МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени В.Н. КАРАЗИНА

Ю.М. ДЮКАРЕВ, И.Ю. СЕРИКОВА

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Матрицы, определители, системы линейных уравнений

Учебно-методическое пособие
для студентов физического и радиофизического факультетов

ХАРЬКОВ 2014

УДК 512.643(075.8)
ББК 22.151.5я73
Д 95

Рекомендовано к печати решением Научно-методического совета Харьковского национального университета имени В.Н. Каразина
(протокол № 4 от 26.02.2014).

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики и информатики Харьковского национального университета имени В.Н. Каразина В.А. Золотарев;

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и функционального анализа Харьковского национального университета имени В.Н. Каразина И. П. Ильинская

Д 95 **Дюкарев Ю. М.** Линейная алгебра: матрицы, определители, системы линейных уравнений: учебно-методическое пособие / Дюкарев Ю.М., Серикова И.Ю. – Харьков: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2014 – 68 с.

В учебно-методическом пособии рассмотрены матрицы, определители и системы линейных алгебраических уравнений. Эти темы изучают студенты физического и радиофизического факультетов в курсе линейной алгебры. В краткой и элементарной форме изложены все необходимые теоретические сведения и даны подробные решения типичных задач. По каждой теме приведены задачи для аудиторной и домашней работы. Ко всем задачам имеются достаточно полные ответы. При решении большинства задач требуется только выполнение арифметических действий над целыми числами. Это позволит студентам сосредоточиться на освоении основных алгоритмов решения задач линейной алгебры, не отвлекаясь на выполнение сложных арифметических операций.

УДК 517.518.85
ББК 22.1

СОДЕРЖАНИЕ

ГЛАВА 1
МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1. Определение матриц

Матрицей называется прямоугольная таблица, элементами которой являются числа. Порядком матрицы называется количество ее строк и столбцов.

Примеры матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 6 & 7 & 3 \\ 6 & 5 & 8 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -7 & 3 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 6 & -7 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Порядок каждой из этих матриц равен соответственно:

$$3 \times 3; \quad 3 \times 2; \quad 3 \times 1; \quad 2 \times 3; \quad 1 \times 3.$$

Матрицы мы будем обозначать большими буквами латинского алфавита, а их элементы – малыми буквами латинского алфавита с двумя числовыми индексами. Первый из этих индексов указывает номер строки, а второй – номер столбца, в котором находится соответствующий элемент матрицы.

Матрица с m строками и n столбцами записывается в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если $n = m$, то матрица A называется квадратной матрицей n-го порядка. Если $n \neq m$, то матрица A называется прямоугольной порядка $m \times n$.

Главной диагональю квадратной матрицы n-го порядка называются элементы $a_{11},\ a_{22},\ \cdots, a_{nn}$. Квадратная матрица называется *единичной*, если элементы главной диагонали равны единице, а все остальные элементы равны нулю. Единичную матрицу будем обозначать буквой E. Примеры единичных матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Две матрицы называются равными, если совпадают их порядки и совпадают соответствующие элементы. Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 & 5 \\ 3 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 & 5 \\ 3 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матрица называется нулевой, если все ее элементы равны нулю. Нулевую матрицу будем обозначать буквой O. Примеры нулевых матриц:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.2. Операции над матрицами

1.2.1. Умножение матрицы на число. Любую матрицу можно умножить на число. Например,

$$2\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 7 & 4 & 5 \\ 8 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 14 & 8 & 10 \\ 16 & 10 & 12 \end{pmatrix}, \qquad 3\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 4 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 21 & 12 \\ 24 & 15 \end{pmatrix}.$$

А теперь дадим общее определение.

Определение 1.1. Пусть дана произвольная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

и произвольное число λ. Произведением числа λ на матрицу A называется матрица

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

1.2.2. Сложение и вычитание матриц. Матрицы одинакового порядка можно складывать и вычитать. Например,

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 7 & 4 & 5 \\ 8 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 9 \\ 9 & 5 & 10 \\ 11 & 8 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

А теперь дадим общее определение.

Определение 1.2. Пусть даны две произвольные матрицы одинакового порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Суммой (разностью) этих матриц называется матрица

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}.$$

1.2.3. Умножение матриц. Пусть даны прямоугольные матрицы A и B такие, что количество столбцов матрицы A равно количеству строк матрицы B. Тогда определено произведение AB по правилу «строка на столбец». Приведем простейшие примеры:

$$a) \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 23;$$

$$b) \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 \\ 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 14 \end{pmatrix};$$

$$c) \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \\ 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 7 \\ 14 & 4 \end{pmatrix};$$

$$d) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 - 3 \cdot 4 + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 19 & 11 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

А теперь дадим общее определение.

Определение 1.3. Пусть даны две прямоугольные матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pn} \end{pmatrix}$$

и количество столбцов матрицы A равно количеству строк матрицы B. Произведением матрицы A на матрицу B называется матрица

$$AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix},$$

элементы которой вычисляются по формуле

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Матрица AB состоит из m строк и n столбцов.

Пусть A является произвольной квадратной матрицей порядка n и E обозначает единичную матрицу порядка n. Тогда

$$AE = EA = A.$$

В общем случае АВ $\neq$ ВА.

Пример 1. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Тогда $AB = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$, $\quad BA = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ и $AB \neq BA$.

Пример 2. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Тогда $AB = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, а произведение BA не существует.

1.2.4. Транспонирование матриц. Пусть дана матрица A порядка $m \times n$. Рассмотрим матрицу A', столбцами которой являются строки матрицы A. Говорят, что матрица A' получена *транспонированием* матрицы A. Порядок матрицы A' равен $n \times m$.

Таким образом, если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, то $A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Например,

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 7 & 4 & 5 \\ 8 & 6 & 9 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.2.5. Свойства операций над матрицами.

Теорема 1.1. *Введенные выше операции над матрицами обладают такими свойствами:*

1) $A + B = B + A$;

2) $(A+B)+C=A+(B+C)$;
3) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$;
4) $A(B+C)=AB+AC$;
5) $(A+B)C=AC+BC$;
6)$\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$;
7) $(AB)C=A(BC)$;
8) $(A')'=A$;
9) $(\lambda A)'=\lambda A'$;
10) $(A+B)'=A'+B'$;
11) $(AB)'=B'A'$.

Здесь A, B, C *– произвольные прямоугольные матрицы, для которых выполнимы операции в левых и правых частях рассматриваемых равенств, и* λ *– произвольное число.*

1.3. Определители первого, второго и третьего порядка

Каждой квадратной матрице A по определенным правилам будет поставлено в соответствие число, которое называется определителем и обозначается через $|A|$ или через $\det A$.

Определение 1.4. Определителем матрицы первого порядка $A=(a_{11})$ (определителем первого порядка) называется число

$$\det(a_{11})=a_{11}. \tag{1.1}$$

Определение 1.5. Определителем матрицы второго порядка $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ (определителем второго порядка) называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}. \tag{1.2}$$

Пример 1. Вычислить определитель второго порядка

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}=2\cdot(-5)-3\cdot(-1)=-10+3=-7.$$

Определение 1.6. Определителем матрицы третьего порядка

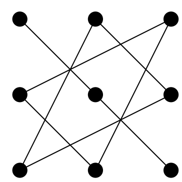
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

(определителем третьего порядка) называется число

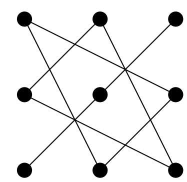
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \quad (1.3)$$

Структуру сомножителей и знаки слагаемых в правой части последнего равенства легко запомнить с помощью следующих схем:

$\oplus$



$\ominus$



Пример 2. Вычислить определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 7 \cdot 2 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \cdot 3 - \\ - 7 \cdot 5 \cdot 3 - 1 \cdot 8 \cdot 6 - 4 \cdot 2 \cdot 9 = 0.$$

1.4. Определители n-го порядка

Пусть задана произвольная квадратная матрица n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Выберем по одному элементу в 1-ой, 2-ой и т.д., n-ой строке. Получим упорядоченную в порядке возрастания номеров строк выборку

$$\big(a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{nj_n}\big). \quad (1.4)$$

Элементы этой выборки находятся в разных строках матрицы A. Они находятся в разных столбцах тогда и только тогда, когда последовательность $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ является *перестановкой* чисел $(1, 2, \dots, n)$. Таким образом, выборки вида (1.4), с элементами в разных строках и разных столбцах матрицы A, находятся во взаимно однозначном соответствии с перестановками $J = (j_1, j_2, \dots, j_n)$ чисел $(1, 2, \dots, n)$. Количество таких перестановок равно $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \cdot n$.

Пусть числа j_k и j_{k+p}, $k > 0$, $p > 0$ принадлежат некоторой перестановке $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$. Говорят, что числа j_k и j_{k+p} образуют *инверсию* в перестановке $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$, если $j_k > j_{k+p}$. Через $r(J)$ обозначим количество инверсий в произвольной перестановке J чисел $(1, 2, \ldots, n)$.

В качестве примера укажем все перестановки последовательности $(1, 2, 3)$ и количество инверсий в каждой перестановке.

Перестановка	(1,2,3)	(1,3,2)	(2,1,3)	(2,3,1)	(3,1,2)	(3,2,1)
Количество инверсий	0	1	1	2	2	3

Определение 1.7. Определителем квадратной матрицы n-го порядка (определителем n-го порядка) называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(J)} (-1)^{r(J)} \cdot a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n}. \tag{1.5}$$

Здесь суммирование производится по всем перестановкам $J = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$ чисел $(1, 2, \ldots, n)$.

Покажем, что при $n = 3$ формула (1.5) совпадает с формулой (1.3). Последовательно воспользовавшись формулой (1.5) и приведенной выше таблицей перестановок, получим

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{(J)} (-1)^{r(J)} \cdot a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot a_{3j_3} =$$
$$= (-1)^{r(1,2,3)} a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^{r(1,3,2)} a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^{r(2,1,3)} a_{12}a_{21}a_{33} +$$
$$+ (-1)^{r(2,3,1)} a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^{r(3,1,2)} a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^{r(3,2,1)} a_{13}a_{22}a_{31} =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Что и требовалось доказать.

Легко видеть, что при $n = 1, 2$ формула (1.5) совпадает соответственно с формулами (1.1), (1.2).

1.5. Миноры и алгебраические дополнения

Определение 1.8. Пусть A – квадратная матрица n-го порядка и ее элемент a_{ij} находится на пересечении i-й строки и j-го столбца. Вычеркнем из матрицы A строку с номером i и столбец с номером j. Получим квадратную матрицу $(n-1)$-го порядка, определитель которой называется *минором* элемента a_{ij} и обозначается через M_{ij}.

Пример 1. Вычислить миноры для элементов второй строки матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -8 - 7 = -15,$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 6 = 2,$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 7 + 6 = 13.$$

Определение 1.9. Пусть a_{ij} является элементом квадратной матрицы. *Алгебраическим дополнением* элемента a_{ij} называется

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Пример 2. Вычислить алгебраические дополнения для элементов первой строки матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-2 - 12) = 14,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5.$$

Замечание. Определитель является числом и фраза типа «строка определителя» некорректна. Вместе с тем, корректный аналог этой фразы «строка матрицы, определитель которой мы вычисляем» представляется несколько громоздким. Поэтому длинные фразы «строка (столбец) матрицы, определитель которой мы вычисляем», «элемент матрицы, определитель которой мы вычисляем» будем заменять короткими фразами «строка (столбец) определителя», «элемент определителя» и т.д.

1.6. Свойства определителей

Из формулы (1.5) выводятся следующие свойства определителей.

1. Если у определителя элементы строки (столбца) равны нулю, то такой определитель равен нулю.

Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 7 \\ 4 & 1 & 0 & 9 \\ 7 & 1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Постоянный множитель элементов строки (столбца) определителя можно выносить за знак определителя.

Например,

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 6 & -1 & 4 \\ 12 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1\cdot 3 & 2 & 3 \\ 2\cdot 3 & -1 & 4 \\ 4\cdot 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

3. Определитель матрицы не меняется при транспонировании.

Например, для определителя 3-го порядка имеем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

4. Если у определителя поменять местами две строки (столбца), то определитель поменяет знак на противоположный.

Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \\ 4 & 1 & 1 & 9 \\ 7 & 1 & 5 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 1 & 9 \\ 7 & 1 & 5 & 8 \end{vmatrix},$$

т.к. второй определитель получается из первого перестановкой первых двух строк.

5. Если у определителя есть две совпадающие строки (столбца), то такой определитель равен нулю.

Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 8 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

т.к. у этого определителя совпадают два первых столбца.

Если у определителя есть две пропорциональные строки (столбца), то такой определитель равен нулю.

Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 6 \\ 4 & 1 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\cdot 1 \\ 2 & -1 & 3\cdot 2 \\ 4 & 1 & 3\cdot 4 \end{vmatrix} = 0,$$

т.к. у этого определителя 1-й и 3-й столбцы пропорциональны.

6. Определитель произведения двух матриц равен произведению определителей матричных сомножителей.

Например, для матриц 3-го порядка имеем

$$\left| \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 6 & -1 & 4 \\ 12 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 4 \\ 9 & 1 & 6 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 6 & -1 & 4 \\ 12 & 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 4 \\ 9 & 1 & 6 \end{vmatrix}.$$

7. Определитель не изменится, если к элементам любой строки (столбца) добавить элементы другой строки (столбца), умноженные на любое число.

Например,

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \\ 4 & 1 & 1 & 9 \\ 7 & 1 & 5 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5+6\cdot 4 & 2 & 3 & 4 \\ 2+6\cdot 7 & 1 & 4 & 7 \\ 4+6\cdot 9 & 1 & 1 & 9 \\ 7+6\cdot 8 & 1 & 5 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 29 & 2 & 3 & 4 \\ 44 & 1 & 4 & 7 \\ 58 & 1 & 1 & 9 \\ 55 & 1 & 5 & 8 \end{vmatrix}.$$

К элементам первого столбца прибавили элементы последнего столбца, умноженные на 6. Определитель не изменился.

8. Определитель равен сумме элементов строки (столбца), умноженных на их алгебраические дополнения.

Например, для определителя 3-го порядка имеем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

$$= a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$

$$= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}.$$

9. Сумма элементов строки (столбца) определителя, умноженных на алгебраические дополнения к другой строке (столбцу) определителя равна 0. Например, для определителя 3-го порядка (1.3) имеем

$$a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} = 0.$$

1.7. Вычисление определителей разложением по элементам строки (столбца)

Разложение определителя по элементам строки (столбца) применяется для вычисления определителей. Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 8 \\ 1 & -1 & 7 \\ 1 & 4 & -5 \end{vmatrix}:$$

а) разложением по элементам 2-й строки;

б) разложением по элементам 3-го столбца.

Решение:

а)

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 5 & 2 & 8 \\ 1 & -1 & 7 \\ 1 & 4 & -5 \end{vmatrix} &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \\ &= 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} + 7 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= -(-10-32) - (-25-8) - 7(20-2) = 75 - 126 = -51;\end{aligned}$$

б)

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 5 & 2 & 8 \\ 1 & -1 & 7 \\ 1 & 4 & -5 \end{vmatrix} &= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} \\ &= 8 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 7 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + (-5) \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 8(4+1) - 7(20-2) - 5(-5-2) = 75 - 126 = -51.\end{aligned}$$

Вычисление определителя методом разложения особенно удобно, если у определителя в строке (столбце) имеются нули.

Пример 2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 1 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix}.$$

Решение. Разлагая этот определитель по элементам 2-го столбца, получим

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 1 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} = 0 \cdot A_{12} - 1 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{32}$$
$$= -\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -(-25 - 8) = 33.$$

Если у определителя нет нулевых элементов, то их всегда можно получить в строке (столбце) с помощью свойства 7 определителей (см. предыдущий пункт). После этого определитель вычисляется разложением по соответствующей строке (столбцу) определителя. Такой метод вычисления определителей называется методом накопления нулей в строке (столбце).

Пример 3. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 3 & -3 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. Прибавим второй столбец к первому, третьему и четвертому столбцу. Получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ -2 & -3 & -1 & -4 \\ 5 & 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Разложим этот определитель по элементам первой строки и затем вынесем общий множитель 2 элементов 1 строки за знак определителя. Получим

$$\Delta = 3 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & -4 \\ 5 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -4 \\ 5 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

К первому и второму столбцу прибавим третий столбец, умноженный на -2, и затем разложим полученный определитель по элементам первой строки. Получим

$$\Delta = -6 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 6 & 7 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -6(-6 + 7) = -6.$$

Определение 1.10. Квадратная матрица называется *верхнетреугольной*, если все элементы под главной диагональю равны нулю.

Пример 4. Доказать, что определитель верхнетреугольной матрицы равен произведению диагональных элементов

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}. \tag{1.6}$$

Решение. Последовательно разлагая определители по элементам первого столбца, получим

$$\Delta = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \dots = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}.$$

1.8. Вычисление определителей методом Гаусса

При вычислении определителей методом Гаусса используются следующие свойства определителей:

а) определитель матрицы не меняется при транспонировании;

б) постоянный множитель элементов строки (столбца) определителя можно выносить за знак определителя;

в) если у определителя поменять местами две строки (столбца), то определитель поменяет знак на противоположный;

г) определитель не изменится, если к элементам любой строки (столбца) добавить элементы другой строки (столбца), умноженные на любое число.

С помощью этих свойств вычисление определителя любой матрицы можно свести к вычислению определителя верхнетреугольной матрицы, который равен произведению диагональных элементов матрицы (см. (1.6)). Такой метод вычисления определителей называется методом Гаусса.

Пример 1. Методом Гаусса вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 3 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} \boxed{1} & 3 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}$$

Здесь и в дальнейшем с помощью свойства 7 определителей мы получаем нули под элементами, обведенными в прямоугольную рамку. Для этого все элементы первой строки (содержит элемент в рамке) домножаем на -3 и складываем с соответствующими элементами второй строки. Получим

$$\Delta = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4.$$

Пример 2. Методом Гаусса вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -9 & 4 & 2 \\ -6 & 20 & -6 & -11 \\ 3 & -13 & 5 & 25 \\ -6 & 16 & -5 & 16 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} \boxed{1} & -9 & 4 & 2 \\ -2 & 20 & -6 & -11 \\ 1 & -13 & 5 & 25 \\ -2 & 16 & -5 & 16 \end{vmatrix}.$$

Умножим элементы первой строки на 2 и сложим с соответствующими элементами второй строки. Затем умножаем первую строку на -1 и складываем с третьей. И, наконец, умножаем первую строку на 2 и складываем с четвертой. В результате, получаем

$$\Delta = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -9 & 4 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & 2 & -7 \\ 0 & -4 & 1 & 23 \\ 0 & -2 & 3 & 20 \end{vmatrix}.$$

Аналогично, умножаем вторую строку на 2 и складываем с третьей. Далее, складываем вторую и четвертую строки. Получим

$$\Delta = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -9 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & 9 \\ 0 & 0 & 5 & 13 \end{vmatrix}.$$

Умножаем третью строку на -1 и складываем с четвертой. Окончательно,

$$\Delta = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -9 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 = 120.$$

1.9. Обратная матрица

Определение 1.11. Квадратная матрица n-го порядка A называется *обратимой* (невырожденной), если существует квадратная матрица n-го порядка A^{-1} такая, что

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E.$$

Здесь E обозначает единичную матрицу n-го порядка. Матрица A^{-1} называется *обратной* к матрице A.

Теорема 1.2. *Для того, чтобы квадратная матрица*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

была обратимой, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был отличен от нуля. В этом случае обратная матрица может быть вычислена по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}' . \tag{1.8}$$

Здесь $|A|$ обозначает определитель матрицы A, через A_{ij} обозначены алгебраические дополнения к элементам a_{ij} матрицы (1.7)*, а штрих обозначает транспонирование матрицы.*

Пример 1. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ вычислить обратную матрицу.

Решение.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 4 - 6 = -2, \\ A_{11} &= (-1)^{1+1} 4 = 4, \\ A_{12} &= (-1)^{1+2} 3 = -3, \\ A_{21} &= (-1)^{2+1} 2 = -2, \\ A_{22} &= (-1)^{2+2} 1 = 1. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}' = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

вычислить обратную.

Решение.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Отсюда следует, что

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}' = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}' = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.10. Ранг матрицы

Пусть дана прямоугольная матрица с m строками и n столбцами. Выделим в ней матрице произвольные r строк и произвольные r столбцов. На пересечении выделенных строк и столбцов находится квадратная матрица r-го порядка. Ее определитель называется *минором r-го порядка*.

Определение 1.12. Наивысший порядок отличных от нуля миноров матрицы A называется рангом матрицы и обозначается через $\operatorname{rank} A$. Все отличные от нуля миноры наивысшего порядка называются *базисными минорами*. Строки (столбцы) матрицы A, в которых находится какой-нибудь базисный минор, называются *базисными строками (столбцами)*.

Непосредственно из этого определения следуют свойства ранга матрицы:

а) ранг прямоугольной матрицы A не превосходит ее минимального размера $\operatorname{rank} A \le \min(m, n)$.

б) ранг матрицы A равен нулю тогда и только тогда, когда все элементы матрицы равны нулю, т.е. $A = O$;

в) ранг квадратной матрицы равен ее порядку тогда и только тогда, когда ее определитель отличен от нуля.

Из свойств определителей следует, что ранг матрицы не меняется при следующих *элементарных операциях*:

а) вычеркивание нулевых строк и столбцов;

б) умножение элементов любой строки (столбца) на ненулевой множитель;

в) перемена местами строк (столбцов);

г) прибавление к элементам любой строки (столбца) элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число;

д) транспонирование матрицы.

С помощью *элементарных операций* мы можем, не меняя ранга матрицы, поместить любой базисный минор в левый верхний угол матрицы.

Определение 1.13. Прямоугольная матрица размера $m \times n,\ m \leq n$ называется *ступенчатой*, если элементы на главной диагонали отличны от нуля, а под главной диагональю равны нулю.

Таким образом, ступенчатая матрица имеет следующую структуру:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3m} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mm} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Минор, находящийся в первых m строках и первых m столбцах этой матрицы равен произведению диагональных элементов $a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{mm}$ и отличен от нуля. Следовательно, ранг ступенчатой матрицы равен количеству строк $\operatorname{rank} A = m$.

Оказывается, что любую матрицу с помощью элементарных преобразований (не меняющих ранга матрицы) можно привести к ступенчатой форме и, таким образом, вычислить ее ранг. Запись $A \sim B$ будет обозначать, что матрица B получена из матрицы A с помощью элементарных преобразований и, следовательно, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Вычислить ранги матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -4 & -15 & 5 \\ 3 & 13 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 \\ -3 & -18 & 9 \\ -6 & -36 & 18 \end{pmatrix}.$$

Решение. С помощью элементарных преобразований приведем матрицу A к ступенчатому виду (под цифрой в рамке с помощью элементарных преобразований получаем нули). Первую строку складываем со второй и третьей. Получим

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Теперь вторую строку домножаем на -1 и складываем с третьей. Окончательно получим

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что $\operatorname{rank} A = 3$.

Аналогичным образом преобразуем матрицу B. Получим

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 4 & -1 \\ -4 & -15 & 5 \\ 3 & 13 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\operatorname{rank} B = 2$.

Для матрицы C имеем

$$C = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 6 & -3 \\ -3 & -18 & 9 \\ -6 & -36 & 18 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\operatorname{rank} C = 1$.

1.11. Упражнения к главе 1

1.1. Даны число λ и матрица A. Найти матрицу λA:

$$a)\ \ \lambda = 5, \quad A = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}; \qquad b)\ \ \lambda = 5, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -9 \\ -6 & -3 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.2. Даны матрица A и матрица B. Найти их сумму $A + B$:

$$A = \begin{pmatrix} -9 & -3 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ -4 & -7 \end{pmatrix};$$

1.3. Даны матрица A и матрица B. Найти их разность $A - B$:

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -7 \\ -9 & -5 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ -8 & -4 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

1.4. Дана матрица A. Найти транспонированную матрицу A':

$$a)\ \ A = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}; \qquad b)\ \ A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -6 & -8 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}.$$

1.5. Даны матрица A и матрица B. Найти их произведение AB:

$$a)\ \ A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix};$$

$$b)\ \ A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -3 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix};$$

$$c)\ \ A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & -2 & -3 \end{pmatrix};$$

$$d)\ \ A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = (1\ 1\ \ -1);$$

$$e)\ \ A = (3\ \ -1\ \ -3), \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

1.6. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ -3 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $A + 2B - CDA$.

1.7. Вычислить определители:

$$a)\ \begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix};\ b)\ \begin{vmatrix} -4 & -1 & -2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix};\ c)\ \begin{vmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix};\ d)\ \begin{vmatrix} 2 & -4 & -3 \\ -1 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

1.8. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$. Найти минор M_{12}.

1.9. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 5 & -3 & -9 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти миноры элементов последнего столбца.

1.10. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}$. Найти алгебраическое дополнение A_{21}.

1.11. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -5 & -2 \\ -3 & 2 & -5 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Найти алгебраические дополнения элементов второй строки.

1.12. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -9 & -2 \\ 9 & -8 & -4 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}.$$

Найти ее определитель:
а) раскладывая по элементам второй строки;
б) раскладывая по третьему столбцу.

1.13. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти ее определитель, раскладывая по элементам первой строки.

1.14. Найти определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 6 & 6 \\ 0 & -4 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

1.15. Методом Гаусса вычислить определители:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & -7 & 4 & -9 \\ 1 & -6 & 7 & -10 \\ -2 & 13 & -8 & 25 \\ 1 & -8 & -5 & -19 \end{vmatrix}; \quad b) \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & 8 \\ 2 & 6 & 1 & 15 \\ -2 & -6 & 2 & 12 \\ 2 & 6 & 4 & 46 \end{vmatrix}; \quad c) \begin{vmatrix} 3 & -3 & -9 & -7 \\ -3 & 5 & 12 & 8 \\ -3 & -1 & 4 & -10 \\ -3 & -1 & 4 & -6 \end{vmatrix}.$$

1.16. Для следующих матриц найти обратные:

$a)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix};\quad b)\ \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};\quad c)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix};\quad d)\ \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix};$

$e)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix};\quad f)\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix};\quad g)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix};$

$h)\ \begin{pmatrix} 4 & -3 & 4 \\ -3 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix};\quad i)\ \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 3 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix};\quad j)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$

1.17. Вычислить ранги следующих матриц:

$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};\quad b)\ \begin{pmatrix} 3 & -9 & 3 \\ 5 & -14 & 10 \\ 3 & -7 & 13 \end{pmatrix};\quad c)\ \begin{pmatrix} 2 & -8 & -10 \\ 5 & -20 & -25 \\ -2 & 8 & 10 \end{pmatrix};$

$d)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & -3 \\ 1 & 4 & -9 & -5 \\ 1 & 6 & -16 & -10 \end{pmatrix};\quad e)\ \begin{pmatrix} 2 & 6 & -8 & -4 \\ -3 & -6 & -3 & 18 \\ 1 & 5 & -14 & 6 \end{pmatrix};$

$f)\ \begin{pmatrix} -8 & 6 & -2 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \\ 8 & -6 & 2 & 2 \end{pmatrix};\quad g)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & -13 & -3 \\ 3 & 0 & 4 & -12 \end{pmatrix};$

$h)\ \begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 & -10 \\ 3 & -3 & -18 & -24 \\ 2 & -2 & -12 & -16 \end{pmatrix};\quad i)\ \begin{pmatrix} 6 & 6 & -4 & -4 \\ -6 & -6 & 4 & 4 \\ -9 & -9 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$

ГЛАВА 2
СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Формулы Крамера

В школьном курсе математики были рассмотрены линейные алгебраические уравнения и системы линейных алгебраических уравнений следующих видов:

а) одно линейное алгебраическое уравнение с одним неизвестным

$$ax = b, \tag{2.1}$$

где a и b – заданные числа, а x – неизвестное;

б) система из двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}, \tag{2.2}$$

где a_{ij} и b_i - заданные числа, а x_1, x_2 - неизвестные;

в) система из трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}, \tag{2.3}$$

где a_{ij} и b_i – заданные числа, а x_1, x_2, x_3 – неизвестные.

Обобщая уравнение и системы уравнений (2.1) - (2.3), мы приходим к *системе из n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \ddots \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \; \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn-1}x_{n-1} + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}. \tag{2.4}$$

С системой линейных алгебраических уравнений (2.4) свяжем $n+1$ определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n-1} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n-1} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn-1} & b_n \end{vmatrix}.$$

Определитель Δ_i получается заменой i-ого столбца столбцом свободных членов. Условия, при выполнении которых существует единственное решение системы (2.4), дает теорема Крамера.

Теорема 2.1. *Для того, чтобы система линейных алгебраических уравнений* (2.4) *имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы был отличен от нуля определитель* $\Delta \neq 0$. *При выполнении этого условия единственное решение системы линейных алгебраических уравнений* (2.4) *может быть найдено по формулам Крамера*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, \; x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 21 \\ 2x_1 + \; x_2 \; = \; 9 \end{cases}.$$

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 21 & 2 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = 21 - 18 = 3,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 21 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 45 - 42 = 3.$$

По формулам Крамера имеем

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{3}{1} = 3, \;\; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{3}{1} = 3.$$

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 2 \\ 2x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}.$$

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 48 + 24 + 24 - 32 - 36 - 24 = 4,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 12 + 8 - 16 - 4 - 12 = -4,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 24 + 8 + 24 - 16 - 12 - 24 = 4,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 24 + 6 + 12 - 8 - 12 - 18 = 4.$$

По формулам Крамера имеем

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-4}{4} = -1, \ \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{4}{4} = 1, \ \ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{4}{4} = 1.$$

2.2. Метод обратной матрицы

Пусть дана система n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ \vdots \quad\ \vdots \quad\ \vdots \quad\ \vdots \ \ddots \ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}. \tag{2.5}$$

Эту систему можно записать в матричной форме

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Если матрица системы линейных алгебраических уравнений (2.5)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

невырождена, то умножив матричное равенство (2.6) слева на матрицу A^{-1}, получим такой результат.

Теорема 2.2. *Пусть матрица A системы линейных алгебраических уравнений* (2.5) *невырождена.*

Тогда единственное решение $x_1, x_2, \ldots x_n$ системы линейных алгебраических *уравнений* (2.5) *может быть найдено по формуле*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Решение системы линейных алгебраических уравнений (2.5) по формуле (2.7) называется методом обратной матрицы.

Пример 1. Методом обратной матрицы решить систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = -1 \end{cases}.$$

Решение. Для матрицы системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

найдем обратную матрицу A^{-1}.

Имеем

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1,$$
$$A_{11} = (-1)^{1+1}1 = 1,$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2}2 = -1,$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1}1 = -2,$$
$$A_{22} = (-1)^{2+2}1 = 1.$$

Отсюда следует, что

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}' = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

По формуле (2.7) имеем

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $x_1 = -5,\ x_2 = 4$.

Пример 2. Методом обратной матрицы решить систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases}.$$

Решение. Для матрицы этой системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

обратная матрица имеет вид (см. (1.8))

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -14 & -9 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 10 & 7 \end{pmatrix}.$$

По формуле (2.7) имеем

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -14 & -9 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 10 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$.

2.3. Теорема Кронекера-Капелли

Рассмотрим систему из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. . \qquad (2.8)$$

С этой системой свяжем *матрицу системы* (2.8)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

и *расширенную матрицу системы* (2.8)

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Определение 2.1. Система линейных алгебраических уравнений (2.8) называется совместной, если у нее существует хотя бы одно решение и несовместной в противном случае.

Теорема 2.3. (Кронекер-Капелли). *Для того, чтобы система линейных алгебраических уравнений* (2.8) *была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы A равнялся рангу расширенной матрицы системы $\tilde{A}$.*

Определение 2.2. Совместная система линейных алгебраических уравнений (2.8) называется определенной (неопределенной), если у нее существует единственное решение (существует бесконечно много решений).

Важное замечание. Если решение не единственно, то их **бесконечно много**.

Теорема 2.4. *Для совместной системы линейных алгебраических уравнений* (2.8) *имеют место следующие утверждения:*

а) если $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \tilde{A} = n$*, то система* (2.8) *является определенной;*

б) если $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \tilde{A} < n$*, то система* (2.8) *является неопределенной.*

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + \ x_2 \ = 2 \end{cases}.$$

Решение. Для этой системы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Легко видеть, что $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \tilde{A} = 2$. Таким образом, система является совместной и определенной.

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 4 \\ 2x_1 + \ x_2 \ = 2 \end{cases}.$$

Решение. Для этой системы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Легко видеть, что $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \tilde{A} = 1$. Следовательно, система является совместной и неопределенной.

Пример 3. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 1 \\ \ x_1 \ + \ x_2 \ = 1 \end{cases}.$$

Решение. Для этой системы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Легко видеть, что $\operatorname{rank} A = 1,\ \operatorname{rank} \tilde{A} = 2$. Таким образом, система является несовместной.

2.4. Метод Гаусса

Для нахождения множества всех решений систем линейных алгебраических уравнений наиболее эффективным является метод Гаусса.

Определение 2.3. Две системы линейных алгебраических уравнений с одним и тем же набором неизвестных называются *эквивалентными*, если совпадают множества их решений.

Как известно, следующие *элементарные преобразования* приводят к эквивалентным системам линейных алгебраических уравнений:

а) умножение левой и правой частей любого уравнения на любой ненулевой множитель;

б) исключение из системы одного из двух пропорциональных уравнений;

в) исключение из системы уравнения вида 0=0;

г) любые перестановки уравнений в системе;

д) прибавление к левой и правой частям одного уравнения левой и правой частей другого уравнения, умноженных на любое число.

Системы из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \ddots \vdots \quad \vdots \quad \vdots \ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.9}$$

находятся в очевидном взаимно однозначном соответствии со своими расширенными матрицами

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Перечисленным выше эквивалентным преобразованиям систем линейных алгебраических уравнений соответствуют такие *элементарные операции* над их расширенными матрицами:

а) умножение любой **строки** расширенной матрицы системы на любой ненулевой множитель;

б) вычеркивание одной из двух пропорциональных **строк** расширенной матрицы системы;

в) вычеркивание нулевой **строки** расширенной матрицы системы;

г) **любые** перестановки **строк** расширенной матрицы системы;

д) прибавление к **строке** расширенной матрицы системы любой другой **строки**, умноженной на любое число.

Метод Гаусса состоит из двух этапов. Сначала, с помощью перечисленных выше элементарных операций, приводим расширенную матрицу системы к ступенчатой форме (прямой ход метода Гаусса). По результатам прямого хода метода Гаусса выясняется совместность или несовместность исходной системы. В случае совместности применяем обратный ход метода Гаусса для нахождения всех решений системы линейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим примеры на применение метода Гаусса.

Пример 1. Методом Гаусса решить систему

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 1 \\ -2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -6 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = -3 \end{cases}.$$

Решение. С помощью элементарных преобразований приведем расширенную матрицу системы к ступенчатой форме. Имеем (под цифрой в рамке с помощью элементарных преобразований получаем нули)

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & 3 & -3 & 1 \\ -2 & -5 & 3 & -6 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Отсюда следует, что $\operatorname{rank} \tilde{A} = \operatorname{rank} A = 3$. Поэтому исходная система является совместной, определенной и эквивалентна системе

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_2 - 3x_3 = -4 \\ x_3 = 2 \end{cases}.$$

Отсюда следует, что (обратный ход метода Гаусса)

$$\begin{aligned} x_3 &= 2, \\ x_2 &= -4 + 3x_3 = -4 + 3 \cdot 2 = 2, \\ x_1 &= 1 - 3x_2 + 3x_3 = 1 - 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, у нашей системы существует единственное решение

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 2.$$

Пример 2. Методом Гаусса решить систему

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 + \ \ 3x_4 = \ \ 11 \\ 3x_1 + 4x_2 \qquad\quad + 10x_4 = \ \ 35 \\ x_1 - 4x_2 - 7x_3 + \ \ 4x_4 = \ \ 14 \\ 3x_1 - 6x_2 + 8x_3 - 15x_4 = -43 \end{cases}.$$

Решение. С помощью элементарных преобразований приведем расширенную матрицу системы к ступенчатой форме. Имеем (под цифрой в рамке с помощью элементарных преобразований получаем нули)

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 3 & 11 \\ 3 & 4 & 0 & 10 & 35 \\ 1 & -4 & -7 & 4 & 14 \\ 3 & -6 & 8 & -15 & -43 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 11 & -6 & -10 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Отсюда следует, что $\operatorname{rank} \tilde{A} = \operatorname{rank} A = 4$. Поэтому исходная система является совместной, определенной и эквивалентна системе

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ \ x_3 + 3x_4 = \ \ 11 \\ \qquad\ \ x_2 - 3x_3 + \ \ x_4 = \ \ 2 \\ \qquad\qquad\quad\ \ x_3 - 2x_4 = -3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\ \ x_4 = \ \ 2 \end{cases}.$$

Отсюда следует, что (обратный ход метода Гаусса)

$$\begin{aligned} x_4 &= 2, \\ x_3 &= -3 + 2x_4 = -3 + 2 \cdot 2 = 1, \\ x_2 &= 2 + 3x_3 - x_4 = 2 + 3 \cdot 1 - 2 = 3, \\ x_1 &= 11 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 11 - 3 - 1 - 3 \cdot 2 = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, у нашей системы существует единственное решение

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 2.$$

Важное замечание. Обратный ход метода Гаусса можно снова реализовать как элементарные преобразования, приводящие к единичной матрице в левой части расширенной матрицы системы. Так, в нашем примере соответствующие элементарные преобразования имеют вид (над цифрой в рамке с помощью элементарных преобразований получаем нули):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Приведем пошаговый комментарий к проведенным вычислениям.

Шаг 1. Последнюю строку умножаем на 2 и складываем с третьей. Последнюю строку вычитаем из второй. Последнюю строку умножаем на -3 и складываем с первой.

Шаг 2. Третью строку умножаем на 3 и складываем со второй. Третью строку вычитаем из первой.

Шаг 3. Вторую строку вычитаем из первой.

Таким образом, наша система эквивалентна системе

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 2 \end{cases}.$$

И мы снова получили решение исходной системы

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 2.$$

Пример 3. Методом Гаусса решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6 \\ 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 1 \end{cases}.$$

Решение. С помощью элементарных преобразований приведем расширенную матрицу системы к ступенчатой форме. Имеем

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 4 & 6 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & 4 & 6 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & -7 & -7 & -11 & -17 \\ 0 & -1 & -7 & -7 & -7 \\ 0 & -8 & -14 & -18 & -35 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & \boxed{1} & 7 & 7 & 7 \\ 0 & -7 & -7 & -11 & -17 \\ 0 & -8 & -14 & -18 & -35 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & \boxed{42} & 38 & 32 \\ 0 & 0 & 42 & 38 & 21 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 42 & 38 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{array}\right).$$

Поэтому исходная система эквивалентна системе

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ x_2 + 7x_3 + 7x_4 = 7 \\ 42x_3 + 38x_4 = 32 \\ 0 = 11 \end{cases}.$$

В этой системе последнее уравнение противоречиво. Следовательно, не совместной является исходная система линейных алгебраических уравнений.

Пример 4. Методом Гаусса решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 \phantom{{}+x_3} + 3x_4 = 3 \end{cases}.$$

Решение. С помощью элементарных преобразований получим единичную матрицу в левой части расширенной матрицы. Имеем

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

Поэтому исходная система эквивалентна системе

$$\begin{cases} x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 - \frac{1}{2}x_4 = -\frac{1}{2} \\ \phantom{x_1 +{}} x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}.$$

В этой системе неизвестные x_1 и x_2 (соответствующие единичной матрице в левой части расширенной матрицы системы) называются *базисными*, а неизвестные x_3 и x_4 – *свободными*.

Выразив базисные неизвестные через свободные неизвестные

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} - x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_2 = 2 + x_3 - 2x_4 \end{cases}, \tag{2.10}$$

получим общее решение исходной системы.

Формула (2.10) задает *общее решение* исходной системы в следующем смысле:

а) если свободные неизвестные x_3 и x_4 принимают произвольные конкретные значения, а базисные неизвестные x_1 и x_2 вычислены по формулам (2.10), то полученные числа x_1, x_2, x_3, x_4 являются решениями исходной системы;

б) любое решение исходной системы x_1, x_2, x_3, x_4 получается при некоторых значениях свободных неизвестных x_3, x_4 и вычисленных по формулам (2.10) значениях базисных неизвестных x_1, x_2 .

Например, если в формулы (2.10) подставить $x_3 = 1$ и $x_4 = 1$, то базисные неизвестные $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$. Мы получили решение исходной системы

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 1.$$

Особый интерес представляет случай, когда свободные неизвестные равны нулю $x_3 = 0$ и $x_4 = 0$. Тогда базисные переменные $x_1 = -1/2$, $x_2 = 2$ и мы получаем решение исходной системы

$$x_1 = -1/2, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0.$$

Это решение называется *базисным*. Базисные решения играют важную роль в линейном программировании.

Пример 5. Методом Гаусса решить систему

$$\begin{cases} +3x_1 -2x_2 +6x_3 +4x_4 -5x_5 = -7 \\ +1x_1 -1x_2 +3x_3 +3x_4 -3x_5 = -5 \\ -1x_1 +2x_2 -3x_3 -2x_4 +4x_5 = +4 \\ -1x_1 +1x_2 +1x_3 +5x_4 -1x_5 = -7 \\ +4x_1 -1x_2 +4x_3 -1x_4 -1x_5 = +1 \end{cases}.$$

Решение. С помощью элементарных преобразований получим единичную матрицу в левой части расширенной матрицы. Имеем

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & -2 & 6 & 4 & -5 & -7 \\ 1 & -1 & 3 & 3 & -3 & -5 \\ -1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 5 & -1 & -7 \\ 4 & -1 & 4 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} \boxed{1} & -1 & 3 & 3 & -3 & -5 \\ 3 & -2 & 6 & 4 & -5 & -7 \\ -1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 5 & -1 & -7 \\ 4 & -1 & 4 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 3 & 3 & -3 & -5 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & -5 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & -4 & -12 \\ 0 & 3 & -8 & -13 & 11 & 21 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 3 & 3 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & -5 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & -4 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & -5 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & -5 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right).$$

Итак, исходная система эквивалентна системе

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad -2x_4 + x_5 = 3 \\ \quad x_2 \qquad\ + x_4 + x_5 = -1 \\ \qquad\quad x_3 + 2x_4 - x_5 = -3 \end{cases}.$$

Выражая базисные неизвестные $x_1,\ x_2,\ x_3$ через свободные неизвестные $x_4,\ x_5$, получим общее решение нашей системы

$$\begin{cases} x_1 = +3 + 2x_4 - 1x_5 \\ x_2 = -1 - 1x_4 - 1x_5 \\ x_3 = -3 - 2x_4 + 1x_5 \end{cases}.$$

2.5. Вычисление обратных матриц методом Гаусса

Пусть дана невырожденная матрица A порядка $n \times n$. Тогда обратная матрица является решением матричного уравнения

$$AX = E. \qquad (2.11)$$

Введем обозначения для столбцов матриц X и E

$$X = \big(X_1|X_2|\ldots|X_n\big), \quad E = \big(E_1|E_2|\ldots|E_n\big).$$

Теперь уравнение (2.11) можно записать в виде

$$A\big(X_1|X_2|\ldots|X_n\big) = \big(E_1|E_2|\ldots|E_n\big).$$

Отсюда

$$\big(AX_1|AX_2|\ldots|AX_n\big) = \big(E_1|E_2|\ldots|E_n\big),$$

что эквивалентно обычным системам линейных алгебраических уравнений

$$AX_1 = E_1,\ AX_2 = E_2,\ \ldots,\ AX_n = E_n.$$

У этих систем отличаются только правые части, а матрицы этих систем совпадают с матрицей A. Поэтому решение этих систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса можно объединить, рассмотрев такую расширенную матрицу

$$\big(A|E\big). \tag{2.12}$$

Мы приходим к следующему алгоритму вычисления обратной матрицы:

а) записываем расширенную матрицу (2.12);

б) с помощью элементарных операций над строками расширенной матрицы получаем на месте матрицы A единичную матрицу;

в) на месте матрицы E получится обратная матрица A^{-1}.

Пример 1. Найти матрицу A^{-1}, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right).$$

Отсюда следует, что

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Вычислить обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & 3 & 0 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -5 & 5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 5 & 10 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -5 & 0 & 4 & 2 & -3 \\ 0 & -15 & 0 & 9 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -15 & 15 & 0 & -12 & -6 & 9 \\ 0 & -15 & 0 & 9 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -15 & 0 & 0 & -3 & -9 & 6 \\ 0 & -15 & 0 & 9 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/15 & 9/15 & -6/15 \\ 0 & 1 & 0 & -9/15 & 3/15 & 3/15 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{array}\right).$$

Таким образом,

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 3/15 & 9/15 & -6/15 \\ -9/15 & 3/15 & 3/15 \\ 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 & -2/5 \\ -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

2.6. Структура множества решений однородной системы линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим однородную (все правые части уравнений равны нулю) систему линейных алгебраических уравнений из m уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \ \ddots \ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}. \tag{2.13}$$

Такая система **всегда** имеет решение, например $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

С каждым решением этой системы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ свяжем столбец

$$\mathbf{x} = \mathrm{col}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

и рассмотрим множество всех таких столбцов

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{z}=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \ldots$$

Нулевой столбец имеет вид $\mathbf{0} = \mathrm{col}\,(0, 0, \ldots, 0)$. Операции сложения столбцов и умножения столбцов на числа задаются формулами

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \qquad \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Столбец $\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{x}_k$ называется линейной комбинацией столбцов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ с числовыми коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$.

Любая линейная комбинация решений однородной системы линейных алгебраических уравнений (2.13) снова является решением системы (2.13).

Столбцы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ называются линейно независимыми, если

$$\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0.$$

Определение 2.4. Пусть ранг матрицы системы линейных алгебраических уравнений (2.13) равен r и $k = n - r$. Линейно независимые решения $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ системы линейных алгебраических уравнений (2.13) называются *фундаментальной системой решений.*

Теорема 2.5. *Пусть ранг матрицы системы линейных алгебраических уравнений* (2.13) *равен r и $k = n - r$. Тогда:*

а) у системы линейных алгебраических уравнений (2.13) *существует фундаментальная система решений*

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k;$$

б) множество всех решений системы линейных алгебраических уравнений (2.13) *задается формулой*

$$\mathbf{x} = C_1\mathbf{x}_1 + C_2\mathbf{x}_2 + \ldots + C_k\mathbf{x}_k,$$

где $C_1, C_2, \ldots C_k$ – произвольные константы. Другими словами, все решения системы (2.13) *являются линейными комбинациями фундаментальной системы решений.*

Для построения фундаментальной системы решений целесообразно воспользоваться методом Гаусса.

Пример 1. Найти фундаментальную систему решений и описать множество всех решений однородной системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} +3x_1 & -2x_2 & +1x_3 = 0 \\ -2x_1 & +2x_2 & -2x_3 = 0 \\ +1x_1 & -1x_2 & +1x_3 = 0 \end{cases}.$$

Решение. Применим метод Гаусса. Имеем

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Таким образом, исходная система линейных алгебраических уравнений эквивалентна системе

$$\begin{cases} x_1 & & -1x_3 & = 0 \\ & x_2 & -2x_3 & = 0 \end{cases}.$$

Общее решение нашей системы имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases}.$$

Пусть свободная переменная $x_3 = C_1$. Отсюда и из общего решения имеем $x_1 = C_1,\ x_2 = 2C_1$. Последние равенства можно записать в векторном виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ 2C_1 \\ C_1 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что единственный столбец

$$\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

задает фундаментальную систему решений и все решения исходной системы задаются формулой

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь C_1 – произвольная постоянная.

Замечание. Как видим, для решения однородной системы нет необходимости применять метод Гаусса к расширенной матрице системы (матрица системы расширяется столбцом нулей). Поэтому для решения системы линейных однородных уравнений достаточно применить метод Гаусса к матрице системы.

Пример 2. Найти фундаментальную систему решений и описать множество всех решений однородной системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -2x_1 & -1x_2 & -3x_3 & +6 = 0 \\ +1x_1 & +1x_2 & +2x_3 & -4 = 0 \\ +2x_1 & +2x_2 & +4x_3 & -8 = 0 \end{cases}.$$

Решение. Применим метод Гаусса. Получим

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & 4 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, исходная система линейных алгебраических уравнений эквивалентна системе

$$\begin{cases} x_1 & & +x_3 & -2x_4 & = 0 \\ & x_2 & +x_3 & -2x_4 & = 0 \end{cases}.$$

Выразим базисные переменные $x_1,\ x_2$ через свободные переменные $x_3,\ x_4$. Получим общее решение нашей системы

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 + 2x_4 \\ x_2 = -x_3 + 2x_4 \end{cases}.$$

Зададим свободным переменным конкретные значения $x_3 = C_1,\ x_4 = C_2$. Отсюда и из общего решения имеем $x_1 = -C_1 + 2C_2,\ x_2 = -C_1 + 2C_2$. Последние равенства можно записать в векторном виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_1 & +2C_2 \\ -C_1 & +2C_2 \\ C_1 & \\ & C_2 \end{pmatrix} = C_1 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x_1}} + C_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x_2}}.$$

В этой формуле столбцы

$$\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{x_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

являются линейно независимыми решениями исходной системы (проверьте это!). Их количество равно разности между числом неизвестных $n = 4$ и рангом матрицы системы $r = 2$. По теореме 2.5. столбцы $\mathbf{x_1},\ \mathbf{x_2}$ являются фундаментальной системой решений. Следовательно, все решения исходной системы задаются формулой

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь $C_1,\ C_2$ – произвольные константы.

Пример 3. Найти фундаментальную систему решений и описать множество всех решений однородной системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -2x_1 -3x_2 -8x_3 -2x_4 -5x_5 = 0 \\ +1x_1 +2x_2 +5x_3 +2x_4 +3x_5 = 0 \\ -2x_1 -1x_2 -4x_3 +2x_4 -3x_5 = 0 \\ -2x_1 -3x_2 -8x_3 -2x_4 -5x_5 = 0 \end{cases}.$$

Решение. Для расширенной матрицы этой системы имеем

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -8 & -2 & -5 \\ 1 & 2 & 5 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & -4 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & -8 & -2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда,
$$\begin{cases} x_1 \quad +x_3 -2x_4 +x_5 &= 0 \\ \quad x_2 +2x_3 +2x_4 +x_5 &= 0 \end{cases}.$$
Общее решение нашей системы имеет вид
$$\begin{cases} x_1 = \quad -x_3 +2x_4 -x_5 \\ x_2 = -2x_3 -2x_4 -x_5 \end{cases}.$$
Пусть $x_3 = C_1,\ x_4 = C_2,\ x_5 = C_3$. Тогда
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_1 +2C_2 -C_3 \\ -2C_1 -2C_2 -C_3 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = C_1 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x_1}} + C_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x_2}} + C_3 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x_3}}.$$
В этой формуле столбцы $\mathbf{x_1},\ \mathbf{x_2},\ \mathbf{x_3}$ являются линейно независимыми решениями исходной системы. Их количество равно разности между числом неизвестных $n = 5$ и рангом матрицы системы $r = 3$. По теореме 2.5. столбцы $\mathbf{x_1},\ \mathbf{x_2},\ \mathbf{x_3}$ являются фундаментальной системой решений. Следовательно, все решения исходной системы задаются формулой
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
В этой формуле $C_1,\ C_2,\ C_3$ – произвольные константы.

2.7. Структура множества решений неоднородной системы линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим совместную неоднородную (не все правые части уравнений равны нулю) систему линейных алгебраических уравнений из m уравнений с n неизвестными
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \ddots \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}. \tag{2.14}$$

Вместе с этой неоднородной системой мы всегда будем рассматривать соответствующую ей однородную систему. Она получается заменой нулями правых частей уравнений в (2.14):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 \ + \ a_{12}x_2 \ + \ldots + \ a_{1n}x_n \ = 0 \\ a_{21}x_1 \ + \ a_{22}x_2 \ + \ldots + \ a_{2n}x_n \ = 0 \\ \ \vdots \quad \ \vdots \quad \ \vdots \quad \ \vdots \ \ddots \ \vdots \quad \ \vdots \quad \vdots \ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}. \tag{2.15}$$

Теорема 2.6. *Пусть неоднородная система линейных алгебраических уравнений* (2.14) *совместна, ранг матрицы однородной системы линейных алгебраических уравнений* (2.15) *равен* r *и* $k = n - r$. *И пусть, далее,* $\tilde{\mathbf{x}}$ *обозначает некоторое (частное) решение системы линейных алгебраических уравнений* (2.14) *и* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ *обозначает фундаментальную систему решений для* (2.15).

Тогда множество всех решений системы линейных алгебраических уравнений (2.14) *задается формулой*

$$\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}} + C_1\mathbf{x}_1 + C_2\mathbf{x}_2 + \ldots + C_k\mathbf{x}_k, \tag{2.16}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_k$ *– произвольные константы.*

Для описания множества всех решений с помощью формулы (2.16) целесообразно воспользоваться методом Гаусса.

Пример 1. С помощью формулы (2.16) дать описание множества всех решений неоднородной системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -2x_1 \ -2x_2 \ -2x_3 = -8 \\ -2x_1 \ -3x_2 \ -4x_3 = -9 \\ +1x_1 \ +2x_2 \ +3x_3 = +5 \end{cases}.$$

Решение.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -2 & -8 \\ -2 & -3 & -4 & -9 \\ +1 & +2 & +3 & +5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Следовательно, общее решение нашей системы имеет вид

$$\begin{cases} x_1 \qquad = 3 + x_3 \\ \qquad x_2 = 1 - 2x_3 \end{cases}.$$

Пусть в этих формулах $x_3 = C_1$. Тогда $x_1 = 3 + C_1,\ x_2 = 1 - 2C_1$. Поэтому

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & +1C_1 \\ 1 & -2C_1 \\ & C_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{x}}} + C_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x_1}}.$$

Пример 2. С помощью формулы (2.16) дать описание множества всех решений неоднородной системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -3x_1 -7x_2 -6x_3 -5x_4 +4x_5 = +1 \\ +1x_1 +2x_2 +2x_3 +1x_4 -1x_5 = -1 \\ -3x_1 -2x_2 -4x_3 +3x_4 +1x_5 = +5 \\ +1x_1 +3x_2 +3x_3 +2x_4 -1x_5 = -2 \end{cases}.$$

Решение.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -3 & -7 & -6 & -5 & +4 & +1 \\ +1 & +2 & +2 & +1 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & -4 & +3 & +1 & +5 \\ +1 & +3 & +3 & +2 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Общее решение нашей системы имеет вид

$$\begin{cases} x_1 & & & = & 1 & +1x_4 & +1x_5 \\ & x_2 & & = & 2 & -2x_4 & +1x_5 \\ & & x_3 & = & -3 & +1x_4 & -1x_5 \end{cases}.$$

Пусть $x_4 = C_1,\ x_5 = C_2$. Тогда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & +1C_1 & +1C_2 \\ 2 & -2C_1 & +1C_2 \\ -3 & +1C_1 & -1C_2 \\ & C_1 & \\ & & C_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{x}}} + C_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x_2}} + C_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x_3}}.$$

2.8. Линейные матричные уравнения

Рассмотрим примеры решения простейших линейных матричных уравнений.

Пример 1. Найти 2×2 матрицы X, которые удовлетворяют следующим матричным уравнениям:

$$a) \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}; \quad b) \quad X \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix};$$

$$c)\quad \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

а) Умножим наше уравнение слева на матрицу

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

Получим

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Умножим наше уравнение справа на матрицу

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Получим

$$X = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) Умножим наше уравнение слева на матрицу

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix},$$

а справа – на матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получим

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Найти 2×3 матрицу X, которая удовлетворяет следующему матричному уравнению

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 4 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ -4 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Умножим наше уравнение слева на матрицу

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},$$

а справа – на матрицу

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 4 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 0 & -3 & -4 \\ -1 & -5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Получим

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ -4 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 0 & -3 & -4 \\ -1 & -5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.9. О выборе базисных неизвестных в системах линейных уравнений

Рассмотрим совместную систему из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2m}x_m + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \ \ddots \ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \ \ddots \ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mm}x_m + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}. \tag{2.17}$$

При решении таких систем мы считали, что $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \tilde{A} = m$ и отличен от нуля минор, находящийся в первых m строках и первых m столбцах расширенной матрицы системы $\tilde{A}$. Выполнения этих условий всегда можно добиться отбрасыванием нулевых строк расширенной матрицы системы, возникающих при реализации метода Гаусса, и изменением нумерации неизвестных $x_1, \ldots, x_n$. Далее, с помощью метода Гаусса мы получали единичную матрицу в левой части расширенной матрицы системы $\tilde{A}$. Тем самым мы преобразовывали систему (2.17) в эквивалентную систему, в которой x_1 содержится только в первом уравнении, x_2 содержится только во втором уравнении и т.д., x_m содержится только во m-ом уравнении. После этого, выражая базисные неизвестные $x_1, \ldots, x_m$ через свободные переменные $x_{m+1}, \ldots, x_n$, мы получали общее решение исходной системы (2.17).

Однако такой подход не всегда удобен. Часто более рациональной оказывается такая схема вычислений. Выберем произвольные m столбцов $j_1, j_2, \ldots, j_m$ матрицы A так, чтобы образованный этими столбцами и всеми строками минор был базисным (отличным от нуля). Далее, с помощью элементарных преобразований приведем матрицу $\tilde{A}$ к такому виду, когда в каждом столбце $j_1, j_2, \ldots, j_m$ только один элемент равен 1, а остальные элементы равны нулю. Выразив базисные неизвестные $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m}$ через остальные (свободные) неизвестные, мы получим общее решение нашей системы линейных алгебраических уравнений. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} +3x_1 -6x_2 +1x_3 -5x_4 +3x_5 +1x_6 = -2 \\ +3x_1 -7x_2 +3x_3 -3x_4 +4x_5 +4x_6 = -3 \\ -2x_1 +4x_2 -1x_3 +3x_4 -2x_5 -1x_6 = +1 \\ +2x_1 -5x_2 +3x_3 -1x_4 +3x_5 +4x_6 = -2 \end{cases}, \tag{2.18}$$

выразив базисные неизвестные $x_3\,, x_5,\ x_6$ через свободные $x_1\,, x_2,\ x_4$.

Решение. С помощью элементарных преобразований будем получать нулевые элементы над и под элементами, обведенными в прямоугольную рамку. Имеем

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & \boxed{1} & -5 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & -7 & 3 & -3 & 4 & 4 & -3 \\ -2 & 4 & -1 & 3 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 3 & -1 & 3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 & -5 & 3 & 1 & -2 \\ -6 & 11 & 0 & 12 & -5 & \boxed{1} & 3 \\ 1 & -2 & 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ -7 & 13 & 0 & 14 & -6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 9 & -17 & 1 & -17 & 8 & 0 & -5 \\ -6 & 11 & 0 & 12 & -5 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & -2 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, исходная система эквивалентна системе

$$\begin{cases} +1x_1 -1x_2 +1x_3 -1x_4 +0x_5 +0x_6 = +3 \\ -1x_1 +1x_2 +0x_3 +2x_4 +0x_5 +1x_6 = -2 \\ +1x_1 -2x_2 +0x_3 -2x_4 +1x_5 +0x_6 = -1 \end{cases}$$

и общее решение имеет вид

$$\begin{cases} x_3 = +3 - x_1 + x_2 + x_4 \\ x_5 = -1 - x_1 + 2x_2 + 2x_4 \\ x_6 = -2 + x_1 - x_2 - 2x_4 \end{cases}. \tag{2.19}$$

Пример 2. Найти общее решение системы линейных алгебраических уравнений (2.18), выразив базисные неизвестные $x_2\,, x_3,\ x_5$ через свободные неизвестные $x_1\,, x_4,\ x_6$.

Решение. Воспользуемся преобразованной расширенной матрицей исходной системы, полученной в примере 1. Имеем

$$\tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем общее решение системы (2.18)

$$\begin{cases} x_2 = -2 + x_1 - 2x_4 - x_6 \\ x_3 = 1 - x_4 - x_6 \\ x_5 = -5 + x_1 - 2x_4 - 2x_6 \end{cases}. \qquad (2.20)$$

Следует отметить, что формулы (2.19) и (2.20) являются разными по форме описаниями одной и той же совокупности – бесконечного множества решений системы (2.18). Переход от формул (2.19) к формулам (2.20) называется исключением базисной неизвестной x_6 за счет включения свободной неизвестной x_2. Такие «исключения-включения» являются основным моментом при решении задач линейного программирования симплекс-методом.

2.10. Упражнения к главе 2

2.1. По формулам Крамера решить системы линейных алгебраических уравнений:

$$a)\ \begin{cases} +4x_1 +2x_2 = -6 \\ -2x_1 -2x_2 = +2 \end{cases}; \quad b)\ \begin{cases} 3x_1 +1x_2 = 5 \\ 1x_1 +1x_2 = 3 \end{cases}; \quad c)\ \begin{cases} -4x_1 +1x_2 = -3 \\ +4x_1 -2x_2 = +2 \end{cases};$$

$$d)\ \begin{cases} +3x_1 -4x_2 -2x_3 = -1 \\ -2x_1 +1x_2 +1x_3 = -2 \\ -4x_1 +4x_2 +2x_3 = -2 \end{cases}; \qquad e)\ \begin{cases} -1x_1 -4x_2 -1x_3 = +3 \\ +2x_1 +6x_2 -2x_3 = -2 \\ +2x_1 +2x_2 -1x_3 = +3 \end{cases};$$

$$f)\ \begin{cases} -2x_1 +4x_2 -2x_3 = +4 \\ +2x_1 +3x_2 -2x_3 = -6 \\ +2x_1 +1x_2 -1x_3 = -5 \end{cases}; \qquad g)\ \begin{cases} -3x_1 +2x_2 +1x_3 = +5 \\ +2x_1 -3x_2 -2x_3 = -1 \\ -1x_1 +2x_2 +1x_3 = -1 \end{cases};$$

$$h)\ \begin{cases} 2x_1 -6x_2 -1x_3 +1x_4 = +8 \\ 1x_1 -2x_2 +3x_3 +1x_4 = -2 \\ 3x_1 -2x_2 -1x_3 +1x_4 = -2 \\ 2x_1 -1x_2 +1x_3 +1x_4 = -4 \end{cases}; \quad i)\ \begin{cases} +4x_1 -6x_2 +2x_3 +2x_4 = -6 \\ -5x_1 +3x_2 -4x_3 -2x_4 = -5 \\ -6x_1 +2x_2 -4x_3 -2x_4 = -8 \\ -2x_1 +2x_2 -1x_3 -1x_4 = +1 \end{cases};$$

$$j)\ \begin{cases} -1x_1 -2x_2 +1x_3 +1x_4 = +4 \\ +3x_1 +4x_2 -3x_3 -2x_4 = -6 \\ +2x_1 -2x_2 +6x_3 +2x_4 = +4 \\ -1x_1 -2x_2 +2x_4 +1x_4 = +3 \end{cases}; \quad k)\ \begin{cases} +4x_1 -5x_2 +6x_3 +2x_4 = -6 \\ +5x_1 -1x_2 +2x_3 -2x_4 = -8 \\ -1x_1 -6x_2 +6x_3 +4x_4 = +4 \\ +1x_1 +2x_2 -2x_3 -2x_4 = -2 \end{cases}.$$

2.2. Методом обратной матрицы решить системы линейных алгебраических уравнений:

$$a)\ \begin{cases} -4x_1 -3x_2 = +1 \\ +3x_1 +1x_2 = -2 \end{cases};\quad b)\ \begin{cases} -1x_1 -1x_2 = 1 \\ -2x_1 -4x_2 = 6 \end{cases};\quad c)\ \begin{cases} -3x_1 +3x_2 = 9 \\ -2x_1 +1x_2 = 5 \end{cases};$$

$$d)\ \begin{cases} +2x_1 -1x_2 -1x_3 = -3 \\ -1x_1 +3x_2 -1x_3 = +8 \\ +1x_1 +3x_2 -2x_3 = +7 \end{cases};\qquad e)\ \begin{cases} -2x_1 -2x_2 -1x_3 = -6 \\ -2x_1 -1x_2 +1x_3 = -7 \\ +1x_1 +3x_2 +2x_3 = -6 \end{cases};$$

$$f)\ \begin{cases} +1x_1 -2x_2 -1x_3 = -8 \\ -2x_1 +3x_2 -1x_3 = +5 \\ +2x_1 -1x_2 +3x_3 = +5 \end{cases};\qquad g)\ \begin{cases} +2x_1 -1x_2 +1x_3 = -6 \\ +1x_1 -1x_2 +3x_3 = +1 \\ -1x_1 -1x_2 +4x_3 = +9 \end{cases}.$$

2.3. Методом Гаусса найти единственные решения систем линейных алгебраических уравнений:

$$a)\ \begin{cases} 1x_1 -1x_2 = -4 \\ 2x_1 -1x_2 = -7 \end{cases};\quad b)\ \begin{cases} 1x_1 -1x_2 = +2 \\ -2x_1 +3x_2 = -7 \end{cases};\quad c)\ \begin{cases} 1x_1 -2x_2 = -5 \\ 2x_1 -3x_2 = -9 \end{cases};$$

$$d)\ \begin{cases} +1x_1 +5x_2 -1x_3 = -5 \\ -2x_1 -9x_2 +3x_3 = +6 \\ +1x_1 +2x_2 -3x_3 = +4 \end{cases};\qquad e)\ \begin{cases} +1x_1 -2x_2 -2x_3 = +3 \\ -3x_1 +7x_2 +9x_3 = -6 \\ +2x_1 -6x_2 -9x_3 = +2 \end{cases};$$

$$f)\ \begin{cases} +1x_1 +4x_2 +2x_3 = +1 \\ +1x_1 +5x_2 -1x_3 = -3 \\ -2x_1 -8x_2 -3x_3 = -1 \end{cases};\qquad g)\ \begin{cases} +1x_1 +3x_2 +4x_3 = +2 \\ -2x_1 -5x_2 -7x_3 = -2 \\ +1x_1 +4x_2 +6x_3 = +3 \end{cases};$$

$$h)\ \begin{cases} +1x_1 +1x_2 +3x_3 -1x_4 = -4 \\ +1x_1 +2x_2 -1x_3 +1x_4 = -6 \\ -2x_1 -2x_2 -5x_3 -1x_4 = +3 \\ +1x_1 +1x_2 +2x_3 +3x_4 = +3 \end{cases};\quad i)\ \begin{cases} +1x_1 -1x_2 -2x_3 -2x_4 = -1 \\ +3x_1 -2x_2 -4x_3 -3x_4 = -5 \\ +4x_1 -1x_2 -1x_3 +2x_4 = -9 \\ -2x_1 +1x_2 +6x_3 +6x_4 = +6 \end{cases};$$

$$j)\ \begin{cases} +1x_1 +3x_2 +2x_3 -2x_4 = +5 \\ -1x_1 -2x_2 +3x_3 -1x_4 = -2 \\ -2x_1 -4x_2 +7x_3 -5x_4 = +1 \\ -1x_1 -1x_2 +8x_3 -3x_4 = -1 \end{cases};\quad k)\ \begin{cases} +1x_1 -1x_2 -4x_3 -1x_4 = +2 \\ +2x_1 -1x_2 -9x_3 -4x_4 = +1 \\ -1x_1 -2x_2 -4x_3 -2x_4 = -3 \\ -2x_1 -6x_2 -8x_3 -7x_4 = -7 \end{cases};$$

$$l)\ \begin{cases} +1x_1 -4x_2 -2x_3 -3x_4 +1x_5 = -5 \\ -3x_1 +13x_2 \quad 8x_3 +5x_4 -1x_5 = +16 \\ +1x_1 -7x_2 -7x_3 +4x_4 -1x_5 = -3 \\ -3x_1 +15x_2 +10x_3 +8x_4 -7x_5 = +3 \\ +1x_1 -2x_2 +3x_3 -19x_4 +16x_5 = +20 \end{cases};$$

$$m)\ \begin{cases} +1x_1 -2x_2 -2x_3 -2x_4 +4x_5 = -4 \\ -3x_1 +7x_2 +3x_3 +11x_4 -13x_5 = +10 \\ +2x_1 -1x_2 -12x_3 +9x_4 +2x_5 = -18 \\ +1x_1 -3x_2 +2x_3 -8x_4 +5x_5 = -1 \\ -2x_1 +6x_2 -5x_3 +19x_4 -3x_5 = 12 \end{cases};$$

$$n)\ \begin{cases} +1x_1 +4x_2 -1x_3 +4x_4 -2x_5 = +5 \\ -2x_1 -7x_2 +6x_3 -3x_4 +6x_5 = -6 \\ +3x_1 +9x_2 -14x_3 +2x_4 -10x_5 = -2 \\ +4x_1 +14x_2 -12x_3 +7x_4 -8x_5 = +7 \\ -2x_1 -10x_2 -5x_3 -16x_4 -9x_5 = -9 \end{cases};$$

$$o)\ \begin{cases} +1x_1 -4x_2 -3x_3 -4x_4 \quad 1x_5 = -5 \\ -3x_1 +13x_2 +11x_3 +15x_4 -1x_5 = +12 \\ -3x_1 +10x_2 +6x_3 +5x_4 -3x_5 = +20 \\ +3x_1 -14x_2 -15x_3 -15x_4 -13x_5 = -5 \\ -2x_1 +11x_2 +15x_3 +16x_4 +9x_5 = +1 \end{cases};$$

$$p)\ \begin{cases} +1x_1 +3x_2 +5x_3 +5x_4 +2x_5 +1x_6 = +1 \\ +2x_1 +7x_2 +15x_3 +9x_4 +3x_5 +5x_6 = +7 \\ -1x_1 -2x_2 +1x_3 -3x_4 -2x_5 +4x_6 = +7 \\ -3x_1 -6x_2 +2x_3 -11x_4 -8x_5 +13x_6 = +17 \\ +2x_1 +5x_2 +5x_3 +13x_4 +4x_5 +3x_6 = -4 \\ -3x_1 -9x_2 -11x_3 -4x_4 +1x_5 -1x_6 = +13 \end{cases};$$

$$q)\ \begin{cases} +1x_1 +3x_2 +3x_3 -3x_4 -4x_5 +3x_6 = -1 \\ -1x_1 -2x_2 -7x_3 +5x_4 -1x_5 -4x_6 = -2 \\ +2x_1 +8x_2 -1x_3 -4x_4 -13x_5 +2x_6 = -3 \\ +2x_1 +3x_2 +18x_3 -11x_4 +10x_5 +12x_6 = 11 \\ +4x_1 +12x_2 +12x_3 -12x_4 -15x_5 +9x_6 = -6 \\ +2x_1 +4x_2 +17x_3 -18x_4 +9x_5 +3x_6 = 16 \end{cases}.$$

2.4. Методом Гаусса найти общие решения систем линейных алгебраических уравнений:

$$a)\ \begin{cases} -3x_1 -2x_2 -1x_3 = -7 \\ +1x_1 +1x_2 +1x_3 = +2 \end{cases}; \qquad b)\ \begin{cases} -3x_1 -2x_2 -5x_3 +4x_4 = +7 \\ +1x_1 +1x_2 +2x_3 -1x_4 = -2 \end{cases};$$

$$c)\ \begin{cases} 3x_1 +4x_2 +9x_3 -8x_4 = 6 \\ 1x_1 +1x_2 +4x_3 -5x_4 = 4 \\ 1x_1 +1x_2 +5x_3 -7x_4 = 5 \end{cases}; \quad d)\ \begin{cases} -2x_1 +3x_2 -5x_3 -2x_4 +1x_5 = -7 \\ -3x_1 +5x_2 -4x_3 +5x_4 -3x_5 = -4 \\ +1x_1 -1x_2 +5x_3 +7x_4 -4x_5 = +8 \end{cases};$$

$$e)\quad \begin{cases} +3x_1 -2x_2 +1x_3 = -9 \\ -2x_1 +2x_2 -2x_3 = +8 \\ +1x_1 -1x_2 +1x_3 = -4 \end{cases};\qquad f)\quad \begin{cases} -2x_1 -3x_2 +7x_3 -7x_4 = -3 \\ +3x_1 +3x_2 -9x_3 +9x_4 = +6 \\ +1x_1 +2x_2 -4x_3 +4x_4 = +1 \end{cases};$$

$$g)\quad \begin{cases} -2x_1 +3x_2 +7x_3 +7x_4 = -3 \\ -3x_1 +1x_2 +7x_3 +7x_4 = -8 \\ +1x_1 -1x_2 -3x_3 -3x_4 = +2 \\ -2x_1 +1x_2 +5x_3 +5x_4 = -5 \end{cases};\quad h)\quad \begin{cases} +4x_1 -7x_2 -9x_3 +8x_4 = +7 \\ -3x_1 +7x_2 +6x_3 -7x_4 = -1 \\ -1x_1 +3x_2 +1x_3 -2x_4 = +2 \\ +1x_1 -2x_2 -2x_3 +2x_4 = +1 \end{cases};$$

$$i)\quad \begin{cases} -3x_1 +4x_2 -6x_3 -1x_4 +8x_5 = -9 \\ +3x_1 -4x_2 +6x_3 +1x_4 -8x_5 = +9 \\ +1x_1 -1x_2 +3x_3 +2x_4 -3x_5 = +7 \\ -2x_1 +3x_2 -2x_3 +2x_4 +4x_5 = +1 \end{cases};$$

$$j)\quad \begin{cases} -2x_1 +3x_2 -5x_3 +3x_4 = -7 \\ +1x_1 -2x_2 +3x_3 -1x_4 = +5 \\ -2x_1 +3x_2 -4x_3 +2x_4 = -5 \\ -1x_1 +4x_2 -3x_3 -3x_4 = -7 \\ +1x_1 -3x_2 +3x_3 +1x_4 = +6 \end{cases};$$

$$k)\quad \begin{cases} +2x_1 +5x_2 -4x_3 -9x_4 -1x_5 = +3 \\ -1x_1 -3x_2 +4x_3 +9x_4 +2x_5 = -4 \\ +1x_1 +1x_2 -3x_3 -5x_4 -3x_5 = +1 \\ -2x_1 -1x_2 +6x_3 +9x_4 +7x_5 = -1 \\ +2x_1 -1x_2 -5x_3 -5x_4 -8x_5 = -2 \end{cases}.$$

2.5. С помощью метода Гаусса убедиться в том, что следующие системы линейных алгебраических уравнений несовместны (объяснить полученные результаты с помощью теоремы Кронекера-Капелли):

$$a)\quad \begin{cases} 3x_1 -2x_2 +8x_3 = -9 \\ 1x_1 -3x_2 +5x_3 = +8 \\ 2x_1 -2x_2 +6x_3 = +3 \\ 1x_1 -1x_2 +3x_3 = -3 \end{cases};\qquad b)\quad \begin{cases} +2x_1 -5x_2 +6x_3 +9x_4 = +7 \\ +1x_1 -3x_2 +4x_3 +5x_4 = +2 \\ -1x_1 +2x_2 -2x_3 -4x_4 = -3 \\ -1x_1 +4x_2 -6x_3 -6x_4 = -2 \end{cases};$$

$$c)\quad \begin{cases} 3x_1 +5x_2 -1x_3 = +4 \\ 1x_1 +1x_2 -1x_3 = -4 \\ 3x_1 +4x_2 -2x_3 = -7 \end{cases};\qquad d)\quad \begin{cases} -2x_1 -1x_2 -3x_3 -6x_4 = -1 \\ +1x_1 +1x_2 +1x_3 +4x_4 = +2 \\ +1x_1 +1x_2 +1x_3 +4x_4 = +8 \end{cases}.$$

2.6. С помощью метода Гаусса найти обратные матрицы:

$$a)\ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix};\quad b)\ \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix};\quad c)\ \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix};\quad d)\ \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$e)\ \begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix};\quad f)\ \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix};\quad g)\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix};$$

$$h)\ \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix};\quad i)\ \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -5 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

2.7. Найти фундаментальную систему решений и описать множество всех решений следующих однородных систем линейных алгебраических уравнений:

$$a)\ \begin{cases} 2x_1 + 1x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 - 1x_2 + 3x_3 = 0 \\ 1x_1 - 1x_2 + 1x_3 = 0 \end{cases};\quad b)\ \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 8x_4 = 0 \\ 1x_1 + 2x_2 - 1x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 8x_4 = 0 \end{cases};$$

$$c)\ \begin{cases} -3x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 8x_4 - 8x_5 = 0 \\ +3x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 8x_5 = 0 \\ +1x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases};\quad d)\ \begin{cases} +3x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 0 \\ +4x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 0 \\ -1x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases};$$

$$e)\ \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 6x_4 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - 7x_3 - 2x_4 = 0 \\ 1x_1 + 1x_2 - 2x_3 - 1x_4 = 0 \\ 1x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases};\ f)\ \begin{cases} -1x_1 + 1x_2 + 2x_3 - 1x_4 + 2x_5 = 0 \\ +1x_1 - 1x_2 - 2x_3 + 1x_4 - 2x_5 = 0 \\ -3x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ +2x_1 - 5x_2 - 7x_3 + 8x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases};$$

$$g)\ \begin{cases} -2x_1 - 1x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 + 1x_6 = 0 \\ -1x_1 + 1x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 1x_5 + 4x_6 = 0 \\ +1x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 9x_4 + 3x_5 + 8x_6 = 0 \\ +1x_1 + 2x_2 + 1x_3 - 6x_4 + 2x_5 + 5x_6 = 0 \end{cases}.$$

2.8. Найти частное решение неоднородного уравнения, фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения и описать множество всех решений следующих систем линейных алгебраических уравнений:

$$a)\ \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -9 \\ -1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -5 \\ +1x_1 - 1x_2 - 1x_3 = +4 \end{cases};\quad b)\ \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 - 4x_3 + 8x_4 = +4 \\ 1x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = +1 \\ 1x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 1x_4 = +5 \end{cases};$$

$$c)\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 1x_4 - 1x_5 = -9 \\ 1x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 1x_4 + 1x_4 = -6 \\ 1x_1 + 1x_2 + 2x_3 - 1x_4 - 1x_4 = -4 \end{cases};$$

$$d)\quad \begin{cases} -3x_1 +4x_2 -2x_3 = +5 \\ +1x_1 -4x_2 -2x_3 = +1 \\ -2x_1 +2x_2 -2x_3 = +4 \\ +1x_1 -1x_2 +1x_3 = -2 \end{cases};\quad e)\quad \begin{cases} +2x_1 -3x_2 +8x_3 +4x_4 = +3 \\ +1x_1 -2x_2 +5x_3 +3x_4 = +1 \\ -1x_1 +2x_2 -5x_3 -3x_4 = -1 \\ -2x_1 +2x_2 -6x_3 -2x_4 = -4 \end{cases};$$

$$f)\quad \begin{cases} -3x_1 -2x_2 -4x_3 +4x_4 +4x_5 = -3 \\ +3x_1 +3x_2 +3x_3 -3x_4 -3x_5 = +6 \\ -1x_1 -3x_2 +1x_3 -1x_4 -1x_5 = -8 \\ +1x_1 +1x_2 +1x_3 -1x_4 -1x_5 = +2 \end{cases};$$

$$g)\quad \begin{cases} +2x_1 -2x_2 +3x_3 -5x_4 = -7 \\ -1x_1 +2x_2 -2x_3 +4x_4 = +6 \\ +3x_1 -2x_2 +2x_3 -8x_4 = -2 \\ +1x_1 -1x_2 +1x_3 -3x_4 = -2 \end{cases};$$

$$h)\quad \begin{cases} +1x_1 +3x_2 +2x_3 -4x_4 +6x_5 = +6 \\ +1x_1 +1x_2 +1x_3 -2x_4 +3x_5 = +1 \\ +2x_1 +3x_2 +2x_3 -6x_4 +7x_5 = +3 \\ -1x_1 -2x_2 -2x_3 +2x_4 -5x_5 = -5 \end{cases};$$

$$i)\quad \begin{cases} +3x_1 +4x_2 +4x_3 -7x_4 +3x_5 -3x_6 = -3 \\ -1x_1 -1x_2 -2x_3 +4x_4 -2x_5 +3x_6 = +1 \\ +1x_1 +1x_2 +3x_3 -6x_4 +3x_5 -5x_6 = -2 \\ +3x_1 +4x_2 +3x_3 -5x_4 +2x_5 -1x_6 = -2 \end{cases};$$

$$j)\quad \begin{cases} +3x_1 -5x_2 +2x_3 -9x_4 = +4 \\ +1x_1 -1x_2 -1x_3 -4x_4 = -3 \\ -1x_1 +6x_2 -4x_3 +4x_4 = -7 \\ +1x_1 -2x_2 +1x_3 -3x_4 = +2 \\ +2x_1 -1x_2 -2x_3 -7x_4 = -5 \end{cases};$$

$$k)\quad \begin{cases} -2x_1 +5x_2 -3x_3 -8x_4 -2x_5 = +6 \\ +3x_1 -7x_2 +7x_3 +6x_4 -3x_5 = -5 \\ +2x_1 -6x_2 +6x_3 +4x_4 -2x_5 = -6 \\ +1x_1 -2x_2 +1x_3 +4x_4 +1x_5 = -2 \\ -1x_1 +1x_2 +1x_3 -6x_4 -3x_5 = +1 \end{cases};$$

$$l)\quad \begin{cases} 2x_1 +5x_2 +5x_3 +2x_4 -4x_5 +2x_6 = -1 \\ 1x_1 +1x_2 +5x_3 -3x_4 -6x_5 +5x_6 = +6 \\ 1x_1 +2x_2 +2x_3 +1x_4 -2x_5 +1x_6 = -1 \\ 4x_1 +9x_2 +8x_3 +5x_4 -7x_5 +3x_6 = -5 \\ 1x_1 +2x_2 +2x_3 +1x_4 -2x_5 +1x_6 = -1 \end{cases}.$$

2.9. Решить матричные уравнения:

$$a)\ X\begin{pmatrix}-2&-1\\-3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&4\\-3&-1\end{pmatrix};\qquad b)\ X\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\1&-3\\-4&-3\end{pmatrix};$$

$$c)\ X\begin{pmatrix}-3&2&-2\\-2&1&-3\\-1&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-3&3&-2\\2&-1&2\end{pmatrix};\ d)\ X\begin{pmatrix}-4&-1&2\\-3&-1&1\\3&2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&-2&1\\-3&-3&-4\\4&2&-1\end{pmatrix};$$

$$e)\ \begin{pmatrix}1&-3\\-1&4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}3&-2&1\\-2&1&-4\end{pmatrix};\qquad f)\ \begin{pmatrix}2&3&-1\\-3&-4&1\\-1&-4&4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&1\\2&-2\end{pmatrix};$$

$$g)\ \begin{pmatrix}1&1\\3&4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\3&4&1\end{pmatrix};$$

$$h)\ \begin{pmatrix}-2&-1\\-3&-2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&-3&2\\3&-3&-1\end{pmatrix};$$

$$i)\ \begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-3&-3&-2\\-4&-3&-4\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}-3&-2\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-1\\4&3\\-2&4\end{pmatrix};$$

$$j)\ \begin{pmatrix}-4&-3&-3\\1&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}2&1\\-3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\-3&-2\\-3&-3\end{pmatrix};$$

$$k)\ \begin{pmatrix}-3&2&2\\-1&1&-1\\4&-4&3\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}-1&4\\-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\-1&-2\\4&2\end{pmatrix};$$

$$l)\ \begin{pmatrix}-2&-1&-4\\-1&1&3\\-3&1&2\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}-4&-3&-4\\-2&-2&-1\\3&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3&2\\-1&-2&1\\2&1&3\end{pmatrix}.$$

2.10. Найти общее решение для следующих систем линейных алгебраических уравнений (базисные неизвестные заданы!):

$a)\ \begin{cases}2x_1+1x_2+2x_3=-3\\2x_1-1x_2-1x_3=+4\end{cases},\ x_2,\ x_3$ – базисные;

$b)\ \begin{cases}1x_1+2x_2-1x_3+1x_4=4\\2x_1+1x_2+1x_3+1x_4=2\end{cases},\ x_2,\ x_4$ – базисные;

$c)\ \begin{cases}-1x_1-1x_2-1x_3+2x_4+1x_5=-2\\-2x_1-1x_2+1x_3-1x_4-2x_5=+4\end{cases},\ x_3,\ x_5$ – базисные;

$d)\quad \begin{cases} -1x_1 +1x_2 +2x_3 -1x_4 = +4 \\ +2x_1 +2x_2 +2x_3 -1x_4 = +3 \\ +2x_1 +1x_2 +1x_3 -1x_4 = -1 \end{cases}$, $x_2,\ x_3,\ x_4$ – базисные;

$e)\quad \begin{cases} +1x_1 -2x_2 -1x_3 +1x_4 -1x_5 = -4 \\ +2x_1 +1x_2 -1x_3 -1x_4 +2x_5 = +1 \\ -1x_1 -2x_2 +1x_3 +2x_4 -2x_5 = -4 \end{cases}$, $x_2,\ x_3,\ x_4$ – базисные;

$f)\quad \begin{cases} 1x_1 -1x_2 -2x_3 +1x_4 -1x_5 -1x_6 = +1 \\ 2x_1 -1x_2 -1x_3 -2x_4 -1x_5 -2x_6 = -1 \\ 1x_1 +2x_2 -2x_3 -1x_4 +1x_5 +2x_6 = -1 \end{cases}$, $x_2,\ x_5,\ x_5$ – базисные;

$g)\quad \begin{cases} -2x_1 -1x_2 -2x_3 +2x_4 +1x_5 = -2 \\ -2x_1 +2x_2 +1x_3 +1x_4 +2x_5 = -1 \\ -1x_1 +2x_2 +2x_3 +1x_4 +1x_5 = -1 \end{cases}$, $x_2,\ x_3,\ x_5$ – базисные.

ОТВЕТЫ

ГЛАВА 1

1.1. *a*) $\begin{pmatrix} -30 & 30 \\ 40 & -15 \end{pmatrix}$; *b*) $\begin{pmatrix} 25 & -45 \\ -30 & -15 \\ -45 & 15 \end{pmatrix}$. **1.2.** $\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -8 & -12 \end{pmatrix}$.

1.3. $\begin{pmatrix} 0 & -15 \\ -1 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$. **1.4.** *a*) $\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$; *b*) $\begin{pmatrix} -3 & -6 & -8 \\ 4 & -8 & -3 \end{pmatrix}$.

1.5. *a*) $\begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$; *b*) $\begin{pmatrix} -3 & -5 & -4 \\ 11 & 7 & 10 \\ 11 & 7 & 10 \end{pmatrix}$; *c*) $\begin{pmatrix} -9 & 4 & -5 \\ -9 & 4 & -5 \\ 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$; *e*) 14. **1.6.** $\begin{pmatrix} 2 & 19 & 38 \\ -23 & 17 & 37 \\ -16 & -18 & -20 \end{pmatrix}$.

1.7. *a*) 4; *b*) -43; *c*) -4; *d*) -92. **1.8.** 6. **1.9.** $-4 \cdot -10 \cdot -23$.

1.10. 3. **1.11.** $43 \cdot 54 \cdot 37$. **1.12.** -382. **1.13.** -45. **1.14.** 16.

1.15. *a*) 3; *b*) 24; *c*) 24.

1.16.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 1 & 2/3 \end{pmatrix}$; *b*) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2/3 & 1 \end{pmatrix}$; *c*) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; *d*) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1/3 & 2/3 & -4/3 \\ 1/3 & -4/3 & 5/3 \end{pmatrix}$; *f*) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/4 & 0 & -3/4 \\ -1/4 & 1 & 7/4 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -3/2 & -5/2 \\ 2 & -4 & -7 \end{pmatrix}$; *h*) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -4/5 & 16/5 \\ 0 & 2/5 & -3/5 \end{pmatrix}$;

i) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 13/3 & 7/3 & 5/3 \\ 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; *j*) $\begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 & -1/2 \\ -5/6 & -7/6 & 1/6 \\ 1/6 & -1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$.

1.17. *a*) 3; *b*) 2; *c*) 1; *d*) 3; *e*) 2; *f*) 1; *g*) 3; *h*) 2; *i*) 1.

ГЛАВА 2

2.1. $a)$ $\Delta = -4, \quad x_1 = -2, \quad x_2 = 1; \quad b)$ $\Delta = 2, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2;$
$c)$ $\Delta = 4, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 1; \quad d)$ $\Delta = 2, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 3;$
$e)$ $\Delta = -2, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 3;$
$f)$ $\Delta = 2, \quad x_1 = -3, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = -3;$
$g)$ $\Delta = -2, \quad x_1 = -3, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = 2;$
$h)$ $\Delta = -4, \quad x_1 = -2, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = -1, \quad x_4 = -1;$
$i)$ $\Delta = 4, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = -1;$
$j)$ $\Delta = -2, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = -1, \quad x_4 = 2;$
$k)$ $\Delta = -4, \quad x_1 = -2, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = -1, \quad x_4 = -1.$

2.2.

$a)$ $A^{-1} = \dfrac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} +1 & +3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}, \quad x_1 = -1,\, x_2 = 1;$

$b)$ $A^{-1} = \dfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad x_1 = 1,\, x_2 = -2;$

$c)$ $A^{-1} = \dfrac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad x_1 = -2,\, x_2 = 1;$

$d)$ $A^{-1} = \dfrac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -5 & 4 \\ -3 & -3 & 3 \\ -6 & -7 & 5 \end{pmatrix}, \quad x_1 = -1,\, x_2 = 2,\, x_3 = -1;$

$e)$ $A^{-1} = \dfrac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 1 & -3 \\ 5 & -3 & 4 \\ -5 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad x_1 = -1,\, x_2 = -3,\, x_3 = 2;$

$f)$ $A^{-1} = \dfrac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 7 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \\ -4 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad x_1 = -1,\, x_2 = 2,\, x_3 = 3;$

$g)$ $A^{-1} = \dfrac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -7 & 9 & -5 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad x_1 = -3,\, x_2 = 2,\, x_3 = 2.$

2.3. Для расширенных матриц исходных систем $\tilde{A}$ имеем:

$a)$ $\tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $b)$ $\tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$;

$c)$ $\tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

$d)$ $\tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$;

$$e)\ \ \tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$f)\ \ \tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$g)\ \ \tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$h)\ \ \tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$i)\ \ \tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix};$$

$$j)\ \ \tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix};$$

$$k)\ \ \tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & +1 \end{pmatrix};$$

$$l)\ \ \tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$m)\ \ \tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -2 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$n)\ \ \tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$o)\ \ \tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & -4 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$p)\ \ \tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 5 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$q)\ \ \tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -3 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & -5 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.4. Для расширенных матриц исходных систем $\tilde{A}$ имеем:

$$a)\ \ \tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$b)\ \ \tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$c)\ \ \tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$d)\ \ \tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 7 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & 12 & -7 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$e)\ \ \tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$f)\ \ \tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$g)\ \ \tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$h)\ \ \tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$i)\ \ \tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & -1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$j)\ \ \tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$k)\ \ \tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -5 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

2.5. Для расширенных матриц исходных систем $\tilde{A}$ имеем:

$$a)\ \ \tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad b)\ \ \tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$c)\ \ \tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}; \quad d)\ \ \tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

2.6.

$$a)\ \ \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}; \quad b)\ \ \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}; \quad c)\ \ -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}; \quad d)\ \ \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix};$$

$e)\ \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-6&6&-6\\-3&5&-4\\3&-7&2\end{pmatrix};\quad f)\ \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-7&4&-9\\-6&4&-6\\-5&4&-7\end{pmatrix};\quad g)\ -\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-2&1&2\\-2&-5&-4\\-4&-7&-2\end{pmatrix};$

$h)\ -\frac{1}{4}\begin{pmatrix}5&9&0&1\\-1&-5&-4&-9\\-3&-7&-4&-7\\4&8&0&0\end{pmatrix};\quad i)\ -\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-6&4&-2&-4\\4&-4&2&2\\6&8&4&6\\-8&-4&-4&-8\end{pmatrix}.$

2.7.

$a)\ \tilde{A}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\0&1&1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&0\\0&1&1&0\end{array}\right),\quad \mathbf{x_1}=\text{col}\begin{pmatrix}-2&-1&1\end{pmatrix};$

$b)\ \tilde{A}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&-3&0\\0&1&-1&-2&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&1&0\\0&1&-1&-2&0\end{array}\right),$

$\mathbf{x_1}=\text{col}\begin{pmatrix}-1&1&1&0\end{pmatrix},\ \mathbf{x_2}=\text{col}\begin{pmatrix}-1&2&0&1\end{pmatrix};$

$c)\ \tilde{A}\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}1&-2&2&3&3&0\\0&1&-2&-1&-1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&-2&1&1&0\\0&1&-2&-1&-1&0\end{array}\right),$

$\mathbf{x_1}=\text{col}\begin{pmatrix}2&2&1&0&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{x_2}=\text{col}\begin{pmatrix}-1&1&0&1&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{x_3}=\text{col}\begin{pmatrix}-1&1&0&0&1\end{pmatrix}.$

$d)\ \tilde{A}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&3&0\\0&1&-2&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&1&-2&0\end{array}\right),\quad \mathbf{x_1}=\text{col}\begin{pmatrix}1&2&1\end{pmatrix};$

$e)\ \tilde{A}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-2&-1&0\\0&1&-1&-2&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&1&0\\0&1&-1&-2&0\end{array}\right),$

$\mathbf{x_1}=\text{col}\begin{pmatrix}1&1&1&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{x_2}=\text{col}\begin{pmatrix}-1&2&0&1\end{pmatrix};$

$f)\ \tilde{A}\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}1&-1&-2&1&-2&0\\0&1&1&-2&1&0\end{array}\right)\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-1&0\\0&1&1&-2&1&0\end{pmatrix},$

$\mathbf{x_1}=\text{col}\begin{pmatrix}1&-1&1&0&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{x_2}=\text{col}\begin{pmatrix}1&2&0&1&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{x_3}=\text{col}\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1\end{pmatrix};$

$g)\ \tilde{A}\sim\left(\begin{array}{cccccc|c}1&2&1&-6&2&5&0\\0&1&1&-3&1&3&0\\0&0&1&-1&-1&2&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccccc|c}1&0&0&-1&-1&1&0\\0&1&0&-2&2&1&0\\0&0&1&-1&-1&2&0\end{array}\right),$

$\mathbf{x_1}=\text{col}\begin{pmatrix}1&2&1&1&0&0\end{pmatrix},\ \mathbf{x_2}=\text{col}\begin{pmatrix}1&-2&1&0&1&0\end{pmatrix},$
$\mathbf{x_3}=\text{col}\begin{pmatrix}-1&-1&-2&0&0&1\end{pmatrix}.$

2.8.

$a)\ \tilde{A}\sim\begin{pmatrix}1&-1&-1&4\\0&1&2&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&3\\0&1&2&-1\end{pmatrix},$

$\tilde{\mathbf{x}}=\text{col}\begin{pmatrix}3&-1&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{x_1}=\text{col}\begin{pmatrix}-1&-2&1\end{pmatrix}.$

b) $\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$,
$\tilde{\mathbf{x}} = \mathrm{col}\left(3\ 1\ 0\ 0\right)$, $\quad \mathbf{x_1} = \mathrm{col}\left(-2\ -2\ 1\ 0\right)$, $\quad \mathbf{x_2} = \mathrm{col}\left(-1\ 1\ 0\ 1\right)$.

c) $\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$,
$\tilde{\mathbf{x}} = \mathrm{col}\left(-3\ -1\ 0\ 0\ 0\right)$,
$\mathbf{x_1} = \mathrm{col}\left(-1\ -1\ 1\ 0\ 0\right)$, $\mathbf{x_2} = \mathrm{col}\left(2\ -1\ 0\ 1\ 0\right)$, $\mathbf{x_3} = \mathrm{col}\left(2\ -1\ 0\ 0\ 1\right)$.

d) $\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$,
$\tilde{\mathbf{x}} = \mathrm{col}\left(-3\ -1\ 0\right)$, $\quad \mathbf{x_1} = \mathrm{col}\left(-2\ -1\ 1\right)$.

e) $\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right)$,
$\tilde{\mathbf{x}} = \mathrm{col}\left(3\ 1\ 0\ 0\right)$, $\mathbf{x_1} = \mathrm{col}\left(-1\ 2\ 1\ 0\right)$, $\mathbf{x_2} = \mathrm{col}\left(1\ 2\ 0\ 1\right)$.

f) $\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$,
$\tilde{\mathbf{x}} = \mathrm{col}\left(-1\ 3\ 0\ 0\ 0\right)$, $\quad \mathbf{x_1} = \mathrm{col}\left(-2\ 1\ 1\ 0\ 0\right)$,
$\mathbf{x_2} = \mathrm{col}\left(2\ -1\ 0\ 1\ 0\right)$, $\quad \mathbf{x_3} = \mathrm{col}\left(2\ -1\ 0\ 0\ 1\right)$.

g) $\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right)$,
$\tilde{\mathbf{x}} = \mathrm{col}\left(2\ 1\ -3\ 0\right)$, $\quad \mathbf{x_1} = \mathrm{col}\left(2\ -2\ -1\ 1\right)$.

h) $\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$,
$\tilde{\mathbf{x}} = \mathrm{col}\left(-3\ 1\ 3\ 0\ 0\right)$, $\mathbf{x_1} = \mathrm{col}\left(2\ 2\ -2\ 1\ 0\right)$, $\mathbf{x_2} = \mathrm{col}\left(-1\ -1\ -1\ 0\ 1\right)$.

i) $\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 3 & -6 & 3 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & 11 & -6 & 12 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$,
$\tilde{\mathbf{x}} = \mathrm{col}\left(3\ -2\ -1\ 0\ 0\ 0\right)$, $\mathbf{x_1} = \mathrm{col}\left(1\ -1\ 2\ 1\ 0\ 0\right)$,
$\mathbf{x_2} = \mathrm{col}\left(-1\ 1\ -1\ 0\ 1\ 0\right)$, $\mathbf{x_3} = \mathrm{col}\left(1\ -2\ 2\ 0\ 0\ 1\right)$;

j) $\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$,
$\tilde{\mathbf{x}} = \mathrm{col}\left(1\ 1\ 3\ 0\right)$, $\quad \mathbf{x_1} = \mathrm{col}\left(2\ -1\ -1\ 1\right)$,

$k)\ \ \tilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix},$

$\tilde{\mathbf{x}} = \text{col}\left(3\ 3\ 1\ 0\ 0\right),\ \mathbf{x_1} = \text{col}\left(-2\ 2\ 2\ 1\ 0\right),\ \mathbf{x_2} = \text{col}\left(1\ 2\ 2\ 0\ 1\right).$

$l)\ \ \tilde{A} \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$

$\tilde{\mathbf{x}} = \text{col}\left(-3\ -1\ 2\ 0\ 0\ 0\right),\ \mathbf{x_1} = \text{col}\left(-1\ -1\ 1\ 1\ 0\ 0\right),$
$\mathbf{x_2} = \text{col}\left(2\ -1\ 1\ 0\ 1\ 0\right),\ \mathbf{x_3} = \text{col}\left(-1\ 1\ -1\ 0\ 0\ 1\right).$

2.9.

$a)\ \ X = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix};$

$b)\ \ X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -9 \\ -5 & 6 \end{pmatrix};$

$c)\ \ X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -6 & -4 \\ 7 & -8 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 8 & 4 \\ 8 & -8 & -5 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix};$

$d)\ \ X = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & -4 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 6 & 1 \\ 9 & -14 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 9 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 5 & -9 & -1 \end{pmatrix};$

$e)\ \ X = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -8 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix};$

$f)\ \ X = \begin{pmatrix} -12 & -8 & -1 \\ 11 & 7 & 1 \\ 8 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -6 \\ 3 & -5 \end{pmatrix};$

$g)\ \ X = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & -5 \\ -6 & 7 & 4 \end{pmatrix};$

$h)\ \ X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -3 & -3 & 8 \end{pmatrix};$

$i)\ \ X = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -4 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -6 & -4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix};$

$j)\ \ X = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & -2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix};$

$k)\ \ X = \begin{pmatrix} -1 & -14 & -4 \\ -1 & -17 & -5 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \\ 6 & -6 \end{pmatrix};$

$l)\ \ X = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -7 & -16 & 10 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -6 & -5 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 6 & -6 & 9 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$

2.10.

$a)\ \ \tilde{A} \sim \begin{pmatrix} -6 & 1 & 0 & -5 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$ $b)\ \ \tilde{A} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix};$

$c)\ \ \tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix};$ $d)\ \ \tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix};$

$e)\ \ \tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 3 & -4 \end{pmatrix};$ $f)\ \ \tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 & -3 & 0 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 6 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix};$

$g)\ \ \tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -7 & 0 & 7 \\ -2 & 0 & 1 & 5 & 0 & -5 \\ -3 & 0 & 0 & 5 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Ильин В.А. Линейная алгебра / Ильин В.А., Позняк Э.Г. – Москва: Наука, 1978. – 304 с.

2. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Беклемишев Д. В. – Москва: Высшая школа, 1998. – 320 с.

3. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре / Проскуряков И. В. – Москва: Наука, 1984. – 336 с.

4. Прасолов В. В. Задачи и теоремы линейной алгебры / Прасолов В. В. – Москва: Наука, 1996. – 304 с.

Навчальне видання

Дюкарев Юрій Михайлович
Сєрікова Ірина Юріївна

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА
Матриці, визначники, системи лінійних рівнянь
Навчально-методичний посібник

(Рос. мовою)

Комп'ютерне верстання І.Ю. Сєрікова

Формат 60х84/16. Умов. друк. арк. 3,5. Наклад 50 прим.

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна,
61022, Харків, майдан Свободи, 4.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.09
Видавництво ХНУ імені Каразіна
Тел. 705-24-32