrm{conv}}\, W$. Тоді можемо застосувати теорему Гана-Банаха в геометричній формі. Отже, існують функціонал $f \in \mathcal{F}^*$ та $\alpha \in \mathbb{R}$ такі, що $f(\overline{\mathrm{conv}}\, W) < \alpha$, але $f(x) > \alpha$. Це означає, що $\sup |f(\overline{\mathrm{conv}}\, W)| \leqslant \alpha < \|f\|$, що суперечить формулі (3.7). Таким чином, $\overline{\mathrm{conv}}\, W \supset \overline{B}_{\mathcal{F}}$. $\square$

Зараз ми сформулюємо та доведемо першу, відносно слабку версію теореми Бішопа-Фелпса-Болобаша для ліпшицевих функцій. Ця версія буде відправною точкою для результатів наступного підрозділу.

Лема 3.9. *Нехай X – банаховий простір, $f \in \mathrm{Lip}_0(X)$, $\|f\| = 1$, $\varepsilon \in (0, 2)$, та нехай $x, y \in X, x \neq y$ – це така пара елементів, що*

$$\frac{f(x) - f(y)}{\|x - y\|} > 1 - \varepsilon. \tag{3.9}$$

Тоді для будь-якої функції $h \in \mathrm{Lip}_0(X)$ з $\|h\| = 1$ та $\frac{h(x) - h(y)}{\|x - y\|} = 1$ існує $g_0 \in \mathrm{Lip}_0(X)$ з $\|g_0\| = 1$, $\|f - g_0\| < \sqrt{2\varepsilon}$ та існує послідовність таких *пар* $v_n, w_n \in X, v_n \neq w_n$, *що* $\dfrac{h(v_n) - h(w_n)}{\|v_n - w_n\|} > 1 - \sqrt{2\varepsilon}$ *для всіх* $n \in \mathbb{N}$,*та* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{g_0(v_n) - g_0(w_n)}{\|v_n - w_n\|} = 1$.

Доведення. Розглянемо елемент $w = \dfrac{\hat{x} - \hat{y}}{\|x - y\|} \in S_{\mathcal{F}}$. Тоді (3.9) означає, що $\langle f, w \rangle > 1 - \varepsilon$. Ми маємо, що $f \in \mathrm{Lip}_0(X) = \mathcal{F}^*$, отже, ми можемо застосувати теорему Бішопа-Фелпса-Болобаша. Тоді існує $g_0 \in \mathrm{Lip}_0(X)$, $\|g_0\| = 1$, що $\|f - g_0\| < \sqrt{2\varepsilon}$ та існує $z \in \mathcal{F}$ такий, що $\|w - z\| < \sqrt{2\varepsilon}$ та $\langle g_0, z \rangle = 1$. Нехай $\nu > 0$ – таке число, що $\|w - z\| < \nu < \sqrt{2\varepsilon}$. Зафіксуємо послідовність $\varepsilon_n > 0$, що збігається до нуля. Формула (3.8) означає, що існує послідовність $z_n \in \mathrm{conv} W$, яка збігається до z. Ми можемо обрати z_n так, щоб

$$\|w - z_n\| < \nu, \text{ та } \langle g_0, z_n \rangle > 1 - \varepsilon_n. \tag{3.10}$$

З того, що $\langle h, w \rangle = 1$ маємо

$$\langle h, z_n \rangle \geqslant \langle h, w \rangle - \|w - z_n\| \geqslant 1 - \nu > 1 - \sqrt{2\varepsilon}. \tag{3.11}$$

Оберемо послідовність чисел $\alpha_n \in (0, 1)$, яка задовольняє наступним умовам:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{1 - \alpha_n} = 0 \text{ та } \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n \frac{1 - \alpha_n}{\alpha_n} = 0. \tag{3.12}$$

З формул (3.10) та (3.11) отримуємо

$$\alpha_n \langle h, z_n \rangle + (1 - \alpha_n)\langle g_0, z_n \rangle > 1 - \alpha_n \nu - (1 - \alpha_n)\varepsilon_n.$$

Остання нерівність означає, що існує такий елемент $s_n \in W$, що

$$\alpha_n \langle h, s_n \rangle + (1 - \alpha_n)\langle g_0, s_n \rangle > 1 - \alpha_n \nu - (1 - \alpha_n)\varepsilon_n.$$

Разом з цим, очевидна оцінка $\langle h, s_n \rangle \leqslant 1$ та $\langle g_0, s_n \rangle \leqslant 1$, і отже,

$$\langle g_0, s_n \rangle > 1 - \varepsilon_n - \frac{\alpha_n}{1 - \alpha_n}\sqrt{2\varepsilon}, \text{ та } \tag{3.13}$$

$$\langle h, s_n \rangle > 1 - \nu - \varepsilon_n \frac{1 - \alpha_n}{\alpha_n}. \tag{3.14}$$

З нерівності (3.13) та (3.12) випливає, що $\langle g_o, s_n \rangle \to 1$, та з (3.14) випливає, що $\langle h, s_n \rangle > 1 - \sqrt{2\varepsilon}$ для достатньо великих значень n. Щоб завершити доведення, достатньо помітити, що $s_n \in W$ можна представити у вигляді $\dfrac{\hat{v}_n - \hat{w}_n}{\|v_n - w_n\|}$ для деяких $v_n, w_n \in X, v_n \neq w_n$. □

3.4 Результат для рівномірно опуклих просторів

У цьому підрозділі ми доведемо, що будь-який рівномірно опуклий простір (див. Означення 1.3) має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для ліпшицевих функцій. Нагадаємо, що модуль рівномірної опуклості простору X можна визначити наступною формулою:

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \frac{\|x+y\|}{2} : x, y \in B_X, \|x-y\| = \varepsilon\right\}.$$

Також нагадаємо, що зрізкою одиничної кулі для даного функціонала $f \in S_{X^*}$ та даного значення $\delta > 0$ є множина $S(f,\delta) = \{x \in B_X \colon f(x) > 1-\delta\}$. Важливою властивістю рівномірно опуклих просторів є те, що одинична куля містить багато маленьких зрізок. Для ясності викладу ми приводимо цей нескладний результат з доведенням, але також він може бути знайдений у [2, Lemma 2.1].

Лема 3.10. *Нехай X – рівномірно опуклий простір, $\varepsilon > 0$, та $\delta = \delta_X(\varepsilon)$. Тоді для будь-якого функціонала $f \in S_{X^*}$ виконується нерівність*

$$\operatorname{diam} S(f,\delta) < \varepsilon. \tag{3.15}$$

Доведення. Нехай $x, y \in S(f,\delta)$. Означення зрізки означає, що $x, y \in B_X$, $f(x) > 1-\delta$ та $f(y) > 1-\delta$. Тоді $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) > 1-\delta$, отже, $\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\| > 1-\delta$. З означення модуля рівномірної опуклості випливає, що $\|x-y\| < \varepsilon$. □

Теорема 3.11. *Будь-який рівномірно опуклий простір X має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для ліпшицевих функцій.*

Доведення. Згідно з Лемою 3.7, достатньо довести, що X має ослаблену властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша. Зафіксуємо $\delta_0 > 0$ та оберемо $\varepsilon > 0$, щоб $\sqrt{2\varepsilon} < \delta_X(\delta_0)$. Нехай $f \in \mathrm{Lip}_0(X)$, $\|f\| = 1$, та $x, y \in X, x \neq y$ з $\dfrac{|f(x)-f(y)|}{\|x-y\|} > 1-\varepsilon$. Позначимо $h \in S_{X^*}$ – опорний функціонал у точці $\dfrac{x-y}{\|x-y\|}$. Тоді з лінійності випливає, що $\dfrac{h(x)-h(y)}{\|x-y\|} = h\left(\dfrac{x-y}{\|x-y\|}\right) = 1$, отже, можемо застосовувати Лему 3.9. Згідно з нею існує $g_0 \in \mathrm{Lip}_0(X)$ з $\|g_0\| = 1$, $\|f - g_0\| < \sqrt{2\varepsilon}$ та існує послідовність пар $v_n, w_n \in X, v_n \neq w_n$ таких, що

$$h\left(\frac{v_n-w_n}{\|v_n-w_n\|}\right) = \frac{h(v_n)-h(w_n)}{\|v_n-w_n\|} > 1-\sqrt{2\varepsilon} > 1-\delta_X(\delta_0). \tag{3.16}$$

для всіх $n \in \mathbb{N}$, та $\lim_{n\to\infty} \dfrac{g_0(v_n)-g_0(w_n)}{\|v_n-w_n\|} = 1$. Нерівність (3.16) геометрично означає, що $\dfrac{v_n-w_n}{\|v_n-w_n\|} \in S(h, \delta_X(\delta_0))$. З того, що $\dfrac{x-y}{\|x-y\|} \in S(h, \delta_X(\delta_0))$, за Лемою 3.10 ми маємо

$$\left\|\frac{x-y}{\|x-y\|} - \frac{v_n-w_n}{\|v_n-w_n\|}\right\| < \delta_0.$$

Це означає, що $X \in \mathrm{rLipBPB}$, отже, $X \in \mathrm{LipBPB}$. □

3.5 Висновки до розділу 3

У цьому розділі ми розглянули два поняття досягнення норми для ліпшицевих функцій. Ми показали, що означення у строгому сенсі не дає можливості отримати аналог теореми Бішопа-Фелпса для ліпшицевих функцій. Також ми ввели більш слабке означення досягнення норми за напрямком, а саме: значення функції f на послідовності $\dfrac{x_n-y_n}{\|x_n-y_n\|}$ збігається до числа $\|f\|$ та послідовність $\dfrac{x_n-y_n}{\|x_n-y_n\|}$ збігається до вектора u.

У підрозділі 3.2 ми ввели властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для ліпшицевих функцій. Ця властивість означає, що ліпшицеву функцію f з нормою 1, якщо значення $\dfrac{|f(x)-f(y)|}{\|x-y\|}$ достатньо близько до 1, можна наблизити ліпшицевою функцією g, яка досягає норми за деяким напрямком u, так, що напрямок u є близьким до напрямку $\dfrac{x-y}{\|x-y\|}$.

У підрозділі 3.3 ми розповіли про концепцію вільних ліпшицевих просторів та довели попередню версію теореми Бішопа-Фелпса-Болобаша для ліпшицевих функцій. Це дозволило отримати у підрозділі 3.4 аналог теореми Бішопа-Фелпса-Болобаша у сенсі Означення 3.5 для рівномірно опуклих просторів.

До основних результатів цього розділу належать:

- Теорема 3.2, яка показує, що підмножина ліпшицевих функцій, які досягають норми у строгому сенсі не є щільною у просторі $\mathrm{Lip}_0(\mathbb{R})$.
- Лема 3.7, яка показує еквівалентність властивості Бішопа-Фелпса-Болобаша та ослабленої властивості Бішопа-Фелпса-Болобаша.
- Лема 3.9, в якій ми доводимо попередню версію теореми Бішопа-Фелпса-Болобаша для ліпшицевих функцій, застосовуючи класичну теорему Бішопа-Фелпса-Болобаша для лінійних функціоналів а також факт, що простір X може бути нелінійно ізометрично вкладений у простір $\mathcal{F}$ так, щоб простір $\mathrm{Lip}_0(X)$ був спряженим простором до $\mathcal{F}$.
- Теорема 3.11, яка стверджує, що рівномірно опуклі простори мають властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для ліпшицевих функцій.

Результати досліджень даного розділу наведено в публікації [44].

РОЗДІЛ 4

ТЕОРЕМА БІШОПА-ФЕЛПСА-БОЛОБАША ДЛЯ АСПЛУНДОВИХ ОПЕРАТОРІВ, ЩО ДІЮТЬ У ПРОСТІР ЗІ СТРУКТУРОЮ АСК

4.1 Концепція асплундових просторів та теорема Бішопа-Фелпса-Болобаша

Нагадаємо, що банаховий простір X називається *асплундовим*, якщо для будь-якої неперервної дійснозначної опуклої функції f, визначеної на відкритій опуклій множині $U \subset X$, множина точок із U, в яких f диференційовна за Фреше, є щільною G_δ множиною в U. Це означення було введено Асплундом у роботі [11] під назвою *сильно диференційовних просторів*. Кожний рефлексивний простір та кожний сепарабельний простір, спряжений до якого є сепарабельним, є асплундовим простором. Класичні приклади асплундових просторів – L_p та ℓ_p з $1 < p < \infty$, а також c_0; приклади просторів, які не є асплундовими – $C[0,1]$, ℓ_1, ℓ_∞, $L_1[0,1]$ та $L_\infty[0,1]$. Поняття асплундових просторів має численні характеризування, а саме:

Теорема 4.1 ([54], [61], [62]). *Нехай X – це банаховий простір. Тоді наступні твердження еквівалентні:*

(I) X – асплундовий простір;

(II) кожна w^*-компактна підмножина простору (X^*, w^*) є фрагментовною відносно норми;

(III) кожний сепарабельний підпростір простору X має сепарабельний спряжений простір;

(IV) простір X^* має властивість Радона-Нікодима.

Нагадаємо, що множина $C \subset (X^*, w^*)$ називається *фрагментовною відносно норми*, якщо для будь-якої непорожньої підмножини $A \subset C$ та для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує w^*-відкрита множина $U \subset X^*$, така, що $A \cap U \neq \emptyset$ та $\|\cdot\| - \operatorname{diam}(A \cap U) \leqslant \varepsilon$.

Оператор $T \in L(X, Y)$ називається *асплундовим оператором*, якщо він факторизується через асплундовий простір, тобто існує асплундовий простір Z та оператори $T_1 \in L(X, Z), T_2 \in L(Z, Y)$ такі, що $T = T_2 \circ T_1$. Наприклад, кожний слабко компактний оператор є асплундовим оператором. Очевидно, що якщо X або Y – це асплундовий простір, то $T \in L(X, Y)$ є асплундовим оператором.

З Теореми 4.1 випливає наступний результат, який ми будемо використовувати пізніше (див. [10, Lemma 2.3]):

Лема 4.2. *Якщо T – асплундовий оператор, то спряжений до нього оператор T^* відображає одиничну кулю простору Y^* у w^*-компактну підмножину (X, w^*), яка є фрагментовною відносно норми.*

Означення 4.3. Банаховий простір Y має *властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для асплундових операторів* (скорочено A-BPB), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta(\varepsilon) > 0$, що для будь-якого банахового простору X та будь-якого асплундового оператору $T \in S_{L(X,Y)}$, якщо $x_0 \in S_X$ і виконується нерівність $\|T(x_0)\| > 1 - \delta(\varepsilon)$, тоді існує $u_0 \in S_X$ і асплундовий оператор $\widetilde{T} \in S_{L(X,Y)}$, такі що

$$\|\widetilde{T}(u_0)\| = 1, \|x_0 - u_0\| < \varepsilon \text{ та } \|T - \widetilde{T}\| < \varepsilon.$$

У 2011 році Арон, Каскалес, та Кожушкіна у [10, Theorem 2.4] показали, що простір $C(K)$ має властивість A-BPBp, навівши таким чином перший приклад, коли пара (c_0, Y) має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша та простір Y є нескінченновимірним. У 2013 році Каскалес, Кадець та Гуірао поширили цей результат на рівномірні алгебри $A \subset C(K)$. Головний результат статті – це [16, Теорема 3.6]:

Теорема 4.4. *Нехай $A \subset C(K)$ – рівномірна алгебра та $T\colon X \to A$*

асплундовий оператор з $\|T\| = 1$. *Нехай* $0 < \varepsilon < \sqrt{2}$ *та* $x_0 \in S_X$, *і виконується, що* $\|T(x_0)\| > 1 - \dfrac{\varepsilon^2}{2}$. *Тоді існує* $u_0 \in S_X$ *та асплундовий оператор* $\widetilde{T} \in S_{L(X,A)}$ *такий, що*

$$\|\widetilde{T}(u_0)\| = 1, \|x_0 - u_0\| \leqslant \varepsilon \quad \text{та} \quad \|T - \widetilde{T}\| < 2\varepsilon.$$

Нагадаємо потрібну термінологію. $A \subset C(K)$ називається *рівномірною алгеброю*, якщо A є замкнена (у сенсі рівномірної норми) підалгебра $C(K)$ та A розділяє точки компакта K (тобто, для будь-яких $x \neq y \in K$ існує $f \in A$ така, що $f(x) \neq f(y)$). Множина $\Gamma \subset K$ називається *границею* A, якщо для будь-якої функції $f \in A$ існує $x \in \Gamma$ така, що $|f(x)| = \|f\|_\infty$.

Важливі приклади рівномірних алгебр виникають у задачах комплексного аналізу, скажімо, підалгебра тих неперервних функцій на окружності, що продовжуються до голоморфних функцій у колі. Щоб не втрачати таких прикладів, у цьому розділі, на відміну від попередніх, ми розглядаємо і дійсні, і комплексні простори.

Вищезгадана Теорема 4.4 була отримана у роботі [16] на основі двох допоміжних тверджень:

Лема 4.5. *Нехай* A *– рівномірна алгебра. Тоді існує компакт* K *такий, що* A *– це підалгебра у* $C(K)$ *та існує границя* $\Gamma_0 \subset K$ *така, що для будь-якої відкритої множини* $U \subset K$ *з* $U \cap \Gamma_0 \neq \emptyset$ *та для будь-якого* $0 < \varepsilon < 1$ *існують* $f \in A$ *та* $t_0 \in U \cap \Gamma_0$ *такі, що*

$f(t_0) = \|f\|_\infty = 1$,

$|f(t)| < \varepsilon$ *для будь-якого* $t \in K \setminus U$ *та*

$|f(t)| + (1 - \varepsilon)|1 - f(t)| \leqslant 1$, *для всіх* $t \in K$.

Лема 4.6. *Нехай* $T\colon X \to Y$ *– асплундовий оператор з* $\|T\| = 1$, $x_0 \in S_X$ *задовольняють нерівності* $\|T(x_0)\| > 1 - \dfrac{\varepsilon^2}{2}$ $(\varepsilon \in (0, \sqrt{2}))$, *та* $\Gamma \subset B_{Y^*}$ *– 1-нормуюча множина. Якщо ми позначимо* $M = T^*(\Gamma)$, *тоді для будь-якого* $r > 0$ *існує:*

(I) w^**-відкрита множина* $U_r \subset X^*$ *з* $U_r \cap M \neq \emptyset$, *та*

(II) точки $x_r^* \in S_{X^*}$ *та* $u_r \in S_X$ *з* $|x_r^*(u_r)| = 1$ *такі, що*

$$\|x_0 - u_r\| \leqslant \varepsilon \quad \text{та} \quad \|z^* - x_r^*\| \leqslant r + \frac{\varepsilon^2}{2} + \varepsilon \quad \text{для будь-якого } z^* \in U_r \cap M.$$

Оператор $\widetilde{T}$ у доведенні Теореми 4.4 був сконструйований за наступною формулою:

$$\widetilde{T}(x)(t) = f(t)x_r^*(x) + (1-\varepsilon')(1 - f(t))T(x)(t), \tag{4.1}$$

де $r > 0$, $0 < \varepsilon' < 1$ – деякі числа, $f \in A$ та $x_r^* \in S_{X^*}$ визначаються наступним чином: для фіксованого $r > 0$ та $0 < \varepsilon' < 1$ застосовується Лема 4.6 для $Y := A$, $\Gamma = \{\delta_s \in A^* : s \in \Gamma_0\}$, r та $\varepsilon > 0$. Тоді існує w^*-відкрита множина U_r, точка u_r та функціонал $x_r^* \in S_{X^*}$, який задовольняє умовам леми. Через те, що $U_r \cap M \neq \emptyset$ ми можемо обрати $s_0 \in \Gamma_0$ так, що $T^*\delta_{s_0} \in U_r$. При цьому w^*-неперервність оператора T^* гарантує, що $U = \{s \in K \colon T^*\delta_s \in U_r\}$ – це відкритий окіл точки s_0. Далі, використовуючи Лему 4.5 для відкритої множини U – яка задовольняє умову $U \cap \Gamma_0 \neq \emptyset$ – та ε', отримуємо функцію $f \in A$ та $t_0 \in U \cap \Gamma_0$, що виконуються такі умови:

$$f(t_0) = \|f\|_\infty = 1, \tag{4.2}$$

$$|f(t)| < \varepsilon' \text{ для будь-якого } t \in K \setminus U \text{ та} \tag{4.3}$$

$$|f(t)| + (1-\varepsilon')|1 - f(t)| \leqslant 1 \text{ для кожного } t \in K. \tag{4.4}$$

У цьому розділі ми уважно проаналізуємо формулу (4.1) та поширимо Теорему 4.4 на більш широкий клас просторів Y, які не є рівномірними алгебрами, але мають таку структуру, для якої ми можемо сконструювати потрібний оператор. Замість того, щоб окремо доводити теорему Бішопа-Фелпса-Болобаша для різних просторів, повторюючи одні й ті ж міркування, ми введемо нову властивість банахових просторів (ACK структуру) та доведемо загальну теорему, яка вміщує в себе всі необхідні технічні деталі.

Перед тим, як представити головний результат, ми повинні трохи удосконалити Лему 4.6. Для цього нам знадобиться результат, який ми вже довели у Розділі 2, а саме друга частина Леми 2.17, але у такій формі, що працює і в дійсному, і в комплексному випадках.

Лема 4.7. *Нехай X – банаховий простір, $x \in B_X$, $x^* \in B_{X^*}$, $\varepsilon \in (0,2)$ та $|x^*(x)| \geqslant 1-\varepsilon$. Тоді для будь-якого $k \in (\varepsilon/2, 1)$ існує $y^* \in S_{X^*}$ та $u \in S_X$ такі, що*

$$|y^*(u)| = 1, \qquad \|x-u\| \leqslant \frac{\varepsilon}{k}, \qquad \|x^* - y^*\| \leqslant 2k.$$

Доведення. Виберемо таке $\alpha \in \mathbb{C}$ з $|\alpha| = 1$, що $\mathrm{Re}\,(\alpha x^*(x)) = |x^*(x)|$ (у дійсному випадку $\alpha = \pm 1$). Тоді дійсний функціонал $\tilde{x}^* := \mathrm{Re}\,(\alpha x^*)$ задовольняє умову $\tilde{x}^*(x) \geqslant 1-\varepsilon$. Застосування Леми 2.17 надасть нам дійсний функціонал $\tilde{y}^*$ одиничної норми та $u \in S_X$ такі, що

$$\tilde{y}^*(u) = 1, \qquad \|x-u\| \leqslant \frac{\varepsilon}{k}, \qquad \|\tilde{x}^* - \tilde{y}^*\| \leqslant 2k.$$

У дійсному випадку залишається взяти у якості бажаного $y^* \in S_{X^*}$ функціонал $\alpha\tilde{y}^*$, а у комплексному – такий комплексний функціонал $y^* \in S_{X^*}$, що $\tilde{y}^* := \mathrm{Re}\,(\alpha y^*)$. □

Тепер ми можемо довести потрібну нам модифіковану версію Леми 4.6. Відмінність цього результату, у тому, що ми надаємо точнішу та більш гнучку оцінку для $\|x_0 - u_r\|$ та $\|z^* - x_r^*\|$

Лема 4.8. *Нехай $T\colon X \to Y$ – асплундовий оператор з $\|T\| = 1$, $x_0 \in S_X$ задовольняють нерівності $\|T(x_0)\| > 1-\varepsilon$, та $\Gamma \subset B_{Y^*}$ – 1-нормуюча множина. Якщо ми позначимо $M = T^*(\Gamma)$, тоді для будь-якого $r > 0$ та для будь-якого $\varepsilon/2 \leqslant k < 1$ існує:*

(I) w^*-відкрита множина $U_r \subset X^*$ з $U_r \cap M \neq \emptyset$, та

(II) точки $x_r^* \in S_{X^*}$ та $u_r \in S_X$ з $|x_r^*(u_r)| = 1$ такі, що

$$\|x_0 - u_r\| \leqslant \frac{\varepsilon}{k} \quad \text{та} \quad \|z^* - x_r^*\| \leqslant r + 2k \tag{4.5}$$

для будь-якого $z^* \in U_r \cap M$.

Доведення. Використовуючи те, що $\Gamma \subset B_{Y^*}$ – 1-нормуюча множина, ми можемо обрати такий елемент $b_0^* \in \Gamma$, що

$$|T^*(b_0^*)(x_0)| > 1 - \varepsilon$$

Позначимо $U_1 = \{x^* \in X^* : |x^*(x_0)| > 1 - \varepsilon\}$. Тоді ми маємо

$$T^*(b_0^*) \in U_1 \cap \Gamma \subset T^*(B_{Y^*}) \subset B_{X^*}$$

Через те, що множина $T^*(B_{Y^*})$ є фрагментовною (Лема 4.2) та $U_1 \cap M$ – не порожня множина, для будь-якого $r > 0$ існує w^*-відкрита множина $U_2 \subset X^*$, що $(U_1 \ \cap \ M) \ \cap \ U_2 \ \neq \ \emptyset$ та

$$\| \cdot \| - \mathrm{diam}(U_1 \cap M \cap U_2) \leqslant r. \tag{4.6}$$

Нехай $U_r := U_1 \cap U_2$. Зафіксуємо $x_0^* \in U_r \cap M$. Тоді ми маємо

$$1 \geqslant \|x_0^*\| \geqslant |x_0^*(x_0)| > 1 - \varepsilon. \tag{4.7}$$

Тепер ми можемо застосувати Лему 4.7, і для будь-якого $\varepsilon/2 \leqslant k < 1$ ми отримуємо такі $y^* \in S_{X^*}$ та $u_r \in S_X$ з $|y^*(u_r)| = 1$, що

$$\|x_0 - u_r\| \leqslant \frac{\varepsilon}{k} \text{ та } \|x_0^* - y^*\| \leqslant 2k. \tag{4.8}$$

Нарешті, для довільного елементу $z^* \in U_r \cap M$ маємо

$$\|z^* - y^*\| \leqslant \|z^* - x_0^*\| + \left\| \frac{x_0^*}{\|x_0^*\|} - y^* \right\| \overset{(4.6),(4.8)}{\leqslant} r + 2k.$$

$\square$

4.2 АСК структура та властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для асплундових операторів

Нагадаємо, що підмножина $\Gamma \subset B_{Y^*}$ зветься 1-нормуючою, якщо $\|y\| = \sup\{|y^*(y)| : y^* \in \Gamma\}$ для всіх $y \in Y$.

Означення 4.9. Банаховий простір Y має *структуру АСК з параметром* $\rho \in (0,1)$ (скорочено $Y \in \mathrm{ACK}_\rho$), якщо існує 1-нормуюча множина $\Gamma \subset B_{Y^*}$ така, що для будь-якого $\varepsilon' > 0$ та для будь-якої відносно

w^*-відкритої підмножини $U \subset \Gamma$, $U \neq \emptyset$ існують відносно w^*-відкрита підмножина $V \subset U$, $V \neq \emptyset$, функціонал $y_1^* \in V$, елемент $e \in S_Y$ та оператор $F \in L(Y)$ з наступними властивостями:

(I) $\|F(e)\| = \|F\| = 1$;

(II) $y_1^*(F(e)) = 1$;

(III) $F^*(y_1^*) = y_1^*$;

(IV) $|y^*(F(e))| + (1-\varepsilon')\|(I_{Y^*} - F^*)(y^*)\| \leqslant 1$ для будь-якого $y^* \in V$;

(V) $\operatorname{dist}(F^*(y^*), \operatorname{aconv}\{0, V\}) < \varepsilon'$ для будь-якого $y^* \in \Gamma$;

(VI) $|v^*(e) - 1| \leqslant \varepsilon'$ для будь-якого $v^* \in V$;

(VII) $|v^*(F(e))| \leqslant \rho$ для будь-якого $v^* \in \Gamma \setminus V$

Банаховий простір Y має *просту структуру ACK* ($Y \in \mathrm{ACK}$), якщо попереднє означення виконується з двома змінами: по-перше, властивість (IV) змінюється на сильнішу:

(IV)' $|y^*(F(e))| + (1-\varepsilon')\|(I_{Y^*} - F^*)(y^*)\| \leqslant 1$ для будь-якого $y^* \in \Gamma$,

і по друге, властивість (VII) зникає.

Зауваження 4.10. *Якщо Y належить до класу ACK_ρ, то Y належить ACK_σ для кожного $\sigma \in [\rho, 1)$. Більш того, $\mathrm{ACK} \subset \mathrm{ACK}_\rho$ для будь-якого $\rho \in [0, 1)$.*

Ідея назвати цю властивість структура ACK виникла завдяки іменам авторів статті [10]: Арон(Aron), Каскалес (Cascales), та Кожушкіна (Kozhushkina). У цьому означенні ми виділили усі властивості простору $C(K)$ та його рівномірних підалгебр, які були потрібні, щоб довести Теорему 4.4. Якщо уважно подивитися на формулу (4.1), можна побачити, що функція f виконує дві ролі: роль оператора множення та роль елемента алгебри A. У нашому означенні ми відокремлюємо ці дві ролі. Головною причиною ввести Означення 4.9 стала наступна теорема.

Теорема 4.11. *Якщо* $Y \in$ АСК *або* $Y \in \text{АСК}_\rho$, *то* Y *має властивість А-ВРВр. Більш детально, нехай* X *– банаховий простір,* $Y \in \text{АСК}_\rho$ *та* $T\colon X \to Y$ *– асплундовий оператор з* $\|T\| = 1$, $x_0 \in S_X$, $0 < \varepsilon < 1$, *та виконується, що* $\|T(x_0)\| > 1 - \varepsilon$. *Тоді для будь-якого* $\varepsilon/2 \leqslant k < 1$ *та будь-якого*

$$\nu > \varepsilon + 2\left(k + \frac{\varepsilon + 2k}{1 - \rho + \varepsilon + 2k}\right)$$

існує $u_0 \in S_X$ *та асплундовий оператор* $\widetilde{T} \in S_{L(X,Y)}$ *такий, що* $\|\widetilde{T}(u_0)\| = 1$, $\|x_0 - u_0\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{k}$ *та* $\|T - \widetilde{T}\| < \nu$. *Якщо* $Y \in$ АСК, *то те саме виконується для* $\nu > 2k$.

Доведення. Спочатку розглянемо більш складний випадок $Y \in \text{АСК}_\rho$. Зафіксуємо довільні числа $r > 0$ та $0 < \varepsilon' < 1$ і візьмемо множину Γ з Означення 4.9. Ми отримуємо w^*-відкриту множину U_r, точку u_r та функціонал $x_r^* \in S_{X^*}$, які задовольняють умови Леми 4.8. Через те, що $U_r \cap M \neq \emptyset$ та T^* є w^*-неперервним, ми можемо застосувати Означення 4.9 до $U = \{y^* \in \Gamma\colon T^* y^* \in U_r\} \neq \emptyset$ та ε' та отримати непорожню w^*-відкриту підмножину $V, V \subset U \subset \Gamma$, $y_1^* \in V$, $e \in Y$, $F \in L(Y)$, які мають властивості (I) – (VII). Тобто, для будь-якого $z^* \in V$, $T^* z^* \in U_r$, отже, з означення множини U_r ми маємо, що

$$\|T^*(z^*) - x_r^*\| \leqslant r + 2k. \tag{4.9}$$

Визначимо лінійний оператор $\widetilde{T}\colon X \to Y$ за такою формулою

$$\widetilde{T}(x) = x_r^*(x) F(e) + (1 - \widetilde{\varepsilon})(I_Y - F) T(x), \tag{4.10}$$

де числа $\widetilde{\varepsilon} \in [\varepsilon', 1)$ будуть обрані таким чином, щоб

$$\|\widetilde{T}\| \leqslant 1. \tag{4.11}$$

Для цього, використовуючи той факт, що Γ – 1-нормуюча множина, ми можемо написати

$$\|\widetilde{T}\| = \|\widetilde{T}^*\| = \sup_{y^* \in \Gamma} \|\widetilde{T}^*(y^*)\|.$$

Тепер наше перше завдання – оцінити вираз

$$\|\widetilde{T}^*(y^*)\| = \|y^*(F(e)) x_r^* + (1 - \widetilde{\varepsilon}) T^*(I_{Y^*} - F^*)(y^*)\| \tag{4.12}$$

зверху для всіх $y^* \in \Gamma$. Для $y^* \in V$ оцінка $\|\widetilde{T}^*(y^*)\| \leqslant 1$ випливає з властивості (IV). Таким чином, залишилось розглянути випадок, коли $y^* \in \Gamma \setminus V$. У цьому випадку ми використовуємо властивості (V) та (VII). Завдяки (V) для будь-якого $y^* \in \Gamma$, існує такий елемент $v^* = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k^*$ з

$$\|F^*(y^*) - v^*\| < \varepsilon', \tag{4.13}$$

що $v_k^* \in V$, та $\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \leqslant 1$. Через те, що $v_k^* \in V$, згідно з (4.9) ми маємо $\|T^*(v_k^*) - x_r^*\| \leqslant r + 2k$, і таким чином можемо написати

$$\begin{aligned} \|v^*(e)x_r^* - T^*(v^*)\| &\leqslant \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \|v_k^*(e)x_r^* - T^*(v_k^*)\| \\ &\overset{\text{(VI)}}{\leqslant} \varepsilon' + \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \|x_r^* - T^*(v_k^*)\| \leqslant \varepsilon' + r + 2k. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Далі,

$$\begin{aligned} \|\widetilde{T}^*(y^*)\| &\leqslant \widetilde{\varepsilon}|y^*(F(e))| + (1-\widetilde{\varepsilon})\|y^*(F(e))x_r^* + T^*(y^*) - T^*F^*(y^*)\| \\ &\overset{\text{(VII)}}{\leqslant} \widetilde{\varepsilon}\rho + (1-\widetilde{\varepsilon})\|T^*(y^*)\| + (1-\widetilde{\varepsilon})\|(F^*(y^*))(e)x_r^* - T^*F^*(y^*)\| \\ &\overset{(4.13)}{\leqslant} \widetilde{\varepsilon}\rho + (1-\widetilde{\varepsilon}) + 2\varepsilon'(1-\widetilde{\varepsilon}) + (1-\widetilde{\varepsilon})\|v^*(e)x_r^* - T^*(v^*)\| \\ &\overset{(4.14)}{\leqslant} \widetilde{\varepsilon}\rho + (1-\widetilde{\varepsilon}) + 2\varepsilon'(1-\widetilde{\varepsilon}) + (1-\widetilde{\varepsilon})(\varepsilon' + r + 2k) \\ &\leqslant \widetilde{\varepsilon}\rho + (1-\widetilde{\varepsilon})(1 + 3\varepsilon' + r + 2k). \end{aligned}$$

Це означає, що, якщо ми оберемо

$$\widetilde{\varepsilon} = \frac{3\varepsilon' + r + 2k}{1 - \rho + 3\varepsilon' + r + 2k}, \tag{4.15}$$

тоді ми матимемо нерівність (4.11). У цьому випадку,

$$1 = |x_r^*(u_r)| \overset{\text{(II)}}{=} |y_1^*(x_r^*(u_r)F(e))| \overset{\text{(III)}}{=} |y_1^*(\widetilde{T}(u_r))| \leqslant \|\widetilde{T}(u_r)\| \leqslant 1$$

і таким чином $\widetilde{T}$ досягає норми у точці $u_0 := u_r \in S_X$, для якої ми вже маємо, що $\|u_0 - x_0\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{k}$.

Тепер оцінимо $\|\widetilde{T} - T\|$.

$$\begin{aligned} \|\widetilde{T} - T\| = \|\widetilde{T}^* - T^*\| &= \sup_{y^* \in \Gamma} \|\widetilde{T}^*(y^*) - T^*(y^*)\| \\ &\leqslant \sup_{y^* \in \Gamma} \|y^*(F(e))x_r^* - T^*F^*(y^*)\| + 2\widetilde{\varepsilon} \end{aligned} \tag{4.16}$$

Ми можемо діяти таким самим чином, як і раніше, використовуючи (4.13) та (4.14). А саме,

$$\begin{aligned}\|(F^*(y^*))(e)x_r^* - T^*F^*(y^*)\| &\overset{(4.13)}{\leqslant} 2\varepsilon' + \|v^*(e)x_r^* - T^*(v^*)\| \\ &\overset{(4.14)}{\leqslant} 3\varepsilon' + r + 2k.\end{aligned}$$

Разом з (4.16) та (4.15) ми отримуємо таку оцінку

$$\|T - \widetilde{T}\| \leqslant 3\varepsilon' + r + 2k + 2\frac{3\varepsilon' + r + 2k}{1 - \rho + 3\varepsilon' + r + 2k}. \tag{4.17}$$

Через те, що $r > 0$ та $0 < \varepsilon' < 1$ є довільними числами, ми отримуємо бажану оцінку $\|T - \widetilde{T}\| < \nu$.

Щоб завершити доведення для випадку, коли $Y \in \mathrm{ACK}_\rho$, зауважимо, що $\widetilde{T}$ також є асплундовим оператором, тому що простір асплундових операторів є операторним ідеалом, який містить всі одновимірні оператори (тобто, операції додавання асплундових операторів та множення асплундового оператора на довільний неперервний оператор знов дають асплундовий оператор).

Тепер розглянемо більш простий випадок $Y \in \mathrm{ACK}$. Тоді $\|\widetilde{T}^*(y^*)\| \leqslant 1$ для всіх $y^* \in \Gamma$ завдяки властивості (IV)'. Отже, (4.11) виконується для всіх $\widetilde{\varepsilon} \in [\varepsilon', 1)$ та ми можемо обрати $\widetilde{\varepsilon} = \varepsilon'$. Тоді оцінка (4.17) змінюється на $\|T - \widetilde{T}\| \leqslant 3\varepsilon' + r + 2k + 2\varepsilon'$, яка знов для достатньо маленьких значень r та ε' дає потрібну нам оцінку $\|T - \widetilde{T}\| < \nu$ для $\nu > 2k$. $\square$

У наступному наслідку ми надамо оцінки у більш елегантному вигляді, коли оператор та вектор наближуються з однаковою точністю для випадку, коли простір Y має просту структуру ACK.

Наслідок 4.12. *Нехай X – банаховий простір, $Y \in \mathrm{ACK}$ та $T\colon X \to Y$ – асплундовий оператор з $\|T\| = 1$, $0 < \varepsilon < 1$ та $x_0 \in S_X$ – такий елемент, що $\|T(x_0)\| > 1 - \varepsilon$. Тоді існує $u_0 \in S_X$ та асплундовий оператор $\widetilde{T} \in S_{L(X,Y)}$ такі, що $\|\widetilde{T}(u_0)\| = 1$, та*

$$\max\{\|x_0 - u_0\|, \|T - \widetilde{T}\|\} \leqslant \sqrt{2\varepsilon}. \tag{4.18}$$

Доведення. Якщо $\varepsilon \in (0,1)$ ми можемо взяти

$$k = \sqrt{\varepsilon/2},$$

і тоді виконується умова $k \geqslant \varepsilon/2$. Відповідно, згідно з Теоремою 4.11, ми маємо

$$\|x_0 - u_0\| \leqslant \frac{\varepsilon}{k} = \sqrt{2\varepsilon} \qquad \text{та} \qquad \|x^* - y^*\| \leqslant \sqrt{2k} = \sqrt{2\varepsilon},$$

що завершує доведення. □

У наступному розділі ми наведемо багато прикладів просторів зі структурою АСК. Але також природним є питанням, які з класичних банахових просторів не мають структуру АСК. З Теореми 4.11 випливає, що, якщо для якогось банахового простору X для пари (X,Y) не виконується властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для асплундових операторів, то простір Y не має структури АСК. У [8, Corollary 9] було доведено, що жодний нескінченновимірний рівномірно опуклий простір не має властивості B Лінденштрауса. Тобто, якщо Y – нескінченновимірний рівномірно опуклий простір, а тож рефлексивний, і значить асплундовий, то існує такий простір X, що пара (X,Y) не має властивості Бішопа-Фелпса, тож Y не має властивості A-BPBp (бо будь-який оператор, що діє у рефлексивний простір є асплундовим). Таким чином, можна зрозуміти, що жодний нескінченновимірній рівномірно опуклий простір не має структури АСК. У наступному твердженні ми покажемо, що дійсний простір $\ell_2^{(2)}$ не має структури АСК, безпосередньо користуючись Означенням 4.9.

Твердження 4.13. *Простір $\ell_2^{(2)}$ не має структури АСК для жодного параметра $\rho \in [0,1)$ (тож не має і простої АСК структури).*

Доведення. Припустимо від протилежного, що $\ell_2^{(2)} \in \text{АСК}_\rho$ з якимось параметром $\rho \in [0,1)$. Нехай $\Gamma \subset B_{Y^*}$ – це відповідна 1-нормуюча множина. Тоді має $\Gamma \cup (\Gamma)$ має містити у своєму замиканні усю сферу $S_{\ell_2^{(2)}}$. Для будь-якого $\varepsilon' > 0$ та будь-якої відносно w^*-відкритої підмножини $U \subset \Gamma$, $U \neq \emptyset$, ми маємо $V \subset U$, $y_1^* \in V$, $e \in S_{\ell_2^{(2)}}$, $F \in L(\ell_2^{(2)})$ з властивостями (I) – (VI).

Завдяки симетрії одиничної сфери простору $\ell_2^{(2)}$ ми можемо припустити, що $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Тоді, для початку, ми покажемо, що оператор F повинен мати специфічний вигляд, а саме:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta(\varepsilon') \end{pmatrix}, \ \delta(\varepsilon') \xrightarrow[\varepsilon' \to 0]{} 0 \tag{4.19}$$

Позначимо $F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Тоді $F^* = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. З властивостей (I) та (II) ми маємо

$$y_1^* = F(e) = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \in S_{\ell_2^{(2)}}. \tag{4.20}$$

З властивості (III) ми отримуємо рівності: $\begin{pmatrix} a^2 + c^2 \\ ab + cd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$. Тоді ми маємо $a = 1, c = 0, b = 0$.

Якщо ми проаналізуємо властивість (VI), ми можемо бачити, що $V \subset \{(v_1, v_2) \in B_{\ell_2^{(2)}} : |v_1| \geqslant 1 - \varepsilon'\}$, тоді $\operatorname{aconv}\{0, V\} \subset \{(v_1, v_2) : |v_2| \leqslant \sqrt{2\varepsilon'}\}$. Застосуємо властивість (V) до $y^* \in \Gamma$ що прямує до $\begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix}$, $s \in \{1, -1\}$. Тоді з нерівності

$$\operatorname{dist}\left(F^*(y^*), \operatorname{aconv}\{0, V\}\right) < \varepsilon'$$

випливає, що $|d| \leqslant \sqrt{2\varepsilon'} + \varepsilon'$. Таким чином, оператор F задовольняє формулу (4.19).

Нарешті, проаналізуємо властивість (IV). Якщо для будь-якого $v^* \in \Gamma \setminus V_1$ ми маємо $|v^*(F(e))| \leqslant \rho$, тоді $V_1 \supset \{(v_1, v_2) \in \Gamma : |v_1| > \rho\}$. Нерівність $\|F^*(y^*)\| + (1 - \varepsilon')\|(I_{Y^*} - F^*)(y^*)\| \leqslant 1$ повинна виконуватись для будь-якого $\varepsilon' > 0$ та будь-якого $y^* \in \overline{V_1}$, зокрема, для $y^* = (\rho, \sqrt{1 - \rho^2})$. Тоді ми маємо

$$\|F^*(y^*)\| = \sqrt{\rho^2 + \delta(\varepsilon)^2(1 - \rho^2)},$$

$$\|(I_{Y^*} - F^*)(y^*)\| = (1 - \delta(\varepsilon))\sqrt{1 - \rho^2}.$$

Отже,

$$\sqrt{\rho^2+\delta(\varepsilon)^2(1-\rho^2)}+(1-\varepsilon')(1-\delta(\varepsilon))\sqrt{1-\rho^2}\leqslant 1.$$

Переходячи до границі в останній нерівності ми отримуємо $\rho+\sqrt{1-\rho^2}\leqslant 1 \Leftrightarrow \rho\leqslant\rho^2$. Це протиріччя завершує доведення.

$\square$

4.3 Приклади банахових просторів зі структурою АСК

4.3.1 Рівномірні алгебри

У цьому підрозділі ми надамо приклади просторів, які мають структуру АСК. По-перше, аналіз статті [10] дає нам важливий клас прикладів: а саме, кожна рівномірна алгебра має просту АСК структуру. Спочатку наведемо деякі відомості з теорії банахових алгебр, які ми будемо використовувати надалі.

Нехай $Y\subset C(K)$ – рівномірна алгебра. Через δ_t ми позначаємо елемент простору Y^*, який діє наступним чином: $\delta_t(f)=f(t)$. Якщо Y – рівномірна алгебра з одиницею (тобто, функція $\mathbf{1}$, яка тотожно дорівнює одиниці, належить Y), то ми можемо визначити

$$S:=\{x^*\in Y^*:\|x^*\|=1, x^*(\mathbf{1})=1\}.$$

Тоді $\Gamma_0=\{t\in K:\delta_t\in\operatorname{ext}(S)\}$ є границею для Y (Γ_0 називається границею Шоке).

Якщо $Y\subset C(K)$ – рівномірна алгебра без одиниці (тобто $\mathbf{1}\notin Y$), ми можемо визначити $\widetilde{Y}:=\{c\mathbf{1}+f : c\in\mathbb{C}, f\in Y\}$ – рівномірну алгебру з одиницею.

Без втрати загальності можна вважати, що K – це компакт Гельфанда алгебри Y (тобто множина мультиплікативних функціоналів у w^*-топології). Можемо розглянути границю Шоке алгебри $\widetilde{Y}$ – множину $\Gamma_0(\widetilde{Y})\subset K$. Y є максимальним ідеалом у $\widetilde{Y}$ (бо має корозмірність 1), отже, являється ядром деякого мультиплікативного функціонала. Тобто існує такий елемент $\nu\in K$, що $Y=\{f\in\widetilde{Y}:\delta_\nu(f)=0\}$. Тоді множина

$\Gamma_0 := \Gamma_0(\widetilde{Y}) \setminus \{\nu\}$ є границею для Y. (Докладно про теорію банахових алгебр розповідається у [57, Part III].)

Ми будемо використовувати факт, доведений у [10, Lemma 2.5 та Lemma 2.7] про існування пікових функцій $f \in Y$, які мають маленьке значення за межами деякої відкритої множини та $f(K)$ міститься у так званій області Штольця:

$$St_\varepsilon = \{z \in \overline{\mathbb{D}} : |z| + (1-\varepsilon)|1-z| \leqslant \varepsilon\}.$$

У роботі [10] було доведено наступне:

Лема 4.14. *Нехай $Y \subset C(K)$ – рівномірна алгебра, Γ_0 – границя для Y, яка була описана вище. Тоді для будь-якої відкритої множини $W \subset K$ з $W \cap \Gamma_0 \neq \emptyset$ та $0 < \varepsilon < 1$, існує функція $f \in Y$ та точка $t_0 \in W \cap \Gamma_0$ така, що $f(t_0) = \|f\|_\infty = 1, |f(t)| < \varepsilon$ для всіх $t \in K \setminus W$ та $f(K) \subset St_\varepsilon$, тобто*

$$|f(t)| + (1-\varepsilon)|1-f(t)| \leqslant 1, \text{ для всіх } t \in K.$$

Для того, щоб уникнути необхідності розглядати окремо випадок рівномірної алгебри з одиницею та рівномірної алгебри без одиниці ми збираємось трохи модифікувати Лему 4.14.

Лема 4.15. *Нехай $Y \subset C(K)$ – рівномірна алгебра, Γ_0 – як описано вище. Тоді для будь-якої відкритої множини $W_1 \subset K$ з $W_1 \cap \Gamma_0 \neq \emptyset$ та $0 < \varepsilon < 1$, існує відкрита підмножина $W \neq \emptyset, W \subset W_1$ та існують такі $f, e \in Y$, $t_0 \in W \cap \Gamma_0$, що*

$$f(t_0) = \|f\|_\infty = 1, e(t_0) = \|e\|_\infty = 1; \tag{4.21}$$

$$|f(t)| < \varepsilon \text{ для всіх } t \in K \setminus W; \tag{4.22}$$

$$|1 - e(t)| < \varepsilon \text{ для всіх } t \in W; \tag{4.23}$$

$$|f(t)| + (1-\varepsilon)|1-f(t)| \leqslant 1 \text{ для всіх } t \in K. \tag{4.24}$$

Доведення. Використовуючи Лему 4.14 для відкритої множини $W_1 \subset K$ ми отримуємо функцію $e \in Y$ та точку $t_0 \in W_1 \cap \Gamma_0$, що

$$e(t_0) = \|e\|_\infty = 1 \text{ та } e(K) \subset St_\varepsilon. \tag{4.25}$$

Нехай $W := \{t \in W_1 : |1 - e(t)| < \varepsilon\}$. Тоді ми можемо визначити

$$f(t) := (z^n \circ e)(t) : K \to St_\varepsilon.$$

Отже, $f(t_0) = \|f\|_\infty = 1$. $f(K) \subset St_\varepsilon$, тому що, якщо z належить до St_ε, то $z^n \in St_\varepsilon$ (доведення цього факту можна знайти, наприклад, у [17, Lemma 4.3]). Для всіх $t \in K \setminus W$ ми маємо $|e(t)| < 1 - r$ для деякого числа $r > 0$, і таким чином, $|f(t)| < \varepsilon$, якщо ми оберемо n достатньо великим. □

Теорема 4.16. *Нехай $Y \subset C(K)$ – рівномірна алгебра. Тоді Y має просту структуру АСК.*

Доведення. Нехай Γ_0 – множина з попередніх лем. У якості потрібної 1-нормуючої підмножини кулі B_{Y^*} візьмемо множину $\Gamma = \{\delta_t : t \in \Gamma_0\}$. Зафіксуємо $\varepsilon' > 0$ та непорожню відносно w^*-відкриту підмножину $U \subset \Gamma$. Оскільки відображення $t \mapsto \delta_t$ що діє з K у (B_{Y^*}, w^*) є неперервним, відповідна множина $\{t \in \Gamma_0 \colon \delta_t \in U\}$ є відносно відкритою у Γ_0, тобто існує відкрита множина $W_1 \subset K$ така що $U = \Gamma \cap \{\delta_t : t \in W_1\}$. Застосуємо Лему 4.15 для цієї множини W_1 та ε'. Ми отримуємо відповідну множину $W \subset \Gamma_0$, відповідні $t_0 \in W, f(t) \in Y$ та $e(t) \in Y$. Тепер визначимо V, $y_1^* \in V$, $e \in S_{C(K,Y)}$, та $F \in L(Y)$ таким чином:

$$V := \{\delta_t : t \in W\}, y_1^*(y) := y(t_0), e := e(t), F(y) := y \cdot f.$$

Легко бачити, що всі властивості (I) -(III), (IV)', (V) та (VI) дійсно виконуються. А саме,

(I) $\|F\| = 1$ та $\|F(e)\| = e(t_0) \cdot f(t_0) \overset{(4.21)}{=} 1$;

(II) $y_1^*(F(e)) = y_1^*(f \cdot e) = e(t_0) \cdot f(t_0) = 1$;

(III) $(F^*(y_1^*))(y) = y(t_0) \cdot f(t_0) = y(t_0) = y_1^*(y)$, отже, $F^*(y_1^*) = y_1^*$;

(IV)' Для будь-якого $y^* \in \Gamma$ ми маємо

$$|y^*(F(e))| + (1 - \varepsilon')\|(I_{Y^*} - F^*)(y^*)\|$$
$$\leqslant |f(t)| + (1 - \varepsilon')|1 - f(t)| \overset{(4.24)}{\leqslant} 1;$$

(V) Нехай $y^* \in \Gamma$. Якщо $y^*(y) = y(t), t \in \Gamma_0 \setminus W$, то $\|F^*(y^*)\| \overset{(4.22)}{<} \varepsilon'$. Якщо $y^*(y) = y(t), t \in W$, тоді $y^* \in V$. Таким чином, $F^*(y^*) \in \operatorname{aconv}\{0, V\}$ Отже, в обох випадках

$$\operatorname{dist}\left(F^*(y^*), \operatorname{aconv}\{0, V\}\right) < \varepsilon'.$$

(VI) Для будь-якого $v^* \in V$ ми маємо $v^*(e) = e(t), t \in W$. Отже,

$$|v^*(e) - 1| = |e(t) - 1| \overset{(4.23)}{\leqslant} \varepsilon';$$

□

4.3.2 Простори з властивістю β

Інший клас просторів, який має структуру АСК – це простори з властивістю β Лінденштрауса. Для зручності нагадаємо відповідне Означення 1.2.

Банаховий простір Y має властивість β, якщо існують дві множини $\{y_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \subset S_Y$, $\{y^*_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \subset S^*_Y$ та число $0 \leqslant \rho < 1$ такі, що виконуються наступні умови

(I) $y^*_\alpha(y_\alpha) = 1$,

(II) $|y^*_\alpha(y_\gamma)| \leqslant \rho$ якщо $\alpha \neq \gamma$,

(III) $\|y\| = \sup\{|y^*_\alpha(y)| : \alpha \in \Lambda\}$, для всіх $y \in Y$.

Теорема 4.17. *Нехай банаховий простір Y має властивість β. Тоді Y має структуру АСК з тим самим параметром ρ, як у Означенні 1.2.*

Доведення. Візьмемо множини $\{y_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \subset S_Y$, $\{y^*_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \subset S^*_Y$ та число $0 \leqslant \rho < 1$ з означення властивості β. Відповідно до пункту (III) цього означення, множина $\Gamma = \{y^*_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ є 1-нормуючею підмножиною кулі B_{Y^*}. До того ж, з пункту (II) випливає, що кожна точка множини Γ відділена від інших деяким слабким із зірочкою околом, тобто Γ є дискретним простором у w^*-топології. Для будь-якого $\varepsilon' > 0$ та будь-якої відносно w^*-відкритої непорожньої підмножини $U \subset \Gamma$ ми можемо обрати

$y_{\alpha_0} \in U$. Визначимо необхідні елементи V, $y_1^* \in V$, $e \in S_{C(K,Y)}$, та $F \in L(Y)$ наступним чином:

$$V := \{y_{\alpha_0}^*\}, y_1^* := y_{\alpha_0}^*, e := y_{\alpha_0}, F(y) := y_{\alpha_0}^*(y) y_{\alpha_0}.$$

Перевіримо, що властивості (I)-(VII) з Означення 4.9 насправді виконуються.

(I) $\|F\| = 1$ та $\|F(e)\| = \|y_{\alpha_0}^*(y_{\alpha_0})y_{\alpha_0}\| = \|y_{\alpha_0}\| = 1$.

(II) $y_1^*(F(e)) = y_{\alpha_0}^*(y_{\alpha_0}) = 1$.

(III) $(F^*(y_1^*))(y) = y_{\alpha_0}^*(y_{\alpha_0}^*(y)y_{\alpha_0}) = y_{\alpha_0}^*(y)$, отже, $F^*(y_1^*) = y_1^*$.

(IV) Для будь-якого $y^* \in V$ виконується

$$\begin{aligned} &|y^*(F(e))| + (1-\varepsilon')\|(I_{Y^*} - F^*)(y^*)\| \\ &= |y_{\alpha_0}^*(y_{\alpha_0})| + (1-\varepsilon')\|y_{\alpha_0}^* - F^* y_{\alpha_0}^*\| \\ &= 1 + (1-\varepsilon')\|y_{\alpha_0}^* - y_{\alpha_0}^*\| = 1. \end{aligned}$$

(V) $F^*(y^*) \in \operatorname{aconv}\{0, V\}$ для всіх $y^* = y_\alpha^* \in \Gamma$, тому що

$$F^*(y^*) = y^*(y_{\alpha_0}) y_{\alpha_0}^*.$$

(VI) Для всіх $v^* \in V$ ми маємо

$$|v^*(e) - 1| = |y_\alpha^*(y_{\alpha_0}) - 1| = 0 \leqslant \varepsilon'.$$

(VII) Для всіх $v^* = y_\alpha^* \in \Gamma \setminus V$ виконується

$$|v^*(F(e))| = y_\alpha^*(y_{\alpha_0}) \leqslant \rho, \text{ as } \alpha \neq \alpha_0.$$

$\square$

Зауваження 4.18. *Якщо $Y = \mathbb{K}$, то множина Γ складається з однієї точки, $V = \Gamma$ та $\Gamma \setminus V = \emptyset$. Таким чином, $\mathbb{K}$ має структуру ACK.*

4.3.3 Інші приклади

Теорема 4.19. *Нехай Y_1 має структуру ACK з параметром ρ_1 та Y_2 має структуру ACK з параметром ρ_2. Тоді $Y := Y_1 \bigoplus_\infty Y_2$ має структуру ACK з параметром $\rho = \max\{\rho_1, \rho_2\}$. Якщо $Y_1, Y_2 \in \mathrm{ACK}$, тоді $Y \in \mathrm{ACK}$.*

Доведення. Розглянемо випадок, коли $Y_i \in \text{ACK}_{\rho_i}$, $i = 1, 2$. Позначимо $\rho = \max\{\rho_1, \rho_2\}$, тоді Y_1, Y_2 мають структуру ACK з параметром ρ. Нехай $\Gamma_i \subset B_{Y_i^*}$ – відповідні 1-нормуючі множини із Означення 4.9. Тоді

$$\Gamma := \{(y_1^*, 0), (0, y_2^*) : y_i^* \in \Gamma_i, i = 1, 2\}$$

є 1-нормуючою множиною для B_{Y^*}. Розглянемо $U \neq \emptyset$ – відносно w^*-відкриту підмножину Γ. Тоді

$$U = \{(y_1^*, 0), (0, y_2^*) : y_i^* \in U_i\},$$

де U_i – w^*-відкриті підмножини Γ_i, та хоча б одна з множин U_i не порожня. Ми можемо вважати, що $U_1 \neq \emptyset$. Зафіксуємо $\varepsilon' > 0$. Використовуючи Означення 4.9 для Y_1, ε', та U_1 ми отримуємо w^*-відкриту підмножину $V_1 \neq \emptyset, V_1 \subset U_1$, $\tilde{y_1}^* \in V_1$, $e_1 \in S_{Y_1}$, $F_1 \in L(Y_1)$ з властивостями (I)-(VII). Спираючись на це, можемо визначити w^*-відкриту підмножину $V \neq \emptyset$, $y_1^* \in V$, $e \in S_Y$, $F \in L(Y)$ наступним чином:

$$V := \{(y_1^*, 0) : y_1^* \in V_1\} \subset U,$$

$$y_1^* := (\tilde{y_1}^*, 0), \;\; e := (e_1, 0),$$

$$F(y_1, y_2) = (F_1(y_1), 0).$$

Перевіримо, що виконуються всі необхідні властивості.

(I) $\|F\| = 1$ та $\|F(e)\| = \|F_1(e_1)\| = 1$;

(II) $y_1^*(F(e)) = \tilde{y_1}^*(F_1(e_1)) = 1$;

(III) $F^*(y_1^*) = y_1^*$, через те, що $(F_1\tilde{y_1}^*, 0) = (\tilde{y_1}^*, 0)$;

(IV) Для всіх $y^* = (y_1^*, 0) \in V$ ми маємо

$$\begin{aligned} &|y^*(F(e))| + (1 - \varepsilon')\|(I_{Y^*} - F^*)(y^*)\| \\ &\qquad = |y_1^*(F_1 e_1)| + (1 - \varepsilon')\|(I_{Y_1^*} - F_1^*)(y_1^*)\| \leqslant 1. \end{aligned}$$

Для випадку, коли $Y_1, Y_2 \in \text{ACK}$ тут ми маємо перевірити більш сильну властивість:

(IV') Для всіх $y^* \in \Gamma$ або $y^* = (y_1^*, 0), y_1^* \in \Gamma$, або ж $y^* = (0, y_2^*), y_2^* \in \Gamma$. У першому випадку виконується

$$\begin{aligned}|y^*(F(e))| &+ (1-\varepsilon')\|(I_{Y*} - F^*)(y^*)\| \\ &= |y_1^*(F_1(e_1))| + (1-\varepsilon')\|(I_{Y_1^*} - F_1^*)(y_1^*)\| \leqslant 1,\end{aligned}$$

а у другому

$$|y^*(F(e))| + (1-\varepsilon')\|(I_{Y*} - F^*)(y^*)\| = (1-\varepsilon')\|y_2^*\| \leqslant 1.$$

(V) Нехай $y^* \in \Gamma$. Якщо $y^* = (0, y_2^*)$, то $F^*(y^*) = 0$. Якщо $y^* = (y_1^*, 0)$, то

$$\operatorname{dist}(F_1^*(y_1^*), \operatorname{aconv}\{0, V_1\}) < \varepsilon'.$$

Отже, в обох випадках

$$\operatorname{dist}(F^*(y^*), \operatorname{aconv}\{0, V\}) < \varepsilon'.$$

(VI) Для всіх $v^* = (v_1^*, 0) \in V$ виконується

$$|v^*(e) - 1| = |v_1^*(e_1) - 1| \leqslant \varepsilon'.$$

(І на цьому кроці доведення для випадку, коли $Y_1, Y_2 \in$ ACK завершується.)

(VII) Нехай $v^* \in \Gamma \setminus V$ Тоді, якщо $v^* = (0, v_2^*)$, то $v^*(F(e)) = 0 \leqslant \rho$. Якщо $v^* = (v_1^*, 0)$, це означає, що $v_1^* \notin V_1$, отже,

$$|v^*(F(e))| = |v_1^*(F_1 e_1)| \leqslant \rho.$$

$\square$

Наступна теорема частково узагальнює [4, Theorem 3.1], де властивість A-BPBp була доведена для $C(K, Y)$, коли Y має властивість β.

Теорема 4.20. *Нехай K – компактний гаусдорфів топологічний простір. Тоді,*

$$(Y \in \mathrm{ACK}_\rho) \Rightarrow (C(K, Y) \in \mathrm{ACK}_\rho);$$

$$(Y \in \mathrm{ACK}) \Rightarrow (C(K, Y) \in \mathrm{ACK}).$$

Доведення. Нехай $\widetilde{\Gamma} \subset B_{Y^*}$ – 1-нормуюча множина з Означення 4.9. Тоді множина

$$\Gamma := \{\delta_t \otimes \tilde{y}^* : t \in K, \tilde{y}^* \in \widetilde{\Gamma}\}$$

– це 1-нормуюча підмножина $B_{C(K,Y)^*}$. Для будь-якого $\varepsilon' > 0$ та будь-якої w^*-відкритої підмножини $U \neq \emptyset, U \subset \Gamma$ ми маємо $t_0 \in K$ та $\tilde{y_0}^* \in \widetilde{\Gamma}$, що $\delta_{t_0} \otimes \tilde{y}_0^* \in U$. Ми можемо знайти відкритий окіл B точки t_0 в компакті K та w^*-відкритий окіл $\widetilde{W}$ елемента $\tilde{y_0}^*$ у $\widetilde{\Gamma}$ так, що

$$\{\delta_t \otimes \tilde{y}^* : t \in B, \tilde{y}^* \in \widetilde{W}\} \subset U.$$

Використовуючи Означення 4.9 для Y, ε', та $\widetilde{W}$ ми отримуємо w^*-відкриту підмножину $\widetilde{V} \neq \emptyset, \widetilde{V} \subset \widetilde{W}$, $\tilde{y_1}^* \in \widetilde{V}$, $\tilde{e} \in S_Y$, $\widetilde{F} \in L(Y)$ з властивостями (I)-(VII) для випадку структури АСК$_\rho$, або модифіковані властивості для випадку простої структури АСК. Тепер визначимо w^*-відкриту підмножину $V \neq \emptyset$ та відповідні елементи $y_1^* \in V$, $e \in S_{C(K,Y)}$, $F \in L(C(K,Y))$ наступним чином:

$$V := \{\delta_t \otimes \tilde{y}^* : t \in B, \tilde{y}^* \in \widetilde{V}\} \subset U,$$

$$y_1^* := \delta_{t_0} \otimes \tilde{y_1}^*, \quad e := \tilde{e},$$

$$(Ff)(t) := f_0(t)\widetilde{F}(f(t)),$$

де $f_0 : K \to [0,1]$ – неперервні функція з носієм у множині B та $f(t_0) = 1$. Перевіримо властивості (I)-(VII).

(I) Очевидно, що $\|F\| = 1$ та $\|F(e)\| = \|f_0(t_0)\widetilde{F}(\tilde{e})\| = 1$.

(II) $y_1^*(F(e)) = \tilde{y_1}^*(f_0(t_0)\widetilde{F}(\tilde{e})) = 1$.

(III) $F^*(y_1^*) = y_1^*$, тому що для всіх $g \in C(K,Y)$ ми маємо

$$(F^*(y_1^*))(g) = \widetilde{F}^*(\tilde{y_1^*})(g(t_0)) = \tilde{y_1^*}(g(t_0)).$$

(IV) Для всіх $y^* \in V$ (або $y^* \in \Gamma$ для випадку $Y \in$ АСК), ми маємо $y^* = \delta_t \otimes \tilde{y}^*, t \in B, \tilde{y}^* \in \widetilde{V}$. Отже,

$$
\begin{aligned}
&|y^*(F(e))| + (1-\varepsilon')\|(I_{C(K,Y)^*} - F^*)(y^*)\| \\
&\leqslant f_0(t)|\tilde{y}^*(\widetilde{F}(\tilde{e}))| + (1-\varepsilon')\Big((1-f_0(t))\|\tilde{y}^*\| + f_0(t)\|(I_{Y^*} - \widetilde{F}^*)(\tilde{y}^*)\|\Big) \\
&\leqslant f_0(t)\Big(|\tilde{y}^*(\widetilde{F}(\tilde{e}))| + (1-\varepsilon')\|(I_{Y^*} - \widetilde{F}^*)(\tilde{y}^*)\|\Big) + (1-f_0(t))\|\tilde{y}^*\| \leqslant 1.
\end{aligned}
$$

(V) Перевіримо, що $\operatorname{dist}(F^*(y^*), \operatorname{aconv}\{0, V\}) < \varepsilon'$ для всіх $y^* = \delta_t \otimes \tilde{v}^* \in \Gamma$. Через те, що $\operatorname{dist}(\widetilde{F}^*(\tilde{y}^*), \operatorname{aconv}\{0, \widetilde{V}\}) < \varepsilon'$, існує $\tilde{z^*} \in \operatorname{aconv}\{0, \widetilde{V}\}$, що $\|\widetilde{F}^*\tilde{y}^*, \tilde{z^*}\| < \varepsilon'$. Тоді $z^* := f(t)(\delta_t \otimes \tilde{z}^*) \in \operatorname{aconv}\{0, V\}$, та

$$\|F^*(y^*) - z^*\| \leqslant f(t)\|\widetilde{F}^*(\tilde{y}^*) - \tilde{z^*}\| < \varepsilon'.$$

(VI) Для всіх $v^* = \delta_t \otimes \tilde{v}^* \in V$ ми маємо

$$|v^*(e) - 1| = |\tilde{v}^*(\tilde{e}) - 1| \leqslant \varepsilon'.$$

(VII) Для випадку $Y \in$ ACK доведення вже закінчено. Якщо $Y \in \mathrm{ACK}_\rho$, то для $v^* = \delta_t \otimes \tilde{v}^* \in \Gamma \setminus V$ ми маємо дві можливості: $t \notin B$ або $\tilde{v}^* \notin \widetilde{V}$. Якщо $t \in K \setminus B$, ми знаємо, що $f_0(t) = 0$, тож $F(e) = 0$. Якщо $\tilde{v}^* \in \widetilde{\Gamma} \setminus \widetilde{V}$, тоді $|v^*(F(e))| \leqslant |\tilde{v}^*(\widetilde{F}(\tilde{e})| \leqslant \rho$.

□

4.4 Висновки до розділу 4

У цьому розділі ми ввели нову властивість банахових просторів – ACK структуру (Означення 4.9). Головний результат цього розділу – Теорема 4.11 – стверджує, що якщо простір Y має таку структуру, то пара просторів (X, Y) має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для асплундових операторів, тобто будь-який асплундовий оператор T з $\|T\| = 1$, який діє з простору X в Y, та вектор $x_0 \in S_X$ для якого виконується $\|T(x_0)\| > 1-\varepsilon$, можна наблизити парою: асплундовим оператором $\widetilde{T} \in S_{L(X,Y)}$ та вектором $u_0 \in S_X$ таким чином, що $\|\widetilde{T}(u_0)\| = 1$.

Далі ми довели, що рівномірні алгебри та простори з властивістю β Лінденштрауса мають структуру ACK. Також ми показали, що пряма сума $\bigoplus_\infty$ просторів з ACK структурою має ACK структуру. Крім того простір неперервних функцій на компакті зі значеннями у просторі з АСК структурою має АСК структуру.

До основних результатів цього розділу належать:

- Базова Лема 4.8, яка доводиться за допомогою Теореми Бішопа-Фелпса-Болобаша для лінійних функціоналів та того факту, що оператор T є асплундовим, отже, множина $T^*(B_{Y^*})$ є фрагментовною.
- Теорема 4.11, в якій ми доводимо, що, якщо простір Y має АСК структуру, то для будь-якого простору X пара (X, Y) має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для асплундових операторів.
- Теорема 4.16, в якій ми доводимо, що рівномірні алгебри мають просту структуру АСК.
- Теорема 4.17, в якій ми доводимо, що простори з властивістю β Лінденштрауса мають структуру АСК з параметром ρ.
- Теорема 4.19, в якій ми доводимо, що структура АСК зберігається при операції $\bigoplus_\infty$ між просторами, що мають структуру АСК.
- Теорема 4.20, в якій ми доводимо, що, якщо Y має структуру АСК з параметром ρ , то простір $C(K, Y)$ має структуру АСК з параметром ρ, а також якщо $Y \in$ АСК, то $C(K, Y) \in$ АСК. Таким чином, разом з Теоремою 4.11 ми отримуємо, що простір $C(K, Y)$ має властивість A-BPBp, коли Y має структуру АСК.

Результати досліджень даного розділу наведено в публікації [17].

РОЗДІЛ 5

КІЛЬКІСНІ ВЕРСІЇ ТЕОРЕМИ БІШОПА-ФЕЛПСА-БОЛОБАША ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ, ЩО ДІЮТЬ У ПРОСТІР З ВЛАСТИВІСТЮ β

У цьому розділі ми знову повертаємося до розгляду виключно дійсних просторів.

5.1 Модулі Бішопа-Фелпса-Болобаша для операторів

Нагадаємо, що у [2, Theorem 2.2] було показано, що, якщо банаховий простір Y має властивість β Лінденштрауса, то для будь-якого банахового простору X, пара (X, Y) має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для операторів (див. Означення 1.4). Нагадаємо ще раз означення властивості β та введемо деякі додаткові позначення.

Нехай $\rho \in [0, 1)$. Банаховий простір Y має властивість β з параметром ρ, якщо існують дві множини $\{y_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \subset S_Y$, $\{y_\alpha^* : \alpha \in \Lambda\} \subset S_Y^*$ такі, що виконуються наступні умови

(I) $y_\alpha^*(y_\alpha) = 1$,

(II) $|y_\alpha^*(y_\gamma)| \leqslant \rho$ якщо $\alpha \neq \gamma$,

(III) $\|y\| = \sup\{|y_\alpha^*(y)| : \alpha \in \Lambda\}$ для всіх $y \in Y$.

Ми будемо використовувати позначення $\beta(Y) \leqslant \rho$, щоб показати, що Y має властивість β з параметром ρ. Очевидно, якщо $\rho_1 \leqslant \rho_2 < 1$ та $\beta(Y) \leqslant \rho_1$, тоді $\beta(Y) \leqslant \rho_2$. Замість $\beta(Y) \leqslant 0$ ми зазвичай будемо писати $\beta(Y) = 0$. У цьому розділі ми введемо аналог модулів Бішопа-Фелпса-Болобаша (звичайного, сферичного, модифікованого) для векторозначного випадку та дослідимо оцінки для цих модулів.

Означення 5.1. Нехай X, Y – банахові простори. *Модулем Бішопа-Фелпса-Болобаша* (*сферичним модулем Бішопа-Фелпса-Болобаша*) для пари просторів (X, Y) називається функція $\Phi(X, Y, \cdot) : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ ($\Phi^S(X, Y, \cdot) : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}^+$), значення якої у точці $\varepsilon \in (0, 1)$ визначається як інфімум тих $\delta > 0$, що для будь-якої пари $(x, T) \in B_X \times B_{L(X,Y)}$ ($(x, T) \in S_X \times S_{L(X,Y)}$ відповідно) з $\|T(x)\| > 1 - \varepsilon$, існує пара $(z, F) \in S_X \times S_{L(X,Y)}$ з $\|F(z)\| = 1$, $\|x - z\| < \delta$ та $\|T - F\| < \delta$.

Введемо такі позначення

$$\Pi_\varepsilon(X, Y) = \{(x, T) \in X \times L(X, Y) : \|x\| \leqslant 1, \|T\| \leqslant 1, \|T(x)\| > 1 - \varepsilon\}, \tag{5.1}$$

$$\Pi^S_\varepsilon(X, Y) = \{(x, T) \in X \times L(X, Y) : \|x\| = \|T\| = 1, \|T(x)\| > 1 - \varepsilon\}, \tag{5.2}$$

$$\Pi(X, Y) = \{(x, T) \in X \times L(X, Y) : \|x\| = 1, \|T\| = 1, \|T(x)\| = 1\}. \tag{5.3}$$

Тоді Означення 5.18 може бути переписано наступним чином:

$$\Phi(X, Y, \varepsilon) = \sup_{(x,T)\in\Pi_\varepsilon(X,Y)} \inf_{(z,F)\in\Pi(X,Y)} \max\{\|x - z\|, \|T - F\|\},$$

$$\Phi^S(X, Y, \varepsilon) = \sup_{(x,T)\in\Pi^S_\varepsilon(X,Y)} \inf_{(z,F)\in\Pi(X,Y)} \max\{\|x - z\|, \|T - F\|\}.$$

Очевидно, що $\Phi^S(X, Y, \varepsilon) \leqslant \Phi(X, Y, \varepsilon)$, тобто будь-яка оцінка зверху для $\Phi(X, Y, \cdot)$ є справедливою для $\Phi^S(X, Y, \cdot)$ та будь-яка оцінка знизу для $\Phi^S(X, Y, \cdot)$ є справедливою для $\Phi(X, Y, \cdot)$. Також очевидним є наступне зауваження.

Зауваження 5.2. *Нехай X, Y – банахові простори, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ та $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$. Тоді $\Pi_{\varepsilon_1}(X, Y) \subset \Pi_{\varepsilon_2}(X, Y)$ та $\Pi^S_{\varepsilon_1}(X, Y) \subset \Pi^S_{\varepsilon_2}(X, Y)$. Отже, $\Phi(X, Y, \varepsilon)$ та $\Phi^S(X, Y, \varepsilon)$ є неспадними функціями змінної ε.*

Відзначимо також, що (X, Y) має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша тоді і тільки тоді, коли $\Phi(X, Y, \varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$.

5.2 Оцінка зверху для модуля Бішопа-Фелпса-Болобаша

Нашим першим результатом є верхня границя для модуля Бішопа-Фелпса-Болобаша, коли простір, у який діє оператор, має властивість β.

Теорема 5.3. *Нехай X та Y – банахові простори, $\rho \in [0,1)$ та $\beta(Y) \leqslant \rho$. Тоді для будь-якого $\varepsilon \in (0,1)$*

$$\Phi^S(X,Y,\varepsilon) \leqslant \Phi(X,Y,\varepsilon) \leqslant \min\left\{\sqrt{2\varepsilon}\sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho}},\ 2\right\}. \qquad (5.4)$$

Цей результат є кількісною версією теореми [2, Theorem 2.2]. Наше доведення схоже за конструкцією на [2, Theorem 2.2], але щоб отримати оцінку (5.4) ми мали бути більш уважними до деталей та мали зробити деяку додаткову роботу. По-перше, нам потрібен результат, який ми довели у Розділі 2 та вже неодноразово використовували, а саме перша частина Леми 2.17 :

Нехай X – банаховий простір, $x \in B_X$, $x^* \in B_{X^*}$, $\varepsilon \in (0,2)$ та $x^*(x) > 1-\varepsilon$. Тоді для будь-якого $k \in [\varepsilon/2, 1)$ існує $z^* \in S_{X^*}$ та $z \in S_X$ такі, що

$$z^*(z) = 1, \qquad \|x - z\| < \frac{\varepsilon}{k}, \qquad \|x^* - z^*\| < 2k.$$

Доведення Теореми 5.3. Ми будемо використовувати множини $\{y_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \subset S_Y$ та $\{y_\alpha^* : \alpha \in \Lambda\} \subset S_Y^*$ з означення властивості β.

Розглянемо $T \in B_{L(X,Y)}$ та $x \in B_X$ з $\|T(x)\| > 1-\varepsilon$. Згідно з (iii) означення властивості β, існує $\alpha_0 \in \Lambda$, що $|y_{\alpha_0}^*(T(x))| > 1-\varepsilon$. За Лемою 2.17, для будь-якого $k \in [\varepsilon/2, 1)$ та для будь-якого $\delta > 0$ існує $z^* \in S_{X^*}$ та $z \in S_X$, що $|z^*(z)| = 1$, $\|z - x\| < \varepsilon/k$ та $\|z^* - T^*(y_{\alpha_0}^*)\| < 2k$.

Для $\eta = 2k\dfrac{\rho}{1-\rho}$ ми визначимо такий оператор $S \in L(X,Y)$:

$$S(v) = T(v) + [(1+\eta)z^*(v) - (T^*(y_{\alpha_0}^*))(v)]y_{\alpha_0}. \qquad (5.5)$$

Помітимо, що для всіх $y^* \in Y^*$

$$S^*(y^*) = T^*(y^*) + [(1+\eta)z^* - T^*(y_{\alpha_0}^*)]y^*(y_{\alpha_0}).$$

Згідно з (iii) означення властивості β множина $\{y_\alpha^* : \alpha \in \Lambda\}$ є 1-нормуючею Y, тож $\|S\| = \sup_\alpha \|S^*(y_\alpha^*)\|$. Обчислимо норму оператора S.

$$\|S\| \geqslant \|S^*(y_{\alpha_0}^*)\| = (1+\eta)\|z^*\| = 1+\eta.$$

З одного боку, для всіх $\alpha \neq \alpha_0$ ми маємо

$$\|S^*(y_\alpha^*)\| \leqslant 1 + \rho(\|z^* - T^*(y_{\alpha_0}^*)\| + \eta\|z^*\|) < 1 + \rho(2k+\eta) = 1+\eta.$$

Таким чином,

$$\|S\| = \|S^*(y^*_{\alpha_0})\| = (1+\eta)\|z^*\| = |y^*_{\alpha_0}(S(z))| \leqslant \|S(z)\| \leqslant \|S\|.$$

Тож, ми маємо $\|S\| = \|S(z)\| = 1+\eta$. Також, $\|S-T\| \leqslant \eta + \|z^* - T^*(y^*_{\alpha_0})\| < \eta + 2k$.

Тепер визначимо потрібний нам оператор $F := \dfrac{S}{\|S\|}$. Тоді $\|F\| = \|F(z)\| = 1$ та $\|S-F\| = \|S\|\left(1 - \dfrac{1}{1+\eta}\right) = \eta$. So, $\|T-F\| < 2k + 2\eta$.

Таким чином, ми маємо, що

$$\|z-x\| < \varepsilon/k \text{ та } \|T-F\| < 2k\frac{1+\rho}{1-\rho}.$$

Тепер підставимо значення $k = \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{2} \cdot \dfrac{1-\rho}{1+\rho}}$ $\Big($тут нам потрібно, що $\varepsilon \leqslant \dfrac{2(1-\rho)}{1+\rho}$ щоб мати $k \in [\varepsilon/2, 1)\Big)$. Тоді ми отримуємо

$$\max\{\|z-x\|, \|T-F\|\} < \sqrt{2\varepsilon}\sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho}}.$$

Нарешті, якщо $\varepsilon > \dfrac{2(1-\rho)}{1+\rho}$, ми можемо оцінити за нерівністю трикутника $\max\{\|z-x\|, \|T-F\|\} \leqslant 2$. □

Наша наступна мета – дати оцінку для випадку, коли X є рівномірно неквадратним простором, та показати, що у цьому випадку оцінка (5.4) завжди може бути покращена, як і було у ситуації з лінійними функціоналами. Нагадаємо, що параметром рівномірної неквадратності простора X ми називаємо величину

$$\alpha(X) := 2 - \sup_{x,y \in B_X} \left\{\frac{1}{2}(\|x+y\| + \|x-y\|)\right\}.$$

У Розділі 2 у Теоремі 2.8 було показано, що для рівномірно неквадратного простору X з параметром рівномірної неквадратності $\alpha(X) > \alpha_0 > 0$

$$\Phi^S_X(\varepsilon) \leqslant \sqrt{2\varepsilon}\sqrt{1 - \frac{1}{3}\alpha_0} \quad \text{для} \quad \varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\alpha_0\right).$$

Для того щоб отримати цей результат ми довели Твердження 2.6: нехай X – банаховий простір, $k \in (0,1), r \in (0,k)$, $x \in S_X, y \in X/\{0\}$ такі, що $\|x-y\| \leqslant k$ та $\left\| x - \dfrac{y}{\|y\|} \right\| \geqslant 2k - r$, тоді

$$\alpha(X) \leqslant \max \left\{ \frac{3r}{2k}, \frac{r(2-k)}{2k(1-k)} \right\}.$$

Прямим наслідком цього факту є наступне твердження.

Наслідок 5.4. *Нехай X – банаховий простір з $\alpha(X) > \alpha_0$. Тоді для будь-якого $x \in S_X, y \in X$ та будь-якого $k \in (0, 1/2]$, якщо $\|x - y\| \leqslant k$, то*

$$\left\| x - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leqslant 2k \left(1 - \frac{1}{3}\alpha_0 \right).$$

Доведення. Якщо ми припустимо, що $\left\| x - \dfrac{y}{\|y\|} \right\| > 2k \left(1 - \dfrac{1}{3}\alpha_0 \right)$, то ми потрапляємо в умови Твердження 2.6 з $r = 2k\alpha_0/3$, тож $\alpha(X) \leqslant 3r/2k = \alpha_0$, що суперечить нашим умовам. □

Також нам знадобиться ще один допоміжний результат.

Лема 5.5. *Нехай X – банаховий простір з $\alpha(X) > \alpha_0$. Тоді для будь-якого $0 < \varepsilon < 1$ та для будь-якої пари $(x, x^*) \in S_X \times B_{X^*}$ з $x^*(x) > 1 - \varepsilon$, та для будь-якого значення $k \in \left[\dfrac{\varepsilon}{2(1 - 1/3\alpha_0)}, \dfrac{1}{2} \right]$ існує така пара $(y, y^*) \in \Pi(X)$, що*

$$\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{k} \quad \text{та} \quad \|x^* - y^*\| < 2k \left(1 - \frac{1}{3}\alpha_0 \right).$$

Доведення. Ми маємо, що $\dfrac{x^*}{\|x^*\|}(x) > 1 - \eta$ для $\eta = 1 - \dfrac{1-\varepsilon}{\|x^*\|}$, і можемо застосувати Теорему 2.7 для будь-якого $\tilde{k} \in (0, 1/2]$. Візьмемо

$$\tilde{k} = \frac{k(\|x^*\| - (1-\varepsilon))}{\varepsilon \|x^*\|}.$$

З нерівності $\|x^*\| \geqslant x^*(x) > 1 - \varepsilon$ випливає, що $\tilde{k} > 0$. З одного боку, $\tilde{k} = k \left(\dfrac{1}{\varepsilon} - \dfrac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon \|x^*\|} \right) \leqslant k \left(\dfrac{1}{\varepsilon} - \dfrac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon} \right) = k < 1/2$, тож для цього $\tilde{k}$ ми можемо знайти $\zeta^* \in X^*$ та $z \in S_X$, що

$$\zeta^*(z) = \|\zeta^*\|, \qquad \|x - z\| < \frac{\eta}{\tilde{k}}, \qquad \|\frac{x^*}{\|x^*\|} - \zeta^*\| < \tilde{k}.$$

Розглянемо $z^* = \dfrac{\zeta^*}{\|\zeta^*\|}$. Згідно з Наслідком 5.4

$$\left\| \frac{x^*}{\|x^*\|} - z^* \right\| < 2\tilde{k}\left(1 - \frac{1}{3}\alpha_0\right).$$

Тоді $\|x - z\| < \varepsilon/k$ та

$$\begin{aligned}\|x^* - z^*\| &= \|x^*\| \cdot \left\| \frac{x^*}{\|x^*\|} - \frac{z^*}{\|x^*\|} \right\| \leqslant \|x^*\| \left(\left\| \frac{x^*}{\|x^*\|} - z^* \right\| + \left\| z^* - \frac{z^*}{\|x^*\|} \right\| \right) \\ &= \|x^*\| \left(2\tilde{k}(1 - 1/3\alpha_0) + \left| 1 - \frac{1}{\|x^*\|} \right| \right) \\ &= 2\frac{k(\|x^*\| - (1-\varepsilon))}{\varepsilon}(1 - 1/3\alpha_0) + 1 - \|x^*\| \leqslant 2k(1 - 1/3\alpha_0).\end{aligned}$$

Остання нерівність виконується, тому що, якщо ми розглянемо функцію

$$f(t) = \frac{2k(1 - 1/3\alpha_0) \cdot (t - (1-\varepsilon))}{\varepsilon} + 1 - t$$

з $t \in (1-\varepsilon, 1]$, то $f' \geqslant 0$, якщо $k \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2(1 - 1/3\alpha_0)}$, тож $\max f = f(1) = 2k\left(1 - \dfrac{1}{3}\alpha_0\right)$. □

Теорема 5.6. *Нехай X та Y – такі банахові простори, що $\beta(Y) \leqslant \rho$, X – рівномірно неквадратний простір з $\alpha(X) > \alpha_0$, та $\varepsilon_0 = \min\left\{ \dfrac{2}{(1 - 1/3\alpha_0)} \dfrac{1-\rho}{1+\rho}, \dfrac{1}{2}\dfrac{1+\rho}{1-\rho}(1 - 1/3\alpha_0) \right\}$. Тоді для будь-якого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$*

$$\Phi^S(X, Y, \varepsilon) \leqslant \sqrt{2\varepsilon\left(1 - \frac{1}{3}\alpha_0\right)}\sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho}}\,. \tag{5.6}$$

Доведення. Доведення майже таке саме, як доведення Теореми 5.3.

Щоб отримати оцінку (5.6) для $\varepsilon < \varepsilon_0$, ми розглянемо $T \in S_{L(X,Y)}$ та $x \in S_X$ з $\|T(x)\| > 1 - \varepsilon$. Через те, що Y має властивість β, існує $\alpha_0 \in \Lambda$, що $|y^*_{\alpha_0}(T(x))| > 1 - \varepsilon$. Згідно з Лемою 5.5, для будь-якого $k \in \left[\dfrac{\varepsilon}{2(1 - 1/3\alpha_0)}, \dfrac{1}{2}\right]$ та для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $z^* \in S_{X^*}$ та $z \in S_X$, що $|z^*(z)| = 1$, $\|z - x\| < \varepsilon/k$ та $\|z^* - T^*(y^*_{\alpha_0})\| < 2k(1 - 1/3\alpha_0)$.

Для $\eta = 2k(1 - 1/3\alpha_0)\dfrac{\rho}{1-\rho}$ ми визначимо $S \in L(X, Y)$ за формулою (5.5) і візьмемо $F := \dfrac{S}{\|S\|}$. Таким самим чином, як і у доведенні Теореми

5.3 ми отримуємо, що

$$\|x-z\| < \varepsilon/k \text{ та } \|T-F\| < 2k\left(1-\frac{1}{3}\alpha_0\right)\frac{1+\rho}{1-\rho}.$$

Підставимо $k = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2(1-1/3\alpha_0)} \cdot \frac{1-\rho}{1+\rho}}$ (тут нам потрібно, що $\varepsilon < \varepsilon_0$). Ми отримуємо

$$\max\{\|z-x\|, \|T-F\|\} < \sqrt{2\varepsilon\left(1-\frac{1}{3}\alpha_0\right)}\sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho}}.$$

□

5.3 Оцінки знизу для модуля Бішопа-Фелпса-Болоба́ша

5.3.1 Покращення для $\Phi^S(\ell_1^{(2)}, Y, \varepsilon)$

На жаль, нам не вдалось знайти приклад, який показував би точність оцінки (5.4) у Теоремі 5.3. Тож ми збираємось навести приклади просторів (X, Y) в яких оцінка знизу для $\Phi(X, Y, \varepsilon)$ досить близька до оцінки зверху (5.4).

Теорема 5.6 показує, що для дослідження точності Теореми 5.3 потрібно розглядати тільки такі простори X, які не є рівномірно неквадратними. Найпростіше з них – це $X = \ell_1^{(2)}$. У [18, Example 2.5] завдяки цьому прикладу була отримана точність оцінки модуля Бішопа-Фелпса-Болобаша для функціоналів. Але ситуація змінюється, коли ми працюємо з модулем Бішопа-Фелпса-Болобаша для операторів. А саме, наступна теорема демонструє, що у просторі $X = \ell_1^{(2)}$ оцінка, надана у (5.3) може бути покращена.

Теорема 5.7. *Нехай Y – банаховий простір з $\beta(Y) \leqslant \rho$. Тоді*

$$\Phi^S(\ell_1^{(2)}, Y, \varepsilon) \leqslant \Phi(\ell_1^{(2)}, Y, \varepsilon) \leqslant \min\left\{\sqrt{2\varepsilon}\frac{1+\rho}{\sqrt{1-\rho^2+\frac{\varepsilon}{2}\rho^2+\rho\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}}}, 1\right\}. \quad (5.7)$$

Щоб довести цю теорему, нам потрібна така лема.

Лема 5.8. *Нехай Y – банаховий простір з $\beta(Y) \leqslant \rho$, $y \in B_Y$, $\{y_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \subset S_Y$, $\{y^*_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \subset S^*_Y$ - множини з Означення 1.2. Для даного $r \in (0,1)$, припустимо, що $y^*_{\alpha_0}(y) \geqslant 1 - r$ для деякого $\alpha_0 \in \Lambda$. Тоді існує такий елемент $z \in S_Y$, що*

(I) $y^*_{\alpha_0}(z) = 1$;

(II) $|y^*_\alpha(z)| \leqslant 1$ для всіх $\alpha \in \Lambda$;

(III) $\|y - z\| \leqslant \dfrac{r(1+\rho)}{1-\rho+\rho r}$.

Доведення. Оберемо таке число $r_0 \in [0, r]$, що $y^*_{\alpha_0}(y) = 1 - r_0, r_0 \in [0, r]$. Згідно з (i) Означення 1.2 $y^*_{\alpha_0}(y_{\alpha_0}) = 1$. Перевіримо властивості (I)-(III) для

$$z := \frac{r_0}{1-\rho+\rho r_0} y_{\alpha_0} + \left(1 - \frac{r_0\rho}{1-\rho+\rho r_0}\right) y.$$

(I) $y^*_{\alpha_0}(z) = \dfrac{r_0}{1-\rho+\rho r_0} + \left(1 - \dfrac{r_0\rho}{1-\rho+\rho r_0}\right)(1 - r_0) = 1.$

(II) Для всіх $\alpha \neq \alpha_0$ ми маємо

$$|y^*_\alpha(z)| \leqslant \frac{r_0}{1-\rho+\rho r_0} \cdot \rho + \left(1 - \frac{r_0\rho}{1-\rho+\rho r_0}\right) = 1.$$

(III) Через те, що $\{y^*_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \subset S^*_Y$ – 1-нормуюча підмножина, ми маємо $\|y - z\| = \sup\limits_{\alpha\in\Lambda} |y^*_\alpha(y - z)|$. Помітимо, що $|y^*_{\alpha_0}(y - z)| \leqslant r$, та для будь-якого $\alpha \neq \alpha_0$ ми маємо

$$\begin{aligned}|y^*_\alpha(y - z)| &= \left|\frac{r_0}{1-\rho+\rho r_0} y^*_\alpha(y) - \frac{r_0}{1-\rho+\rho r_0} y^*_\alpha(y_{\alpha_0})\right| \\ &\leqslant \frac{r_0(1+\rho)}{1-\rho+\rho r_0} \leqslant \frac{r(1+\rho)}{1-\rho+\rho r}.\end{aligned}$$

Тож, $\|y - z\| \leqslant \max\left\{r, \dfrac{r(1+\rho)}{1-\rho+\rho r}\right\} = \dfrac{r(1+\rho)}{1-\rho+\rho r}$.

Нарешті, з (I) та (II) випливає, що $z \in S_Y$. □

Зауваження 5.9. *Для будь-якого оператора $T \in L(\ell_1^{(2)}, Y)$*

$$\|T\| = \max\{\|T(e_1)\|, \|T(e_2)\|\}.$$

Більш того, якщо оператор $T \in L(\ell_1^{(2)}, Y)$ досягає норми у деякій точці $x \in S_{\ell_1^{(2)}}$, яка не збігається з $\pm e_1$ або з $\pm e_2$, тоді сегмент $[T(e_1), T(e_2)]$ або $[T(e_1), -T(e_2)]$ повинен лежати на сфері $\|T\|S_Y$.

Доведення Теореми 5.7. Позначимо $A(\rho,\varepsilon) := \sqrt{2\varepsilon}\dfrac{1+\rho}{\sqrt{1-\rho^2+\frac{\varepsilon}{2}\rho^2}+\rho\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}}$.

Помітимо, що $A(\rho,\varepsilon)$ є зростаючою функцією від ρ. Зробимо необхідні обчислення, щоб переконатися в цьому:

$$(A(\rho,\varepsilon))'_\rho = \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\left(\sqrt{1-\rho^2+\frac{\varepsilon}{2}\rho^2}+\rho\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\right)^2}$$
$$\times\left(\sqrt{1-\rho^2+\frac{\varepsilon}{2}\rho^2}+\rho\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}-(1+\rho)\left(\frac{-2\rho+\varepsilon\rho}{2\sqrt{1-\rho^2+\frac{\varepsilon}{2}\rho^2}}+\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\right)\right).$$

Перевіримо, що

$$\sqrt{1-\rho^2+\frac{\varepsilon}{2}\rho^2}+\rho\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}-(1+\rho)\left(\frac{-2\rho+\varepsilon\rho}{2\sqrt{1-\rho^2+\frac{\varepsilon}{2}\rho^2}}+\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\right)\geqslant 0.$$

Помножимо на знаменник:

$$2(1-\rho^2+\frac{\varepsilon}{2}\rho^2)+2\rho\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\sqrt{1-\rho^2+\frac{\varepsilon}{2}\rho^2}$$
$$-(1+\rho)(-2\rho+\varepsilon\rho)-2(1+\rho)\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\sqrt{1-\rho^2+\frac{\varepsilon}{2}\rho^2}\geqslant 0.$$

Елементарними перетвореннями зводимо до

$$2-2\rho^2+\varepsilon\rho^2+2\rho-\varepsilon\rho+2\rho^2-\varepsilon\rho^2-2\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\sqrt{1-\rho^2+\frac{\varepsilon}{2}\rho^2}\geqslant 0$$

і, нарешті, до

$$2+2\rho-\varepsilon\rho-2\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\sqrt{1-\rho^2+\frac{\varepsilon}{2}\rho^2}\geqslant 0.$$

Остання нерівність може бути легко перевірена:

$$2+2\rho-\varepsilon\rho-2\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\sqrt{1-\rho^2+\frac{\varepsilon}{2}\rho^2}\geqslant 2-2\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\sqrt{1-\rho^2+\frac{\varepsilon}{2}\rho^2}\geqslant 2-2\geqslant 0.$$

Тож, $\sqrt{2\varepsilon} = A(0,\varepsilon) \leqslant A(\rho,\varepsilon) \leqslant A(1,\varepsilon) = 2$.

Далі ми покажемо, що для будь-якої пари $(x,T) \in \Pi_\varepsilon(\ell_1^{(2)}, Y)$ існує пара $(y,F) \in \Pi(\ell_1^{(2)}, Y)$ така, що

$$\max\{\|x-y\|, \|T-F\|\} \leqslant \min\{A(\rho,\varepsilon), 1\}.$$

З міркувань симетрії можемо вважати, що $x = (t(1-\delta), t\delta), \delta \in [0,1/2], t \in [1-\varepsilon, 1]$. Очевидно, $\|x\| = t$. По-перше, переконаємось, що $\Phi(\ell_1^{(2)}, Y, \varepsilon) \leqslant 1$. Дійсно, ми завжди можемо наблизити пару (x,T) парою $y := e_1$ та F, який визначається за такою формулою: $F(e_i) := T(e_i)/\|T(e_i)\|$. Тоді $\|x - e_1\| = 2t\delta + 1 - t \leqslant 1$ та $\|T - F\| \leqslant 1$.

Залишилось перевірити, що $\Phi(\ell_1^{(2)}, Y, \varepsilon) \leqslant A(\rho,\varepsilon)$, коли $A(\rho,\varepsilon) < 1$. Через те, що $A(\rho,\varepsilon) \geqslant \sqrt{2\varepsilon}$ ми повинні розглядати $\varepsilon \in (0,1/2)$. Простір Y має властивість β, тож, ми можемо обрати таке α_0, що $|y^*_{\alpha_0}(T(x))| > 1-\varepsilon$. Без втрати загальності ми можемо припустити, що $y^*_{\alpha_0}(T(x)) > 1-\varepsilon$. Тоді $y^*_{\alpha_0}\left(T\left(\dfrac{x}{t}\right)\right) > 1-\varepsilon'$, де $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon - (1-t)}{t} \in (0,\varepsilon)$. Отже,

$$y^*_{\alpha_0}(T(e_1)) > 1 - \frac{\varepsilon'}{1-\delta} \quad \text{та} \quad y^*_{\alpha_0}(T(e_2)) > 1 - \frac{\varepsilon'}{\delta}. \tag{5.8}$$

Далі ми знайдемо апроксимувальну пару $(y,F) \in \Pi(\ell_1^{(2)}, Y)$ для (x,T). Розглянемо два випадки:

Випадок I: $2t\delta + 1 - t \leqslant A(\rho,\varepsilon)$. Тоді ми наближуємо (x,T) вектором $y := e_1$ та оператором F таким, що $F(e_1) := \dfrac{T(e_1)}{\|T(e_1)\|}$, $F(e_2) := T(e_2)$. Отже,

$$\|x-y\| \leqslant 2t\delta + 1 - t \ \leqslant A(\rho,\varepsilon) \text{ та } \|T-F\| \leqslant 1 - \|T(e_1)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{1-\delta} \leqslant 2\varepsilon \leqslant A(\rho,\varepsilon).$$

Випадок II: $2t\delta + 1 - t > A(\rho,\varepsilon)$. Помітимо, що у цьому випадку $2t\delta + 1 - t > \sqrt{2\varepsilon}$, тож, (тут ми використовуємо, що $A(\rho,\varepsilon) \geqslant \sqrt{2\varepsilon}$, $\varepsilon \in (0,1/2)$ та $t \in (0,1]$),

$$\delta > \frac{\sqrt{2\varepsilon} - (1-t)}{2t} \geqslant \varepsilon'.$$

Згідно з (5.8) ми можемо застосувати Лему 5.8 для точок $T(e_1)$ та $T(e_2)$ з

$r = \dfrac{\varepsilon'}{\delta} < 1$. Тож, існують такі $z_1, z_2 \in S_Y$, що $y^*_{\alpha_0}(z_1) = y^*_{\alpha_0}(z_2) = 1$ та

$$\max\{\|T(e_1) - z_1\|, \|T(e_2) - z_2\|\} \leqslant \frac{\frac{\varepsilon'}{\delta}(1+\rho)}{1-\rho+\rho\frac{\varepsilon'}{\delta}}.$$

Позначимо $y := x/t \in S_{\ell_1^{(2)}}$ та визначимо оператор F наступним чином:

$$F(e_1) := z_1, \quad F(e_2) := z_2.$$

Тоді $\|F\| = 1$, $\|F(y)\| \geqslant y^*_{\alpha_0}(Fy) = 1$, тож F досягає своєї норми в точці y та

$$\|T - F\| \leqslant \frac{\frac{\varepsilon'}{\delta}(1+\rho)}{1-\rho+\rho\frac{\varepsilon'}{\delta}}.$$

Тож, у будь-якому випадку

$$\|x - y\| \leqslant \varepsilon \leqslant A(\rho, \varepsilon) \text{ та } \|T - F\| \leqslant \frac{(1+\rho)\frac{\varepsilon-1+t}{t\delta}}{1-\rho+\rho\frac{\varepsilon-1+t}{t\delta}}.$$

Щоб довести наше твердження, ми повинні показати, що якщо $2t\delta + 1 - t > A(\rho, \varepsilon)$, то

$$\frac{(1+\rho)\frac{\varepsilon-1+t}{t\delta}}{1-\rho+\rho\frac{\varepsilon-1+t}{t\delta}} \leqslant A(\rho, \varepsilon).$$

Позначимо $f(t, \delta) = 2t\delta + 1 - t$ та $g(t, \delta) = \dfrac{(1+\rho)\frac{\varepsilon-1+t}{t\delta}}{1-\rho+\rho\frac{\varepsilon-1+t}{t\delta}} = \dfrac{(1+\rho)(\varepsilon-1+t)}{(1-\rho)t\delta+\rho(\varepsilon-1+t)}$. Ми повинні показати, що для всіх $\delta \in [0, 1/2]$ та всіх $t \in [1-\varepsilon, 1]$ має місце нерівність

$$\min\{f(t,\delta), g(t,\delta)\} \leqslant A(\rho, \varepsilon). \tag{5.9}$$

Для будь-якого фіксованого $t \in [1-\varepsilon, 1]$ функція $f(t, \delta)$ зростає відносно δ та $g(t, \delta)$ спадає відносно δ. Тож, якщо ми знайдемо таке δ_0, що

$f(t,\delta_0) = g(t,\delta_0)$, то $\min\{f(t,\delta), g(t,\delta)\} \leqslant f(t,\delta_0)$. Позначимо $u = f(t,\delta) = 2t\delta + 1 - t$, і тоді наше рівняння $f(t,\delta) = g(t,\delta)$ перетвориться на

$$u = 2 - \frac{2(1-\rho)(u-\varepsilon)}{(t-1+\varepsilon)(1+\rho) + (u-\varepsilon)(1-\rho)}. \tag{5.10}$$

Права частина рівняння зростає, коли t зростає, тому позитивне u_t рішення рівняння (5.10) також зростає. Це означає, що ми отримаємо найбільше можливе рішення, якщо ми підставимо у нього $t = 1$. Тоді ми отримуємо рівняння, яке набагато легше розв'язати:

$$u^2 \frac{1+\rho}{2} + u\rho\varepsilon - \varepsilon(1+\rho) = 0.$$

Звідси $u = A(\rho,\varepsilon)$, тож нерівність (5.9) виконується. □

5.3.2 Оцінка знизу для $\Phi^S(\ell_1^{(2)}, Y, \varepsilon)$

Тож ми побачили, що для $X = \ell_1^{(2)}$, оцінка модуля Бішопа-Фелпса-Болобаша є трошки кращою, ніж у Теоремі 5.3. Тим не менш, розглядаючи простір $\ell_1^{(2)}$ ми можемо отримати деякі цікаві оцінки знизу для $\Phi^S(\ell_1^{(2)}, Y, \varepsilon)$. Відмітимо, що оцінки (5.4) та (5.7) дає одну і ту саму асимптотичну поведінку, коли ε прямує до 0. Наше наступне твердження дає оцінку для $\Phi^S(\ell_1^{(2)}, Y, \varepsilon)$ знизу, коли $\beta(Y) = 0$.

Теорема 5.10. *Для будь-якого банахового простору Y*

$$\Phi^S(\ell_1^{(2)}, Y, \varepsilon) \geqslant \min\{\sqrt{2\varepsilon}, 1\}.$$

Зокрема, $\Phi^S(\ell_1^{(2)}, Y, \varepsilon) = \min\{\sqrt{2\varepsilon}, 1\}$, якщо $\beta(Y) = 0$.

Доведення. Нам потрібно показати, що $\Phi^S(\ell_1^{(2)}, Y, \varepsilon) \geqslant \sqrt{2\varepsilon}$ для $\varepsilon \in (0, 1/2)$. Нерівність $\Phi^S(\ell_1^{(2)}, Y, \varepsilon) \geqslant 1$ для $\varepsilon > 1/2$ буде витікати з монотонності $\Phi^S(\ell_1^{(2)}, Y, \cdot)$. Тож для будь-якого $\varepsilon \in (0, 1/2)$ та будь-якого $\delta > 0$ ми шукаємо таку пару $(x, T) \in \Pi_\varepsilon^S(\ell_1^{(2)}, Y)$, що

$$\max\{\|x-y\|, \|T-F\|\} \geqslant \sqrt{2\varepsilon} - \delta$$

для будь-якої пари $(y, F) \in \Pi(\ell_1^{(2)}, Y)$. Зафіксуємо $\xi \in S_Y$ та $\varepsilon_0 < \varepsilon$ так, щоб $\sqrt{2\varepsilon_0} > \sqrt{2\varepsilon} - \delta$. Розглянемо оператор $T \in S_{L(\ell_1^{(2)}, Y)}$:

$$T(z_1, z_2) = (z_1 + (1 - \sqrt{2\varepsilon_0})z_2)\xi$$

та візьмемо $x = (1 - \sqrt{\varepsilon_0/2}, \sqrt{\varepsilon_0/2}) \in S_{\ell_1^{(2)}}$. Тоді $\|T(x)\| = 1 - \varepsilon_0 > 1 - \varepsilon$. Щоб наблизити пару (x, T) парою $(y, F) \in \Pi(\ell_1^{(2)}, Y)$, ми маємо лише дві можливості: або y – це екстремальна точка шару $B_{\ell_1^{(2)}}$, або ж деяка точка з множини $\operatorname{conv}\{e_1, e_2\}$, і тож F досягає норми в обох точках e_1, e_2. У першому випадку ми повинні обрати $y = (1, 0)$, і тоді $\|x - y\| = \sqrt{2\varepsilon_0} > \sqrt{2\varepsilon} - \delta$. У другому випадку $\|F - T\| \geqslant \|F(e_2) - T(e_2)\| \geqslant \|F(e_2)\| - \|T(e_2)\| = \sqrt{2\varepsilon_0} > \sqrt{2\varepsilon} - \delta$. $\square$

Наша наступна мета – дати оцінку знизу для сферичного модуля Бішопа-Фелпса-Болобаша для значень параметра ρ між $1/2$ та 1. Зафіксуємо $\rho \in [1/2, 1)$ та позначимо Y_ρ лінійний простір $\mathbb{R}^2$ з такою нормою

$$\|x\|_\rho = \max\left\{|x_1 + \left(2 - \frac{1}{\rho}\right) x_2|, |x_2 + \left(2 - \frac{1}{\rho}\right) x_1|, |x_1 - x_2|\right\}. \tag{5.11}$$

Іншими словами,

$$\|(x_1, x_2)\| = \begin{cases} |x_1 - x_2|, & \text{якщо } x_1x_2 \leqslant 0; \\ |x_1 + \left(2 - \frac{1}{\rho}\right) x_2|, & \text{якщо } x_1x_2 > 0 \text{ та } |x_1| > |x_2|; \\ |x_2 + \left(2 - \frac{1}{\rho}\right) x_1|, & \text{якщо } x_1x_2 > 0 \text{ та } |x_1| \leqslant |x_2|. \end{cases}$$

та одинична куля B_ρ простору X_ρ – це шестикутник $absdef$, де $a = (1, 0); b = (\frac{\rho}{3\rho - 1}, \frac{\rho}{3\rho - 1}); c = (0, 1); d = (-1, 0); e = (-\frac{\rho}{3\rho - 1}, \frac{\rho}{3\rho - 1})$; та $f = (0, -1)$.

Спряжений простір до Y_ρ – це $\mathbb{R}^2$ з такою нормою

$$\|x\|_\rho^* = \|(x_1, x_2)\|^* = \max\left\{|x_1|, |x_2|, \frac{\rho}{3\rho - 1}|x_1 + x_2|\right\},$$

та одинична куля B_ρ^* – це шестикутник $a^*b^*c^*d^*e^*f^*$, де $a^* = (1, 2 - \frac{1}{\rho}); b^* = \left(2 - \frac{1}{\rho}, 1\right); c^* = (-1, 1); d^* = (-1, -\left(2 - \frac{1}{\rho}\right)); e^* = (-\left(2 - \frac{1}{\rho}\right), -1)$; та $f^* = (1, -1)$. Відповідні сфери S_ρ та S_ρ^* зображені на Рис 5.1.

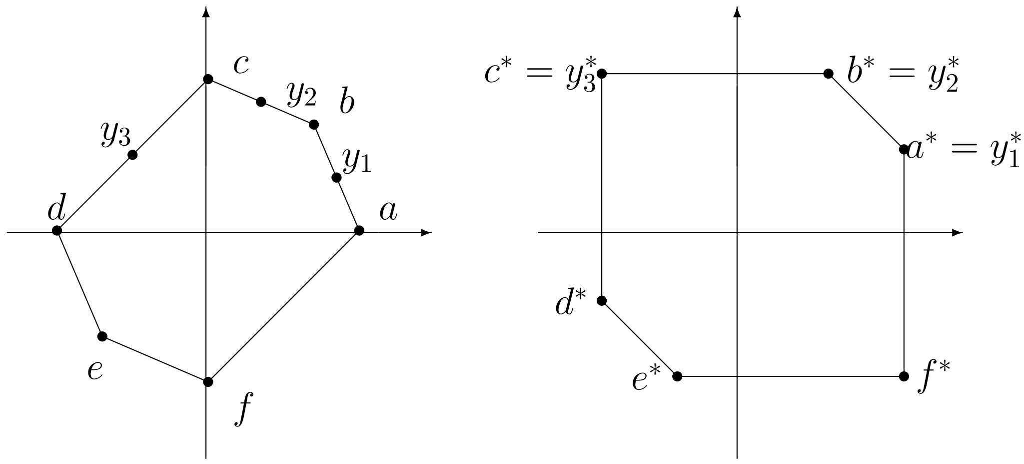

Рис 5.1 Сфери S_p та S_p^*

Твердження 5.11. *У просторі* $Y = Y_\rho$

$$\beta(Y) \leqslant \rho.$$

Доведення. Розглянемо дві множини:

$$\left\{ y_1 = \left(\frac{2\rho^2}{3\rho-1}, \frac{\rho-\rho^2}{3\rho-1} \right), y_2 = \left(\frac{\rho-\rho^2}{3\rho-1}, \frac{2\rho^2}{3\rho-1} \right), y_3 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\} \subset S_{Y_\rho}$$

та $\{y_1^* = (1, 2 - \frac{1}{\rho}), y_2^* = (2 - \frac{1}{\rho}, 1), y_3^* = (-1, 1)\} \subset S_{Y_\rho^*}$.

Тоді $\|y\| = \sup\{|y_n^*(y)| : n = 1,2,3\}$ для всіх $y \in Y_\rho$, $y_n^*(y_n) = 1$ для $n = 1,2,3$ та $|y_i^*(y_j)| \leqslant \rho$ для всіх $i \neq j$. Дійсно, $y_1^*(y_1) = \dfrac{2\rho^2 + 2\rho - 2\rho^2 - 1 + \rho}{3\rho - 1} = 1$; $y_1^*(y_2) = \dfrac{\rho - \rho^2 + 4\rho^2 - 2\rho}{3\rho - 1} = \rho$; $y_1^*(y_3) = \dfrac{-1}{2} + 1 - \dfrac{1}{2\rho} = -\dfrac{1-\rho}{2\rho} \geqslant -\rho$, тож $|y_1^*(y_3)| \leqslant \rho$ (тут виникає обмеження $\rho \geqslant 1/2$); $y_2^*(y_1) = y_1^*(y_2) = \rho$; $y_2^*(y_2) = y_1^*(y_1) = 1$; $y_2^*(y_3) = -y_1^*(y_3) \leqslant \rho$; $|y_3^*(y_1)| = \left|\dfrac{-2\rho^2 + \rho - \rho^2}{3\rho - 1}\right| = \rho$; $y_3^*(y_2) = -y_3^*(y_1) = \rho$; та нарешті $y_3^*(y_3) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$. □

Теорема 5.12. *Нехай* $\rho \in [1/2, 1)$, $0 < \varepsilon < 1$. *Тоді, у просторі* $Y = Y_\rho$

$$\Phi^S(\ell_1^{(2)}, Y, \varepsilon) \geqslant \min\left\{ \sqrt{\frac{2\rho\varepsilon}{1-\rho}}, 1 \right\}.$$

Доведення. Щоб довести наше твердження, ми повинні показати, що $\Phi^S(\ell_1^{(2)}, Y, \varepsilon) \geqslant \sqrt{\frac{2\rho\varepsilon}{1-\rho}}$ для $\varepsilon \in \left(0, \frac{1-\rho}{2\rho}\right)$. Нерівність $\Phi^S(\ell_1^{(2)}, Y, \varepsilon) \geqslant 1$ для $\varepsilon \geqslant \frac{1-\rho}{2\rho}$ буде витікати з монотонності $\Phi^S(\ell_1^{(2)}, Y, \cdot)$. Для будь-якого $\varepsilon \in \left(0, \frac{1-\rho}{2\rho}\right)$ та будь-якого $\delta > 0$ ми шукаємо таку пару $(x, T) \in \Pi_\varepsilon^S(\ell_1^{(2)}, Y)$, що

$$\max\{\|x-y\|, \|T-F\|\} \geqslant \sqrt{\frac{2\rho\varepsilon}{1-\rho}} - \delta$$

для всіх $(y, F) \in \Pi(\ell_1^{(2)}, Y)$.

Зафіксуємо таке $\varepsilon_0 < \varepsilon$, що $\sqrt{\frac{2\rho\varepsilon_0}{1-\rho}} > \sqrt{\frac{2\rho\varepsilon}{1-\rho}} - \delta$. Розглянемо точку

$$x = \left(1 - \frac{\sqrt{2\rho\varepsilon_0}}{2\sqrt{1-\rho}}, \frac{\sqrt{2\rho\varepsilon_0}}{2\sqrt{1-\rho}}\right) \in S_{\ell_1^{(2)}}$$

та оператор $T \in L(\ell_1^{(2)}, Y)$ такий, що

$$T(e_i) = \sqrt{\frac{2\rho\varepsilon_0}{1-\rho}} e_i + \left(1 - \sqrt{\frac{2\rho\varepsilon_0}{1-\rho}}\right) \cdot b,$$

де $b = \left(\frac{\rho}{3\rho-1}, \frac{\rho}{3\rho-1}\right)$ – екстремальна точка S_Y яка зображена на Рис 5.1. Відмітимо, що $\|T\| = \|T(e_1)\| = \|T(e_2)\| = 1$ та $\|T(x)\| = 1-\varepsilon_0 > 1-\varepsilon$.

Частина сфери $S_{\ell_1^{(2)}}$, що складається з точок, які мають відстань до x що менше або дорівнює $\sqrt{\frac{2\rho\varepsilon_0}{1-\rho}}$ лежить на відрізку $[e_1, e_2)$. Отже, щоб наблизити пару (x, T), ми маємо дві можливості: наблизити точку x точкою e_1, і у цьому випадку обрати $F := T$; або у якості F обрати такий оператор, який досягає норми у деякій точці з (e_1, e_2) (і отже у всіх точках $[e_1, e_2]$), і тоді ми можемо обрати $y := x$.

У першому випадку ми маємо $\|T - F\| = 0$ та $\|x - y\| = \sqrt{\frac{2\rho\varepsilon_0}{1-\rho}} > \sqrt{\frac{2\rho\varepsilon}{1-\rho}} - \delta$. У другому випадку ми покажемо, що

$$\|T - F\| = \max_i \|T(e_i) - F(e_i)\| \geqslant \sqrt{\frac{2\rho\varepsilon_0}{1-\rho}}.$$

Якщо це не так, то для $i = 1, 2$ виконується

$$\|T(e_i) - F(e_i)\| < \sqrt{\frac{2\rho\varepsilon_0}{1-\rho}} = \|T(e_i) - b\|.$$

Через те, що F досягає норми в усіх точках з $[e_1, e_2]$, відрізок $F([e_1, e_2])$ цілком лежить на одному відрізку S_Y, але це неможливо, тому що $T(e_1)$ та $T(e_2)$ лежать на різних відрізках сфери S_Y з єдиною спільною точкою b. □

5.3.3 Перервність модуля Бішопа-Фелпса-Болобаша відносно простору

З [20, Theorem 3.3] відомо, що обидві модулі Бішопа-Фелпса-Болобаша (звичайний та сферичний) для функціоналів є неперервними відносно простору X. Наслідком Теореми 5.12 є той факт, що модуль Бішопа-Фелпса-Болобаша пари просторів (X, Y) як функція від простору Y не є неперервним відносно відстані Банаха-Мазура.

Нехай X та Y – ізоморфні простори. Нагадаємо, що*відстанню Банаха-Мазура* між X та Y називається величина

$$d(X, Y) = \inf\{\|T\|\|T^{-1}\| : \quad T : X \to Y \text{ ізоморфізм}\}.$$

Послідовність банахових просторів Z_n *збігається до простору* Z *у сенсі відстані Банаха-Мазура*, якщо $d(Z_n, Z) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Очевидно, що $Y_\rho \underset{\rho\to 1}{\longrightarrow} \ell_1^{(2)}$.

Теорема 5.13. *Нехай* $\rho \in [1/2, 1)$ *та* Y_ρ *– простір з нормою, визначеною в* (5.11). *Тоді для будь-якого* $\varepsilon \in (0, 1/2)$

$$\Phi(\ell_1^{(2)}, Y_\rho, \varepsilon) \underset{\rho\to 1}{\not\longrightarrow} \Phi(\ell_1^{(2)}, \ell_1^{(2)}, \varepsilon), \quad \textit{та} \quad \Phi^S(\ell_1^{(2)}, Y_\rho, \varepsilon) \underset{\rho\to 1}{\not\longrightarrow} \Phi^S(\ell_1^{(2)}, \ell_1^{(2)}, \varepsilon).$$

Доведення. З теореми 5.3 з $\rho = 0$ ми отримуємо для $\varepsilon \in (0, 1/2)$, що

$$\Phi^S(\ell_1^{(2)}, \ell_1^{(2)}, \varepsilon) \leqslant \Phi(\ell_1^{(2)}, \ell_1^{(2)}, \varepsilon) \leqslant \sqrt{2\varepsilon} < 1.$$

Водночас, Теорема 5.12 дає, що $\Phi(\ell_1^{(2)}, Y_\rho, \varepsilon) \geqslant \Phi^S(\ell_1^{(2)}, Y_\rho, \varepsilon) \geqslant \min\left\{\sqrt{\frac{2\rho\varepsilon}{1-\rho}}, 1\right\} \underset{\rho\to 1}{\longrightarrow} 1.$ □

5.3.4 Поведінка $\Phi^S(X,Y,\varepsilon)$, коли $\varepsilon \to 0$

У підрозділі 5.3.2, за допомогою двовимірного простору Y, ми були здатні надати оцінку лише для $\rho \in [1/2, 1)$. Це не є дивним, тому що у будь-якому n-вимірному банаховому просторі з властивістю β ми маємо $\rho \geqslant \dfrac{1}{n}$ або $\rho = 0$. Нижче ми доводимо цей факт.

Твердження 5.14. *Нехай $Y^{(n)}$ – банаховий простір розмірності n з $\beta(Y^{(n)}) \leqslant \rho < \dfrac{1}{n}$. Тоді $Y^{(n)}$ ізометрично до простору $\ell_\infty^{(n)}$, тобто $\beta(Y^{(n)}) = 0$.*

Нам потрібен такий допоміжний результат.

Лема 5.15. *Нехай $Y^{(n)}$ – банаховий простір розмірності n з $\beta(Y^{(n)}) \leqslant \rho < \dfrac{1}{n}$ та $\{y_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \subset S_Y$, $\{y^*_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \subset S^*_Y$ – множини з Означення 1.2. Тоді $|\Lambda| = n$.*

Доведення. $|\Lambda| \geqslant n$, тому що $\{y^*_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ є 1-нормуючею множиною. Припустимо, що $|\Lambda| > n$. Ми покажемо, що будь-яка підмножина $\{y_{\alpha_i}\}_{i=1}^{n+1} \subset \{y_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ є лінійно незалежною.

Розглянемо відповідну лінійну комбінацію $\sum\limits_{i=1}^{n+1} a_i y_{\alpha_i}$ з $\max |a_i| = 1$ та перевіримо, що $\sum\limits_{i=1}^{n+1} a_i y_{\alpha_i} \neq 0$. Нехай $j \leqslant n+1$ – це такий номер, що $|a_j| = 1$. Тоді ми можемо оцінити:

$$\begin{aligned}\|\sum_{i=1}^{n+1} a_i y_{\alpha_i}\| &\geqslant \left| y^*_{\alpha_j}\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i y_{\alpha_i}\right)\right| \\ &= \left| a_j y^*_{\alpha_j}(y_{\alpha_j}) + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n+1} a_i y^*_{\alpha_j}(y_{\alpha_i})\right| \geqslant 1 - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n+1} |a_i|\rho > 0.\end{aligned}$$

Отже, $Y^{(n)}$ містить $n+1$ лінійно незалежних векторів. Це протиріччя завершує доведення. $\square$

Доведення Твердження 5.14. Згідно з Означенням 1.2 разом з Лемою 5.15 існують дві множини $\{y_i\}_{i=1}^n \subset S_{Y^{(n)}}$, $\{y^*_i\}_{i=1}^n \subset S^*_{Y^{(n)}}$ такі, що

$y_i^*(y_i) = 1,$

$|y_i^*(y_j)| < 1/n$ якщо $i \neq j,$

$\|y\| = \sup\{|y_i^*(y)| : i = 1, ..., n\},$ для всіх $y \in Y$.

Визначимо оператор $U : Y^{(n)} \to \ell_\infty^{(n)}$ за такою формулою:

$$U(y) := (y_1^*(y), y_2^*(y), ..., y_n^*(y)).$$

Очевидно, $\|U(y)\| = \|y\|$ для всіх $y \in Y^{(n)}$, тож U – це ізометричний оператор. Через те, що $\dim Y^{(n)} = \dim \ell_\infty^{(n)}$, оператор U є бієктивним. Це означає, що $Y^{(n)}$ – простір ізометричний до $\ell_\infty^{(n)}$, отже, $\beta(Y^{(n)}) = \beta(\ell_\infty^{(n)}) = 0$. □

Таким чином, щоб отримати всі можливі значення параметру ρ, ми повинні розглядати простори більших розмірностей. Для кожної фіксованої розмірності n зафіксуємо $\rho \in [1/n, 1)$ та позначимо $Z = Z_\rho^{(n)}$ лінійний простір $\mathbb{R}^n$ з нормою

$$\|x\| = \max\left\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|, \frac{1}{\rho n}\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right|\right\}. \tag{5.12}$$

Твердження 5.16. *Нехай $Z = Z_\rho^{(n)}$ з $n \geqslant 2$ та $\rho \in [1/n, 1)$. Тоді*

$$\beta(Z) \leqslant \rho.$$

Доведення. Розглянемо дві множини:

$$\left\{y_j = -\frac{1}{n-1+\rho n}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} e_i + e_j, \quad z = \rho\sum_{i=1}^{n} e_i\right\} \subset S_Z$$

$$\left\{y_j^* = e_j, z^* = \frac{1}{\rho n}\sum_{i=1}^{n} e_i\right\} \subset S_{Z^*}.$$

З формули (5.12) ми маємо, що підмножина $\left\{\{y_j^*\}_{i=1}^n, z^*\right\}$ є 1-нормуючою. Також,

$y_i^*(y_i) = 1, \quad |y_j^*(y_i)| = \left|-\frac{1}{n-1+\rho n}\right| \leqslant \rho, \quad y_j^*(z) = \rho, \; z^*(z) = 1, \quad z^*(y_i) = \frac{1}{n-1+\rho n} \leqslant \rho.$ □

Зауважимо, що у всіх наших оцінках $\Phi^S(X,Y,\varepsilon)$ виникає множник $\sqrt{2\varepsilon}$. Тож, щоб виміряти асимптотичну поведінку $\Phi^S(X,Y,\varepsilon)$ в нулі, зручно ввести таку характеристику

$$\Psi(X,Y) := \limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{\Phi^S(X,Y,\varepsilon)}{\sqrt{2\varepsilon}}.$$

Також визначимо величину

$$\Psi(\rho) := \sup_{Y:\beta(Y)=\rho}\sup_X \Psi(X,Y),$$

яка вимірює найгіршу можливу поведінку коло 0 модуля $\Phi^S(X,Y,\varepsilon)$, коли $\beta(Y)\leqslant\rho$. З Теореми 5.3 ми знаємо, що

$$\Psi(\rho)\leqslant\sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho}}.$$

Оцінимо $\Psi(\rho)$ знизу.

Теорема 5.17.

$$\Psi(\rho)\geqslant\max\left\{\sqrt{\frac{2\rho}{1-\rho}},1\right\}$$

для всіх значень $\rho\in(0,1)$.

Доведення. З Теореми 5.10 ми маємо, що $\Psi(\rho)\geqslant 1$. Тож, ми повинні перевірити, що $\Psi(\rho)\geqslant\sqrt{\dfrac{2\rho}{1-\rho}}$. Щоб оцінити $\Psi(\rho)$ знизу для маленьких значень ε, ми розглянемо пару просторів $(\ell_1^{(2)}, Z_\rho^{(n)})$. Позначимо $z^* = \dfrac{1}{\rho n}\sum\limits_{i=1}^{n} e_i$ та $\Gamma=\{x\in S_Z : z^*(x)=1\}$. Розглянемо точку $x=(1-\delta,\delta)$ та такий оператор T:

$$T(e_1)=\rho\sum_{i=1}^{n}e_i \text{ та } T(e_2)=t\sum_{i=1}^{k}e_i+\sum_{i=k+1}^{n}e_i,$$

з $k=\dfrac{1}{2}n(1-\rho)+1+\theta\in\mathbb{N}$ – найближчим натуральним числом до $\dfrac{1}{2}n(1-\rho)+1$ (тож, $|\theta|\leqslant 1/2$), та

$$t=-1+\frac{4+4\theta-2n\rho\dfrac{\varepsilon_0}{\delta}}{n-n\rho+2+2\theta}\,, \tag{5.13}$$

де $\delta > 0$ буде визначено пізніше, $\varepsilon_0 < \varepsilon$. Тоді $z^*(T(x)) = 1 - \varepsilon_0 > 1 - \varepsilon$, тож $(x, T) \in \Pi_\varepsilon^S(\ell_1^{(2)}, Z_\rho^{(n)})$. Тепер ми шукаємо найкраще наближення (x, T) парою $(y, F) \in \Pi(\ell_1^{(2)}, Z_\rho^{(n)})$. Як завжди, у нас є два варіанти:

I. Ми можемо наблизити точку x точкою e_1 і тоді можемо взяти $F = T$. У цьому випадку ми маємо

$$\|x - y\| = 2\delta. \tag{5.14}$$

II. Ми можемо обрати такий оператор F, який досягає норми на всьому відрізку $[e_1, e_2]$, і тоді можемо взяти $y = x$. У цьому випадку $F(e_1)$ та $F(e_2)$ повинні лежати на одній грані. Крім того, якщо $F(e_1) \notin \Gamma$ для маленьких значень ε, ми маємо $\|T(e_1) - F(e_1)\| = 1 - \rho > \sqrt{2\varepsilon}\sqrt{\dfrac{2\rho}{1-\rho}}$. Щоб отримати найкращу оцінку, необхідно, щоб $F(e_1) \in \Gamma$ і, таким чином, $F(e_2) \in \Gamma$. Тоді

$$\|T - F\| \geqslant \|T(e_2) - F(e_2)\| \geqslant \inf_{h \in \Gamma} \|T(e_2) - h\|.$$

Оцінимо відстань від $T(e_2)$ до грані Γ.

Якщо $h = \sum_{i=1}^{n} h_i \in \Gamma$, тоді $|h_i| \leqslant 1$ та $z^*(h) = \dfrac{1}{\rho n} \sum_{i=1}^{n} h_i = 1$. Отже, $\sum_{i=1}^{k} h_i \geqslant \rho n - (n-k)$, та

$$\max h_i \geqslant \frac{1}{k}(\rho n - (n-k)) = -1 + \frac{4 + 4\theta}{n(1-\rho) + 2 + 2\theta}.$$

Таким чином,

$$\|T(e_2) - h\| \geqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant k} |t - h_i| \geqslant |t - \max h_i| = \frac{2n\rho\frac{\varepsilon_0}{\delta}}{n(1-\rho) + 2 + 2\theta}. \tag{5.15}$$

Тепер визначимо δ як позитивне рішення рівняння:

$$2\delta = \frac{2n\rho\frac{\varepsilon_0}{\delta}}{n(1-\rho) + 2 + 2\theta}.$$

Тоді $\delta = \dfrac{1}{2}\sqrt{2\varepsilon_0}\sqrt{\dfrac{2\rho}{1 - \rho + (2+\theta)/n}}$. Позначимо $C(\varepsilon, \rho, n, \theta) := \sqrt{2\varepsilon}\sqrt{\dfrac{2\rho}{1 - \rho + (2+\theta)/n}}$ та $C_0 = C(\varepsilon_0, \rho, n, \theta)$. З таким значенням δ оцінка (5.14) дає нам, що

$$\|x - y\| = 2\delta = C_0,$$

та оцінка (5.15) дає нам, що

$$\|T-F\| \geqslant \frac{2n\rho\frac{\varepsilon_0}{\delta}}{n(1-\rho)+2+2\theta} = C_0.$$

Таким чином, ми показали, що $\Phi^S(\ell_1^{(2)}, Z_\rho^{(n)}, \varepsilon) \geqslant C_0$. Через те, що ε_0 можна вибрати довільно близько до ε ми маємо, що $\Phi^S(\ell_1^{(2)}, Z_\rho^{(n)}, \varepsilon) \geqslant C(\varepsilon, \rho, n, \tilde{\theta})$ з $\tilde{\theta} \in [-1/2, 1/2]$. Отже, ми отримали, що $\Psi(\ell_1^{(2)}, Z_\rho^{(n)}) \geqslant \sqrt{\dfrac{2\rho}{1-\rho+(2+\tilde{\theta})/n}}$. Коли $n \to \infty$, ми отримуємо бажану оцінку $\Psi(\rho) \geqslant \sqrt{\dfrac{2\rho}{1-\rho}}$. □

5.4 Модифікований модуль Бішопа-Фелпса-Болоба́ша

У підрозділі 2.3 ми ввели поняття модифікованого модуля Бішопа-Фелпса-Болобаша для функціоналів та дослідили точність його оцінки. У цьому розділі ми введемо і дослідимо аналогічну характеристику для операторів.

Означення 5.18. *Модифікованим модулем Бішопа-Фелпса-Болобаша* (*модифікованим сферичним модулем Бішопа-Фелпса-Болобаша*) для пари просторів (X, Y) називається функція $\widetilde{\Phi}(X, Y, \cdot) : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ ($\widetilde{\Phi}^S(X, Y, \cdot) : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^+$), значення якої у точці $\varepsilon \in (0,1)$ визначається як інфімум тих $\delta > 0$, що для будь-якої пари $(x, T) \in B_X \times B_{L(X,Y)}$ ($(x, T) \in S_X \times S_{L(X,Y)}$ відповідно) з $\|Tx\| > 1 - \varepsilon$, існує пара $(y, F) \in S_X \times L(X, Y)$ з $Fy = \|F\|$, $\|x - y\| < \delta$ та $\|T - F\| < \delta$.

За аналогією з Теоремою 5.3 ми доводимо такий результат.

Теорема 5.19. *Нехай X та Y – банахові простори, Y має властивість β з параметром ρ. Тоді пара (X, Y) має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша, та для будь-якого $\varepsilon \in (0,1)$*

$$\widetilde{\Phi}^S(X, Y, \varepsilon) \leqslant \widetilde{\Phi}(X, Y, \varepsilon) \leqslant \min\left\{\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho}}, 1\right\}. \tag{5.16}$$

Доведення майже повторює доведення Теореми 5.3, але воно має деякі модифікації, і ми надаємо його тут для чіткості.

Доведення. Розглянемо $T \in B_{L(X,Y)}$ та $x \in B_X$ такі, що $\|T(x)\| > 1-\varepsilon$ з $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{1-\rho}{1+\rho}\right)$. Через те, що Y має властивість β, існує $\alpha_0 \in \Lambda$, що $|y^*_{\alpha_0}(T(x))| > 1-\varepsilon$. Таким чином, якщо ми позначимо $x^* = T^*(y^*_{\alpha_0})$, ми маємо $x \in B_X, x^* \in B_{X^*}$ з $x^*(x) > 1-\varepsilon$. Ми можемо застосувати формулу (2.15) з Леми 2.17, для будь-якого значення $k \in (0,1)$. Для довільного $\tilde{k} \in [\varepsilon, 1)$ візьмемо

$$k = \frac{\tilde{k}(\|x^*\| - (1-\varepsilon))}{\varepsilon\|x^*\|}.$$

Нерівність $\|x^*\| \geqslant x^*(x) > 1-\varepsilon$ означає, що $k > 0$. З іншого боку, $k = \tilde{k}\left(\dfrac{1}{\varepsilon} - \dfrac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon\|x^*\|}\right) \leqslant \tilde{k}\left(\dfrac{1}{\varepsilon} - \dfrac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon}\right) = \tilde{k} < 1$, тобто, для цього k ми можемо знайти $\zeta^* \in X^*$ та $z \in S_X$ такі, що існують $z^* \in X^*$ та $z \in S_X$ з $|z^*(z)| = \|z^*\|$ та

$$\|x - z\| < \frac{1 - \dfrac{1-\varepsilon}{\|x^*\|}}{k} \text{ та } \|z^* - x^*\| < k\|x^*\|.$$

Для дійсного числа η, для якого виконується нерівність $\eta > \dfrac{\rho(k\|x^*\| + \|x^*\| \cdot |1 - \|z^*\||)}{\|z^*\|(1-\rho)}$ ми визначимо оператор $S \in L(X,Y)$ за такою формулою:

$$S(t) = \|z^*\|T(t) + [(1+\eta)z^*(t) - \|z^*\|T^*(y^*_{\alpha_0})(t)]y_{\alpha_0}.$$

Тепер оцінимо S. Нагадаємо, що ми позначили $x^* = T^*(y^*_{\alpha_0})$. Таким чином, для всіх $y^* \in Y^*$,

$$S^*(y^*) = \|z^*\|T^*(y^*) + [(1+\eta)z^* - \|z^*\|x^*]y^*(y_{\alpha_0}).$$

Через те, що множина $\{y^*_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ – 1-нормуюча для Y, то $\|S\| = \sup_\alpha\|S^*y^*_\alpha\|$.

$$\|S\| \geqslant \|S^*(y^*_{\alpha_0})\| = (1+\eta)\|z^*\|.$$

Для $\alpha \neq \alpha_0$ ми маємо

$$\|S^*(y^*_\alpha)\| \leqslant \|z^*\| + \rho[\|z^* - x^*\| + \|x^*\| \cdot |1 - \|z^*\|| + \eta\|z^*\|] \leqslant (1+\eta)\|z^*\|.$$

Таким чином,

$$\|S\| = \|S^*(y^*_{\alpha_0})\| = \|z^*\| = |y^*_{\alpha_0}(S(z))| \leqslant \|S(z)\| \leqslant \|S\|.$$

Отже, ми маємо, що $\|S\| = \|S(z)\| = (1+\eta)\|z^*\|$.

Тепер оцінимо $\|S-T\|$.

$$\|S-T\| = \sup_\alpha \|S^*(y^*_\alpha) - T^*(y^*_\alpha)\|.$$

Помітимо, що

$$|1 - \|z^*\|| \leqslant \|x^* - z^*\| + 1 - \|x^*\| < k\|x^*\| + 1 - \|x^*\|.$$

Для $\alpha = \alpha_0$ ми отримуємо

$$\begin{aligned}\|S^*(y^*_{\alpha_0}) - T^*(y^*_{\alpha_0})\| &= \|(1+\eta)z^* - x^*\| \leqslant \|z^* - x^*\| + \eta\|z^*\| \\ &< \frac{k\|x^*\|(1+\rho\|x^*\|) + \rho\|x^*\|(1-\|x^*\|)}{1-\rho}.\end{aligned}$$

Тоді $\|x - z\| < \dfrac{\varepsilon}{\tilde{k}}$ та

$$\begin{aligned}\|S^*(y^*_{\alpha_0}) - T^*(y^*_{\alpha_0})\| &< \frac{\tilde{k}\dfrac{\|x^*\| - (1-\varepsilon)}{\varepsilon}(1+\rho\|x^*\|) + \rho\|x^*\|(1-\|x^*\|)}{1-\rho} \\ &\leqslant \frac{\tilde{k}(1+\rho)}{1-\rho}.\end{aligned}$$

Остання нерівність виконується, тому що, якщо ми розглянемо функцію

$$f(t) = \frac{\tilde{k}\dfrac{t-(1-\varepsilon)}{\varepsilon}(1+\rho t) + \rho t(1-t)}{1-\rho}$$

з $t \in (1-\varepsilon, 1)$, то $f' \geqslant 0$, тож з монотонності випливає, що максимальне значення функції – це $f(1) = \dfrac{\tilde{k}(1+\rho)}{1-\rho}$. Для $\alpha \neq \alpha_0$ ми маємо

$$\begin{aligned}\|S^*(y^*_\alpha) - T^*(y^*_\alpha)\| &\leqslant |1 - \|z^*\|| + \rho(\|z^* - x^*\| + \|x^*\| \cdot |1 - \|z^*\|| + \eta\|z^*\|) \\ &< k\|x^*\| + 1 - \|x^*\| + \frac{\rho}{1-\rho}[k\|x^*\| - \rho k\|x^*\| + \|x^*\| \cdot |1 - \|z^*\|| \\ &- \rho\|x^*\| \cdot |1 - \|z^*\|| + \rho k\|x^*\| + \rho\|x^*\| \cdot |1 - \|z^*\||] \\ &\leqslant k\|x^*\| + 1 - \|x^*\| + \frac{\rho}{1-\rho}[k\|x^*\| + \|x^*\| \cdot (k\|x^*\| + 1 - \|x^*\|)].\end{aligned}$$

Підставляючи значення k ми отримуємо

$$\|S^*(y^*_\alpha) - T^*(y^*_\alpha)\| < \frac{1-\rho(1-\|x^*\|)}{1-\rho}\left[\tilde{k}\frac{\|x^*\|-(1-\varepsilon)}{\varepsilon} + 1 - \|x^*\|\right] + \frac{\rho\tilde{k}}{1-\rho}\frac{\|x^*\|-(1-\varepsilon)}{\varepsilon} \leqslant \frac{\tilde{k}(1+\rho)}{1-\rho}.$$

Знов, остання нерівність виконується тому, що функція

$$f_1(t) = \frac{1-\rho(1-t)}{1-\rho}\left[\tilde{k}\frac{t-(1-\varepsilon)}{\varepsilon} + 1 - t\right] + \frac{\rho\tilde{k}}{1-\rho}\frac{t-(1-\varepsilon)}{\varepsilon}$$

є неспадною на $(1-\varepsilon, 1)$. Таким чином, $\|T - S\| \leqslant \dfrac{\tilde{k}(1+\rho)}{1-\rho}$.

Підставимо $\tilde{k} = \sqrt{\dfrac{\varepsilon(1-\rho)}{1+\rho}}$ (тут нам потрібно, що $\varepsilon < \dfrac{1+\rho}{1-\rho}$, і це виконується для всіх $\varepsilon \in (0,1)$). Тоді ми отримуємо

$$\max\{\|z - x\|, \|T - S\|\} \leqslant \sqrt{\frac{\varepsilon(1+\rho)}{1-\rho}}.$$

Нарешті, якщо $\varepsilon \geqslant \dfrac{1-\rho}{1+\rho}$, ми завжди можемо наблизити (x, T) тією ж самою точкою та нульовим оператором, тож $\max\{\|z-x\|, \|T-S\|\} \leqslant 1$. □

З цієї теореми випливає, що якщо $\beta(Y) = 0$, тоді $\widetilde{\Phi}^S(X, Y, \varepsilon) \leqslant \widetilde{\Phi}(X, Y, \varepsilon) \leqslant \sqrt{\varepsilon}$. Ми збираємось показати, що ця оцінка є точною для простору $X = \ell_1^{(2)}, Y = \mathbb{R}$.

Теорема 5.20. $\widetilde{\Phi}^S(\ell_1^{(2)}, \mathbb{R}, \varepsilon) = \widetilde{\Phi}(\ell_1^{(2)}, \mathbb{R}, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$, $\varepsilon \in (0,1)$.

Доведення. Ми повинні показати, що для будь-якого $0 < \varepsilon < 1$ і для будь-якого $\delta > 0$ існує така пара (x, x^*) з $\Pi^S_\varepsilon(\ell_1^{(2)}, \mathbb{R})$, що для будь-якої пари $(y, y^*) \in S_{\ell_1^{(2)}} \times \ell_\infty^{(2)}$ з $|y^*(y)| = \|y^*\|$ виконується

$$\max\{\|x - y\|, \|x^* - y^*\|\} \geqslant \sqrt{\varepsilon} - \delta. \tag{5.17}$$

Зафіксуємо $\varepsilon_0 < \varepsilon$ так, що $\sqrt{\varepsilon_0} > \sqrt{\varepsilon} - \delta$. Розглянемо точку $x := \left(1 - \dfrac{\sqrt{\varepsilon_0}}{2}\right)e_1 + \left(\dfrac{\sqrt{\varepsilon_0}}{2}\right)e_2$, та функціонал $x^*(z) := z_1 + (1 - 2\sqrt{\varepsilon_0})z_2$. Помітимо, що $x^*(x) = 1 - \varepsilon_0 > 1 - \varepsilon$.

Розглянемо множину U тих $y \in S_X$, що $\|x - y\| < \sqrt{\varepsilon_0}$. U – це перетин S_X з відкритим шаром радіуса $\sqrt{\varepsilon_0}$ з центром у x. Через те, що $\|x - e_1\| =$

$\sqrt{\varepsilon_0}$, та $\|x - e_2\| = 2 - \sqrt{\varepsilon_0} \geqslant \sqrt{\varepsilon_0}$, ми маємо, що $U \subset]e_1, e_2[$, тож для кожного $y = ae_1 + be_2 \in U$ виконується, що $a > 0$ та $b > 0$.

Припустимо, що $|y^*(y)| = \|y^*\|$ для деякого $y \in U$ та $\|x^* - y^*\| \leqslant \sqrt{\varepsilon_0}$. Тоді ми вимушені брати $y^* = (y^*(e_1), y^*(e_2))$, де $|y^*(e_1)| = |y^*(e_2)|$ та $y^*(e_1) \cdot y^*(e_2) \geqslant 0$. Зауважимо, що

$$|x^*(e_1) - y^*(e_1)| = |1 - y^*(e_1)| \leqslant \|x^* - y^*\| \leqslant \sqrt{\varepsilon} \Rightarrow y^*(e_1) \geqslant 1 - \sqrt{\varepsilon_0},$$

$$|x^*(e_2) - y^*(e_2)| = |1 - 2\sqrt{\varepsilon_0} - y^*(e_2)| \leqslant \|x^* - y^*\| \leqslant \sqrt{\varepsilon_0} \Rightarrow y^*(e_2) \leqslant 1 - \sqrt{\varepsilon_0}.$$

Тоді $y^* = (1 - \sqrt{\varepsilon_0}, 1 - \sqrt{\varepsilon_0})$, тож $\|x^* - y^*\| = \sqrt{\varepsilon_0} > \sqrt{\varepsilon} - \delta$. Звідси випливає, що нерівність (5.17) виконується, як нам і потрібно. □

Діючи таким самим чином, розглядаючи простір $Y = Y_\rho$, ми можемо отримати оцінку знизу, яка майже збігається з оцінкою (5.16) зверху для значень ρ близьких до 1.

Теорема 5.21. *Нехай $\rho \in [1/2, 1)$, $0 < \varepsilon < 1$. Тоді у просторі $Y = Y_\rho$*

$$\widetilde{\Phi}^S(\ell_1^{(2)}, Y, \varepsilon) \geqslant \min\left\{\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\frac{2\rho}{1-\rho}}, 1\right\}.$$

Ми хочемо завершити цю главу навівши одне природне питання, яке є невирішеним, хоча і не виглядає складним.

Питання 5.22. *Чи є правдою, що $\Phi^S(X, \mathbb{R}, \varepsilon) \leqslant \min\{\sqrt{2\varepsilon}, 1\}$ для всіх банахових просторів X?*

Щоб пояснити, що ми маємо на увазі, нагадаємо, що оцінка для звичайного модуля Бішопа-Фелпса-Болобаша

$$\Phi_X^S(\varepsilon) \leqslant \sqrt{2\varepsilon} \tag{5.18}$$

виконується для всіх X. Іншими словами, для будь-якої пари $(x, x^*) \in S_X \times S_{X^*}$ з $x^*(x) > 1 - \varepsilon$, існує пара $(y, y^*) \in S_X \times S_{X^*}$ з $y^*(y) = 1$, що $\max\{\|x - y\| < \sqrt{2\varepsilon}, \|x^* - y^*\|\} < \sqrt{2\varepsilon}$.

Якщо ми розглянемо $Y = \mathbb{R}$ у означенні $\Phi^S(X, Y, \varepsilon)$, єдина відмінність з $\Phi_X^S(\varepsilon)$ полягає в тому, що під досягненням норми ми розуміємо $|y^*(y)| = 1$, а не $y^*(y) = 1$. Тобто у випадку $\Phi^S(X, \mathbb{R}, \varepsilon)$ ми маємо більше можливостей наближати $(x, x^*) \in S_X \times S_{X^*}$ з $x^*(x) > 1 - \varepsilon$:

$$(y, y^*) \in S_X \times S_{X^*} \, \text{з} \, y^*(y) = 1 \, \text{або} \, y^*(y) = -1.$$

Оцінка (5.18) є точною для двовимірного простору ℓ_1:

$$\Phi^S_{\ell_1^{(2)}}(\varepsilon) = \sqrt{2\varepsilon}, \tag{5.19}$$

але, як ми показали у Теоремі 5.10

$$\Phi^S(\ell_1^{(2)}, \mathbb{R}, \varepsilon) = \min\{\sqrt{2\varepsilon}, 1\}. \tag{5.20}$$

Оцінки (5.19) та (5.20) збігаються для $\varepsilon \in (0, 1/2)$, але для більших значень ε мають істотну різницю. Ми не знаємо чи оцінка $\Phi^S(X, \mathbb{R}, \varepsilon) \leqslant \min\{\sqrt{2\varepsilon}, 1\}$ виконується для всіх просторів X.

До речі, у всіх відомих нам прикладах ми були здатні оцінити $\Phi^S(X, Y, \varepsilon)$ зверху одиницею. Тож ми не знаємо, чи можна покращити Теорему 5.3, щоб мати оцінку

$$\Phi^S(X, Y, \varepsilon) \leqslant \min\left\{\sqrt{2\varepsilon}\sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho}},\ 1\right\}.$$

5.5 Висновки до розділу 5

У цьому розділі ми ввели поняття модулів Бішопа-Фелпса-Болобаша для операторів. Ми дослідили випадок, коли оператори діють у простір з властивістю β, а саме, ми отримали кількісну версію теореми Акости, Арона, Гарсії та Маестро, що якщо простір Y має властивість β, то пара просторів (X, Y) мають властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для будь-якого банахового простору X. По аналогії з модулем Бішопа-Фелпса-Болобаша для лінійних функціоналів ми досліджували звичайний модуль $\Phi(X, Y, \varepsilon)$, сферичний модуль $\Phi^S(X, Y, \varepsilon)$, модифікований модуль $\widetilde{\Phi}(X, Y, \varepsilon)$ та сферичний модифікований модуль $\widetilde{\Phi}^S(X, Y, \varepsilon)$. Також у цьому розділі ми дослідили деякі властивості просторів, які мають властивість β та навели приклади просторів різних розмірностей з цією властивістю. Твердження 5.14 встановлює зв'язок між розмірністю простору та допустимими значеннями параметру ρ.

До основних результатів цього розділу належать:

- Теорема 5.3, в якій ми отримали верхню границю для $\Phi(X, Y, \varepsilon)$ та $\Phi^S(X, Y, \varepsilon)$.
- Теорема 5.3, в якій ми покращили оцінку для $\Phi^S(X, Y, \varepsilon)$ для випадку, коли простір X є рівномірно неквадратним.
- Теорема 5.10 та Теорема 5.12, в якій ми оцінили $\Phi^S(\ell_1^{(2)}, Y, \varepsilon)$ знизу і, таким чином, показали, що оцінка зверху не є дуже далекою від точної.
- Теорема 5.17, в якій ми виміряли найгіршу можливу поведінку біля $\varepsilon = 0$ модуля $\Phi^S(X, Y, \varepsilon)$.
- Теорема 5.13, в якій ми встановили, що $\Phi(X, Y, \varepsilon)$ не є неперервною функцією відносно простору Y.
- Теорема 5.19, в якій ми отримали верхню границю для $\widetilde{\Phi}(X, Y, \varepsilon)$ та $\widetilde{\Phi}^S(X, Y, \varepsilon)$.

Результати досліджень даного розділу наведено в публікації [45].

ВИСНОВКИ ДО ДИСЕРТАЦІЇ

Дисертаційна робота присвячена властивості Бішопа-Фелпса-Болобаша та її зв'язку з геометричними властивостями банахових просторів. У першому розділі ми зробили огляд відомих результатів. У другому розділі ми дослідили деякі властивості параметра рівномірної неквадратності та встановили зв'язок з іншими характеристиками рівномірно неквадратних просторів. Ми отримали кількісну версію теореми, що рівномірно неквадратні простори не можуть мати максимальне можливе значення модуля Бішопа-Фелпса-Болобаша. Також ми ввели означення модифікованих модулів Бішопа-Фелпса-Болобаша для функціоналів, отримали для них верхню границю, а також показали, що на відміну від звичайного модуля, оцінка зверху залишається точною в деяких рівномірно неквадратних просторах. У третьому розділі ми розглянули два поняття досягнення норми для ліпшицевих функцій: досягнення норми у строгому сенсі та досягнення норми за напрямком. Ми ввели властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для ліпшицевих функцій та довели аналог теореми Бішопа-Фелпса-Болобаша для рівномірно опуклих просторів. У четвертому розділі ми ввели нову властивість банахових просторів – ACK структуру – та показали, що якщо простір Y має таку структуру, то пара просторів (X, Y) має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для асплундових операторів. Далі ми навели приклади просторів, які мають структуру ACK. В останньому, п'ятому, розділі ми ввели поняття модулів Бішопа-Фелпса-Болобаша для операторів. Ми отримали оцінки зверху і знизу для модулів у випадку, коли оператори діють у простір з властивістю β Лінденштрауса.

У дисертації отримані наступні нові результати:

– Отримана оцінка для сферичного модуля Бішопа-Фелпса-Болобаша через параметр рівномірної неквадратності.

– Доведено, що модуль Бішопа-Фелпса-Болобаша не виражається через параметр рівномірної неквадратності.

- Введено поняття модифікованих модулів Бішопа-Фелпса-Болобаша та отримана точна оцінка зверху.
- Наведені приклади рівномірно неквадратних просторів, у яких оцінка для модифікованого модуля Бішопа-Фелпса-Болобаша залишається точною.
- Наведено приклад, коли множина ліпшицевих функцій, які досягають норми у строгому сенсі не є щільною у просторі ліпшицевих функцій.
- Введено властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для ліпшицевих функцій у сенсі досягнення норми за напрямком.
- Доведено, що рівномірно опуклі простори мають властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для ліпшицевих функцій.
- Введена властивість АСК та наведені приклади просторів, які мають цю властивість, та просторів, які не мають цієї властивості.
- Доведено, що якщо простір Y має АСК структуру, то для будь-якого простору X пара (X, Y) має властивість Бішопа-Фелпса-Болобаша для асплундових операторів.
- Доведено, що якщо Y має структуру АСК з параметром ρ, то простір $C(K, Y)$ має структуру АСК з тим самим параметром.
- Встановлено, що структура АСК зберігається при операції $\bigoplus_\infty$ між просторами.
- Введено поняття модулів Бішопа-Фелпса-Болобаша для операторів, отримані оцінки зверху для цих модулів, коли простір, у який діють оператори, має властивість β та виконано дослідження цих оцінок на точність.

Всі основні результати дисертації наведені з повними і строгими математичними доведеннями. Отримані результати мають теоретичний характер та можуть бути використані у функціональному аналізі, теорії операторів, та при роботі з ліпшицевими функціями.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ;

1. Acosta, M.D.: Norm attaining operators into $L_1(\mu)$. Contemp. Math. 232, 1–11 (1999)
2. Acosta, M.D., Aron, R. M., Garcia, D., Maestre, M.: The Bishop-Phelps-Bollobás theorem for operators. J. Funct. Anal. 254 (11), 2780–2799 (2008)
3. Acosta, M.D., Becerra-Guerrero, J., Choi, Y.S., Ciesielski, M., Kim, S.K., Lee, H.J., Lourenco, L., Martín, M.: Bishop-Phelps-Bollobás property for operators between spaces of continuous functions. Nonlinear Anal. 95, 323–332 (2014)
4. Acosta, M.D., Becerra-Guerrero, J., García, D., Kim, S.K., Maestre, M.: Bishop-Phelps-Bollobás property for certain spaces of operators. J. Math. Anal. Appl. 414(2), 532–545 (2014)
5. Acosta, M.D., Becerra-Guerrero, J., García D., Kim, S.K., Maestre, M.: The Bishop-Phelps-Bollobás property: a finite-dimensional approach. Publ. Res. Inst. Math. Sci. 51, 173–190 (2015)
6. Acosta, M.D., The Bishop-Phelps-Bollobás property for operators on $C(K)$. Banach J. Math. Anal. 10(2), 307–319 (2016)
7. Acosta, M.D., Garcia, D., Kim, S.K., Maestre, M.: The Bishop-Phelps-Bollobás property for operators from c_0 into some Banach spaces. J. Math. Anal. Appl. 445(2), 1188–1199 (2017)
8. Aguirre, F.J.: Norm-attaining operators into strictly convex Banach spaces. J. Math. Anal. Appl. 222, 431–437 (1998)
9. Aron, R.M., Choi, Y.S., Garcia, D., Maestre, M.: The Bishop-Phelps-Bollobás Theorem for $L(L_1(\mu), L_\infty[0,1])$. Adv. Math. 228, 617–628 (2011)
10. Aron, R.M., Cascales, B., Kozhushkina, O.: The Bishop-Phelps-Bollobás theorem and Asplund operators. Proc. Amer. Math. Soc. 139(10), 3553–3560 (2011)

11. Asplund, E.: Fréchet differentiability of convex functions, Acta Math. 121 (1968), 31–47.

12. Baronti, M., Casini, E., Papini, P.L.: Triangles inscribed in a semicircle, in Minkowski planes, and in normed spaces. J. Math. Anal. Appl. 252, 124–146 (2000)

13. Bishop, E., Phelps, R.R.: A proof that every Banach space is subreflexive. Bull. Amer. Math. Soc. 67, 97–98 (1961)

14. Bollobás, B.: An extension to the theorem of Bishop and Phelps. Bull. London Math. Soc. 2, 181–182 (1970)

15. Bourgain, J.: Dentability and the Bishop-Phelps property. Israel J. Math. 28, 265–271 (1977)

16. Cascales, B., Kadets, V., Guirao, A. J.: A Bishop-Phelps-Bollobás type theorem for uniform algebras. Advances in Mathematics. 240, 370–382 (2013)

17. Cascales, B., Kadets, V., Guirao, A. J., Soloviova, M.: Γ-flatness and Bishop-Phelps-Bollobás type theorems for operators. J. Funct. Anal. 274 (3), 863–888 (2018)

18. Chica, M., Kadets, V., Martin, M., Moreno-Pulido S., Ramlba-Barreno F.: Bishop-Phelps-Bollobás moduli of a Banach space. J. Math. Anal. Appl. 412, 697 – 719 (2014)

19. Chica, M., Kadets, V., Martin, M., Meri, J., Soloviova, M.: Two refinements of the Bishop-Phelps-Bollobás modulus. Banach J. Math. Anal. 9 (4), 296–315 (2015)

20. Chica, M. ,Kadets, V., Martín, M. , Merí, J.: Further Properties of the Bishop-Phelps-Bollobás Moduli. Mediterr. J. Math. 13(5), 3173–3183 (2016)

21. Choi, Y.S., Kim, S.K.: The Bishop-Phelps-Bollobás theorem for operators from $L_1(\mu)$ to Banach spaces with the Radon-Nikodým property. J. Funct. Anal. 261, 1446–1456 (2011)

22. Choi, Y.S., Kim, S.K., Lee, H. J., Martín, M.: The Bishop-Phelps-Bollobás theorem for operators on $L_1(\mu)$. J. Funct. Anal. 267, 214–242 (2014)

23. Choi, Y.S., Kim, S.K., Lee, H. J., Martín, M.: On Banach spaces with the approximate hyperplane series property. Banach J. Math. Anal. 9(4), 243–258 (2015)

24. Dantas, S., Kim, S.K., Lee, H. J.: The Bishop-Phelps-Bollobás point property. J. Math. Anal. Appl. 444, 1739–1751 (2016)

25. Dantas, S., García, D., Maestre, M., Martín, M.: The Bishop-Phelps-Bollobás property for compact operators. Canad. J. Math. 70, 53–73 (2018)

26. Diestel, J.: Geometry of Banach spaces. Lecture notes in Math. Springer-Verlag, Berlin (1975)

27. Finet, C., Payá, R.: Norm attaining operators from L_1 into L_∞. Israel J. Math. 108 , 139–143 (1998)

28. Godefroy, G.: On norm attaining Lipschitz maps between Banach spaces. Pure Appl. Funct. Anal. 1(1), 39–46 (2016)

29. Gowers, W.T.: Symmetric block bases of sequences with large average growth. Israel J. Math. 69, 129–149 (1990)

30. Iwanik, A.: Norm attaining operators on Lebesgue spaces. Pacific J. Math. 83, 381–386 (1979)

31. Iwanik, A.: On norm-attaining operators acting from $L_1(\mu)$ to $C(S)$. Rend. Circ. Mat. Palermo. 2, 147–152 (1982)

32. James, R.C.: Characterizations of reflexivity. Studia Math. 23, 205–216 (1964)

33. James, R.C.: Reflexivity and the sup of linear functionals. Israel J. Math. 13 , 289–300 (1972)

34. James, R.C.: Uniformly non-square Banach spaces. Ann. Math. 80, 542–550 (1964)

35. Johnson, J., Wolfe, J.: Norm attaining operators. Studia Math. 65, 7–19 (1979)

36. Johnson, J., Wolfe, J.: Norm attaining operators and simultaneously continuous retractions. Proc.Amer. Math. Soc. 86, 609–612 (1982)

37. Komuro, N., Saito, K.S., Tanaka, R.: On the class of Banach spaces with James Constant $\sqrt{2}$: Part I. Math. Nachr. 289, 1005–1020 (2016)

38. Komuro, N., Saito, K.S., Tanaka, R.: On the Class of Banach Spaces with James Constant $\sqrt{2}$: Part II. Mediterr. J. Math. 13(6), 4039-–4061 (2016)

39. Kato, M., Maligranda, L., Takahashi, Y.: On James and Jordan-von Neumann constants and the normal structure coefficient of Banach spaces. Studia Math. 144, 275–295 (2001)

40. Kadets, V., Soloviova, M.: A modified Bishop-Phelps-Bollobás theorem and its sharpness. Matematychni Studii. 44 (1), 84–88 (2015)

41. Kadets, V., Soloviova, M. Bishop-Phelps-Bollobás theorem for Lipschitz functionals in uniformly convex Banach spaces. In: Book of Abstracts of III International Conference “Analysis and mathematical physics”, Kharkiv, p. 24 (2015)

42. Kadets, V., Martin, M., Soloviova, M.: Possible analogues of Bishop-Phelps and Bishop-Phelps-Bollobás theorems for Lipschitz functionals. In: Workshop on Banach spaces Granada 2015 on the occasion of the 60th birthday of Rafael Paya, Salobrena, pp. 10–12 (2015)

43. Kadets, V., Soloviova, M.: Quantitative versions of the Bishop-Phelps-Bollobás theorem. In: Book of Abstracts of International Conference in

Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach, Lviv, p. 30 (2017)

44. Kadets, V., Martin, M., Soloviova, M.: Norm-attaining Lipschitz functionals. Banach J. Math. Anal. 10 (3), 621–637 (2016)

45. Kadets, V., Soloviova, M.: Quantitative version of the Bishop-Phelps-Bollobás thorem for operators with values in a space with the property β. Matematychni Studii. 47 (1), 71–90 (2017)

46. Kim, S.K.: The Bishop-Phelps-Bollobás Theorem for operators from c_0 to uniformly convex spaces. Israel J. Math. 197, 425–435 (2013)

47. Kim, S.K., Lee, H.J.: Uniform convexity and Bishop-Phelps-Bollobás property. Canad. J. Math. 66(2), 373–386 (2014)

48. Kim, S.K., Lee, H.J.: The Bishop-Phelps-Bollobás property for operators from $C(K)$ to uniformly convex spaces. J. Math. Anal. Appl. 421(1), 51–58 (2015)

49. Kim, S.K., Lee, H.J., Lin, P.: The Bishop-Phelps-Bollobás property for operators from $L_\infty(\mu)$ to uniformly convex Banach spaces. J. Nonlinear Convex Anal. 17(2), 243–249 (2016)

50. Lindenstrauss, J.: On operators which attain their norm. Israel J. Math. 1(3), 139–148 (1963) .

51. Lindenstrauss, J., Tzafriri, L.: Classical Banach Spaces: Function spaces. Springer-Verlag (1979)

52. Martín, M.: Norm-attaining compact operators. J. Funct. Anal. 267(5), 1585–1592 (2014)

53. McShane, E.J.: Extension of range of functions. Bull. Amer. Math. Soc. 40, 837–842 (1934)

54. Namioka, I., Phelps, R. R.: Banach spaces which are Asplund spaces. Duke Math. J. 42(4), 735–750 (1975)

55. Partington, J.: Norm attaining operators. Israel J. Math. 43, 273–276 (1982)

56. Phelps, R. R.: Support Cones in Banach Spaces and Their Applications. Adv. Math. 13, 1–19 (1974)

57. Rudin, W.: Functional Analysis. McGraw-Hill, New York, (1991)

58. Schachermayer, W.: Norm attaining operators on some classical Banach spaces. Pacific J. Math. 105, 427–438 (1983)

59. Soloviova, M.: Bishop-Phelps-Bollobás modulus of a uniformly non-square Banach space. Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics 81, 4–9 (2015)

60. Soloviova, M.: A new estimate for the Bishop-Phelps-Bollobás modulus of a Banach space. In: Book of Abstracts of II International Conference “Analysis and mathematical physics”, Kharkiv, pp. 43–44 (2014)

61. Stegall, Ch.: The Radon-Nikodým property in conjugate Banach spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 206, 213–223 (1975)

62. Stegall, Ch.: The duality between Asplund spaces and spaces with the Radon-Nikodým property. Israel J. Math. 29(4), 408–412 (1978)

63. Wang, F.: On the James and von Neuman-Jordan Constans in Banach spaces. Proc. Amer. Math. Soc. 138(2), 695–701 (2010)

64. Кадец, В.: Курс функціонального аналізу та теорії міри: підручник для студентів вищих навчальних закладів. Серія “Університетська бібліотека”, Львів (2012)

65. Кадец, В.: О липшицевых отображениях метрических пространств. Изв. вузов. Матем. 1, 30—34 (1985)

66. Соловьева, М.: О приближении функционалами, достигающими нормы. Сборник тезисов докладов IX международной конференции молодых ученых "Современные проблемы математики и ее

приложения в естественных науках и информационных технологиях",
Харьков, с. 43 (2014)

ДОДАТКИ

Додаток А: список публікацій здобувача.

Публікації у фахових виданнях України і виданнях України, що входять до міжнародних наукометричних баз:

1. Soloviova, M.: Bishop-Phelps-Bollobás modulus of a uniformly non-square Banach space. Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics 81, 4–9 (2015)

   (**Фахове** видання України; входить до міжнародних наукометричних баз Zentralblatt MATH, Google Scholar.)

2. Kadets, V., Soloviova, M.: A modified Bishop-Phelps-Bollobás theorem and its sharpness. Matematychni Studii 44 (1), 84–88 (2015)

   (Входить до міжнародних наукометричних баз Zentralblatt MATH, Google Scholar, MathSciNet.)

3. Kadets, V., Soloviova, M.: Quantitative version of the Bishop-Phelps-Bollobás thorem for operators with values in a space with the property β. Matematychni Studii 47(1), 71–90 (2017)

   (Входить до міжнародних наукометричних баз **Scopus**, Google Scholar, MathSciNet.)

Публікації у зарубіжних виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз:

4. Chica, M., Kadets, V., Martin, M., Meri, J., Soloviova, M.: Two refinements of the Bishop-Phelps-Bollobás modulus. Banach J. Math. Anal. 9(4), 296–315 (2015)

   (Входить до міжнародних наукометричних баз **Scopus, Web of Science** (Science Citation Index Expanded; Impact Factor: 0.8), Zentralblatt MATH, Google Scholar, MathSciNet.)

Особистий внесок здобувача. Результати автора містяться у розділі 3, а саме Proposition 3.1, Proposition 3.2, Theorem 3.3, Lemma

3.5.

5. Kadets, V., Martin, M., Soloviova, M.: Norm-attaining Lipschitz functionals. Banach J. Math. Anal. 10(3), 621–637 (2016)

   (Входить до міжнародних наукометричних баз **Scopus, Web of Science** (Science Citation Index Expanded; Impact Factor: 0.833), Zentralblatt MATH, Google Scholar, MathSciNet.)

   Особистий внесок здобувача. Здобувачу належать Lemma 4.1, Lemma 4.4, Theorem 5.3.

6. Cascales, B., Kadets, V., Guirao, A. J., Soloviova, M.: Γ-flatness and Bishop-Phelps-Bollobás type theorems for operators. J. Funct. Anal. 274(3), 863–888 (2018)

   (Входить до міжнародних наукометричних баз **Scopus, Web of Science** (Science Citation Index Expanded, CompuMath Citation Index; Impact Factor 2017: 1.254), Google Scholar, MathSciNet, Zentralblatt MATH.)

   Особистий внесок здобувача. Здобувачу належать Lemma 2.9, Theorem 3.4, Theorem 4.5, Theorem 4.9, Theorem 4.11.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

7. Соловьева, М.: О приближении функционалами, достигающими нормы. Сборник тезисов докладов IX международной конференции молодых ученых "Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях", Харьков, с. 43 (2014)

8. Soloviova, M.: A new estimate for the Bishop-Phelps-Bollobás modulus of a Banach space. In: Book of Abstracts of II International Conference "Analysis and mathematical physics", Kharkiv, pp. 43–44 (2014)

9. Kadets, V., Soloviova, M. Bishop-Phelps-Bollobás theorem for Lipschitz functionals in uniformly convex Banach spaces. In: Book of Abstracts of

III International Conference "Analysis and mathematical physics", Kharkiv, p. 24 (2015)

10. Kadets, V., Martin, M., Soloviova, M.: Possible analogues of Bishop-Phelps and Bishop-Phelps-Bollobás theorems for Lipschitz functionals. In: Workshop on Banach spaces Granada 2015 on the occasion of the 60th birthday of Rafael Paya, Salobrena p. 13 (2015)

11. Kadets, V., Soloviova, M.: Quantitative versions of the Bishop-Phelps-Bollobás theorem. In: Book of Abstracts of International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach, Lviv, p. 30 (2017)

Апробація результатів дисертації.

Результати дисертації доповідалися й обговорювалися на:

1. IX Міждународній конференції молодих вчених "Сучасні проблеми та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях", Харків, 2014 р. (Форма участі у конференції: очна.)

2. II Міжнародній конференції "Аналіз та математична фізика", Харків, 2014 р. (Форма участі у конференції: очна.)

3. III Міжнародній конференції "Аналіз та математична фізика", Харків, 2015 р. (Форма участі у конференції: очна.)

4. Семинарі по банаховим просторам з нагоди 60-річчя Рафаеля Пайа у Салобренії (Іспанія), 2015. (Форма участі у конференції: доповідь співавтора Кадеця В. М.)

5. Міжнародній науковій конференції, присвяченій 120-річчю з дня народження С. Банаха, Львів, 2017 р. (Форма участі у конференції: очна)

6. Семінарі з функціонального аналізу у Мурсії (Іспанія), 2016.

7. Семінарі з функціонального аналізу у Гранаді (Іспанія), 2017.

Додаток Б: порівняльна таблиця.

Таблиця 1.1

Властивість Бішопа-Фелпса і Бішопа-Фелпса-Болобаша

Простір X	Простір Y	ВРр	ВРВр	посилання
мають ВРр і ВРВр				
X – будь-який	Y одновимірний	+	+	[13], 1961 [14], 1970
X – скінченновимірний	Y – скінченновимірний	+	+	[2], 2008
$X = \ell_1$	тоді і тільки тоді, коли Y має властивість AHSP (зокрема, Y – скінченновимірний, рівномірно опуклий, $Y = L_1(\mu)$, $Y = C(K)$)	+	+	[2], 2008
X – будь-який	Y має властивість β	+	+	[2], 2008
$X = L_1(\mu)$ μ – σ-скінченна міра	$Y = L_\infty[0,1]$	+	+	[9], 2011 [27], 1998
X – рівномірно опуклий	Y – будь-який	+	+	[47], 2014
$X = \ell_\infty^n$ $X = c_0$ $X = C(K)$ (дійсний) $X = L_\infty(\mu)$	Y – рівномірно опуклий	+ + + +	+ + + +	[2], 2008 [46], 2013 [48], 2015 [49], 2016
$X = C(K)$ (комплексний)	Y – $\mathbb{C}$-рівномірно опуклий	+	+	[6], 2016
$X = C(K)$	$Y = C(S)$	+	+	[3], 2014; [35], 1979

Продовження таблиці 1.1

Простір X	Простір Y	ВРр	ВРВр	посилання
$X = L_1(\mu)$	$Y = L_1(\nu)$	$+$	$+$	[22], 2014 [30], 1979
X – простір Асплунда	Y – рівномірна алгебра, зокрема $Y = C(K)$	$+$	$+$	[10], 2011 [16], 2013
мають ВРр, але не обов'язково мають ВРВр				
X – рефлексивний	Y – будь-який	$+$	-	[50], 1963
$X = \ell_1$	Y – будь-який	$+$	-	[50], 1963
не мають ВРр				
$X = c_0$	Y – строго опуклий, ізоморфний c_0	-	-	[50], 1963
$X = L_1[0,1]$	$Y = C[0,1]$	-	-	[58], 1983
існує X	$Y = \ell_p (1 < p < \infty)$	-	-	[29], 1990
існує X	$Y = L_1[0,1]$	-	-	[1], 1999