

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ім. В. Н. КАРАЗІНА

Д. Д. БАЛЛА, В. І. БІЛЕЦЬКИЙ, О. В. БОНДАРЕНКО

ОСНОВИ ФІЗИКИ КВАНТОВИХ РІДИН

Навчальний посібник

Харків - 2005

УДК 537.312.62

Балла Д. Д., Білецький В. І., Бондаренко О.В. Основи фізики квантових рідин. Навчальний посібник. - Харків.: ХНУ, 2001 р., - 84 с.

Викладений основний зміст курсу "Основи фізики квантових рідин", який пропонується студентам IV - V курсів фізичного факультету.

Розглянуте досить широке коло питань, пов'язаних з макроскопічним проявом квантових явищ у рідкому гелії в області температур, де існує надплинність, та обумовлені цим кінетичні та термодинамічні властивості квантової рідини.

Список посилань: 12 назв.

Рекомендовано до друку Вченою Радою
фізичного факультету
протокол N ??? від 2005 року.

ПЕРЕДМОВА

Даний учбовий посібник написаний на основі курсу лекцій, що на протязі багатьох років викладається співавторами на кафедрі фізики низьких температур фізичного факультету Харківського національного університету для студентів, які спеціалізуються за фахом "Фізика низьких температур". Мета цього учбового посібника – надати студентам старших курсів фізичних факультетів університетів основні уявлення про один з розділів фізики низьких температур. Квантова рідина уявляє собою унікальний стан речовини, у якій квантові закономірності, істотні на перший погляд тільки для мікрооб'єктів (атомів та молекул), виявляються у макроскопічному масштабі. Квантові ефекти є статистичними за своєю природою. Єдині "справжні" квантові рідини становлять рідкі гелій-3 (фермі-рідина) та гелій-4 (бозе-рідина).

Головною метою посібника, як замислювалось авторами, є надання допомоги студентам у вивченні достатньо широкого кола проблем, пов'язаних з квантовою бозе-рідиною та її фундаментальною властивістю - надплинністю рідкого гелію-4. Кількість речовин, у яких вивчається надплинність, неухильно зростає. Це явище притаманне для самих різноманітних об'єктів - від мікросвіту (атомні ядра) до макрокосмосу (нейтронні зірки). Але ці питання у посібнику не заторкані.

Бажання авторів представити широкому колу читачів фізику квантових рідин для "першого читання" і визначило вибір обговорюваних проблем. Це, істотно, спричинило те, що решта питань викладена на якісному рівні, без повних та громіздких викладів. За бажанням їх можна знайти у списку рекомендованої літератури. Відсутність строгих висновків при такому підході компенсується простотою та наочністю викладання.

Для розуміння викладеного в учбовому посібнику матеріалу достатньо знання курсів загальної фізики, вищої математики та основ квантової механіки, що викладаються на перших курсах університетів та інших вузів

Посібник є першою спробою викладення університетського курсу з фізики квантових рідин і тому може мати неминучі недоліки. Автори будуть вдячні усім читачам, які вкажуть на них.

Автори висловлюють щиру вдячність завідувачу кафедри фізики низьких температур Харківського національного університету, доктору фізико-математичних наук, професору М. О. Оболенському за допомогу та підтримку на протязі усього часу роботи над посібником. Вважаємо також своїм приємним обов'язком висловити вдячність декану фізичного факультету доктору фізико-математичних наук, професору В. П. Лебедеву, а також доктору фізико-математичних наук, професору М.Т.Г. Гадких за постійну зацікавленість та підтримку у роботі над посібником.

І. КВАНТОВІ РІДИНИ

1.1. Уявлення про квантову рідину

Усі речовини можуть знаходитись у трьох агрегатних станах: газуватому, рідкому та твердому, переходячи з одного стану до наступного при зниженні температури. Виключення становить тільки гелій, що залишається у стані рідини при нормальному (атмосферному) тиску до абсолютного нуля температури. У цьому розділі ми зупинемось на необхідності квантового опису конденсованих середовищ, квантові властивості яких виявляються при зниженні температури тим швидше, чим вища їх густина.

Розглянемо сукупність нейтральних атомів, які взаємодіють за допомогою короткодіючих парних сил. При високих температурах та достатньо низькому тиску така система виявляє звичайні властивості класичного газу. Але при зменшенні температури та зростанні тиску взаємодія частинок підсилюється внаслідок збільшення густини. З іншого боку, зниження температури зменшує роль кінетичної енергії у порівнянні з енергією взаємодії частинок. При певних умовах у газі спостерігається фазовий перехід до стану рідини. Цей ефект і призводить до виникнення класичної рідини.

У межах класичної фізики рідина це сукупність великої кількості взаємодіючих атомів (молекул), що рухаються у просторі за визначеними траєкторіями. Кожний атом (молекула) має визначену координату та імпульс p . Такий опис має місце тільки у разі, коли міжчастинкова відстань набагато більша ніж квантова невизначенність у знаходженні частинок, що має порядок \hbar/p ($\hbar = h/2\pi$ - стала Планка). Згідно з законами квантової механіки, атом поряд з корпускулярними виявляє також і хвильові властивості. Тому квантовий опис явищ стає необхідним за умови

$$a \leq \hbar/p = \lambda_D \quad (1.1)$$

внаслідок того, що частинки "перекривають" одна одну, оскільки вони можуть займати тіж самі позиції з порівняними за порядком величини ймовірностями. Міжатомну відстань легко оцінити, якщо відома кількість атомів в одиниці об'єму

$$a = n^{-1/3} \quad (1.2)$$

Ураховуючи, що середній імпульс атома, що здійснює тепловий рух має порядок

$$p \approx (m k_B T)^{1/2} \quad (1.3)$$

(де m - маса атома, k_B - стала Больцмана, T - абсолютна температура), середня дебройлівська довжина хвилі, згідно з співвідношенням (1.1)

$$\lambda_B = \left(\frac{\hbar^2}{m k_B T} \right)^{1/2} \quad (1.4)$$

Наведена картина класичної рідини є слушною, якщо $\lambda_D > a$ з густиною атомів

$$n \leq \hbar^{-3} (m k_B T)^{3/2} \quad (1.5)$$

При подальшому зниженні температури кінетична енергія атомів рідини зменшується, а їх взаємодія стає більш суттєвою. Внаслідок цього майже у всіх випадках спостерігається фазовий перехід із стану рідини до твердого стану. Єдиним виключенням є ізотопи ^4He та ^3He , які залишаються у стані рідини до самої низької температури, яку можна досягти. При достатньо значній густині нерівність (1.5) порушується і рідина стає квантовою. Таким чином, у звичайних умовах гелій залишається у рідкому стані в області температур, де треба ураховувати квантові ефекти, тобто коли середня дебройлівська довжина хвилі атомів порівнюється з середньою відстанню поміж атомами.

Для найбільш поширеного у природі ізотопу гелію ^4He маса атома $m = 6,65 \cdot 10^{-24}$ г, а міжатомна відстань при низьких температурах складає приблизно

$3,6 \cdot 10^{-8}$ см. Отже, згідно з (1.4) у гелії квантові ефекти виявляються при температурі 1-2 К, за якою рідкий гелій стає єдиною "справжньою" квантовою рідиною. Таким чином, квантовою рідиною зветься система міцно взаємодіючих атомів, що не має просторової періодичності при достатньо низьких температурах, коли квантові ефекти стають суттєвими.

Виключність гелію обумовлена двома його особливостями: малою масою атомів та слабкістю їх взаємодії. Одноатомна молекула гелію є найбільш легкою серед інших, окрім молекули водню. Мала маса атомів забезпечує велику нульову енергію. Квантовомеханічні співвідношення невизначеності дозволяють нам оцінити енергію нульових коливань атомів гелію: при $T = 0$ його густина $\rho = 0,145$ г/см, атомна маса $m = 4$. Отже, на один атом гелію припадає об'єм: $V_\alpha = m / \rho N_\alpha \approx 4 \cdot 10^{-23} \text{ см}^3$ ($N_\alpha = 6 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ - число Авогадро). Звідси, діаметр простору, що обіймає атом $d = (6V_\alpha / \pi)^{1/3} \approx 4,5 \cdot 10^{-8} \text{ см}$. Оскільки $\Delta p \cdot d \approx \hbar$ то енергія нульових коливань атомів гелію має величину за порядком

$$E_0 = \frac{(\Delta p)^2}{2m_\alpha} \approx \frac{2}{2m_\alpha d^2} \approx 1,4 \cdot 10^{-22} \text{ Дж} \quad (1.6)$$

Цій енергії на шкалі температур відповідає 10 К. Друга особливість гелію - слабкість взаємодії поміж атомами, що пояснюється простотою та симетричністю атома з його замкненою електронною оболонкою, що утримує два електрона.

Характер взаємодії атомів ⁴Не можна описати за допомогою потенціальної енергії $U(R)$, яка уявляє роботу, яку необхідно здійснити для зближення атомів, що спочатку віддалені на нескінченність, до віддалі R поміж їх ядрами. Якщо б середнє місцезнаходження ядра завжди співпадало з центром сферичної електронної хмари, що оточує ядро, то взаємодія поміж атомами була б відсутньою, бо за межами нейтрального атома електростатичний потенціал сферичної електронної хмари компенсується електростатичним потенціалом ядра. Але електрони у атомі постійно рухаються відносно ядер, у результаті чого миттєве місцезнаходження центру електронної хмари може точно не співпадати з ядром атома. У ці моменти у атома з'являється відмінний від нуля електричний дипольний момент. Підкреслимо, що усереднений за часом сумарний дипольний момент атома дорівнює нулю. Якщо p_1 - миттєве значення дипольного моменту першого атома, то на віддалі R від атома буде існувати електричне поле

$$E = 2p_1 / R^3. \quad (1.7)$$

Це поле спричиняє миттєвий дипольний момент біля другого атома, який дорівнює

$$p_2 = \alpha E = 2\alpha p_1 / R^3 \quad (1.8)$$

де α - поляризованість атома (для атома гелію $\alpha = 0,2 \cdot 10^{-24} \text{ см}^3$). За законами електростатики енергія взаємодії двох дипольних моментів, що розташовані на відстані R один від одного, дорівнює:

$$U(R) = \frac{\vec{p}_1 \vec{p}_2}{R^3} - \frac{3(\vec{p}_1 \vec{R})(\vec{p}_2 \vec{R})}{R^5} \quad (1.9)$$

оскільки дипольні моменти \vec{p}_1 та \vec{p}_2 паралельні один до одного то, з урахуванням (1.9), одержуємо

$$U(R) = -\frac{2p_1 p_2}{R^3} = -\frac{4\alpha p_1^2}{R^6}. \quad (1.10)$$

Так як ця величина залежить від p_1^2 , її середнє за часом не обертається до нуля, навіть якщо середнє значення p дорівнює нулю. Ця формула відзеркалює енергію так званої

ван-дер-ваальсової взаємодії, а сили цієї взаємодії називають ван-дер-ваальсовими. З (1.10) можна побачити, що $U(R)$ має характер притягання. З-поміж того, що знайдена сила дуже швидко спадає на відстані, вона виявляється надзвичайно слабкою. Це і є причиною низьких температур плавлення та кипіння конденсованих інертних газів.

У рідкому гелії взаємодія атомів не парна, у кожного атома багато сусідів. Отже немає необхідності визначати величину (1.10) для атомів гелію у стані рідини. Достатньо тільки знати, що потенційна енергія $U(R)$ пропорційна до R^{-6} , тобто при зменшенні міжатомної відстані вона збільшується значно скоріше, ніж кінетична енергія нульових коливань, яка згідно з (1.6) пропорційна до R . Тому при стисненні, у результаті зменшення міжатомної відстані вплив нульових коливань стає відносно більш слабким і гелій повинний твердіти. Зі зменшенням відстані поміж атомами їх електронні оболонки починають перекриватись і електростатична енергія системи змінюється. На достатньо малих відстанях енергія взаємодії, як результат перекриття електронних оболонок стає енергією відштовхування. Це має місце для усіх атомів з заповненими електронними оболонками, для усіх відстанів в інтервалі $(0,5 - 5) \cdot 10^{-8}$ см, головним чином як результат дії принципу заборони Паулі. Дійсно, згідно з принципом заборони Паулі два електрони не можуть знаходитись у одному і тому ж квантовому стані. Електронні оболонки двох атомів, що знаходяться близько один від одного, можуть перекриватись тільки у тому разі, якщо цей процес супроводжується частковим переходом електронів у вільні квантові стани з більш значною енергією. Такий процес призводить до збільшення повної енергії системи, або іншими словами, до виникнення сил відштовхування. Експериментальні дані про інертні газі можуть бути добре відображені емпіричною формулою для потенціалу сил відштовхування у вигляді C/R^{12} , де C - деяка позитивна стала.

Взаємодія поміж атомами ^4He може бути описана за допомогою потенціалу Леннарда-Джонса

$$U(R) = 4\varepsilon[(\sigma/R)^{12} - (\sigma/R)^6] = \varepsilon[(\gamma_m/R)^{12} - 2(\gamma_m/R)^6] \quad (1.11)$$

де: $\varepsilon \approx 10\text{К}$ - глибина потенційної ями, $\sigma = 2,6 \cdot 10^{-8}$ см - діаметр атома, $\gamma_m = 2,6 \cdot 10^{-8}$ см - відстань між атомами, що відповідає мінімуму залежності $U(R)$.

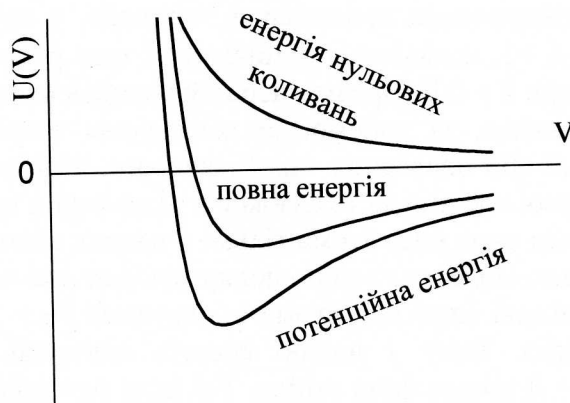


Рис.1.1. Залежність потенційної енергії взаємодії атомів U від об'єму $V = R^3$ елементарної клітинки розміром R .

Потенціал Леннарда-Джонса накреслений на рис.1.1. Видно, що атоми He будуть обопільно відштовхуватись, якщо їх зблизити на відстань $R < 2,5 \cdot 10^{-8}$ см, та слабо притягуватись при збільшенні відстані. Зважаючи на мале значення маси m_4 нульова енергія порівняльна за величиною з $U_m(R)$ і як результат: мінімум повної енергії, що дорівнює сумі енергії нульових коливань, обумовленою локалізацією атомів, та потенційної енергії взаємодії атомів $U(R)$

$$E_{\text{нов}} = E_0 + U(R) \quad (1.12)$$

виявляється не настільки глибоким і може бути досягнутий при R , що більша, ніж відповідає мінімуму потенційної енергії. Внаслідок цього велика нульова енергія призводить до того, що міжатомні сили можуть забезпечити виникнення тільки фази у стані рідини з відносно низькою густиною. Дійсно, рідкий гелій має виключно малу густину: при $T = 0$ його густина $\rho = 0,145 \text{ г/см}^3$ (у 8 разів менша ніж у води), що свідчить про те, що легкі та інертні атоми He, маючи велику енергію нульових коливань, знаходяться на значних відстанях один від одного. За причиною слабкості взаємодії між атомами (мала величина ε у (1.11)) гелій має нижчу за усі речовини критичну температуру - 5,2 К. Тому він був останнім "сталим" газом і є єдина перманентна рідина під тиском насиченої пари. Розуміння цього прийшло далеко не в одночас. Рідкий гелій вперше був одержаний у 1908 році у Лейдені (Голандія) Хайке Камерлінг-Оннесом. Температура перетворення гелію у рідкий стан рекордно низька і складає 4,2 К. Камерлінг-Оннес відразу охолодив його шляхом відкачування пари до температури $T \approx 1 \text{ К}$, хоча і був здивованим, що гелій залишився рідким, але припустив, що просто не досяг температури ствердження гелію, яка лежить ще нижче. У ті часи вважалося, що існування рідини при абсолютному нулі температури неможливо, бо зі зниженням температури припиняється тепловий рух атомів і рідина повинна ствердіти.

У твердому тілі кожен атом локалізований біля визначеного вузла кристалічної ґратки. Можливість локалізації атома біля положення рівноваги залежить від величини відношення енергії нульових коливань до потенційної енергії

$$\Lambda \approx \hbar / d \sqrt{mU} \quad (1.13)$$

Безрозмірний параметр Λ - це квантовий параметр де Бура (1948 р.). Для інертних газів значення Λ наведені у таблиці 1.1.

Таблиця 1.1

Елемент	^3He	^4He	Ne	Ar	Kr	Xe
Λ	3,08	2,68	0,593	0,186	0,102	0,063

Одним з наслідків великих значень Λ у ізотопів гелію є їх рідкий стан поблизу $T = 0$ при тисках $P < 3 \cdot 10^6 \text{ Па}$ у разі ^3He та $2,5 \cdot 10^6 \text{ Па}$ у разі ^4He . Якщо $\Lambda \ll 1$, то атоми локалізовані. Це має місце в усіх молекулярних кристалах і, частково, у кристалах інертних газів (Ne, Ar, Kr, Xe). Якщо $\Lambda > 1$, локалізація неможлива і така речовина не перетворюється у твердий стан навіть при $T = 0 \text{ К}$. Врешті, перший випадок означає, що невелике змінення параметрів (наприклад, за допомогою докладання зовнішнього тиску) може призвести до кристалізації або плавлення такої речовини. Тільки у гелії спостерігається така поведінка із-за малих мас атомів та слабкості міжатомної взаємодії (мала глибина потенційної ями U). Більш мала маса атома тільки у водню: атомна маса молекули H_2 дорівнює 2. Оскільки, однак, молекула водню поляризується значно легше ніж поодинокий атом He, ван-дер-ваальсові сили між двома молекулами H_2 у 12 разів більші, ніж між двома атомами гелію. Тому у водню енергія взаємодії значно перевершує нульову енергію і при $T = 0$ тверда фаза стійка. Усі інші речовини важчі ніж водень і у них ван-дер-ваальсова взаємодія ще сильніша. Внаслідок цього гелій - єдина речовина, що залишається у рідкому стані при скіль завгодно низьких температурах.

1.2. Квантові бозе- та фермі- рідини

Квантові ефекти статистичні за своєю природою. Розглянемо причини, за яких ми повинні використовувати два різних типи квантових статистик. Усі елементарні частинки та усі атоми, що утворені з елементарних частинок мають спин - власний

момент кількості руху. Спін квантується і його можна зобразити у формі $\hbar\sqrt{s(s+1)}$, де s - спінове квантове число. Фундаментальні частинки, що відомі до теперешнього часу, поділяються на дві групи: частинки, у яких спін ціле число або нуль ($s = 0, 1, 2, \dots$) називають бозонами і вони описуються симетричними хвильовими функціями Ψ_c . Частинки, у яких спін напівціле число ($s = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$), називають ферміонами і їм відповідають антисиметричні хвильові функції Ψ_{ac} . Тип симетрії хвильових функцій визначає фундаментальну характеристику системи - кількість частинок, які можуть заповнити один і той же квантовий стан.

Одним з важливих уявлень квантової механіки є концепція тотожності частинок. Розглянемо, наприклад, з точки зору класичної механіки дві елементарні частинки одного і того ж типу, що належать до деякої системи. Якщо ми здійсним обмін частинок, то одержим стан, еквівалентний первісному. Згідно з квантовою механікою ці обидва стани не тільки еквівалентні, але і тотожні, бо описуються однією і тією ж хвильовою функцією Ψ , квадрат модуля якої $|\Psi|^2$ визначає вимоірність знаходження тієї або іншої елементарної частинки у деякій заданій точці простору. Якщо провести обмін координат двох тотожних частинок, то $|\Psi|^2$ не зміниться, однак сама функція Ψ може залишитись незмінною, якщо частинки є бозонами, або змінити знак на протилежний, якщо мова йде про ферміони. За відсутності взаємодії між частинками систему можна описати за допомогою добутку $\Psi_a^{(1)} \cdot \Psi_b^{(2)}$, де індекси a і b відповідають повному набору квантових чисел, що необхідні для опису одночастинкового квантового стану. З іншого боку, добуток $\Psi_a^{(1)} \cdot \Psi_b^{(2)}$ також описує систему, бо перестановка частинок не змінює властивостей системи. Таким чином, повна хвильова функція є лінійною комбінацією цих двох добутків, тому симетрична функція буде

$$\Psi_c = 2^{1/2} \{ \Psi_a^{(1)} \Psi_b^{(2)} + \Psi_a^{(2)} \Psi_b^{(1)} \} \quad (1.14)$$

а антисиметрична

$$\Psi_{ac} = 2^{-1/2} \{ \Psi_a^{(1)} \Psi_b^{(2)} - \Psi_a^{(2)} \Psi_b^{(1)} \} \quad (1.15)$$

Нехай обидві частинки посідають один і той же стан, тобто $a = b$. З (1.14) постає, що симетрична хвильова функція дорівнює

$$\Psi_c = 2^{-1/2} \Psi_a^{(1)} \Psi_a^{(2)} \quad (1.16)$$

а антисиметрична хвильова функція $\Psi_{ac} = 0$. Це означає, що ферміони не можуть займати стани, що заповнені іншими такими ж самими ферміонами (ферміони "індивідуалісти"). Ця обставина і є суттю принципу Паулі. Зрозуміло, що міркування, що торкаються обмінної симетрії, можливо узагальнити і на системи, що складаються з будь-якої кількості частинок. Зразком можуть бути електрони провідності у нормальному металі.

Згідно з (1.16) симетрична хвильова функція не обертається до нуля, якщо заповнити обома частинками один і той же стан. Це свідчить, що бозони не підпорядковані принципу Паулі: в одному і тому ж стані може знаходитись будь-яка кількість бозонів (бозони - "колективісти"). Так як атом ${}^4\text{He}$ складається з шістьох ферміонів (2 протона, 2 нейтрона, та 2 електрона) і вони зв'язані таким чином, що результуючий спін дорівнює нулю, то атом ${}^4\text{He}$ - бозон. Система, що складається з макроскопічної кількості N атомів - ${}^4\text{He}$ підпорядкована статистиці Бозе-Ейнштейна. Отже, в умовах теплової рівноваги при абсолютній температурі T середня кількість атомів з енергією ε_i визначається функцією розподілу

$$\langle n(\varepsilon_i, T) \rangle = \frac{1}{\exp\{(\varepsilon_i - \mu)/k_B T\} - 1} \quad (1.17)$$

У формулі (1.17) μ - хімічний потенціал, який уявляє собою термодинамічний параметр, що грає роль аналогічну до температури. Якщо різниця ΔT між температурами обумовлює виникнення потоку енергії, то різниця хімічних потенціалів обумовлює виникнення потоку частинок. Будемо урахувати, що рівню, на якому сконденсовані бозони з найнижчею енергією відповідає $\varepsilon_{111} = 0$. Як можна побачити з рівняння (1.17) μ не може бути додатним, бо у протилежному випадку деякі з чисел, заповнення n з'являться від'ємними. Якщо кількість частинок у системі зберігається, їх розподіл при усіх температурах підпорядкований правилу сум:

$$\sum \langle n(\varepsilon_i, T) \rangle = N \quad (1.18)$$

Якщо відношення $(-\mu/k_B T)$ достатньо мале, то кількість частинок на найнижчому енергетичному рівні $\langle n(0, T) \rangle$ може (принаймні за порядком) дорівнювати N . Звернемось зараз до легкого ізотопу гелію - ^3He . Атом ^3He утримує п'ять ферміонів, що при будь-якій їх комбінації дає сумарний спін $s = 1/2$ (за рахунок свого ядра). Згідно з принципом Паулі, основному стану системи ферміонів відповідає заповнення частинками усіх дозволених станів усередині так званої сфери Фермі. Таким чином, треба побудувати в імпульсному просторі сферу такого розміру, щоб кількість дозволених станів дорівнювала кількості частинок у системі. Цю сферу і називають сферою Фермі. Радіус цієї сфери - p_F зветься імпульсом Фермі. Об'єм сфери з радіусом p_F дорівнює, очевидно $4/3\pi p_F^3$. Кількість дозволених станів для фермі-частинок в одиниці об'єму імпульсного простору дорівнює $2V \cdot (2\pi\hbar)^{-3}$, де V - об'єм системи. Отже повна кількість станів усередині сфери Фермі дорівнює

$$\frac{4}{3}\pi p_F^3 \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} \quad (1.19)$$

Для того, щоб сфера Фермі була спроможна умістити частинки системи, ця величина повинна дорівнювати повній кількості частинок у системі

$$\frac{4}{3}\pi p_F^3 \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} = nV \quad (1.20)$$

де n - густина частинок фермі-газу. Густина фермі-газу, пов'язана з фермієвським імпульсом згідно з (1.20) як

$$p_F = (3\pi^2 n)^{1/3} \quad (1.21)$$

Енергія Фермі дорівнює

$$\varepsilon_F = p_F^2 / 2m \quad (1.22)$$

а швидкість ферміону на рівні Фермі буде

$$v_F = p_F / m \quad (1.23)$$

Низькотемпературні властивості системи визначаються густиною станів - досить важливою характеристикою системи. Густиною станів зветься кількість дозволених станів, що припадають на, одиничний інтервал енергій та об'єму. Таким чином, маємо:

$$N_o = (dn/d\varepsilon)_F = 2(2\pi)^{-3} 4\pi p_F^2 (d\varepsilon/dp_F)^{-1} = \frac{3\pi n}{p^2} \quad (1.24)$$

При температурах, що видрізняються від абсолютного нуля, деякі частинки набувають додаткову енергію і можуть заповнити стани над поверхнею Фермі, що до того були порожніми і залишити порожніми стани під поверхнею Фермі. Ці порожні стани часто називають дірками. Таким чином, збудження у фермі-газі фактично виявляються у появі частинок над фермі-сферою і дірок під нею. Легко оцінити повну

енергію збуджень E , як добуток характерної енергії одного збудження на кількість збуджень. Очевидно, що енергія одного збудження, відрахована від рівня Фермі, за порядком величини близька до, температури, а кількість збуджень пропорційна до об'єму шару завтовшки T біля рівня Фермі, де виникають збудження, тобто $N_0 T$. Тому ми маємо $E \cong N_0 T^2$. Отже, теплоємність фермі-газу пропорційна до температури

$$C = dE/dT \cong 2N_0 T \quad (1.25)$$

Зробимо оцінку магнітної сприйнятливості такого газу. Частинки з спіном $1/2$ одержують у зовнішньому магнітному полі H додаткову енергію $\pm \mu H$ (μ - магнітний момент однієї частинки). Тут позначка "+" відноситься до частинок, у яких спін спрямований уздовж поля, позначка "-" до частинок зі спіном спрямованим проти поля. Так як згідно з принципом Паулі, у стані з визначеним імпульсом можуть знаходитись дві частинки з протилежно орієнтованими спінами, то у зовнішньому полі ми маємо як би дві вкладені одна в одну сфери Фермі, одна з котрих заповнена частинками зі спіном спрямованим уздовж поля, а інша - частинками зі спіном проти поля. Тому енергії Фермі цих двох сфер відрізняються на величину $2H$. Зрозуміло, що у повний магнітний момент фермі-газу дають внесок тільки некомпенсовані моменти частинок у сферичному шарі поміж двома фермі-сферами.

Для реальних магнітних полів $\mu H \ll \varepsilon_F$. Оцінюючи кількість таких частинок як $2N_0 \mu H$, маємо

$$M \approx \mu(2N_0 \mu H) \quad (1.26)$$

Отже, магнітна сприйнятливість фермі-газу буде

$$\chi = dM/dH \approx 2\mu^2 N_0 \quad (1.27)$$

так як згідно з (1.27) χ не залежить від температури, то фермі-газ є парамагнітним. Парамагнетизм фермі-газу зветься парамагнетизмом Паулі.

Реальний ^3He уявляє собою фермі-рідину, атоми якої сильно взаємодіють поміж собою. Теорія фермі-рідини була розроблена Л.Д.Ландау у 1956-1958 р.р. Одним з основних припущень цієї теорії є постулат, що при "включенні" взаємодії поміж атомами реального газу, тобто при вимірюваному переході від ідеального газу до реальної рідини, принцип класифікації одночастинкових станів за імпульсами не змінюється. Поблизу поверхні фермі-сфери, де закони дисперсії для квазічастинок $\varepsilon(p)$ тільки і має безпосередній фізичний зміст, енергію збудження можна розкласти за степенями різниці $p - p_F$. Маємо

$$\varepsilon - \varepsilon_F \approx v_F(p - p_F) \quad (1.28)$$

$$\vec{v}_F = d\varepsilon/d\vec{p}_{p=p_F} \quad (1.29)$$

є швидкість квазічастинок на поверхні Фермі. Як було показано вище, у ідеальному фермі-газі, квазічастинки тотожні до справжніх частинок і співвідношення (1.22) та (1.23) залишаються слухними. У разі фермі-рідини квазічастинки мають більш значну "ефективну" масу, яку за аналогією з (1.27) можливо визначити як

$$m^* = p_F/v_F \quad (1.30)$$

Збільшення маси відбувається завдяки тому, що частинка рухаючись крізь рідину, наче б то захоплює оточуючі її частинки і стає ефективно більш важкою. Ефективна маса квазічастинок у рідкому ^3He приблизно дорівнює $m^* = 3m_3$.

Таким чином у теорії фермі-рідини якісно зберігається уся картина намальована нами для ідеального фермі-газу, тобто уявлення про фермі-сферу, фермі-збудження лінійну залежність теплоємності від температури, парамагнетизм Паулі. Збудження у цій картині також з'являються або зникають лише парами, таким чином, що повна кількість збуджень з імпульсами $p > p_F$ та $p < p_F$ завжди однакова. Статистичний

розподіл як перших так і других завдається формулою розподілу Фермі-Дірака з рівним нулю хімічним потенціалом.

$$n = (e^{\varepsilon_F / k_B T} + 1)^{-1} \quad (1.31)$$

Рівність $\mu = 0$ для збуджень означає той факт, що їх кількість не є сталою, а сама визначається температурою. У разі рідкого ${}^3\text{He}$ енергія $\varepsilon_F \approx 2,5$ К.

1.3. Квантові рідини у Всесвіті та мікросвіті

Серед рідин, у вузькому змісті цього слова, єдиними "справжніми" квантовими є тільки рідкі ізотопи гелію. Але загальні міркування, подібні до викладених у розд. 1.1 та 1.2, дозволяють зробити припущення, що квантова рідина - досить розповсюджене явище у природі. Так з точки зору загального підходу, до квантової рідини можна віднести і електрони провідності у металах, напівметалах і вироджених напівпровідниках. У металах густина електронів $n_e \approx 6 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$, а їх маса $m_e \approx 10^{-27}$ г, звідки температура, нижче за яку треба урахувувати квантові закономірності, згідно з (1.6) дорівнює

$$T_B = \hbar^2 n^{2/3} k_B^{-1} m^{-1} \approx 10^4 \text{ К} \quad (1.32)$$

і є суттєво більшою ніж кімнатна температура. Дійсно, "електронна" рідина неоднорідна, оскільки електрони у металах рухаються у періодичному полі кристалічної ґратки. Однак у багатьох випадках вплив періодичного потенціалу можна урахувати у рамках наближення ефективної маси. При $T < T_B$ фермі-система утворює нормальну фермі-рідину.

1.3.1. Квантова рідина у Всесвіті. Космічні дослідження показали, що основний компонент певного класу зірок (пульсарів) утворений нейтронами. До того ж густина нейтронної рідини у цих зірках величезна - за порядком $\approx 10^{14} \text{ г/см}^3$, що відповідає $n \approx 10^{38}$ нейтронам у кубічному сантиметрі. Тобто згідно з (1.6) за такою густиною $T_F \approx 10^{11}$ К, у той час як температура нейтронної зірки $\approx 10^8$ К. Тому рідина, що утворюється усередині нейтронної зірки є квантовою, не зважаючи на надвелику температуру. Квантовою рідиною є густа електронна плазма за типом метала у надрах білих карликів та великих планет (Юпітер, Сатурн). З точки зору квантової рідини спробаються дати опис біологічно активних речовин у живих істотах.

1.3.2. Квантова рідина у мікросвіті. Так як густина нейтронів у нейтронних зірках приблизно одного порядку з густиною нуклонів у атомних ядрах, останні можна розглядати як зменшену копію нейтронної зірки. Ця аналогія дозволяє розглядати атомні ядра як крапельки квантової рідини. Опис атомних ядер з точки зору квантової рідини у теперешній час є загальновизначеним методом, що надає, можливість з'ясувати багато експериментально спостережених явищ.

Після короткого опису існуючих квантових рідин, відзначимо, що за певних умов заряджена фермі-рідина може зробитись квантовою бозе-рідиною. Це висвітлюється, наприклад, при розгляді явища надпровідності, що експериментально винайдено Хайке Камерлінг-Оннесом у 1911 р. Основні риси квантової бозе-рідини ми обговоримо у розд.3. Перехід квантової фермі-рідини (рідкий ${}^3\text{He}$) у квантову бозе-рідину має місце при наднизьких температурах, приблизно 10^{-3} К. Цьому питанню присвячен розд.2 другої частини посібника.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Чим обумовлена необхідність опису конденсованого стану за допомогою квантової механіки?

2. Чим відрізняються частинки з цілим та напівцілим спіном?
3. Чому рідкий гелій не твердне при нормальному тиску?

2. ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ^4He .

2.1. Фазове перетворення у рідкому ^4He . Гелій -I та гелій - II.

У безпосередній близькості, але нижче ніж точка кипіння ^4He поводить себе як звичайна рідина з малою в'язкістю. Якщо охолоджувати ^4He вздовж лінії кипіння, то можна спостерігати дивовижні явища. Для того, щоб підтримувати температуру рідкого гелію нижчу за 4,2 К зменшують тиск пари над гелієвою ванною і кипіння відбувається при зниженому тиску. При температурі 2,17 К (тиск пари 38,05 мм рт.ст.) у рідкому ^4He відбувається фазове перетворення. Вище цієї температури усередині гелію, як і у звичайній рідині, утворюються бульки пари і увесь він інтенсивно вирує: бульки підіймаються на поверхню і випаровуються. При відкачці гелію кипіння стає більш інтенсивним, бо тепер разом з паром забирається і та енергія, яка пов'язана з теплоємністю рідини. Однак, при 2,17 К кипіння миттєво припиняється, усі бульки зникають і гелій стає цілковито прозорим, але рідким. Можна гарно бачити його вільну поверхню і меніск біля стінки дьюарівської посудини. Якщо похитнути дьюарівську посудину, то гелій почне гойдатись і досить довго не вщухає. Однак перші вказівки на те, що рідкий гелій при температурі 2,17 К перетворюється у якусь іншу модифікацію були одержані Камерлінг-Оннесом у 1911 році під час вимірювання густини рідини. Він знайшов, що коефіцієнт теплового розширення при цій температурі змінює знак, тобто густина має максимум при 2,17 К (рис.2.1).

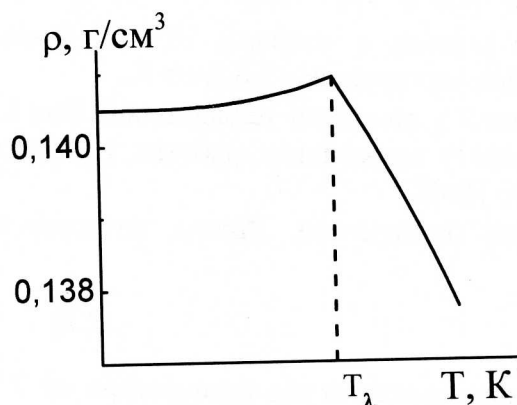


Рис.2.1. Температурна залежність густини рідкого гелію за Камерлінг-Оннесом та Боксом.

Однак переконливий експериментальний доказ існування двох фаз був отриманий Кеєзомом з співробітниками, які вимірювали досить різноманітні фізичні величини, такі як, наприклад, діелектричну сталу та теплоту випаровування, які виявляли аномальну поведінку при температурі 2,17 К. Звідси Кеєзом зробив висновок, що існують два стани рідкого ^4He , які перетворюються один у інший за цієї температурою. Кеєзом назвав стан рідини в інтервалі температур поміж 2,17 К і точкою кипіння гелієм-I, а модифікацію, що існує при температурах нижчих за 2,17 К - гелієм-II. Найбільш переконливо усю глибину змінювань, що відбуваються у рідкому гелії довели експерименти Кеєзома та Клаузіуса (1932 р.) з вимірювань теплоємності рідкого гелію. Ці результати ілюструються рисунком 2.2.

У зв'язку з формою залежності $C(T)$ на рисунку, що схожа на греческу букву λ Еренфест назвав точку перетворення λ -точкою, а спостерігаєме при $T = 2,17$ К явище отримало назву λ -явище. У наступних працях Кеєзома було показано, що перетворення з He-I до He-II здійснюється без прихованої теплоти, тобто є фазовим перетворенням

другого роду, і що обидві модифікації не можуть знаходитись у рівновазі одна до іншої. Відзначимо, що наведені на рис.2.2 дані стосуються питомої теплоємності, що отримана в умовах тиску насиченої пари C_S . Однак, через малий коефіцієнту об'ємного розширювання He-II, його різні теплоємності фактично співпадають ($C_P \approx C_V \approx C_S$) усюди, крім безпосередньої близькості до λ -точки.

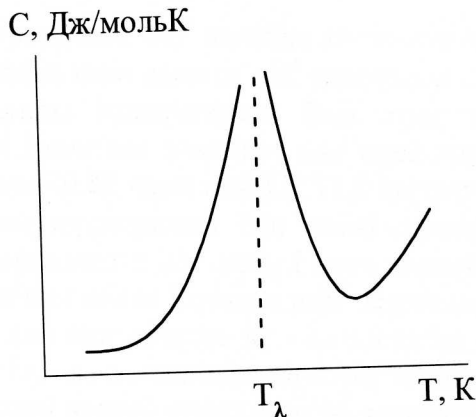


Рис.2.2. Теплоємність рідкого гелію.

При досить низьких температурах ($T < 0,6$ К) теплоємність зменшується за законом $C_S \approx T^3$, однак при $T > 1$ К приблизно до λ -точки спостерігається експоненціальне зростання теплоємності: $C_S \approx \exp(-\Delta/k_B T)$. При $T \cong T_\lambda$ питома теплоємність по обидва боки від λ -точки описується емпіричною формулою

$$\begin{aligned} C_S &= -0,65 - 3,00 \lg(T - T_\lambda) \quad T > T_\lambda \\ C_S &= -4,55 - 3,00 \lg(T - T_\lambda) \quad T < T_\lambda \end{aligned} \quad (2.1)$$

У безпосередньої близькості до λ -точки в інтервалі 10 мкК Букінгемом та Фербенком (1961 р.) був знайдений стрибок, що дорівнює 5,6 Дж/г К.

Логарифмічний характер особливості у поведінці теплоємності біля λ -точки до теперешнього часу не отримав тлумачення у теоретичних роботах, і він залишається однією з невирішених задач теорії рідкого He-II.

Згідно з (2.1) ентропія в λ -точці безперервна. Дійсно, ентропія зв'язана з теплоємністю співвідношенням

$$S = \frac{C_S}{T} dT \quad (2.2)$$

Звідси постає, що ентропія також повинна залежати від температури як T^3 , а також експоненційно в тих самих температурних інтервалах, у яких теплоємність змінюється за цим законом. У близькості до λ -точки маємо:

$$\lim_{T \rightarrow T_\lambda} \lg(T_\lambda - T) dT = \lim_{T \rightarrow T_\lambda} (T_\lambda - T) \lg(T_\lambda - T) = 0,$$

тобто залишається злам, сингулярність зникає. Такий висновок отримав підтвердження у багатьох експериментах. Температурна залежність ентропії рідкого гелію зображена на рис.2.3. разом з температурною залежністю теплоти випаровування. Бачимо, що ентропія He-II зменшується пропорційно до температури, прямує до нуля (теорема Нернста). Нижче за T_λ , до приблизно 0,9 К, маємо $S \approx T^6$. При подальшому зменшенні температури до 0,6 К степенева залежність слабкішає, після чого спостерігається "закон T^3 ". Ентропія системи зменшується при переході до більш впорядкованого стану. Таким чином, виходячи з форми S - T діаграми (рис. 2.3а) можна зробити висновок, що λ -перехід вказує на істотні зміни у конфігурації системи. Дослідження з розсіювання нейтронів та рентгеноструктурний аналіз довели, що рідкий гелій при $T > T_\lambda$ має більш впорядковану структуру, ніж при $T < T_\lambda$. Тобто, швидке зменшення

ентропії ніжче, ніж T_λ , обумовлено іншими факторами. Проте, як показали нейтронографічні дослідження, рух атомів більш впорядкований при $T < T_\lambda$.

Ентропія рідкого гелію залежить від енергетичного спектру і розподілу збуджень, які можуть з'явитись при низьких температурах. Залежність $S \approx T^6$ свідчить, що при $T > 0,9$ К у He-II виникають незвичайні збудження, які не зустрічаються в інших системах, у той час як "закон T^3 " - типовий для фононів у твердих тілах. Природу цих явищ ми будемо вивчати у розділі 3.

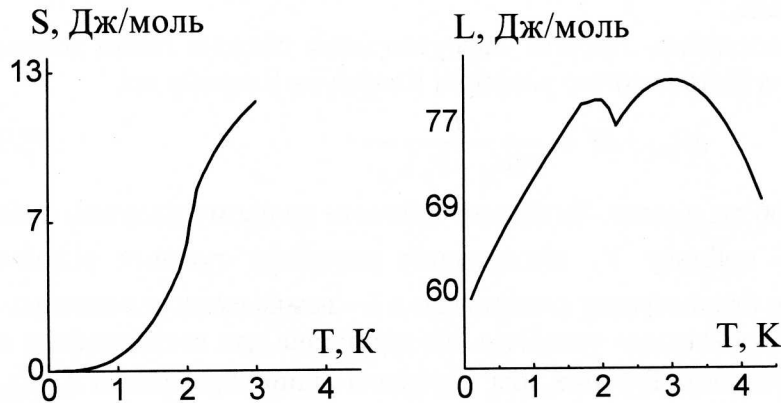


Рис.2.3. Температурна залежність ентропії S та прихованої теплоти випаровування L рідкого гелію.

Класифікуючи фазові перетворення, суттєво відмітити, що ентропія є перша похідна від термодинамічного потенціалу, а теплоємність - друга. Першою похідною від термодинамічного потенціалу є і густина рідини, що має як і ентропія, особливість типу зламу (стрибки похідної у λ -точці). Як бачимо на рис.2. густина He-I збільшується із зниженням температури як і у нормальній рідині, майже до T_λ . Сучасні експерименти довели, що густина рідини при вимірюванні уздовж кривої насичення, збігає через максимум при температурі, що вища за T_λ на 0,06 К, а у самій λ -точці спостерігається вищезгаданий злам. При $T < T_\lambda$ крива $\rho(T)$ збігає через слабкий мінімум поблизу температури 1,17 К з нульовим ухилом біля $T = 0$.

Коефіцієнт об'ємного розширювання, що визначається нахилом залежності $\rho(T)$ у λ -точці має логарифмічну особливість, як це можна побачити на мал.2.4. В області існування He-II коефіцієнт об'ємного розширювання досить малий і змінює знак при $T \cong 1,15$ К, де густина має мінімум, а при $T \rightarrow 0$ відповідно до теореми Нернста $d\rho/dT \rightarrow 0$.

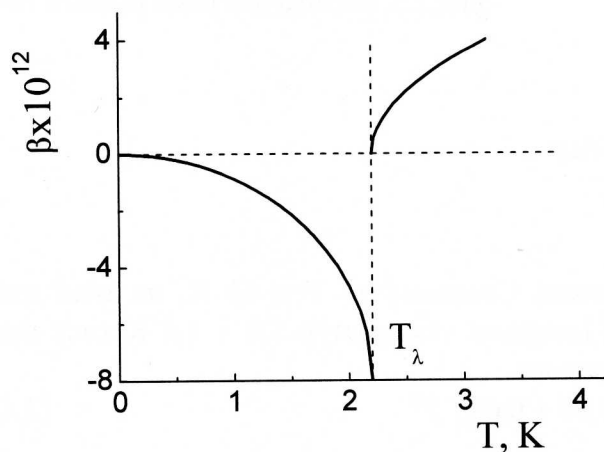


Рис.2.4. Температурна залежність об'ємного розширювання рідкого гелію.

Практична незалежність густини He-II від температури також є його собливістю, яка свідчить про те, що тепловий рух його атомів нижче за T_λ вже мало впливає на їх просторове розташування. Дійсно, середня міжатомна відстань у гелії-II

$$\alpha = (M / \rho N_A)^{1/3} = 3,6 \cdot 10^{-8} \text{ см}$$

де $M = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль - молярна маса, N_A - число Авогадро. Зіставляючи його з кривою на рис.1.1, що ілюструє потенціал (1.11), легко помітити, що середня енергія атомів He-II перевищує мінімум $U(R)$ на величину, більшу ніж $k_B T$, що є наслідком впливу нульових коливань.

Температурна залежність теплоти пароутворення рідкого гелію зображена на рис. 2.3б. Вона отримана за допомогою рівняння Клаузіуса-Клапейрона

$$dP_{\text{HAC}} / dT = \frac{L}{T(V_{\text{II}} - V_{\text{I}})_{\text{HAC}}} \quad (2.3)$$

V_{II} - об'єм пари і V_{I} - об'єм рідини. Як можна побачити на цьому малюнку змінювання L у залежності від T поблизу T_λ відзеркалює поведінку густини рідкого гелію. Підкреслимо, однак, що безпосереднє вимірювання L - важка експериментальна задача, що доси не виконана з достатньою точністю, що необхідна для встановлення змінення L у λ -точці. Згідно з правилом Трутона, для більшості рідин відношення $L/T_{\text{кип}} \approx 23$, однак, у разі рідкого гелію воно дорівнює 5,2, що свідчить про слабку взаємодію поміж атомами рідкого гелію.

2.2. Фазова діаграма рідкого Не.

Діаграма стану гелію суттєво відрізняється від діаграм стану інших речовин, тим, що тверда та газувата фази не можуть співіснувати (див. розд.1.1). Відсутність потрійної точки виразно виявила, що гелій не є характерна рідина. Щоб отримати твердий гелій необхідно докласти зовнішній тиск (Кеєзом, 1926 р.), що забезпечує зближення атомів достатнє для утворення кристалічної ґратки. На рис. 2.5 зображена фазова діаграма рідкого He-II.

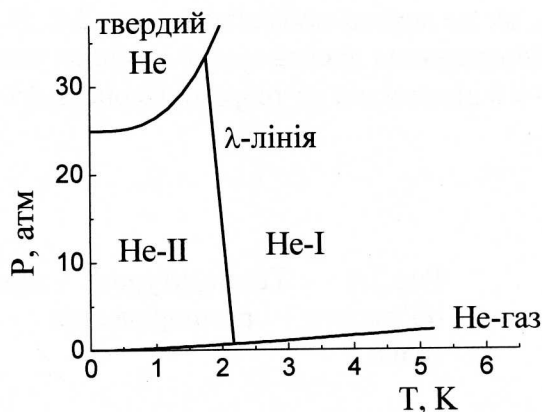


Рис.2.5. Фазова діаграма рідкого гелію.

Крива плавлення була визначена Симоном до $T \approx 60$ К, де тиск плавлення досягає значення $P \approx 10000$ атм. В інтервалі температур $1,0 \div 1,4$ К тиск плавлення може бути відображений співвідношенням

$$P_{\text{ПЛАВ}}, \text{ атм} = 25,00 + 0,053 T^8 \quad (2.4)$$

а для $T > 4$ К

$$P_{\text{ПЛАВ}}, \text{ атм} = 16,45 [(T/0,992)^{1,554} - 1]. \quad (2.5)$$

Згідно з співвідношенням (2.4) при $T = 0$ К необхідно докласти тиск $P \cong 25$ атм, щоб утримати гелій у твердому стані.

Як бачимо на фазовій діаграмі (див. рис. 2.5) крива рівноваги рідина-пара завершується у критичній точці

$$T_{KP} = 5,2 \text{ К}, P_{KP} = 2,264 \text{ атм}$$

На цієї ж кривій лежать точки кипіння при атмосферному тиску $T_B = 4,2$ К, та λ -точка (див. розд.2.1.)

$$T_\lambda = 2,172 \text{ К}, P_\lambda = 0,0497 \text{ атм} = 38,05 \text{ мм рт.ст}$$

λ -лінія розподіляє області існування двох рідких фаз - He-I і He-II. Вона з одного боку з'єднується з кривою залежності тиску насиченої пари від температури у λ -точці, а з другого - з кривою залежності температури плавлення від тиску у точці з P, T - координатами

$$T'_\lambda = 1,76 \text{ К}, P'_\lambda = 29,8 \text{ атм}$$

Нахили цих кривих при $T \rightarrow 0$ прямують до нуля згідно з теоремою Нернста. Як показали детальні дослідження, крива плавлення, хоча і має малий нахил майже до λ -точки, при $T = 0,8$ К ($P = 24,90$ атм) проходить крізь досить малий мінімум. Згідно з рівнянням Клаузіуса-Клапейрона мале значення $dP/dT = dS/dV$ свідчить про малу різницю ентропій рідкого та твердого гелію (ΔS та ΔV - змінення ентропії та об'єму при плавленні). Так як стрибок об'єму скінченний і $dP/dT \rightarrow 0$, то $\Delta S \rightarrow 0$. Вище ніж λ -точка різниця у ΔS велика, але безпосередньо нижче за T_λ вона падає, майже досягаючи нуля для усіх температур, що нижчі за 1 К. Тобто у цієї області температур ентропія не може зменшуватись як результат твердіння рідини, і рідка фаза залишається стійкою при дуже близьких до абсолютного нуля температурах.

Таким чином, на відміну від усіх інших речовин, на фазовій діаграмі ^4He відсутня потрібна точка рівноваги твердої, рідкої та газуватої фаз. Це є наочне виявлення особливостей рідкого, ^4He які були відмічені у розд.1.1. Незвичайним є також присутність двох рідких фаз гелію.

2.3. Надплинність рідкого He-II.

Як було відмічено, He-II не кипить, хоча може випаровуватись. Цей факт можна з'ясувати, зробивши припущення, що теплопровідність He-II стає нескінченною. Така "надтеплопровідність" була знайдена Кеєзомом та місс Кеєзом (1935 р.) при спробі визначити за допомогою калориметричних досліджень "гостроту" λ -перетворення. Вони знайшли, що у λ -точці змінюються не тільки швидкість поглинання тепла рідиною, але також і характер поглинання: нижче за λ -точку має місце очевидний перегрів. Вимірювання біля 1,4 К і 1,75 К дали значення теплопровідності He-II, що дорівнює приблизно 190 кал/(К·см), що набагато перевершує значення теплопровідності будь-якої іншої речовини. Теплопровідність He-II приблизно у 200 разів вища за теплопровідність міді при кімнатній температурі і у $3 \cdot 10^6$ разів більша, ніж теплопровідність He-I.

У 1937 р. П. Л. Капіца проаналізував можливі причини "надтеплопровідності" He-II і прийшов до висновку, що вона обумовлена специфічним конвекційним механізмом теплопередавання. У нормальних рідинах конвекційний механізм теплопередавання обмежен в'язкою взаємодією шарів рідини, що рухаються один відносно одного. Тобто для пояснення фізичної природи "надтеплопровідності" He-II необхідно вимірювання в'язкості цієї рідини.

Експерименти з визначення в'язкості рідкого гелію можна поділити на дві групи: до першої відносяться вимірювання в'язкого опору потоку, а до другого - визначення в'язких сил, що діють на тіло, яке рухається у рідині.

В'язкість *He-I* у температурній області від 2,6 К до 4,2 К практично не залежить від температури і має значення біля 30 мікропуаз, тобто приблизно у 10 разів менша за в'язкість води. При перетинанні λ -точки у процесі зниження температури ніяких розривів на температурній залежності в'язкості не спостерігалось, однак помітно зменшувалась при перетинанні λ -точки.

Відмітимо також, що в'язкість *He-I* не більша ніж в'язкість газуватого гелію за тією ж температурою і, що значення її не зростає із зниженням температури, як у звичайних рідин. Останнє призводить до думки, що навіть у стані рідини гелій зберігає більшу частку властивостей, що притаманні газам і що належить очікувати у рідині, яка має таку малу густину.

В'язкість *He-II*. На початку 1938 р. в одній і тієї ж книжці "Nature" з'явилися два коротеньких дописи Капіци і Аллена та Майзнера, у яких описувалась течія *He-II* крізь вузькі отвори. Рис. 2.2а демонструє схему прилада Капіци, за допомогою якого була відкрита надплинність *He-II*.

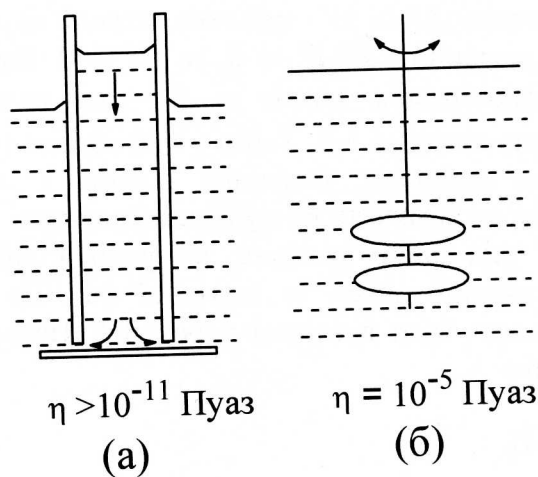


Рис. 2.6. Два різних методи для визначення в'язкості рідкого гелію-II:
а) течія крізь тонкий капіляр;
б) метод коливань диску або циліндру.

Капіца спостерігав течію рідкого гелію поміж двома оптично плоскими скляними дисками діаметром 3 см. Верхній диск, мав у центрі отвір діаметром 1,5 см і за допомогою плоского шліфа приєднувався до скляної трубки. Опускаючи або підіймаючи цей прилад у ванні з рідким гелієм, можна було установлювати рівень стовбчика рідини у трубочці вище або нижче за рівень рідини у ванні. Коли поміж дисками не були розташовані прокладки для збільшення щільності і були доведені у контакт одна до одної (за допомогою спостереження інтерференційної картини було встановлено, що відстань поміж ними не перевищувала 0,5 мкм), витікання *He-II* могло бути виявлено лише через декілька хвилин, а при температурах нижчих за λ -точку *He-II* витікав з такої посудини невимірно швидше (вподовж кількох секунд), так, наче б то він зовсім не мав в'язкості. Відсіль Капіца оцінив

$$\eta_{\text{He-II}} \leq \frac{1}{1500} \eta_{\text{He-I}}$$

Так було винайдено явище, яке Капіца назвав "надплинність". П.Л. Капіці була присуджена Нобелівська премія "за фундаментальні винаходи та вияви у галузі фізики низьких температур". Явище надплинності є головною особливістю *He-II*.

Аналогічні результати були отримані Алленом та Майзнером, які досліджували протікання He-II крізь капіляр, що утримує купку стиснутих дротиків. У цих дослідках в'язкість He-II оцінювалась за допомогою закону Пуазейля. Згідно з цим законом об'єм V рідини, що протікає за одну секунду крізь поперечний переріз тонкого циліндричного капіляра діаметром d дорівнює

$$V = \frac{\pi(p - p_0)d^4}{128l\eta}$$

де $(p - p_0)$ - різниця тисків біля входу та виходу рідини у капілярі, l - довжина капіляра, η - коефіцієнт в'язкості.

Експериментальні результати з визначення в'язкості He-II наведені на рис. 2.7. Тут крива 1 одержана при вимірюванні згасання коливань диска або циліндра у рідині. Відмітимо, що $\eta(T)$ швидко зменшується поблизу T_λ , однак в області більш низьких температур $\eta(T) \cong 10^{-9}$ Пуаз. Крива 2 ілюструє температурну залежність коефіцієнта в'язкості He-II, значення якого одержані у експериментах Капіци та Аллена і Майзнера. Можна побачити, що в цих дослідках в'язкість відсутня і можна визначити лише її верхню межу, яка не більша ніж 10^{-11} Пуаз. Наприкінці, крива 3 - $\eta(T)$ гелію-II, яка виміряна за допомогою обертового віскозиметра. При $T \cong 1,4$ К в'язкість має мінімальне значення $1,2 \cdot 10^{-11}$ Пуаз і далі зростає при зниженні температури. На рис. 2.8. можна побачити, що у вузьких капілярах (від 10^{-5} до $4 \cdot 10^{-4}$ см) швидкість потоку не залежить від градієнту тиску вздовж каналу і довжини, а тільки від температури.

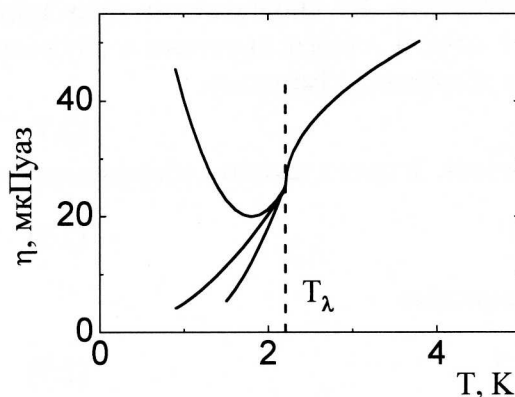


Рис.2.7. Залежність $\eta(T)$ He-II

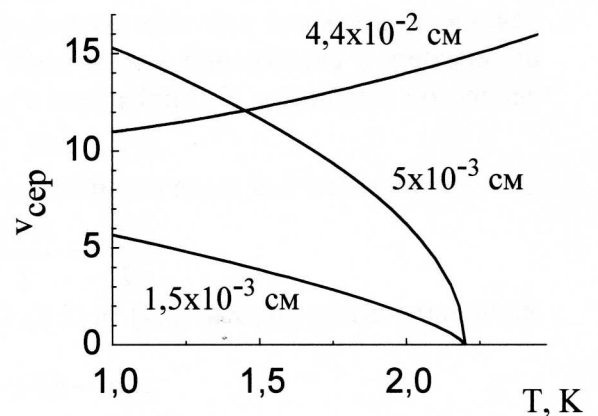


Рис.2.8. Залежність $v_{сер}(T)$ за різних умов експериментів для гелію-II при різних діаметрах капілярів

Таким чином, утворюється враження, що He-II спроможний бути одночасно в'язким і не в'язким. Ці властивості нашоухують на (вельми нетривіальну) думку, що уперше була вказана Тіссою, що He-II наче б то складається з двох рідин. Одна з них - нормальна рідина зі звичайною в'язкістю, а друга - надплинна і спроможна текти без тертя. Відсутність в'язкості у надплинній рідині було підтверджено у експериментах з незгасаючими потоками рідини. У цих експериментах посудину, що мала форму тору, заповнювали поруватим матеріалом з дуже тоненькими каналами, що повинні пропускати рідину. Тор обертали навкруги його вісі симетрії а потім зупиняли. Було винайдено, що течія He-II залишалась без зниження кутової швидкості впродовж 12 годин, що тривав дослід. Це вказує на спроможність He-II текти без дисипації. Слід, однак, зразу ж відмітити, що розгляд рідини, як суміші нормальної та надплинної її частин, є не більше як спосіб наочного опису явищ, що мають місце у квантовій рідині. Як і усякий опис квантових явищ у класичних термінах, воно не цілком адекватно

дійсності. Більш точно слід казати, що у квантовій рідині, якою є He-II, може існувати одночасно два типи руху, кожен з яких пов'язан зі своєю ефективною масою, так, що сума обох цих мас дорівнює повній справжній масі цієї рідини. Один з цих рухів - нормальний, тобто має ті ж властивості, що і рух звичайної в'язкої рідини, інший - надплинний. Обидва ці рухи існують без передавання імпульсу від одного до іншого. Є певний сенс казати про надплинну і нормальну частини рідини, що поза усе зовсім не означає можливість реального розподілу рідини на дві частини, у яких одні атоми належать до нормальної рідини, а інші - до надплинної, тому що усі атоми He-II однакові.

2.4. Критерій надплинності Ландау.

Явище надплинності було з'ясовано у роботах Л.Д.Ландау (1941 та 1947 р.р.). Цієї теорії присвячений розділ 3. Зараз ми обмежимося тільки демонстрацією того, що надплинність є фундаментальною властивістю квантової рідини.

Як і будь-яка квантова система, рідина характеризується певним основним станом: при $T = 0$ - це нерухома рідина з мінімальною енергією E_0 і може переходити у збуджений стан, що характеризується енергією $E > E_0$. Енергію збудження $\Delta E = E - E_0$ можна зобразити у вигляді суми елементарних збуджень (квазічастинок) - квантів збудження з енергією $\varepsilon(p)$ і імпульсом \vec{p} :

$$\Delta E = \sum \varepsilon_i(p) \quad \text{та} \quad \vec{p} = \sum \vec{p}_i$$

Розглянемо тіло з масою M , яке рухається у рідині з швидкістю \vec{v} при $T = 0$. За наявності в'язкості рух тіла повинний гальмуватись. Це сповільнення руху повинно починатись з виникнення у квантовій рідині хоча б одного квантового збудження з енергією і імпульсом \vec{p} . Тоді згідно з законом збереження імпульсу

$$M\vec{v} = M\vec{v}_1 + \vec{p} \quad (2.7)$$

де \vec{v} - швидкість тіла після виникнення збудження. Згідно з законом збереження енергії

$$\frac{Mv^2}{2} = \frac{Mv_1^2}{2} + \varepsilon(\vec{p}) \quad (2.8)$$

Якщо вилучити з рівнянь (2.7) та (2.8) \vec{v}_1 то одержимо

$$\varepsilon(\vec{p}) - \vec{v}\vec{p} + \frac{p^2}{2M} = 0 \quad (2.9)$$

ураховуючи, що $\vec{v}\vec{p} = vp \cos \Theta$, де Θ - кут поміж \vec{v} і \vec{p} , одержимо з (2.9)

$$v = \frac{\frac{\varepsilon(\vec{p})}{p} + \frac{p}{2M}}{\cos \Theta} \quad (2.10)$$

Так як $\cos \Theta \leq 1$ з (2.10) маємо

$$v \geq \frac{\varepsilon(\vec{p})}{p} + \frac{p}{2M} \quad (2.11)$$

звідси, якщо маса M досить велика ($M \gg p/m_2$), останнім членом у (2.11) можна нехтувати

$$v \geq \varepsilon(\vec{p})/p \quad (2.12)$$

Відношення $\varepsilon(p)/p$, взагалі кажучи, має нижню межу $\varepsilon(\vec{p})/p \geq (\varepsilon(\vec{p})/p)_{\min}$. Якщо ця межа відрізняється від нуля, то коли

$$v \leq v_{CS} = (\varepsilon(\vec{p})/p)_{\min} \quad (2.13)$$

розглянутий механізм обміну енергією та імпульсом поміж тілом і рідиною неможливий. Таким чином, надплинність можлива при швидкостях течії рідини менших ніж критична швидкість v_{CS} . Збудження рідини (і отож сповільнення тіла і виникнення в'язкості) можливо тільки якщо швидкість тіла $v \geq v_{CS}$. Отже надплинність має місце, якщо

$$v \leq v_{CS} = (\varepsilon(\vec{p})/p)_{MIN} > 0 \quad (2.14)$$

Цю умову називають критерієм надплинності Ландау.

Залежність $\varepsilon(p)$ для елементарного збудження називають дисперсійним співвідношенням, якщо воно відзеркалено алгебраїчески, або енергетичним спектром, якщо воно накреслено графічно. Енергетичний спектр є головною характеристикою реальних квантових систем, що відрізняє одну речовину від іншої. Критерій Ландау (2.14) зв'язує присутність або відсутність надплинності у тій чи іншій системі з особливостями її енергетичного спектру. Поперед відмітимо, що енергетичний спектр He-II буде розглянутий у наступному розділі. Для надплинної рідини $(\varepsilon(p)/p)_{MIN} = 0$. У разі коли мінімум відношення $\varepsilon(p)/p$ дорівнює нулю $v_{CS} = 0$ і рідина не є надплинною, бо для будь-якої $v \neq 0$ виконується умова (2.14). Зокрема, у випадку квадратичного закону дисперсії

$$\varepsilon = p^2/2m, \quad (2.15)$$

який є характерним у разі ідеального газу, надплинність неможлива. Дійсно, у цьому випадку

$$\varepsilon/p = p/2m$$

Мінімальне значення цього відношення дорівнює нулю (це досягається при $p = 0$)

2.5. Експерименти, що підтверджують справедливість дворідинної моделі He-II.

Сформулюємо основні ствердження дворідинної моделі He-II. Нижче за λ -точку гелій спроможний одночасно здійснювати два різних рухи. Кожен з цих рухів має власну локальну швидкість: \vec{v}_S - для надплинної та \vec{v}_N - для нормальної частини рідини. Аналогічним чином у кожній частині є власна ефективна густина ρ_S і ρ_N . Очевидно, що цілковита густина He-II визначається як

$$\rho = \rho_S + \rho_N \quad (2.16)$$

а цілковита густина потоку як

$$\vec{j} = \rho_S \vec{v}_S + \rho_N \vec{v}_N \quad (2.17)$$

Такий підхід, коли обидві частини рідини розглядаються незалежно, є слушним у разі малих швидкостей потоку. При більш високих швидкостях надплинний потік стає дисипативним, у нормальній частині рідини виникає турбулентність і можлива взаємодія поміж обома компонентами He-II. За таких умов рівняння дворідинної моделі стають занадто складними.

2.5.1. Визначення густини нормального компоненту. Дворідинна модель гелію-II отримала найбільш яскраве підтримання в експерименті Андронікашвілі (1946 р.). Він безпосередньо визначив температурну залежність відносної густини нормального компоненту ρ_N/ρ . Експеримент складався з вимірювання моменту інерції стосу близько розташованих алюмінієвих дисків (діаметром 3,45 см при відстані поміж дисками 0,21 мм), що були підвішені у ванні рідкого гелію-II, як зображено на рис. 2.9. Відстань поміж дисками була достатньо малою, для того щоб при $T > T_\lambda$ (He-I) уся рідина поміж дисками захоплювалась разом з ними.

При $T < T_\lambda$ період осциляцій різко падав, що вказувало на те, що не уся рідина у

проміжку поміж дисками була ними захоплена. Такий результат підтверджує припущення, що надплинний компонент не впливає на рух дисків. Однак, нормальний або в'язкий компонент буде частково захоплюватись дисками, які здійснюють крутильні коливання. Вимірюючи змінення періоду коливань у залежності від температури, можна підрахувати змінення цілковитого моменту інерції системи, яка коливається, а звідси отримати ρ_N/ρ при заданій температурі, тобто визначити ρ_S/ρ . Рис. 2.9. демонструє, що нижче за 1 К в He-II домінує надплинний компонент. При $T < 1$ К густина нормального компоненту зменшується, як $\rho \approx T^4$. Відмітимо також, що як емпірично встановлено, при $T < 1,2$ К $\rho_N/\rho = (T/T_\lambda)^{5,6}$. Велике значення для теорії надплинності мають дослідження температурної залежності ρ_N/ρ у безпосередньої близькості до λ -точки (у цієї області температур зручно користуватись величиною ρ_S/ρ). Як було встановлено Клоу і Реппі (1966 р.), а також Тайсоном і Дугласом (1966 р.) за допомогою надплинного гіроскопу та Андронікашвілі за допомогою стосу дисків при $T_\lambda - T < 10^{-3}$ К

$$\rho_S = 1,44 \rho (T_\lambda - T)^{2/3} \quad (2.18)$$

У цих дослідах вимірювання проводились до $T_\lambda - T \approx 5 \cdot 10^{-6}$ К. Таким чином, експеримент Андронікашвілі демонструє суперпозицію двох квантових станів макросистеми: одночасне існування у неї руху і нерухомості.

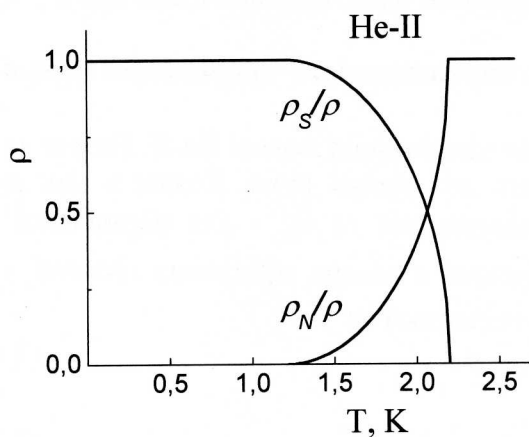


Рис.2.9. Температурна залежність відносної густини нормального та надплинних компонентів гелію.

2.5.2. Термомеханічний ефект. Уперше термомеханічний ефект у He-II був експериментально відкрит Алленом і Джонсом у 1938 р. Сутність термомеханічного ефекту, або ефекту фонтанування міститься у тому, що при виділенні тепла у He-II виникає течія надплинного компоненту у напрямку до джерела тепла! (рис. 2.10 а, б)

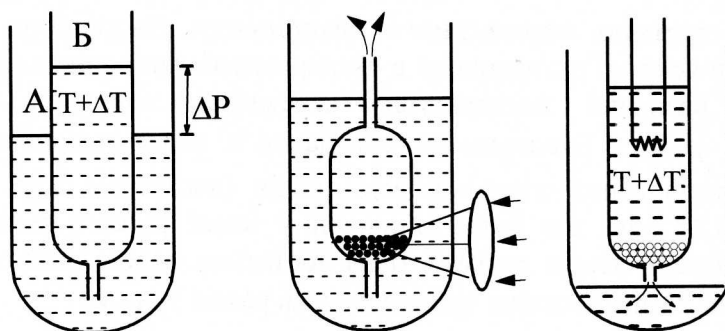


Рис.2.10. Теплові ефекти у He-II: а) термомеханічний ефект, або ефект фонтанування; б) механокалоричний ефект.

Вищезгадані автори взяли дві посудини А та Б, які були з'єднані поміж собою за допомогою надщілини (тобто дуже вузькою щілиною завширшки меншою ніж 10^{-4} см). Було знайдено, що при нагріванні внутрішньої посудини з'являється як і належало очікувати, деяка різниця температур ΔT . При цьому, однак, рідина перетікала у внутрішню посудину, і як результат поміж двома посудинами встановлювалась різниця рівнів, або різниця тисків ΔP .

Фонтанування He-II відбувається таким чином. Трубка, що заповнена дрібним порошком, занурюється до гелієвої ванни (рис. 2.10б). При нагріванні світлом порошку у трубці температура гелію, який заповнює дрібні пори стає вищою, ніж температура гелію у ванні. Система прагне до стану рівноваги, мірою якої є рівність температур. Як би трубка не була заповнена дрібним порошком, то скоріш за все стан рівноваги було б досягнуто шляхом переходу нормального компоненту у ванну, а надплинного - у трубку. Вподовж такого зустрічного руху нормального та надплинного компонентів перенос мас був би відсутнім. У нашому випадку нормальний компонент гальмується дрібним порошком і, як усяка в'язка рідина, не може перейти у ванну. Навпаки, надплинний компонент вільно просякає крізь надщілину з такою швидкістю, що з капіляра починає виривати струмінь He-II. Для утворення фонтану, який підіймається на висоту 30-40 см, було б достатньо теплоти, що утворюється за допомогою кишенькового ліхтарика.

Термомеханічний ефект може бути інтерпретованим на базі дворідинної моделі He-II. Дійсно, як можна побачити на рис. 2.9 будь-якому значенню температури в області $T \leq T_\lambda$ відповідає визначене відношення ρ_N / ρ . При нагріванні He-II частина надплинного компоненту перетворюється у нормальний компонент. Отже, у внутрішній посудині (див. рис. 2.10а) відносна концентрація нормального компоненту буде більша, ніж у кріостаті. Крізь капіляр може протікати тільки надплинний компонент, бо нормальний компонент має в'язкість. Частинки надплинного гелію проходять крізь капіляр з об'єму А до, об'єму Б і обернено. При встановленні динамічної рівноваги, кількість частинок надплинного гелію, що проходять крізь капіляр в обох напрямках за однаковий термін повинна бути однакою. Але в об'ємі Б концентрація надплинного компоненту менша ніж в об'ємі А і, очевидно, що динамічна рівновага може установитись, якщо рівень рідини в об'ємі Б підійметься, відносно рівня в об'ємі А. Різниця тисків що викликана різницею температур, може бути знайдена за умови, що хімічні потенціали однакові

$$\mu(P_A, T_A) = \mu(P_B, T_B) \quad (2.19)$$

де P_A і P_B - тиски у точках А і Б. У випадку малих різниць у тисках з термодинамічного співвідношення

$$d\mu = -SdT + dP/\rho \quad (2.20)$$

виходить, що

$$\Delta P = \rho s \Delta T \quad (2.21)$$

де s - питома ентропія. Ця формула була отримана Г. Лондоном (1939 р.)

Якщо P представити через різницю рівнів $\Delta P = \rho g \Delta h$, то (2.21) стане виглядати таким чином

$$\Delta h = (S/g) \Delta T \quad (2.22)$$

де g - прискорення вільного падіння.

Тиски (різниці рівнів), що визначаються цими формулами, достатньо значні. Наприклад, при 2 К різниця $\Delta T = 10^{-3}$ К призводить до реальної різниці рівнів $h = 9,6$ см, оскільки при завданій температурі $S = 9,6 \cdot 10^6$ ерг/г К.

Присутність термомеханічного ефекту у He-II поряд з його значною конвективною теплопровідністю і здатністю до утримання у рідкому стані аж до 0 К

призводить до того, що надплинний гелій є самим ефективним теплоносієм для охолодження різноманітних пристроїв на штучних супутниках Землі. Як відомо, самий розповсюджений засіб охолодження рідини є відкачка пари рідини за допомогою насосу. У земних умовах відкачка пари не зустрічає труднощів у зв'язку з присутністю межі розподілу рідина - пара. Космічний вакуум є сам по собі чудовий насос, але його застосування в умовах невагомості зустрічає утруднення, бо пара знаходиться усередині рідини і Космос відкачує рідину разом з парою. Зараз існує тільки один засіб переборення цих труднощів: у горловині посудини, що заповнена гелієм-II, розташовують фазовий сепаратор - пробку що утворена з тонких капілярів. Космос відкачує пару гелію над цією пробкою. При цьому виникає градієнт температур спрямований від пари до рідини і за рахунок термомеханічного ефекту пара замикається у посудині. Таким чином перепад тиску утворений Космосом, не може викачати He-II з посудини у Космос тому, що цей перепад сбалансований силою, обумовленою градієнтом температури.

Співвідношення (2.21) дозволяє простим засобом вимірювати ентропію одиниці об'єму He-II. Порівнюючи значення ентропії з рахованими на основі вимірювань теплоємності, можна переконатись у тому, що ентропія надплинного компонента дорівнює нулю, як це походить з дворідинної моделі He-II. Ентропію має тільки нормальний компонент.

2.5.3. Механокалоричний ефект. У 1939 р. Даунт та Мендельсон провели експеримент, у якому вперше спостерігався ефект, зворотний до термомеханічного ефекту, що отримав назву механокалоричний ефект. У цьому експерименті (див. мал. 2.10в) автори реєстрували змінення температури двох посудин, які спочатку знаходились при однаковій температурі, під час перетікання He-II, наприклад, у результаті дії сили тяжіння, з однієї посудини до другої крізь надщілину, яка не перепускала нормальний компонент. У ідеальному випадку за умови цілковитої теплоізоляції у нижню ванну буде текти тільки надплинний компонент, у якого відсутні теплові збудження. Відсутність теплових збуджень у He-II можлива тільки при $T = 0$ К, коли рідкий гелій знаходиться в основному стані. Отже, рух надплинного компонента не супроводжується переносом тепла, бо тепло переноситься тільки рухом нормального компонента. У реальних експериментальних умовах очевидно, що температура He-II у ванні не дорівнює нулю, але вона нижча ніж температура гелію у верхній ванні. Завдяки надщілині теплові збудження залишаються у верхній ванні, об'єм якої зменшується в міру витікання надплинного компонента. Тому температура гелію у верхній ванні з часом монотонно зростає: накопичене тепло розподіляється на меншу кількість атомів. Зрозуміло, що цей процес припиниться, коли температура у верхній ванні буде дорівнювати T_λ .

2.5.4. Експеримент Капіци з визначення тепловмісту гелію - II. Вирішальний експеримент, що був здійснений Капіцею у 1941 р. під час досліджень гідротермічних ефектів, дозволив об'єднати наведені у розд. 2.5.2 та 2.5.3 явища і отримати їх кількісний опис. Прилад Капіци схематично зображений на рис.2.11. Він складався з дьюарівської посудини, яка була зв'язана з гелієвою ванною за допомогою вузької щілини, яка уявляла собою проміжок поміж двома полірованими скляними платівками. Ширину щілини можна було регулювати і при найбільшому стисненні платівок вона складала 0,13 мкм. Щілина такої ширини була достатньо вузькою для того, щоб вважати, що під час експерименту крізь неї буде текти тільки надплинний компонент. Усередині і зовні дьюару були розташовані термометри електроопору. Усередині дьюару розташований також електричний нагрівач. У результаті виділення тепла усередині дьюара надплинний компонент перетікав до нього з ванни крізь щілину. Кількість рідини, що перетікала усередину визначалась безпосередньо рівнем рідини усередині дьюару. Аж до певної критичної потужності нагрівача при перетіканні рідини

усередину не спостерігалось виникнення різниці температур поміж дьюаром та ванною.

Це означає, що виділена нагрівачем енергія компенсує різницю тепловмісту поміж гелієм-II у ванні та гелієм, що втікає крізь надщілину. Іншими словами, кількість надплинного компонента, що перетікає усередину за одиницю часу dV/dt (см³/с) саморегулюється таким чином, щоб він сприйняв тепло, що дає нагрівач в одиницю часу dQ/dt (Дж/с), перетворюючись до He-II, що має при температурі T питому ентропію s :

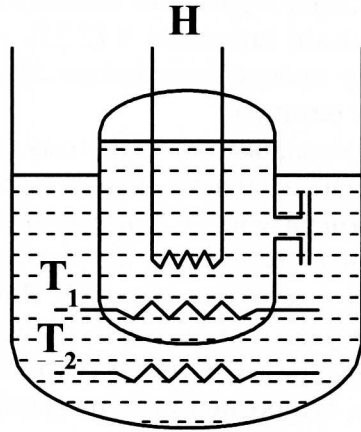


Рис. 2.11. Схема прилада Капіці: Н - нагрівач; T_1 і T_2 - термометри електроопору.

$$dQ/dt = \rho s T (dV/dt) \text{ або } sT = \rho^{-1} (dQ/dT) \quad (2.23)$$

де sT - питомий тепловміст He-II, ρ - густина. На рис.2.12. зображена типова залежність об'ємної швидкості v та виміряно одночасно з нею різниці температур ΔT усередині та зовні кріостату від потужності Q , що надходить до дьюару.

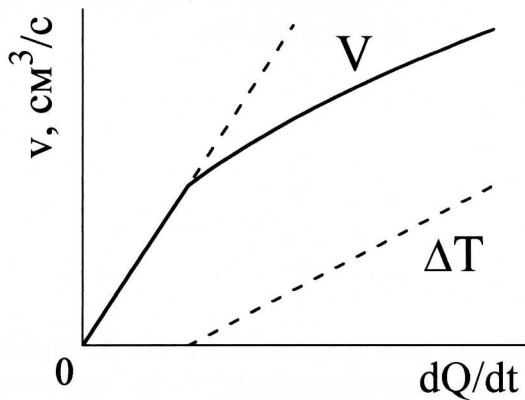


Рис.2.12. Залежність об'ємної швидкості v гелію-II та різниці температур ΔT на кінцях надщілини від потужності Q , що надходить до дьюару (за спостереженнями Капіці).

Як бачимо на рис.2.12 температура у дьюарі не зростала ($T = 0$) у разі, коли швидкості були нижчими за певне критичне значення v_c . Однак, при швидкостях $v > v_c$, лінійна залежність між v і Q порушується, і водночас з цим з'являється різниця у температурах ΔT рідкого гелію-II усередині та зовні дьюару. Таким чином, існує певна критична швидкість течії v_{cs} (див. розд. 2.4), вище якої надплинність порушується, виникає, в'язка незворотна течія, у зв'язку з чим потрібно надходження додаткової кількості тепла.

Дослід Капіці без сумніву доводить, що He-II, який перетікає крізь вузьку щілину знаходиться у енергетичному стані, який різниться від стану вільного гелію. Ця обставина, а також виникнення різниці рівнів Δh , яка пов'язана з виділенням тепла по один бік щілини дозволяє використовувати і зворотний ефект для визначення

тепловмісту He-II: шляхом примушення рідини перетікати крізь щілину під впливом тиску, можна визвати появу різниці між температурами по обидва боки щілини (механокалоричний ефект). Для такої щілини дьюарівська посудина (див. рис. 2.11) занурювалась на значну глибину, нижчу ніж рівень гелію у кріостаті. Вимірювалась різниця температур ΔT як функція різниці рівнів Δh . Обертаючи формулу (2.21), маємо

$$sT = T\Delta P / \Delta T \quad (2.24)$$

де: ΔP - різниця тисків, що обумовлена різницею Δh з поправкою на різницю тисків насиченої пари над ванною та у дьюарі при різних температурах. Як можна побачити на рис.2.13 питомі тепловмісти sT гелію-II, що одержані виходячи з (2.23) та (2.24) співпадають один до одного, що свідчить про те, що процес перетікання He-II крізь щілину є термодинамічно оборотним (у докритичному режимі).

Оборотність гідротермічних процесів у He-II можлива тільки у тому випадку, коли ентропія гелію, що перетікає крізь щілину дорівнює нулю і поводить себе так, наче б то гелій знаходиться при абсолютному нулі температури. Цей результат показує, що течія гелію-II крізь вузьку щілину кардинально відрізняється від властивостей класичної рідини, де потік рідини завжди зв'язаний з потоком ентропії. Результати досліджень Капіці дозволяють належним чином з'ясувати механокалоричний ефект. Рідина, що витікає з посудини крізь надщілину, не несе разом з собою ентропії; таким чином, рідина, що залишається має таку ж ентропію, але розподілену на меншу масу, тобто нагрівається. Аналогічно, посудина, куди надходить рідина з нульовою ентропією, охолоджується.

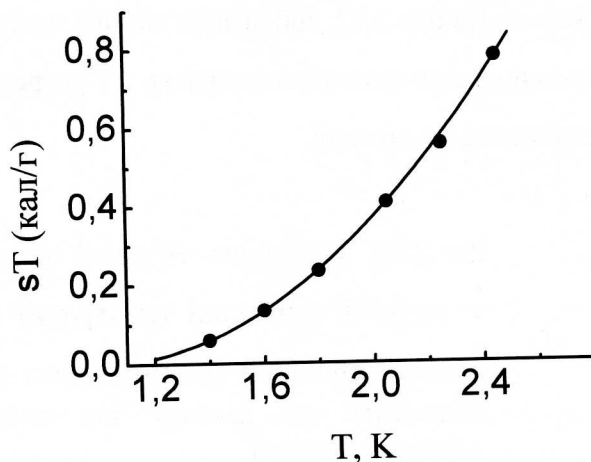


Рис. 2.13. Тепловміст He-II, визначений за допомогою формул (2.23) та (2.24).

2.5.5. Теплопровідність гелію-II. Серед усіх властивостей He-II, як вже було відмічено раніше, найбільш визначними є "надтеплопровідність" та "надплинність". Було очевидно, що обидві ці властивості щільно пов'язані поміж собою і напевно одна з них є первинною, а друга вторинною. Така точка зору, що була уперше вказана Капіцею (1941 р.) була покладена у підвалину його подальших досліджень властивостей He-II, які з усією яснотою розкрили характер цих взаємовідносин та вказали вірний шлях експериментального вивчення властивостей квантових рідин. Капіца показав, що аномально високий теплоперенос у He-II не може бути з'ясований за допомогою звичайного конвекційного механізму, бо в такому випадку було б необхідно припустити, що швидкість конвекційного руху рідини досягає 1000 м/с. Для того, щоб встановити справжній характер потоків, що переносять тепло у He-II необхідно було спостерігати їх безпосередньо, що і було здійснено Капіцею за допомогою прилада, який схематично зображений на рис. 2.14.

Посудина 1 та з'єднаний з нею капіляр 2 утворюють маленьку дьюарівську посудину (завдовжки разом біля 9 см). Усередині посудини знаходиться нагрівач Н. Попереду відкритого кінця капіляру висить легке крильце 3 на балансірі 4, що

розташований на кварцовій нитці з дзеркальцем 5. Було знайдено, що у разі коли посудина заповнена He-II і нагрівач увімкнений крильце відхиляється (див. рис. 2.14). Це безпосередньо доводить зв'язок процесу теплопередавання у He-II з виникненням у ньому руху. Але цей рух має вельми парадоксальний характер: з капіляра 2 вирує струмінь рідини, який відхиляє крильце 3, і в той же час кількість He-II у посудині не змінюється, він залишається повним. Таким чином, необхідно було припустити, що одночасно з струменем що витікає має місце якийсь "протиток" рідини. Однак, не менш парадоксальним уявляється і інший аспект цього явища. Як показав дослід, струмінь рідини, що вирує з отвору, чинить на посудину реактивну дію. Прилад для дослідження реактивного струміння уявляв собою мініатюрну дьюарівську посудину приблизно 2 см завдовжки і вагою 0,2 г, яка разом з противагою була підвішена на кварцовій нитці. У внутрішній порожнині посудини знаходився нагрівач, а сама порожнина закінчувалась тоненьким капіляром. Попереду відкритого кінця капіляра був встановлен екран. Під час нагрівання гелію на посудину діяла реактивна сила, яка однак зникла, коли був встановлен екран. Уявлення таке, ніби то "протиток", що потрапляє у посудину, сам по собі ніякої механічної дії на посудину не чинить. До цих висновків можна долучитись, аналізую результати наступного вельми наочного експерименту Капіці (рис. 2.15).

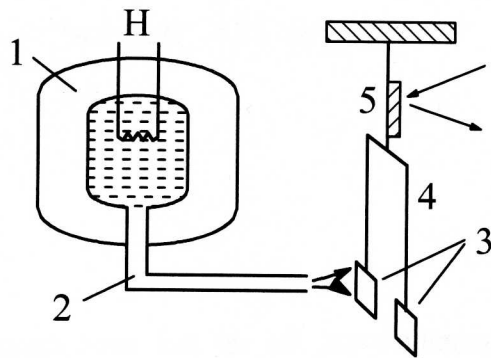


Рис. 2.14. Прилад Капіці для дослідження теплового струміння у He-II.

На вістрі голки 1 розташована маленька двостінна скляна посудина 2, перегорнута донцем вгору. Міжстінний простір сполучається з зовнішнім гелієм шляхом шістьох зогнутих капілярів подібно до сегнерова колеса. Нагрівання гелію усередині цього "павучка" здійснювалось світлом точкового ліхтарика, за допомогою конденсору 3. Внутрішні стіни були зачорнені, тому потужність що поглиналась була порівняно великою. Після того, як точковий ліхтарик був увімкнут "павучок" починав обертатись з кутовою швидкістю 120 об/хвил. Швидкість обертання за інших однакових умов збільшувалась при зниженні температури. Шляхом одягання на "павучок" за допомогою петлі 5 пристрою 4, що складався з двох кілець з припаяними до них крильцями, можна було загальмувати обертання "павучка". До того ж кожне з крилець розміщувалось на відстані 1-2 мм біля відповідного капілярного сопла. Таким чином, обертання "павучка" обумовлено реактивною дією струміння. Це свідчить, що у гелії спостерігався динамічний тиск у відсутність загального переносу маси. Експерименти Капіці зіграли рішучу роль у створенні теорії надплинності Ландау (1941 р.), про яку ми вже згадували у розділі 2.4 і викладенню основ якої присвячені наступні розділи. Згідно з цією теорією He-II - незбуджена рідина, на фоні якої існують елементарні збудження, що визначають її властивості при $T > 0$ К. При цьому важливим припущенням є ствердження, що теплові збудження охоплюють не усю рідину. Інакше кажучи, навіть у присутності деякої кількості елементарних збуджень частина рідини як би залишається в основному стані. З цією частиною рідини тверде тіло може взаємодіяти тільки за умови народження нових елементарних збуджень, поява яких обмежена критерієм надплинності Ландау (див. розд. 2.14). З іншого боку, тверді тіла, кінець кінцем, можуть взаємодіяти з газом квазічастинок, що вже є при $T =$

0, шляхом обміну енергією та імпульсом. Таким чином, з експериментів Капіци природно плине, що He-II як би складається з двох компонентів: надплинного та нормального. Як ми вже бачили раніше (див. розд. 2.3), для з'ясування парадоксу в'язкості He-II була постульована дворідинна модель. Досліди Капіци ясно довели, що нормальний компонент рухається з швидкістю v_N у напрямку зменшення температури. Отже, джерелом руху нормального компоненту є градієнт температури. Навпаки, надплинний компонент у той же час рухається з швидкістю v_S до джерела тепла. При цьому, для v_S є слушною умова $\text{rot} v_S = 0$, тобто надплинний компонент здійснює потенційний (безвихровий) рух. З цієї точки зору, дивовижні спостереження Капіци над He-II стають цілком зрозумілими. З підігрітих посудин вирує струмінь нормального компоненту, який має здібність діяти на тверді тіла за допомогою сил динамічного напору та реакції.

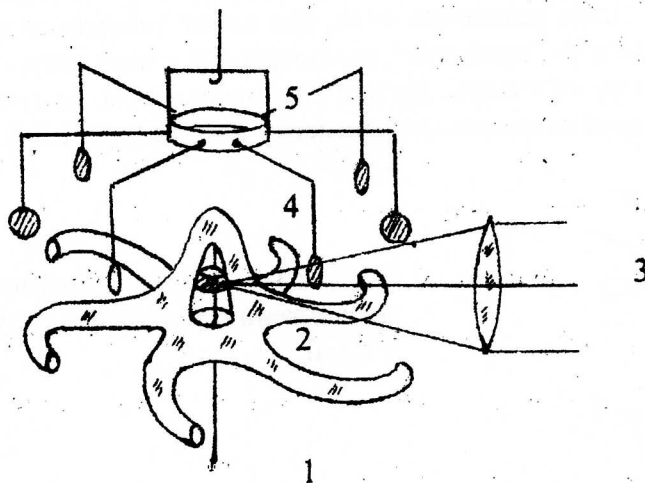


Рис. 2.15. "Павучок" Капіци.

Однак при цьому посудина не спорожнюється, бо до неї тече надплинний компонент, який взаємодіє з твердими тілами. Вимірює Капіцею дія на крильце (рис. 2.14) уявляє собою силу тиску потоку теплових збуджень. Переріз струменя теплових збуджень приблизно дорівнює перерізу капіляра, а реактивний тиск на тверді тіла дорівнює нулю у λ -точці і зростає при зниженні температури.

Велика теплопровідність He-II одержує природне порозуміння на підґрунті дворідинного руху, який був обговорен раніше. Саме перенос теплоти рухом нормального компоненту і відсутність такого переносу при надплинній течії призводить до надто великої теплопровідності He-II. Дійсно, у дослідах Капіци у облаштованій нагрівачем посудині температура гелію вища ніж у кріостаті. Такий стан, однак є нерівноважним. Як відомо, будь-яка система, що виведена з рівноваги, намагається повернутися до неї максимально швидким чином. У звичайній рідині, за відсутності переносу маси, становлення теплової рівноваги можливо тільки в умовах повільного дифузійного процесу теплопровідності, що відзеркалюється відомим рівнянням

$$\partial T / \partial t = k \Delta T \quad (2.26)$$

де $k = \chi / \rho$, C_p - температуропровідність середовища, χ - коефіцієнт теплопровідності, ρ - густина, C_p - теплоємність.

У He-II існує більш ефективний засіб порівняння температур: нормальний компонент з швидкістю \vec{v}_N рухається в область, де температура нижча, а надплинний компонент з швидкістю \vec{v}_S - у зворотному напрямку. При цьому за рахунок зустрічного руху нормального та надплинного компонентів сумарна густина потоку складає

$$\vec{j} = \rho_S \vec{v}_S + \rho_N \vec{v}_N \quad (2.27)$$

і дорівнює нулеві, тобто перенос маси у He-II відсутній. Отже у, замкненому об'ємі, що заповнений He-II, чиниться конвективний перенос теплової енергії у рідині, що знаходиться у спокої $\vec{j} = 0$. Такий процес принципово відрізняється від конвективного переносу теплової енергії у звичайній рідині, що завжди супроводжується переносом маси. Раптове припинення кипіння гелію при подоланні λ -точки обумовлено значною конвективною теплопровідністю He-II, яка перешкоджає виникненню температурних флуктуацій, які необхідні для утворення бульбашок в об'ємі рідини і випаровування He-II відбувається тільки з вільної поверхні.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ.

1. З'ясуйте, чому відбувається зустрічний рух двох компонентів у гелії-II.
2. Чому не утворюються бульбашки пари при температурах нижчих ніж T_λ ?
3. З'ясуйте, що таке критична швидкість течії.

3. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ТЕОРІЇ КВАНТОВОЇ БОЗЕ-РІДИНИ.

Як вже зазначалось раніше, перехід до надплинного стану, який відбувається у рідкому гелії при $T = 2,17$ К, уявляє собою фазовий перехід другого роду (перехід He-I - He-II). Надплинністю ми називаємо спроможність He-II протікати без тертя крізь вузькі щілини або капіляри. Так як при зазначеній температурі теплова довжина хвилі де Бройля атомів гелію порівняна до міжатомних відстанів, He-II є суттєво квантовою системою. У розд. 2.4 ми показали, що надплинність є головною особливістю He-II. Однак надплинна течія можлива за умови, яку накладає критерій надплинності Ландау (2.14).

3.1. Теорія надплинності Ландау. Елементарні збудження у гелії-II.

Л.Д.Ландау побудував послідовну теорію надплинності He-II, яка базується на принципах квантової механіки. Вже у першому дописі (1941р.) містяться майже усі основні положення як мікроскопічної теорії рідкого гелію, так і побудованої на її основі макроскопічної теорії - термодинаміки і гідродинаміки цієї рідини.

У підґрунті теорії Ландау лежить уявлення про елементарні збудження або "квазічастинки" як носії теплової енергії рідини. Підкреслимо ще раз, що квазічастинка - істотно квантове уявлення, за допомогою якого у квантовомеханічній картині описується колективний рух атомів тіла.

Відповідно до Ландау, усяка квантова система довільно взаємодіючих частинок у слабкозбуреному стані може розглядатись як сукупність окремих квазічастинок. Квазічастинка в однорідній системі характеризується законом дисперсії, тобто залежністю енергії від імпульсу: $\varepsilon(p)$. Вигляд закону дисперсії легко встановлюється при маленьких значеннях імпульсу, яким відповідають довгохвильові збудження у системі. У рідкому гелії такими збудженнями є поздовжні звукові коливання, тому відповідні квазічастинки уявляють собою звукові кванти - фонони, енергія яких, як відомо, є лінійною функцією їх імпульсу:

$$\varepsilon_{ph} = u_1 p \quad (3.1)$$

де u_1 - швидкість звуку. Відмітимо, що у випадку He-II звичайний звук зветься першим звуком, на відміну від другого та інших, про які буде сказано далі.

Таким чином, у своїй початковій частині (довгі хвилі, тобто малі імпульси) крива залежності $\varepsilon(p)$ повинна мати лінійну частину. Природно припустити, що ніякої

іншої гілки, яка б виходила з початку координат, функція $\epsilon(p)$ не має. Іншими словами, усі квазічастинки з достатньо малою енергією є фононами. Як буде показано далі, це припущення достатньо для з'ясування надплинності.

Так як ми розглядаємо у рідкому гелії такі внутрішні рухи, які уявляють собою хвилі стиснення з довжиною хвилі великою у порівнянні з міжатомними відстанями (фонони), ці хвилі стиснення собою, як відомо, потенційний (безвихровий) рух рідини. Отже, можна казати, що достатньо близькі до нормальних збуджені стани у He-II відповідають лише потенційному руху рідини.

В міру збільшення імпульсу залежність $\epsilon(p)$ відхиляється від лінійного закону. Аналізуючи наявні експериментальні дані про вимірювання різних термодинамічних величин для He-II Л.Д.Ландау показав (1947 р.) , що вони можуть бути природно з'ясованими, якщо припустити, що залежність $\epsilon(p)$ має вигляд, що зображений на рис.3.1а. Після початкової лінійної частини (фонони), енергія досягає максимуму, потім починає зменшуватись і при деякому значенні імпульсу $\vec{p} = \vec{p}_0$ функція $\epsilon(\vec{p})$ має мінімум, а потім знову збільшується.

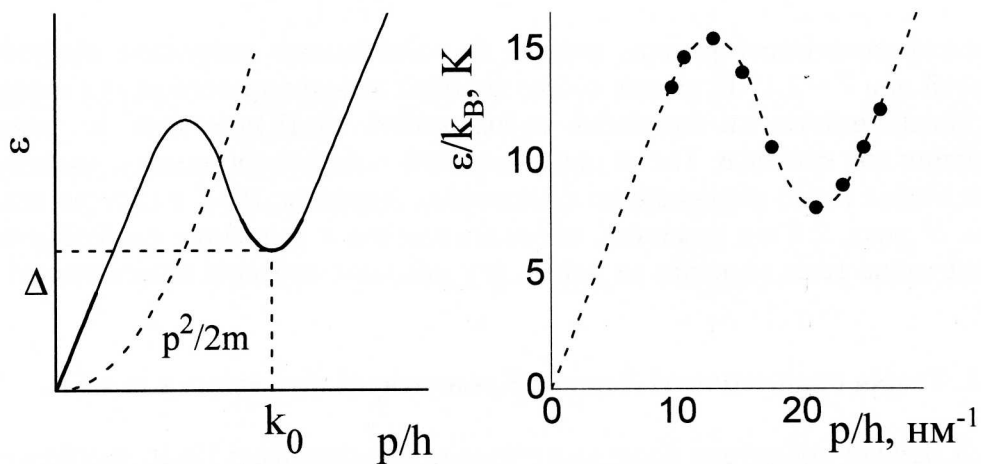


Рис.3.1. Енергетичний спектр He-II: а) постульований Ландау; б) за результатами досліджень з розсіювання нейтронів.

У стані теплової рівноваги квазічастинки, що існують у He-II розташовані головним чином біля мінімумов енергії, тобто в області поблизу $\epsilon = 0$ та в області значення $\epsilon(\vec{p}_0)$. Тому саме ці області особливо суттєві. Поблизу \vec{p}_0 енергія може бути розкладена у ряд за степенями $(p - p_0)$:

$$\epsilon(p) = \epsilon(p_0) + d\epsilon/dp_{p_0}(p - p_0) + \frac{1}{2}d^2\epsilon/dp^2_{p_0}(p - p_0)^2 + \dots \quad (3.2)$$

У точці мінімуму $d\epsilon/dp_{p_0} = 0$, тому лінійний член у розкладі відсутній. Уведемо позначки $\epsilon(\vec{p}_0) = \Delta$ та $d^2\epsilon/dp^2_{p_0} = 1/m_r$. Отримуємо з (3.2):

$$\epsilon_r = \Delta + (p - p_0)^2 / 2m_r \quad (3.3)$$

Квазічастинки у He-II з законом дисперсії типу (3.3) називають ротонами. Слово "ротон" запропонував акад. І.Є.Тамм. Квазічастинки цього другого типу відповідають у протилежність фононам вихровому руху у рідині (з ротором швидкості, що різниться від нуля).

Необхідно, однак, підкреслити, що у разі енергетичного спектру що наведен у (3.3) неможливо, строго кажучи, відрізнити фонони і ротони, як два якісно різних типи

квазічастинок, бо існує безперервний перехід від одних до інших. Слушно було б казати просто про довгохвильові (малі \vec{p}) і короткохвильові (\vec{p} поблизу \vec{p}_0) кванти збуджень. Маючи на увазі це зостереження, ми, однак, у подальшому будемо користуватись зручними термінами - фонони і ротони.

Рівняння $(d\varepsilon/dp)_0 = 0$ у розкладі (3.2) означає, що при $\vec{p} = \vec{p}_0$ групова швидкість $\vec{v}_{gr} = d\varepsilon/dp$ ротонного стану дорівнює нулю. Ротонам відповідає навікілля мінімуму дисперсійної кривої ($\vec{p} \cong \vec{p}_0$), що описується формулою (3.3). Тут m_r - ефективна маса ротону, Δ - енергетична щілина, а \vec{p}_0 - імпульс нерухомого ротону.

Запропонована Л.Д.Ландау форма енергетичного спектру He-II була підтверджувана експериментами з розсіювання нейтронів у рідкому гелії. Повільні монохроматичні нейтрони народжують і поглинають квазічастинки у He-II. Вимірюючи енергію та відхилення розсіяних нейтронів, можна отримати залежність $\varepsilon(p)$ (рис. 3.16). Таким чином інтуїтивні передбачення Л.Д.Ландау були повністю підтверджені, а також були уточнені значення параметрів дисперсійної кривої. Вони мають наступні значення:

$$\begin{aligned} U_1 &= 240 \text{ м/с,} \\ \Delta / k_B &= (8,65 \pm 0,04) K, \\ p_0 / \hbar &= (1,91 \pm 0,01) A^{\circ -1} \quad m_r = 0,16 m_4 \end{aligned}$$

Як можна побачити, ефективна маса ротону менша ніж маса атома гелію m_4 .

Фундаментальне значення має факт існування на кривій $\varepsilon(p)$ початкової лінійної частки, що прямує з початку координат під визначеним кутом. Саме ця обставина і призводить до надплинності. Встановлення вигляду енергетичного спектру рідкого гелію, виходячи тільки з цих загальних міркувань і посередніх експериментальних даних - триумф наукової інтуїції та сили наукового уявлення. Нейтронні дослідження (1961-1964 р.р. у Швеції та США) виявили блискучу не тільки якісну, але і кількісну згоду з передбаченнями Ландау.

У 1958 р. в Інституті фізичних проблем АН СРСР святкували п'ятидесятиріччя Л. Д. Ландау. Кожен з промовців намагався перевершити дотепністю своїх колег. Надавали подарунки. Від фізиків Інституту атомної енергії промовляв акад. Є. К. Кікоїн. Він вручив Л. Д. Ландау "скрижалі" - мідні дошки, на яких були накреслені істини висловлені Л. Д. Ландау. Їх було усього десять. Під номером 7 була позначена дисперсійна крива Ландау! Харківські фізики подарували "ювілейний конверт", нібито виготовлений у Голандії на честь Ландау (його надав відомий фізик та філателіст акад. Є.М.Ліфшиць). І на конверті знову була ця славнозвісна крива. У 1962 р. Л. Д. Ландау була присуджена Нобелівська премія за "піонерські дослідження у теорії конденсованого стану матерії, особливо рідкого гелію".

У 1959 р. Л.П.Пітаєвський показав, що лінія спектру $\varepsilon(p)$ повинна бути обірваною при визначеній енергії та мати у цій точці горизонтальну дотичну. Як це доведено у дослідах з розсіювання нейтронів (див. рис.3.1 б) існує інша гілка енергетичного спектру He-II, що окреслює пов'язані стани двох ротонів. Вони мають енергію близьку до 2Δ , але трохи меншу: $2\Delta - E_b$, де енергія зв'язку

$$E_b / k_B = (0,37 \pm 0,10) K$$

Як походить з теоретичного розгляду цієї гілки енергетичного спектру, вона закінчується з боку малих імпульсів при $p / \hbar = 0,95 A^{\circ -1}$, де швидкість двохчастинкового збудження близька до швидкості першого звуку U_1 .

Відмітимо також, що параметри Δ , p_0 , m_r та U_1 залежать від тиску. Цю залежність звичайно висловлюють як функцію густини рідкого гелію, яка характеризується наступними значеннями похідних:

$$\begin{aligned}\rho/\Delta \cdot \partial\Delta/\partial\rho &\approx -0,9 & \rho/p_0 \cdot (\partial p_0/\partial\rho) &\approx 0,5 \\ \rho/m_r \cdot (\partial m_r/\partial\rho) &\approx -5,5 & \rho/U_1 \cdot (\partial U_1/\partial\rho) &\approx 1,8\end{aligned}$$

Наведені чисельні значення відповідають тиску насиченої пари і при грубих оцінках розглянуті залежності можна вважати лінійними.

Згідно з розглянутими уявленнями квазічастинки у He-II - суміш фононів та ротонів. Число квазічастинок у бозе-рідині прямує до нуля при $T \rightarrow 0$, і при низьких температурах, коли їх густина стає достатньо малою, їх можна вважати невзаємодіючими одна з одною, тобто такими, що утворюють ідеальний бозе-газ. Квазічастинки у бозе-рідині можуть з'являтися поодинокі, тому вони повинні мати цілочисельний спин (див. розд. 1.2). Отже статистично рівноважний розподіл квазічастинок у бозе-рідині надається за допомогою формули розподілу Бозе-Ейнштейна з хімічним потенціалом, що дорівнює нулю

$$n_{ph} = \frac{1}{e^{\varepsilon(p)/k_B T} - 1} \quad (3.5)$$

За допомогою (3.5), якщо відома залежність $\varepsilon(p)$ при малих імпульсах, можна підрахувати термодинамічні величини рідкого гелію при температурах близьких до 0 К, коли практично усі квазічастинки у рідині мають малі енергії, тобто є фононами.

Що стосується функції розподілу ротонів, відмітимо, що до неї надходить достатньо велика частка $\Delta/k_B T \gg 1$ тому для ротонів, фактично, є слушною статистика Максвелла-Больцмана:

$$n_r = e^{-\varepsilon(p)/k_B T} \quad (3.6)$$

Таким чином ротони підпорядковані класичній статистиці. Нижче за 0,6 К кількість ротонів зневажливо мала і єдиними суттєвими збудженнями у He-II є фонони. При $T > 1$ К домінуюча роль у формуванні термодинамічних властивостей системи належить ротонам.

Розуміло, що така модель ідеального газу квазічастинок непридатна при температурах $T \cong T_\lambda$. У цьому випадку збуджень багато, і їх взаємодія стає суттєвою. Фактично газ фононів і ротонів можливо вважати ідеальним при $T < 1,5$ К. Вище за цю температуру при розрахунках необхідно враховувати два додаткових фактори: зростаючий внесок збуджень, що лежать по-за фононною та ротонною межами спектру та змінення форми самої дисперсійної кривої (див. рис. 3.1).

3.2. Фізична природа ротона.

В попередньому розділі ми бачили, що ефективна маса ротона виявилась меншою ніж маса одного атома гелію. Зрозуміло, що для кванта колективного руху системи це є неочікуваний результат. Ще більш неочікуваним є вираз для швидкості ротона:

$$\vec{v}_r = \partial\varepsilon/\partial\vec{p} = (\vec{p} - \vec{p}_0)/m_r \quad (3.7)$$

звідкіля походить, що ротон нерухомий при $\vec{p} = \vec{p}_0 = 0$. Далі, $\vec{v}_r > 0$ при $\vec{p} > \vec{p}_0$ і $\vec{v}_r < 0$ (швидкість спрямована протилежно імпульсу) при $\vec{p} < \vec{p}_0$.

Така незвичайна для реальної частинки властивість може бути з'ясована за допомогою моделі, у якій ротон уявляє собою колективний рух сукупності атомів, самий швидкий з котрих розштовхує зустрічні атоми і створює позаду себе розрідження, яке заповнюється іншими атомами, викликаючи у суміжних шарах

"протиток" рідини, зворотний до напрямку власного руху. Ця модель проілюстрована на рис. 3.2.

Відмітимо, що при обтіканні класичною рідиною тіла, яке рухається у неї, спостерігається саме така картина. При цьому, згідно з законами гідродинаміки, ефективна або "приєднана" маса такої течії набагато менша, ніж маса рідини, що бере у неї участь. Так, наприклад, при обтіканні сфери "приєднана" маса дорівнює половині маси рідини в об'ємі сфери, хоча бере участь в обтіканні практично необмежений об'єм рідини. Така течія описується за допомогою потенціалу гідродинамічного диполя. Вона аналогічна течії, що описується за допомогою потенціалу кільцевого вихора. Така аналогія з вихором дозволяє з'ясувати також аномальний зв'язок поміж швидкістю та імпульсом ротона (Фейнман, 1954-1955 р.р.).

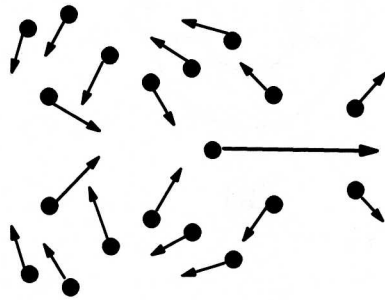


Рис.3.2. Модель ротона. Показані миттєві швидкості атомів, що розкидані "швидким" атомом.

Дійсно, якщо ротон є кільцевий вихор, то він може мати і імпульс, що визначається радіусом кільця R :

$$p_r = \pi \rho \chi R^2 \quad (3.8)$$

де ρ - густина рідини; χ - циркуляція. З міркувань розмірності у якості χ можна використати величину \hbar/m_r , що зветься квантом циркуляції. Однак, швидкість ротона залежить не тільки від конфігурації кільця, але і від зовнішніх сил. Дійсно, завдяки гіроскопічному ефекту вихор відповідає на стиснення або розтяг кільця рухом у перпендикулярному до докладеної сили напрямку. Тому притягання поміж атомами або їх відштовхування можуть призвести як до зупинки вихора так і до його руху у протилежному до імпульсу напрямку.

Енергія вихрового кільця, відповідно до класичної гідродинаміки становить:

$$\varepsilon_r = 0,5 \rho \chi^2 \ln(R/d_0) \quad (3.9)$$

де d_0 - радіус серцевини (керну) вихора. Тоді

$$\varepsilon_r / k_B \cong 5 \cdot 10^{-8} \ln(R/d_0)$$

Щоб ця величина співпала з енергією ротона Δ (див. рис. 3.1а) треба, щоб R і d_0 дорівнювали за порядком міжатомній відстані. При цьому імпульс вихрового кільця з радіусом $R \cong d_0$ також буде мати величину, що за порядком дорівнює кільком \hbar . Маючи на увазі такі розміри, що знаходяться на межі гідродинамічного розгляду, Онсагер назвав ротон "духом вихора, що зник".

Побудова детальної кількісної теорії ротона є досить важкою справою. Тут ми наведемо, минаючи важкі математичні розрахунки, ту наочну картину ротона, яку дав Фейнман на VI Міжнародній конференції з фізики низьких температур у Лейпцігу у 1958 р. У моделі Фейнмана, наочно, ротон можна уявити собі як групу дітей, що ковзають з гірки. При цьому "гірка" є частка АВ на рис. 3.3а. Ковзнувшись з гірки, діти знову повертаються до неї, обминая її навколо. Фейнман побудував хвильову функцію ротона. Для того, щоб ротонна хвильова функція утримувала частину, яка описує зворотний потік, її необхідно будувати наступним чином. Збудження, побудоване у формі хвильового пакету ротонів, є локалізованим. Цей локалізований

хвильовий пакет не рухається, бо групова швидкість ротонного стану дорівнює нулю, як це можна побачити на рис. 3.1. (де $d\varepsilon/dp = 0$).

З цим локалізованим збудженням пов'язаний імпульс \vec{p}_0 . Під час розрахунку квантовомеханічної густини струму j виявляється, що $j = 0$ поза цієї області. Це суперечить рівнянню Шредингера бо струм повинний зберігатись. Вказані труднощі можна обминути, якщо ввести повільний зворотний потік частинок для хвильового пакету, як зображено на рис.3.2б. Хвильова функція у такій формі зберігає потік. Як бачимо на рисунках 3.2а та 3.2б ротон схожий на класичне кільце диму (рис3.2в).

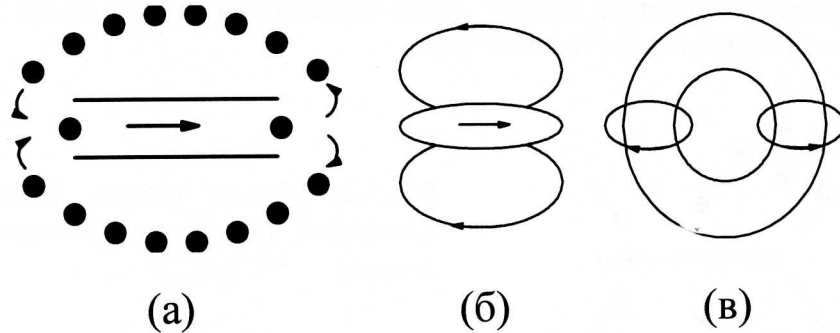


Рис. 3.3. Модель ротона (згідно з Фейнманом): а) схематичне зображення руху у ротоні; б) збереження струму; в) ротон нагадує кільце диму.

Однак, є одна різниця: димове кільце рухається, у той час як ротон нерухомий, як це вже показано раніше. Так як два вихори, що мають протилежне обертання притягаються, існує і інша важлива різниця: для кільця диму це притягання компенсується потоком повітря, що проходить крізь нього, так що кільце не стискається у точку. У супереч цьому, оскільки ротон знаходиться у спокої, він стискається, так що його діаметр зменшується до атомних розмірів.

Таким чином, Фейнман отримав для енергії ротона у мінімумі значення $\Delta/k_B = 11,5$ К, яке відповідає експерименту.

3.3. Надплинний та нормальний рухи у гелії-II.

Покажемо зараз як з наведених уявлень про квазічастинки у He-II походить явище надплинності. Нехай рідина протікає зараз крізь тонкий капіляр, але при $T = 0$. Зрозуміло, що у He-II при температурах, що різняться від нуля, вже присутні готові квазічастинки, бо гелій вже не знаходиться у основному незбудженому стані. Під час виведення критерію надплинності (2.14) (див.розд.2.4) ніде не була використана та обставина, що у He-II відсутні готові збудження. Наявність таких збуджень не буде перешкоджати виведенню і тому критерій (2.14) буде слушним і при температурах, що різняться від абсолютного нуля, але достатньо близькі до нього. Спектр елементарних збуджень He-II, як це видно на мал.3.1, задовольняє умові (2.4). Мінімум відношення ε/p здійснюється, як це походить з умови екстремуму

$$\frac{d}{dp} \cdot \frac{\varepsilon(p)}{p} = \frac{1}{p} \cdot \frac{d\varepsilon(p)}{dp} - \frac{\varepsilon(p)}{p^2} = 0 \quad (3.10)$$

точці де $\varepsilon(p)/p = d\varepsilon(p)/dp$, тобто у точці, де пряма, що проведена з початку координат, торкається до кривої $\varepsilon(p)$ Для кривої збуджень у He-II рівняння (3.10) має два рішення. Одне відповідає початку кривої і фактично усій лінійній частині спектру. У цієї області маємо:

$$v_{CS} = \alpha(p)/p = U \quad (\text{фонони}) \quad (3.11)$$

Це означає, що критична швидкість народження фононів співпадає зі швидкістю першого звуку, що дорівнює $U_1 = 240$ м/с. При швидкостях $v < U_1$ народження фононів енергетично не вигідно і течія рідини не буде уповільнятися, тобто буде спостерігатися явище надплинності. Умова наявності надплинності збігається до потреби, щоб крива $\alpha(p)$ не торкалась вісі абсцис у самому початку координат. Тому до явища надплинності, взагалі кажучи, повинний призводити усякий спектр, у якому існуючі достатньо низько розташовані збудження - фонони.

Щоб знайти друге рішення рівняння (3.10), проведемо крізь початок координат пряму, дотичну до ротонного мінімуму (див. мал.3.1). За цієї умови отримуємо:

$$v_{CS} = \Delta/p \approx 60 \text{ м/с} \quad (\text{ротони}) \quad (3.12)$$

Це значення критичної швидкості, при якій тіло, що рухається у He-II, може створювати ротони, на декілька порядків перевищує величину, що спостерігається у дослідях. З'ясування цього факту пов'язане з можливістю існування у He-II окрім фононів та ротонів також збуджень іншого типу, так званих квантових вихорів. Критична швидкість, що пов'язана з народженням квантових вихорів, залежить від діаметру капіляра, причому має місце приблизне співвідношення:

$$v_{CS} \approx \hbar/m_4 \quad (3.13)$$

Тому так суттєва для спостережень надплинності вузлина капілярів.

У широких трубках v_{CS} надзвичайно мала і спостереження надплинності неможливе. Тільки у 1966 р. Рейнфільду, використавши зменшення величини енергетичної щільності Δ при збільшенні температури, вдалось виміряти v_{CS} , як критичну швидкість генерації ротонів рухаючимися в гелії-II від'ємними іонами.

Таким чином, скориставшись кривою Ландау, ми показали, що при швидкостях $v < v_{CS}$ народження квазічастинок енергетично не вигідне і течія рідини не буде уповільнятися, тобто буде спостерігатися явище надплинності. При $v > v_{CS}$ рух гелію буде супроводжуватися народженням квазічастинок, тобто тертям.

3.4. Двошвидкісна модель руху надплинного гелію.

Розглянемо зараз гелій, що тече уздовж тонкого капіляра при температурі $T \neq 0$, але суттєво нижчою ніж температура переходу до надплинного стану. Рух рідини при швидкостях $v < v_{CS}$ як і раніше не може призвести до народження нових квазічастинок. Однак наявність квазічастинок, що вже існують у рідкому гелії-II додає певну своєрідність характеру течії рідини.

Нехай газ квазічастинок рухається з швидкістю \vec{v} відносно рідини. У системі відліку, де газ квазічастинок як ціле нерухомий, рідина рухається зі швидкістю $-\vec{v}$. Енергія E рідини у цієї системі пов'язана з енергією E_0 у системі відліку, де рідина нерухома співвідношенням

$$E = E_0 + \vec{p}_0 \vec{v}_0 + Mv^2/2 \quad (3.14)$$

Зрозуміло, якщо у рідині, що нерухома, з'явиться ще одна квазічастинка з енергією $\alpha(p)$, то у системі, де рідина рухається з швидкістю $-\vec{v}$, додаткова енергія дорівнює $\alpha(p) - \vec{p}\vec{v}$. Саме таку енергію має квазічастинка у системі, де He-II рухається з швидкістю $-\vec{v}$, а газ квазічастинок нерухомий. Отже, функція розподілу квазічастинок буде мати вигляд $n(\epsilon - \vec{p}\vec{v})$, де n - функція розподілу Бозе-Ейнштейна для газу квазічастинок у стані рівноваги.

Таким чином, повний імпульс газу квазічастинок віднесений до одиниці об'єму буде

$$p_v = \int p n(\varepsilon - \vec{p}\vec{v}) d\tau_p \quad (3.15)$$

де $d\tau_p = p^2 dp d\Theta / (2\pi\hbar)^3$, $d\Theta$ - елемент тілесного кута у імпульсному просторі. Нехай швидкість v мала. Тоді підінтегральний виклад у (3.15) можна розкласти у ряд за степенями pv . При інтегруванні за напрямками вектору \vec{p} нульовий член розкладу зникає, бо під знаком інтегралу - непарна функція \vec{p} . Залишається

$$p_v = - \int p(pv) [dn(\varepsilon)/d\varepsilon] d\tau_p \quad (3.16)$$

Далі (3.15) належить усереднити за напрямками \vec{p} . При підрахуванні лінійних за v членів, домножимо підінтегральний виклад на косинус кута поміж \vec{p} та \vec{v} . У результаті з точністю до лінійних за v членів маємо

$$\vec{p}_v = \vec{v}/3 \int (-dn/d\varepsilon) p^2 d\tau_p \quad (3.17)$$

З цього вираза бачимо, що рух газу квазічастинок супроводжується переносом деякої маси. Ефективна маса одиниці об'єму визначається коефіцієнтом пропорційності поміж імпульсом \vec{p} та швидкістю \vec{v} у (3.17). З іншого боку, при течії He-II по тонкому капіляру квазічастинкам ніщо не заважає взаємодіяти з стінками капіляра та обмінюватись з ними імпульсом. У результаті частина рідини, що захоплена рухом квазічастинок, буде поводити себе як нормальна в'язка рідина і гальмуватись у результаті тертя о стінки капіляра. Що торкається решти рідини, то вона буде поводити себе як надплинна рідина, яка не має в'язкості. Підкреслимо, що поміж цими рухаючимися одна крізь другу частинами рідини немає внутрішнього тертя і не чиниться обопільна передача імпульсу, бо намальована картина відповідає термодинамічній рівновазі у газі квазічастинок, що рівномірно рухаються: макроскопічний відносний рух у стані теплової рівноваги можливий тільки у відсутності тертя.

Таким чином, ми приходимо до наступного основного результату теорії Ландау: при $T = 0$ уся рідина тече крізь капіляр без тертя, а при $T \neq 0$ - тільки її частина. Це дозволяє розвинути двошвидкісну (дворідинну) модель, згідно з якою He-II поводить себе як "суміш" двох рідин: одна з котрих нормальна рідина, що має звичайну в'язкість, а інша - надплинна з нульовою в'язкістю та спроможністю текти без тертя крізь вузьки капіляри. Підкреслимо, однак, знову, що усі атоми He-II однакові, але у ньому одночасно можуть існувати два рухи - надплинний з швидкістю \vec{v}_s та нормальний з швидкістю \vec{v}_n . Кожному з цих рухів відповідає своя ефективна маса. Тоді повна густина He-II може бути зображена у вигляді суми густини надплинної (ρ_s) та нормальної (ρ_n) частин рідини

$$\rho = \rho_s + \rho_n \quad (3.18)$$

Зрозуміло, що і повний імпульс одиниці об'єму He-II також складається з двох частин:

$$\vec{p} = \rho_s \vec{v}_s + \rho_n \vec{v}_n = \vec{j} \quad (3.19)$$

де величину \vec{j} звичайно називають густиною потоку.

Так як повна маса рідкого гелію залишається незмінною, то \vec{j} та ρ задовольняють рівнянню неперервності

$$\partial \rho / \partial t + \text{div} \vec{j} = 0 \quad (3.20)$$

Отже у теорії Ландау природним шляхом отримує з'ясування двошвидкісна (або дворідинна) модель He-II. Як вже було відмічено раніше, у дослідях Е.Л. Андронікашвілі найбільш яскраво демонструється слушність двошвидкісної моделі. Після визначення у експерименті відношення ρ_n/ρ як функції температури (див. рис.2.9)

Ландау сказав: "Елевтер Луарсавович, Ви зважили елементарні збудження у надплинному гелії".

Як виходить з наведеного вище, у гідродинамічному сенсі густина бозе-рідини може бути зображена у вигляді суми густини нормального та надплинних компонентів (3.18), кожен з котрих пов'язаний зі своєю гідродинамічною швидкістю \vec{v}_n та \vec{v}_s . Важливою властивістю надплинних рухів є його потенційність, $\text{rot} \vec{v}_s = 0$. Ця властивість є макроскопічним відзеркаленням того положення, що квазічастинки з великою довжиною хвилі - фонони. Тому макроскопічна гідродинаміка надплинних рухів не повинна припускати ніяких інших коливань, окрім звукових, що і забезпечується умовою потенційності руху. При $T = 0$ рідкий He-II може здійснювати тільки надплинний рух, а густина нормальної частини $\rho_n = 0$. При $T \neq 0$ величина ρ_n надається згідно з формулою (3.17). Розглянемо спочатку фононний газ для того, щоб підрахувати фононний внесок у ρ_n . Так згідно з (3.17) маємо

$$\rho_n = (1/3) \int (-dn/d\varepsilon) p^2 d\tau_p \quad (3.21)$$

Підставляючи в (3.21) $\varepsilon_{ph} = U_1 p$ отримуємо:

$$(\rho_n)_{ph} = (-1/3U_1) \int_0^\infty (dn/dp) p^2 4\pi p^2 \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} d\tau_p \quad (3.22)$$

Після інтегрування (3.22) за частинами знаходимо:

$$(\rho_n)_{ph} = (4/3U_1) \int_0^\infty n p 4\pi p^2 \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} dp = (4/3U_1^2) \varepsilon_{ph} n d\tau_p \quad (3.23)$$

Відмітимо, що залишившийся у (3.23) інтеграл є саме енергія одиниці об'єму фононного газу. Співвідношення для енергії фононного газу можливо легко записати, використавши рівняння для термодинамічних величин твердого тіла при низьких температурах, коли збудження є фононами. Для цього врахуємо, що у рідині можуть розповсюджуватись тільки поздовжні хвилі, а не три можливих напрямки поляризації звукових хвиль (один поздовжній та два поперечних), як це має місце у твердих тілах. Тому усі співвідношення для термодинамічних величин слід поділити на 3. Тоді енергія рідини буде складати:

$$E_{ph} = E_0 + V \left[\frac{2\pi^2 T^4}{15(\hbar U_1)^3} \right] \quad (3.24)$$

де E_0 - енергія при абсолютному нулі температури, V - об'єм.

Підставляючи (3.24) до (3.21) отримуємо остаточно

$$(\rho_n)_{ph} = \frac{4E_{ph}}{3U_1^2 V} = \frac{2\pi^2 T^4}{45\hbar^3 U_1^5} \quad (3.25)$$

Таким чином фононна частина ρ_n пропорційна до T^4 . Для підрахування фононного внеску до ρ_n зазначимо, що оскільки ротони можливо описати розподілом Больцмана, то для них $dn/d\varepsilon = -n/k_B T$. Далі, покладаючи з достатньою точністю $p^2 = p_0^2$, з (3.21) отримуємо

$$(\rho_n)_r = 2m_r^{1/2} p_0^4 e^{-\Delta/k_B T} \frac{1}{3(2\pi)^{3/2} (k_B T)^{1/2} \hbar^3} \quad (3.26)$$

Таким чином ротонна частка ρ_n залежить від температури експоненційно.

Фононна частка стає суттєвою лише при самих низьких температурах. Ще при 1К фононна частка у 60 разів менша за ротонну; вони порівнюються при $T \cong 0,6$ К. Оскільки внески квазічастинок обох типів прямують до нуля при $T \rightarrow 0$, це підтверджує гіпотезу Ландау про "неповне охоплення" He-II тепловими збудженнями.

Наближена до T_λ частина залежності $\rho_n(T)$ не може, розуміло, бути підрахована точно. Можливо, однак, оцінити температуру за якої ρ_n буде дорівнювати повній густині рідкого гелію. Це відбувається в області, де теорію Ландау вже не можливо застосовувати через велику густину ротонів. Поза все, гадаючи, що $\rho_n/\rho = 1$, згідно з (3.26) отримуємо рівняння

$$\frac{5}{T^{1/2}} e^{-\Delta/k_B T} = \rho \quad (3.27)$$

Підставляючи у (3.27) значення $\Delta/k_B T$ та ρ , отримуємо для $T_\lambda \approx 2,36$ К, що достатньо близько до істотного значення $T_\lambda = 2,17$ К.

Таким чином, нижче за T_λ спрямований рух квазічастинок створює течію з ефективною масою меншою ніж повна маса рідини. Ефективна маса течії, що відбувається зі швидкістю руху незбуреного фону (\vec{v}_s) також менша за повну масу. Тільки сума цих двох ефективних мас дорівнює повній масі He-II (див. рис. 2.9).

На завершення цього розділу зупинимось ще на питанні про поведінку атомів домішки у рідкому гелії. Фактично це атоми легкого ізотопу гелію ^3He , концентрація яких настільки мала, що їх можна вважати незалежними один з одним (Л.Д.Ландау та Є.Я.Померанчук, 1945 р.).

Присутність атомів домішки у рідині призводить до появи нової гілки енергетичного спектру, яка відповідає руху цих атомів крізь рідину. Зважаючи на сильну взаємодію атомів домішки з атомами рідини, цей рух є дійсно колективним ефектом, у якому беруть участь також атоми рідини. Такому руху можна приписати певний результуючий імпульс \vec{p} . Отже, у рідкому гелії народжуються квазічастинки нового типу, кількість яких дорівнює кількості атомів домішки, а енергія яких є визначеною функцією імпульсу. У стані теплової рівноваги енергія цих нових квазічастинок зосереджена поблизу від самого малого з мінімумів функції $\varepsilon_{\text{дом}}(\vec{p})$. Так як мова ведеться тільки про домішку ізотопу ^3He , емпіричні дані показують, що такий мінімум розташований біля $p = 0$ і поблизу від якого енергія квазічастинок має вигляд

$$\varepsilon_{\text{дом}}(\vec{p}) = p^2 / 2m_{\text{дом}}^* \quad (3.28)$$

де ефективна маса $m_{\text{дом}} = 2,8$ маси атому ^3He . Так як домішкові квазічастинки взаємодіють з фононами та ротонами, вони є складовою частиною нормальної частини He-II. Через малу концентрацію цих квазічастинок, їх тепловий розподіл больцманівський. Тому їх внесок у ρ_n , згідно з співвідношенням (3.21) складає:

$$(\rho_n)_{\text{дом}} = N_{\text{дом}} p^2 / V 3k_B T = N_{\text{дом}} m_{\text{дом}}^* / V \quad (3.29)$$

Тут $N_{\text{дом}}/V$ - кількість атомів домішки в одиниці об'єму. Для того, щоб знайти закон дисперсії $\varepsilon_{\text{дом}}(p)$ для атомів домішки у надплинній рідині, що рухається, коли закон $\varepsilon_{\text{дом}}(p)$ для нерухомої рідини відомий, візьмемо до уваги те, що після додавання до нерухомої рідини (при $T = 0$) атому домішки з масою m та імпульсом \vec{p} , її енергія та імпульс у системі координат, у якій рідина спочатку була у спокої, стає

$$E_0 = \varepsilon_{\text{дом}}^0(\vec{p}_0) \text{ та } \vec{p} = \vec{p}_0 \quad (3.30)$$

Однак у системі координат, у якій рідина тече зі швидкістю v , маємо

$$E = \varepsilon_{\text{дом}}^0(\vec{p}) + \vec{p}_0 \vec{v} + \frac{(M + m)v^2}{2} \quad (3.31)$$

$$\vec{p} = \vec{p}_0 + (M + m)\vec{v}$$

Бачимо, що змінення енергії та імпульсу рухомої рідини при додаванні до неї атому домішки дорівнюють:

$$\varepsilon_{\text{дом}} = \varepsilon_{\text{дом}}^0(\vec{p}_0) + \vec{p}_0 \vec{v} + mv^2/2 \text{ та } \vec{p} = \vec{p}_0 + m\vec{v} \quad (3.32)$$

Якщо виразити $\varepsilon_{\text{дом}}$ через \vec{p} то:

$$\varepsilon_{\text{дом}}(\vec{p}) = \varepsilon_{\text{дом}}^0(\vec{p} - m\vec{v}) + \vec{p}\vec{v} - mv^2/2 \quad (3.33)$$

При малих швидкостях течії v з точністю до членів першого порядку, для спектру $\varepsilon_{\text{дом}}^0(\vec{p})$ виду (3.28) маємо

$$\varepsilon_{\text{дом}}(\vec{p}) = p^2/2m_{\text{дом}}^* + \vec{p}\vec{v}(1 - m/m_{\text{дом}}^*) \quad (3.34)$$

3.5. Термодинамічні характеристики рідкого He-II.

Теорія надплинності Ландау дозволяє легко отримати термодинамічні функції рідкого He-II для $T < 1$ К, коли задовольняється умова $k_B T \ll \varepsilon_r$. Оскільки при $T < T_\lambda$ хімічний потенціал $\mu = 0$, то вільна енергія Гельмгольца F співпадає з термодинамічним потенціалом Ω . Дійсно $\Omega = F - \mu N = F$. Звичайний вираз для термодинамічного потенціалу одиниці об'єму бозе-газу

$$\Omega = k_B T \int \ln(1 - e^{-\varepsilon/k_B T}) d\tau_p \quad (3.35)$$

Підставляючи до (3.35) вираз для функції розподілу Бозе-Ейнштейна при $\mu = 0$ $n = (e^{-\varepsilon/k_B T} - 1)^{-1}$ отримуємо

$$F = -k_B T \int \ln(1 + n) d\tau_p \quad (3.36)$$

Інтегрування за частинами цього вираза дає

$$F = \frac{k_B T}{3} \int (n+1)^{-1} (\partial n / \partial \varepsilon) (\partial \varepsilon / \partial p) p d\tau_p \quad (3.37)$$

Так як для функції розподілу Бозе-Ейнштейна справедливо

$$\partial n / \partial \varepsilon = -n^2 e^{\varepsilon/k_B T} \frac{1}{k_B T} = -n(n+1) \frac{1}{k_B T}$$

то вираз для вільної енергії (3.37) буде мати вигляд

$$F = -(1/3) \int p n (\partial \varepsilon / \partial p) d\tau_p \quad (3.38)$$

Знайдемо термодинамічні функції для фононного газу. Використовуючи закон дисперсії для фононів ($\varepsilon_{ph} = pU_1$) за допомогою (3.38) знайдемо вільну енергію фононів

$$E_{ph} = -(1/3) \int \varepsilon_{ph} n_{ph} d\tau_p = -E_{ph}/3 \quad (3.39)$$

де E_{ph} - енергія фононів в одиниці об'єму He-II. Використовуючи функцію розподілу фононів отримуємо:

$$E_{ph} = \int \frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon/k_B T}} d\tau_p = \frac{4\pi^5}{15} \cdot \left(\frac{k_B T}{2\pi\hbar U_1} \right)^3 k_B T \quad (3.40)$$

Кількість фононів в одиниці об'єму гелію-II складає

$$N_{ph} = \int n_{ph} d\tau_p = 8\pi\zeta(3) (k_B T / 2\pi\hbar U_1)^3 \quad (3.41)$$

$\zeta(3)$ - дзета функція Римана. За допомогою вираза для N_{ph} енергія фононів може бути приблизно переписана у вигляді:

$$E_{ph} \approx (\pi^4/36) k_B T N_{ph} \quad (3.42)$$

Знайдемо зараз ентропію фононного газу. Вона може бути отримана згідно з загальною формулою

$$S_{ph} = -(\partial F_{ph} / \partial T) = (16\pi^5/45) k_B (k_B T / 2\pi\hbar U_1)^3 \quad (3.43)$$

Бачимо, що ентропія фононного газу пропорційна до T як і у випадку кристалічних тіл. Далі підрахуємо теплоємність фононного газу:

$$C_{ph} = T(\partial S_{ph} / \partial T) = (16\pi^5 / 15) k_B (k_B T / 2\pi\hbar U_1)^3 \quad (3.44)$$

Це відомий “закон T^3 ” для твердих тіл.

Підрахуємо далі вільну енергію ротонного газу. При обчисленнях належить користуватись законом дисперсії ротонів $\varepsilon = \Delta + (p - p_0)^2 / 2m^*$, та урахувати, що імпульси ротонів $\vec{p} \cong \vec{p}_0$. Як було відмічено раніше, для ротонів фактично є слушною статистика Максвела-Больцмана, тому при рахуванні вільної енергії зручно користуватись співвідношенням (3.36). Ураховуючи, що $n \ll 1$ та $\ln(1 + n) \approx n$ отримуємо

$$E_r = -k_B T \int \ln(1 + n) d\tau_p = -k_B T \int n d\tau_p = -k_B T N_r \quad (3.45)$$

де N_r - кількість ротонів в одиниці об'єму He-II визначається як

$$N_r = \int n d\tau_p = 2p_0^2 (m^* k_B T)^{1/2} (2\pi\hbar^2)^{-3/2} \exp(-\Delta / k_B T) \quad (3.46)$$

Диференціюванням співвідношення (3.45) знаходимо ентропію ротонного газу:

$$S_r = -\partial F_r / \partial T = k_B N_r (\Delta / k_B T + 3/2) \quad (3.47)$$

звідкіля теплоємність ротонного газу буде

$$C_r = T(\partial S_r / \partial T) = k_B N_r [(\Delta / k_B T)^2 + \Delta / k_B T + 3/4] \quad (3.48)$$

Отримані співвідношення дозволяють надати ентропію та теплоємність He-II нижче за T_λ у наступному вигляді:

$$S = S_r + S_{ph} = (16\pi^5 / 45) k_B (k_B T / 2\pi\hbar U_1)^3 + k_B N_r (\Delta / k_B T + 3/2) \quad (3.49a)$$

$$C = C_r + C_{ph} = (16\pi^5 / 45) k_B (k_B T / 2\pi\hbar U_1)^3 + k_B N_r [(\Delta / k_B T)^2 + \Delta / k_B T + 3/4] \quad (3.49b)$$

Співвідношення (3.49) показують, що температурна залежність ротонної частини термодинамічних величин головним чином експоненційна, тому при низьких температурах переважає фононний внесок, а при більш високих - ротонний. Отримані вирази чудово узгоджуються з експериментальними даними. З іншого боку, саме характерні для ротонів експериментальні залежності і були підґрунтям для передбачення Ландау щодо ротонної частки дисперсійної кривої.

Отримані вище формули для термодинамічних величин He-II дозволяють визначити середню енергію одного фонону та одного ротону

$$\varepsilon_{zp} = E_{ph} / N_{ph} = \pi^4 k_B T \approx 2,7 k_B T \quad (3.50)$$

$$\varepsilon_r = E_r / N_r = \Delta + \frac{k_B T}{2} \quad (3.51)$$

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. При якому значенні імпульсу ротон є нерухомим?
2. При яких температурах у He-II домінують фонони?

4. ГІДРОДИНАМІКА НАДПЛИННОЇ БОЗЕ-РІДИНИ

4.1. Система гідродинамічних рівнянь

На основі розвинутих вище уявлень про мікроскопічний механізм надплинності, можна побудувати повну систему гідродинамічних рівнянь для опису He-II макроскопічним (феноменологічним) шляхом. У випадку надплинного гелію найбільш успішна макроскопічна теорія була розвинута у 1941р. Л.Д. Ландау; вона має назву двошвидкісної (або дворідинної) гідродинаміки. Виведення відповідних рівнянь - блискучий зразок того, як повинна будуватись феноменологічна теорія.

$$C_{ph} = T(\partial S_{ph} / \partial T) = (16\pi^5 / 15) k_B (k_B T / 2\pi\hbar U_1)^3 \quad (3.44)$$

Це відомий “закон T^3 ” для твердих тіл.

Підрахуємо далі вільну енергію ротонного газу. При обчисленнях належить користуватись законом дисперсії ротонів $\varepsilon = \Delta + (p - p_0)^2 / 2m^*$, та урахувати, що імпульси ротонів $\vec{p} \cong \vec{p}_0$. Як було відмічено раніше, для ротонів фактично є слушною статистика Максвела-Больцмана, тому при рахуванні вільної енергії зручно користуватись співвідношенням (3.36). Ураховуючи, що $n \ll 1$ та $\ln(1 + n) \approx n$ отримуємо

$$E_r = -k_B T \int \ln(1 + n) d\tau_p = -k_B T \int n d\tau_p = -k_B T N_r \quad (3.45)$$

де N_r - кількість ротонів в одиниці об'єму He-II визначається як

$$N_r = \int n d\tau_p = 2p_0^2 (m^* k_B T)^{1/2} (2\pi\hbar^2)^{-3/2} \exp(-\Delta / k_B T) \quad (3.46)$$

Диференціюванням співвідношення (3.45) знаходимо ентропію ротонного газу:

$$S_r = -\partial F_r / \partial T = k_B N_r (\Delta / k_B T + 3/2) \quad (3.47)$$

звідкіля теплоємність ротонного газу буде

$$C_r = T(\partial S_r / \partial T) = k_B N_r [(\Delta / k_B T)^2 + \Delta / k_B T + 3/4] \quad (3.48)$$

Отримані співвідношення дозволяють надати ентропію та теплоємність He-II нижче за T_λ у наступному вигляді:

$$S = S_r + S_{ph} = (16\pi^5 / 45) k_B (k_B T / 2\pi\hbar U_1)^3 + k_B N_r (\Delta / k_B T + 3/2) \quad (3.49a)$$

$$C = C_r + C_{ph} = (16\pi^5 / 45) k_B (k_B T / 2\pi\hbar U_1)^3 + k_B N_r [(\Delta / k_B T)^2 + \Delta / k_B T + 3/4] \quad (3.49b)$$

Співвідношення (3.49) показують, що температурна залежність ротонної частини термодинамічних величин головним чином експоненційна, тому при низьких температурах переважає фононний внесок, а при більш високих - ротонний. Отримані вирази чудово узгоджуються з експериментальними даними. З іншого боку, саме характерні для ротонів експериментальні залежності і були підґрунтям для передбачення Ландау щодо ротонної частки дисперсійної кривої.

Отримані вище формули для термодинамічних величин He-II дозволяють визначити середню енергію одного фонону та одного ротону

$$\varepsilon_{zp} = E_{ph} / N_{ph} = \pi^4 k_B T \approx 2,7 k_B T \quad (3.50)$$

$$\varepsilon_r = E_r / N_r = \Delta + \frac{k_B T}{2} \quad (3.51)$$

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. При якому значенні імпульсу ротон є нерухомим?
2. При яких температурах у He-II домінують фонони?

4. ГІДРОДИНАМІКА НАДПЛИННОЇ БОЗЕ-РІДИНИ

4.1. Система гідродинамічних рівнянь

На основі розвинутих вище уявлень про мікроскопічний механізм надплинності, можна побудувати повну систему гідродинамічних рівнянь для опису He-II макроскопічним (феноменологічним) шляхом. У випадку надплинного гелію найбільш успішна макроскопічна теорія була розвинута у 1941р. Л.Д. Ландау; вона має назву двошвидкісної (або дворідинної) гідродинаміки. Виведення відповідних рівнянь - блискучий зразок того, як повинна будуватись феноменологічна теорія.

Для побудови повної системи гідродинамічних рівнянь необхідно виходити з фундаментального положення, що у квантовій бозе-рідині - He-II одночасно відбуваються два рухи, і відповідно цьому, рух He-II повинний бути описаним у кожній точці не одним, як у класичній гідродинаміці, а двома швидкостями - \vec{v}_s і \vec{v}_n . Оскільки надплинний рух завжди потенційний, то

$$\text{rot } \vec{v}_s = 0 \quad (4.1)$$

Так як збудження у надплинній рідині при її впорядкованому русі зі швидкістю \vec{v}_n захоплюють частину рідини, яка характеризується нормальною густиною ρ_n , то решта у надплинному стані з густиною $\rho_s = \rho - \rho_n$ - здійснює незалежний рух зі швидкістю \vec{v}_s , виконуючи умову (4.1). Умова потенційності надплинного руху не порушується доти, поки швидкість руху не досягне критичних значень, за яких стає суттєвою взаємодія надплинної та нормальної частин He-II. Далі урахуємо, що теплову енергію та ентропію переносить тільки нормальна рідина. Тому потік ентропії дорівнює $\rho S \vec{v}_n$. Потік тепла дорівнює відповідно

$$\vec{q} = \rho T s \vec{v}_n \quad (4.2)$$

Тут, як і у класичній рідині: s - ентропія одиниці маси рідкого гелію, ρs - ентропія одиниці його об'єму. З урахуванням цих міркувань повна система гідродинамічних рівнянь може бути сформульована досить однозначним чином, виходячи з одних тільки вимог, які накладають принцип відносності Галілея та необхідні закони збереження.

Повна система гідродинамічних рівнянь повинна складатись з восьми функцій, які при існуванні зовнішніх сил з урахуванням існування стінок посудини стають функціями координат та часу: $\vec{v}_s(r, t), \vec{v}_n(r, t), \rho(r, t), S(r, t)$ і повністю описують рух He-II. Принцип відносності Галілея дозволяє визначити залежність усіх величин від швидкості v_s , якщо задані значення відносної швидкості $\vec{\omega} = \vec{v}_n - \vec{v}_s$ рухів, що відбуваються у рідині одночасно.

Можна показати, що $\vec{\omega}$ входить до рівняння стану квадратично. Однак, як це вже було показано раніше, при швидкостях які перевищують критичну, гелій-II втрачає надплинні властивості. Тому реальний фізичний інтерес викликають рівняння для малих $\vec{\omega}$. Далі ми не будемо утримувати малі додатки до $\vec{\omega}$.

Закон збереження будь-якої фізичної величини у диференціальній формі має універсальний вигляд: похідна за часом від густини величини, що зберігається, дорівнює дивергенції певного вектора. Отже, закон збереження маси рідини відзеркалюється рівнянням неперервності:

$$\partial \rho / \partial t + \text{div } \vec{j} = 0 \quad (4.3)$$

Закон збереження імпульсу призводить до рівняння руху:

$$\partial j_i / \partial t + \Pi_{ik} / r_k = 0 \quad (4.4)$$

де Π_{ik} - тензор потоку імпульсу, який дорівнює:

$$\Pi_{ik} = P \delta_{ik} + \rho_s v_{si} v_{sk} + \rho_n v_{ni} v_{nk} \quad (4.5)$$

де P - тиск. Як відомо з класичної гідродинаміки

$$\Pi_{ik} = P \delta_{ik} + \rho v_{ni} v_{nk}$$

В умовах, коли ефекти в язкості нормальної частки рідини відсутні рух He-II - оборотний. Відповідно до цього повинний виконуватись закон збереження ентропії S системи. Аналогічно до (4.3) можна записати

$$\partial S / \partial t + \text{div } \vec{F} = 0 \quad (4.6)$$

Тут \vec{F} - потік ентропії. Так як ентропія He-II пов'язана зі статистичним розподілом квазічастинок, вона переноситься тільки нормальним рухом. Але за усякий рух рідини,

коли "газ" квазічастинок залишається нерухомим, не виникає макроскопічного переносу ентропії. Отже, потік ентропії дорівнює

$$\vec{F} = S\vec{v}_n \quad (4.7)$$

Ми зараз не будемо посилатись на мікроскопічну картину і покажемо, що у рамках суто феноменологічного підходу співвідношення (4.7) постає з законів збереження. Тому поки що F для нас буде залишатись певною невідомою величиною, яка підлягає визначенню.

Як нам вже відомо, у He-II можливі два рухи і відповідно у гідродинаміці повинно бути два рівняння руху. Одним з них є рівняння (4.4). Друге рівняння визначає похідну за часом від швидкості надплинної частини рідини v_s . Так як виконується умова потенційності надплинного руху (4.1), то можна записати:

$$\partial v_s / \partial t = \nabla(\varphi + v_s^2 / 2) = 0 \quad (4.8)$$

Це рівняння руху отримано на основі феноменологічних міркувань і є певною невідомою скалярною функцією, яка теж підлягає визначенню.

Рівняння (4.3) - (4.8) уявляють собою повну систему гідродинамічних рівнянь надплинної рідини (Ландау - 1941 і 1944 р.р., Халатніков - 1952 р.). Для того, щоб їх можливо було використати на практиці, необхідно з'ясувати фізичний сенс невідомих потоків Π_{ik} , \vec{F} та $\nabla\varphi$.

Для цього ми скористаємось законом збереження енергії, який у диференціальній формі має вигляд:

$$\partial E / \partial t + \text{div} \vec{Q} = 0 \quad (4.9)$$

Тут E - енергія одиниці об'єму рідини, \vec{Q} - густина потоку енергії. Далі необхідно, щоб невідомі функції у рівняннях (4.3) - (4.8) були вибрані таким чином, щоб рівняння (4.9) виконувалось автоматично. Окрім того ми скористаємось принципом відносності Галілея, який дозволяє визначити залежності всіх величин від швидкості v_s при заданому значенні відносної швидкості $\vec{v}_n - \vec{v}_s$ обох рухів, що мають місце у рідкому гелі одночасно. Для цього додамо поряд з лабораторною системою координат (К) систему відліку (K_0), у якій \vec{v}_s даного елемента рідини дорівнює нулеві. До значень величин у системі (K_0) будемо додавати індекс "нуль". Система (K_0) рухається відносно лабораторної системи відліку (К) зі швидкістю \vec{v}_s . Тоді значення фізичних величин, котрі викликають наш інтерес, в системі (К) пов'язані з їх значеннями в системі (K_0) наступними співвідношеннями:

$$\vec{j} = \vec{j}_0 + \rho \vec{v}_s \quad (4.10)$$

$$\Pi_{ik} = \Pi_{0ik} + v_{si} j_{0k} + v_{sk} j_{0i} + \rho v_{si} v_{sk} \quad (4.11)$$

$$E = E_0 + \vec{j}_0 \vec{v}_s + \rho v_s^2 / 2 \quad (4.12)$$

$$Q = (\rho v_s^2 / 2 + \vec{j}_0 \vec{v}_s + E_0) v_s + j_0 v_s^2 / 2 + \Pi_0 v_s + Q_0 \quad (4.13)$$

$$\vec{F} = S \vec{v}_s + \vec{F}_0 \quad (4.14)$$

При переході від однієї інерціальної системи до другої ентропія не змінюється. У виразі (4.13) $\Pi_0 \vec{v}_s$ уявляє собою вектор з проекціями $\Pi_{0ik} v_{sk}$. Формули (4.10) - (4.14) походять безпосередньо з принципу відносності Галілея. Наприклад, продемонструємо звідкіля отримується співвідношення (4.11). Тензор потоку імпульсу дорівнює

$$\Pi_{ik} = \rho u_i u_k \quad (4.15)$$

де u_i - швидкість рідини, P - тиск. Швидкість рідини u у системі (К) зв'язана зі швидкістю u_0 у системі відліку, що рухається зі швидкістю \vec{v}_s , співвідношенням $\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{v}_s$. Підставляючи значення u до (4.15) маємо

$$\Pi_{ik} = \rho(v_{si}v_{sk} + u_{0i}v_{sk} + u_{0k}v_{si} + u_{0i}u_{0k}) - P\delta_{ik} \quad (4.16)$$

Бачимо, що останні два доданки у дужках у правій частині (4.16) визначають тензор $\Pi_{0шт}$ у системі (К), а добуток $\rho\vec{u}_0 = \vec{j}_0$ - імпульс одиниці об'єму у тєї ж самій системі координат. Отже співвідношення (4.16) співпадає з (4.14). Решту формул можна отримати аналогічним шляхом.

Так як у системі відліку (K_0) рідина здійснює тільки один рух - нормальний, зі швидкістю $\vec{v}_n - \vec{v}_s$, усі величини у цієї системі можуть залежити лише від різниці $\vec{v}_n - \vec{v}_s$. Так, вектори \vec{j} , \vec{Q} та \vec{F}_0 спрямовані уздовж вектора $\vec{v}_n - \vec{v}_s$. Отже при певному значенні $\vec{v}_n - \vec{v}_s$ співвідношення (4.10) - (4.14) визначають залежність фізичних величин, що розташовані у правих частинах формул, від швидкості надплинного руху \vec{v}_s . Для енергії E_0 одиниці об'єму рідини має місце термодинамічна тотожність:

$$dE_0 = TdS + \mu dP + (\vec{v}_n - \vec{v}_s)d\vec{j}_0 \quad (4.17)$$

Тут μ - хімічний потенціал одиниці маси, а перші два члени у правій частині (4.17) мають звичайний вигляд для нерухокої рідини при сталому об'ємі. Останній член відзеркалює той факт, що похідна від енергії за імпульсом \vec{j}_0 дорівнює швидкості руху у системі відліку (K_0). Тому для вектора \vec{j}_0 маємо співвідношення

$$\vec{j}_0 = \rho_n (\vec{v}_n - \vec{v}_s) \quad (4.18)$$

З міркувань симетрії виходить, що вектор \vec{j}_0 може бути спрямованим тільки уздовж $\vec{v}_n - \vec{v}_s$. Співвідношення (4.18) належить сприймати як визначення нормальної густини. Легко бачити, що з (4.10) та (4.18) походить співвідношення

$$\vec{j} = \rho_s \vec{v}_s + \rho_n \vec{v}_n \quad (4.19)$$

де $\rho_s = \rho - \rho_n$.

Знайдемо, далі, похідну $\partial E/\partial t$ через похідні від ρ , S та \vec{j}_0 згідно з співвідношенням (4.16). Для цього підставимо в рівняння для закону збереження енергії (4.9) вирази для E та Q з (4.12) та (4.13), після чого усі похідні за часом вилучаються за допомогою гідродинамічних рівнянь (4.3) - (4.8). Опускаючи надто громіздкі викладки, маємо:

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{Q}_0 = & -M_{i,l}(\partial v_{si}/\partial x) + (v_{ni} - v_{si})(\partial M_{i,l}/\partial x) + \\ & + j_{0i}(v_n - v_s)(\partial v_{ni}/\partial x) + [j_{0i} - S(v_{ni} - v_{si})]\frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi - \mu) - \\ & - \frac{\partial T}{\partial x_i}[F_{0i} - S(v_{ni} - v_{si})] + \frac{\partial}{\partial x_i}(F_{0i}T + j_{0i}\mu) \end{aligned} \quad (4.20)$$

До співвідношення (4.20) уведений тензор M_{ik} за допомогою рівняння

$$M_{ik} = \Pi_{ik} + [E_0 - TS - \mu P - j_0(v_n - v_s)]\delta_{ik}$$

Якщо дисипативні процеси відсутні, то величини M_{ik} , \vec{Q}_0 , \vec{F}_0 та φ можуть залежати тільки від термодинамічних змінних, а також відносної швидкості $\vec{v}_n - \vec{v}_s$, але не від будь-яких градієнтів цих величин. Тому стає можливим однозначно визначити вираз для пошукуваних величин за допомогою співвідношення (4.20). Маємо:

$$M_{ik} = j_{0i}(v_n - v_s) \quad (4.21)$$

$$\vec{F}_0 = S(\vec{v}_n - \vec{v}_s) \quad (4.22)$$

$$\Phi = \mu \quad (4.23)$$

$$\vec{Q}_0 = T\vec{F}_0 + \mu\vec{j}_0 - [(\vec{v}_n - \vec{v}_s)\vec{v}_s]\vec{j}_0 + [(\vec{v}_n - \vec{v}_s)\vec{v}_n]\vec{j}_0 \quad (4.24)$$

Підставляючи ці вирази до формул перетворення (4.11) - (4.14) отримуємо

$$\Pi_{ik} = \rho v_{si} v_{sk} + v_{si} j_{0k} + v_{nk} j_{0i} - [E - TS - \mu\rho - (\vec{v}_n - \vec{v}_s)j_0]\delta_{ik} \quad (4.25)$$

$$F = S v_n \quad (4.26)$$

$$\vec{Q} = (\mu + v_s^2/2)(\vec{j}_0 + \rho\vec{v}_s) + TS\vec{v}_n + (\vec{v}_n\vec{j}_0)\vec{v}_n \quad (4.27)$$

Ми бачимо, що співвідношення (4.26) співпадає з виразом (4.7), який був написаний з евристичних міркувань. Щодо виразу у квадратних дужках у (4.25), то він уявляє собою повний тиск, який за визначенням з точністю до знаку дорівнює похідній від повної енергії за об'ємом при постійній повній масі, ентропії та імпульсі відносного руху:

$$P = -\partial(E_0 V)/\partial V = -E_0 + TS + \mu\rho + (\vec{v}_n - \vec{v}_s)\vec{j}_0 \quad (4.28)$$

Необхідно зробити наступне зауваження. У класичній гідродинаміці, при розгляді ідеальної рідини, немає необхідності надавати визначення уявленню “тиск”, бо завжди можна вибрати системи відліку, у якій даний елемент об'єму рідини є нерухомим. У гідродинаміці надплинної рідини, однак, вибором системи відліку можна вилучити тільки один з обох рухів, що тривають одночасно. Отже звичайне визначення тиску неможливо застосовувати.

Згідно з (4.28) та (4.19) тензор потоку імпульсу (4.25) можна переписати у вигляді

$$\Pi_{ik} = \rho_n v_{ni} v_{nk} + \rho_n v_{si} v_{sk} + P\delta_{ik} \quad (4.29)$$

Цей вираз є істотним узагальненням формули з класичної гідродинаміки для звичайної рідини: $\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + P\delta_{ik}$.

Зараз ми у змозі написати повну систему гідродинамічних рівнянь для надплинної рідини нехтуючи дисипативними процесами. Для цього отримані вирази (4.25) та (4.26) підставимо до рівнянь (4.4) - (4.8). Маємо:

$$\partial\rho/\partial t + \text{div}\vec{j} = 0 \quad (4.30)$$

$$\partial\vec{j}/\partial t + \vec{v}_s \text{div}\vec{j} + (\vec{j}\nabla)\vec{v}_s + \vec{j}_0 \text{div}\vec{v}_n + (\vec{v}_n \nabla)\vec{j}_0 + \nabla P = 0 \quad (4.31)$$

$$\partial S/\partial t + \text{div}(S\vec{v}_n) = 0 \quad (4.32)$$

$$\partial\vec{v}_s/\partial t + \nabla(\mu + v_s^2/2) = 0 \quad (4.33)$$

Наприкінці цього розділу зупинемось на граничних умовах, що накладаються на термодинамічні величини. Відомо, що на усякій нерухомій твердій поверхні нормальний компонент потоку маси рідини j повинен обертатись до нуля, оскільки не може бути переносу речовини через межу, тобто $j_\perp = 0$.

Щоб укласти граничні умови для швидкості нормального руху \vec{v}_n , необхідно урахувати, що нормальний рух дійсно уявляє собою рух газу квазічастинок, який має усі властивості в'язкої рідини. Отже, рухаючись уздовж твердої поверхні, квазічастинки взаємодіють з нею. Ця взаємодія макроскопічно може бути описана як прилипання нормальної частини рідини до стінки. Тому тангенційна складова \vec{v}_n на поверхні твердого тіла повинна обертатись до нуля.

При укладанні граничних умов для нормальної відносно стінки складової \vec{v}_n необхідно урахувати, що квазічастинки можуть поглинатись або висилатись твердим тілом. Це відповідає теплопередаванню поміж рідиною та твердим тілом. Тому на межі нормальна до стінки складова потоку повинна бути неперервною. Спрямуємо вісь z перпендикулярно до стінки, а вісі x та y - паралельно її поверхні. Тоді при $j_z = 0$ відповідно до (4.27) нормальна складова потоку тепла дорівнює $Q_z = TS v_{nz}$.

Температура здійснює на межі стрибок, пропорційний до теплового потоку: $\Delta T = R_k Q_z$ і зветься температурним стрибком Капіци, а R_k - коефіцієнт пропорційності, який залежить від властивостей як рідини, так і твердого тіла, зветься тепловим опором Капіци. Причиною цього стрибка є особливість теплопередавання у He-II.

Через те, що конвективне поширення тепла в об'ємі рідини практично не по'язане ані з яким теплоопором, увесь теплопір поміж твердим тілом та рідиною сконцентрований у пристінковому шарі рідини. Отже весь перепад температур, викликаний появою теплового потоку, чиниться практично коло самої поверхні. Згідно з теорією, коефіцієнт R_k зростає зі зниженням температури як T^{-3} . Система гідродинамічних рівнянь (4.30) - (4.33) набуває таким чином вигляд:

$$\rho_s v_{sz} + \rho_n v_{nz} = 0 \quad (4.34)$$

$$v_{nx} - v_{ny} = 0 \quad (4.35)$$

$$STv_{nz} = -\kappa(\partial T / \partial z)_{\text{тверд}} \quad (4.36)$$

$$T_{\text{рід}} - T_{\text{тверд}} = R_k Q_z \quad (4.37)$$

У співвідношенні (4.36) κ - коефіцієнт теплопровідності твердого тіла. У деяких випадках теплопровідністю твердого тіла можливо нехтувати. Тоді з (4.36) та (4.34) граничними умовами будуть:

$$v_{nz} = 0, \quad v_{sz} = 0 \quad (4.38)$$

Нехтуючи теплопровідністю твердого тіла, як це походить з (4.35) та (4.38), граничні умови для \vec{v}_n такі ж самі, як і у нормальній рідині, а для \vec{v}_s - як у ідеальній рідині.

Теплообмін поміж твердим тілом та надплинною рідиною, що рухається, обумовлює появу тангенційних сил, які діють на поверхню твердого тіла. У цьому може переконати те, що компоненти тензора потоку імпульсу $\Pi_{ik} = 0$ при наявності теплообміну. Дійсно, згідно з співвідношеннями (4.29) та (4.33) маємо:

$$\Pi_{ik} = \rho_n v_{nx} v_{nz} + \rho_s v_{sx} v_{sz} \rho_n v_{nz} (v_{nx} - v_{sx}) \quad (4.39)$$

Відображуючи v_{nz} через нормальну складову потоку тепла на межі $Q_z = STv_{nz}$, з (4.39) отримуємо:

$$\Pi_{xz} = (\rho_n Q_z / ST)(v_{nx} - v_{sx}) \quad (4.40)$$

Як ми побачимо далі, система гідродинамічних рівнянь дуже спрощується, якщо швидкості \vec{v}_s та \vec{v}_n малі у порівнянні зі швидкістю звука.

4.2. Дисипативні процеси у надплинній бозе-рідині

Система гідродинамічних рівнянь (4.30)-(4.33) окреслює рух надплинної рідини у відсутності дисипації енергії. З урахуванням дисипативних процесів до цих рівнянь необхідно надати додаткові члени, лінійні за просторовими похідними швидкостей \vec{v}_n , \vec{v}_s та температури T . Вигляд цих членів встановлюється за законом зростання ентропії та принципом симетрії кінетичних коефіцієнтів Онсагера. Якщо, як і раніше, ρ розуміти як масу одиниці об'єму рідини, а j - як її імпульс, то рівняння безперервності збереже свій звичайний вигляд: $\partial \rho / \partial t + \text{div} \vec{j} = 0$.

Далі, будемо розуміти E_0 як енергію одиниці об'єму рідини у системі відліку, де надплинна частина рідини нерухома. Решту термодинамічних функцій визначаємо як функції ρ , енергії E та відносної швидкості $(\vec{v}_n - \vec{v}_s)$. Закон збереження імпульсу тепер має вигляд:

$$\partial j_i / \partial t + \frac{\partial}{\partial x} (\Pi_{ik} + \tau_{ik}) = 0 \quad (4.41)$$

Тут τ_{ik} - невідомий дисипативний член, який належить визначити. Аналогічно дописуємо додатковий член h у рівняння надплинного руху (4.33)

$$\partial \vec{v}_s / \partial t + \nabla(\mu + v_s^2 / 2 + h) = 0 \quad (4.42)$$

Надплинний рух, як і раніше, вважаємо потенційним, тобто $\text{rot } \vec{v}_s = 0$. Вираз для потоку енергії \vec{Q} у законі збереження енергії E також змінюється на деякий невідомий додатковий потік енергії \vec{Q}' :

$$\partial E / \partial t + \text{div}(\vec{Q} + \vec{Q}') = 0 \quad (4.43)$$

Ентропійне рівняння не має тепер вигляду рівняння збереження (4.32), бо ентропія повинна зростати. Проте для ентропії можна використати колишній вираз $S = S(T, \rho, \vec{v}_n - \vec{v}_s)$. Дійсно, розклад ентропії за градієнтами параметрів починається з квадратичних за градієнтами членів, маючи на увазі те, що у рівновазі ентропія максимальна. Тоді у теорії, слухний з точністю до лінійних за просторовими похідними членів, цими поправками можна нехтувати.

Знайдемо зараз рівняння для ентропії. Для цього підрахуємо похідну за часом від енергії E , яка визначена у (4.12), за допомогою (4.17). Як результат маємо:

$$\partial E / \partial t = (\mu + v_s^2 / 2) \partial \rho / \partial t + \vec{j} \partial \vec{v}_s / \partial t + \vec{v}_n \partial \vec{j}_0 / \partial t + T \partial S / \partial t \quad (4.44)$$

Щоб вилучити похідні за часом у (4.44) скористуємось рівняннями (4.40) - (4.42), а також (4.27) та (4.29). Отримуємо:

$$\partial E / \partial t + \text{div}[\vec{Q} + \vec{q} + h(\vec{j} - \rho \vec{v}_n) + \vec{\tau} \vec{v}_n] = \quad (4.45)$$

$$= T[\partial S / \partial t + \text{div}(S \vec{v}_n + \vec{q} / T)] + h \text{div}(\vec{j} - \rho \vec{v}_n) + \tau_{ik} \partial v_{ni} / \partial x_k + \nabla T \frac{q}{T}$$

У цьому виразі $\vec{\tau} \vec{v}_n$ уявляє собою вектор з проекціями $\tau_{ik} v_{nk}$. Оскільки у нерівноважних умовах у потоці ентропії може також з'явитись додатковий член, для з'ясування його вигляду до правої та лівої частини (4.45) ми додамо деякий член $\text{div} \vec{q}$ з невідомою величиною \vec{q} . Порівнюючи співвідношення (4.45) та (4.43) отримуємо рівняння, яке визначає швидкість зростання ентропії:

$$T[\partial S / \partial t + \text{div}(S \vec{v}_n + \vec{q} / T)] = -h \text{div}(\vec{j} - \rho \vec{v}_n) - \tau_{ik} \partial v_{ni} / \partial x_k - \nabla T \frac{q}{T} \quad (4.46)$$

а також вираз для додаткового потоку тепла:

$$\vec{Q}' = \vec{q} + h(\vec{j} - \rho \vec{v}_n) + \vec{\tau} \vec{v}_n \quad (4.47)$$

Права частина рівняння (4.46) уявляє собою дисипативну функцію надплинної рідини. Так як з закону зростання ентропії походить, що дисипативна функція повинна бути суттєво позитивною квадратичною формою просторових похідних, то з цієї останньої вимоги негайно постає вигляд невідомих членів:

$$\tau_{ik} = -\eta[\partial v_{ni} / \partial x_k + \partial v_{nk} / \partial x_i - (2/3)\delta_{ik} \partial v_{ni} / \partial x_i] = \delta_{ik}[\zeta_1 \text{div}(\vec{j} - \rho \vec{v}_n) + \zeta_2 \text{div} \vec{v}_n] \quad (4.48)$$

$$h = -\zeta_3 \text{div}(\vec{j} - \rho \vec{v}_n) - \zeta_4 \text{div} \vec{v}_n \quad (4.49)$$

$$\vec{q} = -\kappa \nabla T \quad (4.50)$$

У дисипативній частині тензора ми, за звичаєм, виділяємо комбінацію похідних від v зі слідом, що дорівнює нулю. Відповідно η у виразі (4.48) має назву коефіцієнт першої в'язкості. За принципом симетрії кінетичних коефіцієнтів Онсагера має місце співвідношення

$$\zeta_1 = \zeta_4 \quad (4.51)$$

Коефіцієнти ζ_1 , ζ_2 , ζ_3 та ζ_4 мають тлумачення коефіцієнтів другої в'язкості, до того ж, згідно (4.51) їх зараз 3 замість одного у класичній термодинаміці. Коефіцієнт першої в'язкості суттєво пов'язаний з нормальним рухом. Коефіцієнт κ у рівнянні (4.50) уявляє

собою теплопровідність. Як і належить очікувати, коефіцієнта аналогічного до першої в'язкості у надплинному русі не виникає.

Тепер можна записати, з урахуванням отриманих виразів, кінцевий вигляд рівнянь гідродинаміки надплинної рідини з урахуванням дисипативних членів:

$$\begin{aligned} \partial j_i / \partial t + \partial \Pi_k / \partial x_k = \frac{\partial}{\partial x_k} [\eta (\partial v_{ni} / \partial x_k + \partial v_{nk} / \partial x_i - \\ - (2/3) \delta_{ik} \partial v_{ni} / \partial x_i + \delta_{ik} \zeta_1 \operatorname{div}(\vec{j} - \rho \vec{v}_n) + \delta_{ik} \zeta_2 \operatorname{div} \vec{v}_n] \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\partial \vec{v}_s / \partial t + \nabla(\mu + v_s^2 / 2) = \nabla[\zeta_3 \operatorname{div}(\vec{j} - \rho \vec{v}_n) + \zeta_1 \operatorname{div} \vec{v}_n] \quad (4.53)$$

$$\partial S / \partial t + \operatorname{div}(S \vec{v}_n + \vec{q} / T) = R / T \quad (4.54)$$

Дисипативна функція R дорівнює:

$$\begin{aligned} R = \zeta_2 (\operatorname{div} \vec{v}_n)^2 + \zeta_3 [\operatorname{div}(\vec{j} - \rho \vec{v}_n)]^2 + 2 \zeta_1 \operatorname{div} \vec{v}_n \operatorname{div}(\vec{j} - \rho \vec{v}_n) + \\ + 0,5 \eta [\partial v_{ni} / \partial x_k + \partial v_{nk} / \partial x_i - (2/3) \delta_{ik} \partial v_{ni} / \partial x_i]^2 + \kappa (\nabla T / T)^2 \end{aligned} \quad (4.55)$$

Для того, щоб функція R була позитивною, усі кінетичні коефіцієнти η , $\zeta_i (i = 1, 2, 3)$ та κ повинні бути позитивними, до того ж необхідно виконання нерівності

$$\zeta_1^2 < \zeta_2 \cdot \zeta_3 \quad (4.56)$$

Наприкінці цього пункту необхідно, однак, зробити наступне зауваження. Дисипована у надплинній рідині енергія, зрозуміло, інваріантна відносно галілеєвих перетворень системи відліку. Очевидно, що похідні від швидкості задовольняють цієї умові. Однак, у надплинній рідині, у галілеєвому сенсі, інваріантна також і різниця швидкостей $\vec{w} = \vec{v}_n - \vec{v}_s$. Тому і дисипативні потоки у надплинній рідині можуть залежати не тільки від градієнтів термодинамічних величин та швидкостей, але і від самої \vec{w} . У розд.4.1 було відмічено, що ця різниця фактично повинна розглядатись, як мала величина, і в цьому сенсі вирази (4.3), (4.52) - (4.54) містять у себе не усі принципово можливі члени, а тільки найбільші з них. У книзі С.Паттермана "Гідродинаміка надплинної рідини" показано, що повна кількість незалежних кінетичних коефіцієнтів, які описують дисипацію у гелії-II дорівнює 13.

5. РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ЗВУКОВИХ ХВИЛЬ У НАДПЛИННІЙ РІДИНІ.

Система гідродинамічних рівнянь надплинної безе-рідини (4.29) - (4.32) дозволяє дослідити розповсюдження звуку у середовищі при достатньо малих частотах, коли виконується умова $\omega \tau \ll 1$, де ω - частота звуку, а τ - характерний термін релаксації. Якщо у ці рівняння додати дисипативні члени, то стає можливим розгляд питання про поглинання звуку. Однак, питання про розповсюдження звуку у надплинній рідині при умові $\omega \tau \gg 1$ (великі частоти) не може бути розглянуто у гідродинамічному наближенні. Таку задачу треба вирішувати на підґрунті кінетичного рівняння для функції розподілу квазічастинок.

Для вивчення розповсюдження низькочастотного звуку у He-II застосуємо систему гідродинамічних рівнянь. Як звичайно, у звуковій хвилі швидкості руху \vec{v}_s та \vec{v}_n вважають малими порівняно зі швидкістю звуку, а густину ρ , тиск P та ентропію S - майже порівняними до своїх рівноважних значень. Відтоді систему гідродинамічних рівнянь можливо лініаризувати. Нехтуємо у цих рівняннях квадратичними за швидкостями членами, а в (4.31) у виразі $\operatorname{div}(S \vec{v}_n)$ виносимо з під позначки дивергенція $S = s\rho$, бо цей член вже утримує малу величину \vec{v}_n . Після цих операцій система гідродинамічних рівнянь набуває вигляду

$$\partial \rho / \partial t + \operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad (5.1)$$

$$\partial j / \partial t + \nabla P = 0 \quad (5.2)$$

$$\partial(\rho s) / \partial t + \rho s \operatorname{div} \vec{v}_n = 0 \quad (5.3)$$

$$\partial v_s / \partial t + \nabla \mu = 0 \quad (5.4)$$

Розглянемо різноманітні типи хвиль, які можуть розповсюджуватись у He-II.

5.1. Перший та другий звуки.

Для пошуку рівнянь, що визначають розповсюдження звуку у He-II скористуємось системою лінійаризованих рівнянь (5.1) - (5.4). Якщо їх доповнити рівняннями стану, що відзеркалюють змінні ρ та s через незалежні змінні P та T і урахувати, що за допомогою термодинамічної тотожності

$$d\mu = -s dT + \rho^{-1} dP \quad (5.5)$$

$d\mu$ можливо відобразити через dP та dT , то ми отримаємо вісім рівнянь для восьми невідомих \vec{v}_s , \vec{v}_n , P та T . До того ж густина потоку $\vec{j} = \rho_n \vec{v}_n + \rho_s \vec{v}_s$ входить тільки у вигляді похідних

$$\partial \vec{j} / \partial t = \rho_n (\partial \vec{v}_n / \partial t) + \rho_s (\partial \vec{v}_s / \partial t)$$

та

$$\operatorname{div} \vec{j} = \rho_n \operatorname{div} \vec{v}_n + \rho_s \operatorname{div} \vec{v}_s$$

Отже, при відомих ρ_n та ρ_s похідні визначені через швидкості \vec{v}_s та \vec{v}_n .

Знайдемо рівняння, що визначають розповсюдження звуку у He-II. Для цього продиференціюємо за часом (5.1) і підставимо результат у (5.2). Маємо

$$\partial^2 \rho / \partial t^2 = \nabla^2 P \quad (5.6)$$

Далі, з термодинамічної тотожності (5.5) отримуємо ∇P

$$\nabla P = \rho s \nabla T + \rho \nabla \mu \quad (5.7)$$

Підставляючи сюди ∇P з (5.2) та $\nabla \mu$ з (5.4) маємо

$$\partial \vec{j} / \partial t + \rho s \nabla T = \rho (\partial \vec{v}_s / \partial t) = (\rho_s + \rho_n) (\partial \vec{v}_s / \partial t) \quad (5.8)$$

Так як $\partial \rho / \partial t \approx v^2$, то у лінійному за v наближенні отримуємо

$$\partial \vec{j} / \partial t = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_s \vec{v}_s + \rho_n \vec{v}_n) = \rho_s (\partial \vec{v}_s / \partial t) + \rho_n (\partial \vec{v}_n / \partial t)$$

співвідношення (5.8) можна записати так

$$\rho_n \frac{\partial}{\partial t} (\vec{v}_n - \vec{v}_s) + \rho s \nabla T = 0 \quad (5.9)$$

Застосуємо далі до (5.9) операцію div та урахуємо, що

$$\operatorname{div} (\vec{v}_n - \vec{v}_s) = (\rho / \rho_s s) (\partial s / \partial t) \quad (5.10)$$

Співвідношення (5.10) є наслідком того, що

$$\partial s / \partial t = \rho^{-1} [\partial(\rho s) / \partial t] = -s \operatorname{div} \vec{v}_n + \frac{s}{\rho} \operatorname{div} \vec{j} = \frac{s \rho_s}{\rho} \operatorname{div} (\vec{v}_s - \vec{v}_n)$$

Після цих операцій отримуємо рівняння

$$\partial^2 s / \partial t^2 = (\rho_s s^2 / \rho_n) \nabla^2 T \quad (5.11)$$

Таким чином, ми отримали два рівняння (5.6) та (5.11) які визначають змінні термодинамічних величин у звуковій хвилі та розповсюдження звукових хвиль у He-II. Оскільки цих рівнянь два, зрозуміло, що існують дві швидкості розповсюдження звуку. Для їх визначення відобразимо тиск та температуру через ентропію та густину і перепишемо рівняння (5.6) та (5.11) у наступному вигляді

$$\partial^2 \rho / \partial t^2 = (\partial P / \partial \rho)_s \nabla^2 P + (\partial P / \partial s)_\rho \nabla^2 s \quad (5.12)$$

$$\partial^2 s / \partial t^2 = (\rho_s s^2 / \rho_n) [(\partial T / \partial \rho)_s \nabla^2 \rho + (\partial T / \partial s)_\rho \nabla^2 s] \quad (5.13)$$

Шукаємо рішення цих рівнянь у вигляді плоских хвиль

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0 + \rho' \exp[i\omega(t - x/U)] \\ s &= s_0 + s' \exp[i\omega(t - x/U)]\end{aligned}\quad (5.14)$$

де ω - частота, U - швидкість звуку уздовж вісі x , а літери зі штрихом уявляють собою малі змінення відповідних фізичних величин у звуковій хвилі, величини з індексом нуль - їх сталі рівноважні значення. Підставляючи вираз (5.14) до рівнянь (5.12) та (5.13) отримуємо

$$\begin{aligned}[(U/U_1)^2 - 1]\rho' - (\partial P / \partial s)_\rho (\partial \rho / \partial P)_s s' &= 0 \\ (\partial T / \partial \rho)_s (\partial s / \partial T)_\rho \rho' - [(U/U_2)^2 - 1]s' &= 0\end{aligned}\quad (5.15)$$

де ми використали наступні позначки

$$U_1^2 = (\partial P / \partial \rho)_s \quad (5.16)$$

$$U_2^2 = (\rho_s / \rho_n) s^2 (\partial T / \partial s)_\rho \quad (5.17)$$

Умову існування ненульових рішень системи (5.15), як звичайно, можна записати у вигляді рівності до нуля її визначника. Ця умова уявляє собою дисперсійне рівняння для визначення швидкості звукових коливань. Отже отримуємо

$$[(U/U_1)^2 - 1][(U/U_2)^2 - 1] = (\partial P / \partial s)_\rho (\partial \rho / \partial P)_s (\partial T / \partial \rho)_s (\partial s / \partial T)_\rho \quad (5.18)$$

За допомогою правил перетворення термодинамічних коефіцієнтів можна отримати, що права частина (5.18) дорівнює $(C_P - C_V)/C_P$. Так як нижче за T_λ коефіцієнт теплового розширювання He-II аномально малий, то його теплоємності при сталих тиску та об'ємі практично однакові. Тому дисперсійне рівняння набуває вигляду

$$[(U/U_1)^2 - 1][(U/U_2)^2 - 1] = 0, \quad (5.19)$$

а два його корені будуть (5.16) та (5.17).

Перший корінь визначає швидкість так званого першого звуку. Це швидкість звичайної звукової хвилі, з якою у He-II розповсюджуються коливання тиску та густини. У хвилях першого звуку гелій рухається як ціле. Другий корінь визначає швидкість розповсюдження так званого другого звуку (назва належить Л.Д. Ландау). З такою швидкістю розповсюджуються коливання температури або ентропії. Існування незгасаючих температурних хвиль є специфічною властивістю надплинного гелію.

Згідно з формулою (5.16) швидкість першого звуку U майже стала. Швидкість другого звуку U , що визначена формулою (5.17) суттєво залежить від температури, обертаючись до нуля разом з λ -точці. Поблизу T_λ $\rho_n \cong \rho$, таким чином для U_2^2 маємо

$$U_2^2 = Ts^2 \rho_s / C_P \rho \quad (5.20)$$

До того ж, для U_1 залишається слухною формула (5.16).

Як ми бачили раніше, при дуже низьких температурах ($T < 0,6$ К) усі термодинамічні характеристики He-II визначаються фононами. Тому при $T \rightarrow 0$ К, як це плине з формул (3.43) та (3.44) маємо

$$C = 3s, \quad \rho_n = Ts\rho / 3U_1^2, \quad \rho_s \cong \rho \quad (5.21)$$

Користуючись виразами (5.21), неважко отримати за допомогою формул (5.16) та (5.17), що швидкість другого звуку при $T \rightarrow 0$ прямує до межі

$$U_2 = U_1 \sqrt{3} \quad (\text{теорія Л.Д. Ландау}) \quad (5.22)$$

Другий звук можна розглядати як хвилі стиснення та розрідження у газі квазічастинок, бо коливання температури викликають коливання густини квазічастинок. Отже, швидкість другого звуку - це швидкість звуку у газі квазічастинок. Межове значення U_2 , що надається формулою (5.22) при температурах близьких до абсолютного нуля відповідає загальному результату для швидкості звуку у газі квазічастинок з енергетичним спектром $\epsilon(p) = U_1 p$ (фонони).

Для кращого розуміння фізичної природи обох типів звукових хвиль, детальніше розглянемо отримані формули. У хвилі першого звуку ентропія не змінюється, а коливається тільки густина. Дійсно, згідно з співвідношенням (5.15) при $U \cong U_1 \rho' = 0$, але $s' = 0$. З рівняння (5.11) пліне, що $\nabla T = 0$, а відтоді згідно з (5.9) у першому звуці $v_s = v_n$. Ці умови відповідають розповсюдженню хвиль густини нормального компоненту. Дійсно, вираз (5.16) є звичайним для швидкості звуку (перший звук).

У хвилі другого звуку не змінюється густина, а коливання здійснює ентропія (або температура). Згідно з другим рівнянням (5.11) при $U \cong U_2$, $\rho' = 0$, $s' = 0$. З рівняння (5.6) бачимо, що $\nabla P = 0$, до того ж з (5.2) постає, що $\rho_s v_s + \rho_n v_n = 0$. Ці умови відповідають розповсюдженню хвиль ентропії (або температурної хвилі) при майже сталій густині $\rho = \rho_s + \rho_n$. Звідки пліне, що обидва компоненти Не-II рухаються у антифазі щоб зберігти порівняний до нуля сумарний потік маси. Якщо записати вираз (5.17) у формі

$$U_2^2 = \frac{\rho_s}{\rho_n} \cdot \frac{T s^2}{C_p} \quad (5.23)$$

то ми бачимо, що вимірювання швидкості другого звуку надає ще одну можливість визначення параметрів ρ_s та ρ_n .

Підкреслимо, що співвідношення для швидкостей U_1 та U_2 були отримані з приблизних рівнянь (5.1) - (5.4), у яких були опущені нелінійні члени та не враховані необоротні ефекти. У більш точному наближенні хвилі першого та другого звуків не зовсім незалежні. Коливання густини і тиску завжди супроводжуються коливаннями ентропії та температури і навпаки. Тому перший звук супроводжується другим, а другий - першим. Однак, маючи на увазі мале значення $\partial \rho / \partial T$ обопільне перетворення хвиль першого та другого звуків досить мале. Різна фізична природа першого та другого звуків обумовлює і різницю у засобах їх збудження. При коливаннях площини у напрямку нормалі до самої себе випромінюється головним чином перший звук. Це пліне з того, що на поверхні твердого тіла $v_s = v_n$, а другий звук пов'язаний з присутністю різниці $\vec{v}_s - \vec{v}_n$.

Швидкість першого звуку вимірювалась шляхом визначення довжини хвилі, а також імпульсним методом, у якому резонатори з кристалів кварцю використовувались у якості передавача та приймача. Типові експериментальні результати, що отримані для U_1 в умовах тиску насиченої пари, зображені на мал.5.1а.

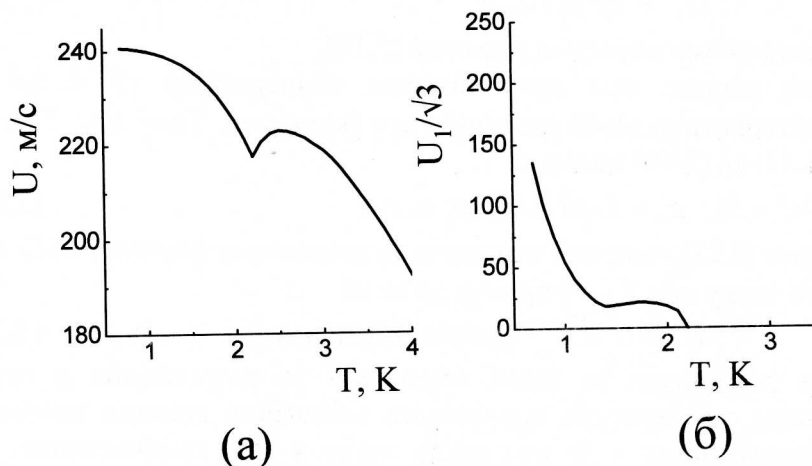


Рис.5.1. Температурна залежність швидкості першого (зліва) та другого (справа) звуків.

Експериментальне виявлення другого звуку було здійснено у роботах Пешкова (1944, 1946 р.р.). У цих дослідях відносний рух надплинного та нормального

компонентів He-II викликався за допомогою періодично змінюючого свою температуру тіла, зануреного у He-II. Швидкість U_2 визначалась шляхом генерації стоячих хвиль. Передавачем був електронагрівач, що живився змінним струмом з частотою ω . При цьому частота другого звуку складала 2ω , бо тепловиділення випромінювача пропорційно до $W = RI_0^2 \cos^2 \omega t = RI_0^2 (1 + \cos 2\omega t)/2$. Приймачем був термометр електроопору. Залежність швидкості другого звуку від температури наведена на рис.5.16. Відповідно до формули (5.23) швидкість другого звуку у λ -точці дорівнює нулю (s, T, ρ_n - обмежені, $\rho_s/C_p \rightarrow 0$ як $(T_\lambda - T)^{2/3} / \lg|T_\lambda - T|$; див. (2.1) та (3.44)) і зростає зі зниженням температури. Як видно з рис. 5.16 максимум $U = 20,32$ м/с спостерігається при $T = 1,63$ К.

Вимірювання $U_2(T)$ у регіоні більш низьких температур має принципове значення для з'ясування фізичної природи цього явища. Справа у тому, що поряд з теорією Ландау другий звук був передбачений також у теорії Тисси (1938 р.). Незважаючи на принципову відміну теорій Ландау і Тисси, вони призводять до якісно близьких результатів в області відносно високих температур. Однак, значна розбіжність поміж цими двома теоріями має місце при більш низьких температурах, особливо у фоновій області. Тисса відносив фонони до надплинного компоненту (!?). Згідно з теорією Тисси $U_2 \rightarrow 0$ при $T \rightarrow 0$, у той час як у теорії Ландау ця межа скінчена. Дійсно, як можна бачити з формули (5.23) при $T \rightarrow 0$ тільки $\rho_s \rightarrow \rho$, а решта величин прямує до нуля. Таку невизначенність можливо усунути за допомогою фонових формул. При цьому, як ми вже бачили вище, $U_2 \rightarrow U_1 / \sqrt{3} = 140$ м/с при $T \rightarrow 0$. Тому, коли у подальших експериментах Пешкова (1948 р.) були винайдені мінімуми $U_2(T)$ при $T \cong 1,12$ К і при подальшому зменшенні температури зростання U_2 , несправедливість теорії Тисси стала експериментальним фактом. Вимірювання залежності $U_2(T)$ в області $T < 1$ К довели, що U_2 значно зростає нижче за $T \approx 0,6$ К, але не потвердили кількісно теорію Ландау, див. (5.22). Мабуть чинником розбіжності є перевищення довжини вільного перебігу фононів над розміром прилада, у якому були виконані вимірювання. За допомогою експериментально отриманої швидкості другого звуку та формули (5.23) можна підрахувати ρ_n . Цей метод точніший за метод стосу дисків (див. розд. 2.5.1) при низьких температурах, коли значно зростає похибка у визначенні з періоду коливальних. Однак, при відносно високих температурах і, особливо, при $T \cong T_\lambda$, навпаки, зростає похибка, яка пов'язана з визначенням ρ_n з вимірювань швидкості другого звуку.

5.2. Згасання першого та другого звуків у He II.

Згасання першого звуку у надплинній рідині обумовлено звичайними ефектами в'язкості та теплопровідності, які призводять до дисипації енергії хвилі. Окрім того, у згасання дають внесок також ефекти релаксації фононів та ротонів. Дійсно, в умовах, коли замкнена у визначеному об'ємі рідина потерпає стискування або розширювання, для встановлення відповідної концентрації фононів та ротонів потрібний певний час. Усі фактори, що призводять до згасання першого звуку, дають також внесок і до згасання другого звуку. До них додається теплопровідність, що пов'язана з дрейфом квазічастинок. Ми раніше позначали, що ці обидва хвильових процеси у He-II пов'язані поміж собою. Зокрема, з урахуванням теплового розширювання гелію виникають коливання температури у хвилях першого звуку і коливання тиску у хвилях другого звуку.

При дослідженні розповсюдження хвильових процесів з урахуванням згасання необхідно користуватись системою гідродинамічних рівнянь (4.52) - (4.55) з

урахуванням дисипативних членів. Відповідний аналіз був проведений Халатніковим (1952 р.). Тут ми наведемо вирази для швидкостей першого та другого звуків. Вони є комплексними величинами, до того ж мнимі частки визначають поглинання. У разі першого звуку, нехтуючи ефектами теплового розширювання, розрахунок дає

$$U_1^2 = (\partial P / \partial \rho)_s + \frac{i\omega}{\rho} \left(\frac{4\pi}{3} + \xi_2 \right)$$

У тому ж наближенні для швидкості другого звуку маємо

$$U_2^2 = s^2 \frac{\rho_s}{\rho_n} (\partial T / \partial s)_\rho + \frac{i\omega}{\rho} \cdot \frac{\rho_s}{\rho_n} \left[\frac{4\eta}{3} + \xi_2 + \rho^2 \xi_3 - 2\rho \xi_1 + \frac{\rho_n}{\rho_s} \cdot \frac{\chi}{T} (\partial T / \partial s)_\rho \right]$$

Якщо швидкості - комплексні величини, то комплексними є і їх хвильові числа $k = \omega / U$. До того ж мнима частина є просто коефіцієнтом поглинання першого звуку

$$\alpha_1 = \text{Im}(\omega / U_1) = (\omega^2 / 2\rho U_1) (4\eta / 3 + \xi_2)$$

Для другого звуку маємо

$$\alpha_2 = \text{Im}\left(\frac{\omega}{U_2}\right) = \frac{\omega^2}{2\rho U_2^3} \cdot \frac{\rho_s}{\rho_n} \left[\frac{4\pi}{3} + \xi_2 + \rho^2 \xi_3 - 2\rho \xi_1 + \frac{\rho_n}{\rho_s} \cdot \frac{\chi}{T} (\partial T / \partial s)_\rho \right]$$

5.3. Третій та четвертий звуки у надплинній рідині.

5.3.1. Третій звук. Розглянемо два специфічних хвильових рухи у He-II, що пов'язані з другим звуком. Третій звук - це поверхнева хвиля у плівці He-II (мал.5.2), у якій надплинний компонент осцилює паралельно до підкладки, а нормальний компонент - нерухомий завдяки в'язкості. Таким чином, по відношенню до рівноважного стану на гребені хвилі опиняється більше надплинного компоненту, який не супроводжується переносом ентропії, а у западині - менше. Тому температура у западині підвищується, а на гребені знижується.

Таким чином, хвиля третього звуку супроводжується коливаннями температури, хоча локальні градієнти температури помітно знижуються внаслідок випаровування He-II на гребенях та його конденсації у западинах. Третій звук був передбачений Аткінсом (1959 р.).

Наближений вираз для фазової швидкості третього звуку можна отримати, якщо використати рівняння для швидкості поверхневої хвилі на неглибокому шарі звичайної класичної рідини завтовшки d

$$U_3^2 = [(f\lambda / 2\pi) + (2\rho\sigma / \rho\lambda)] \cdot \text{th}(2\pi d / \lambda) \quad (5.24)$$

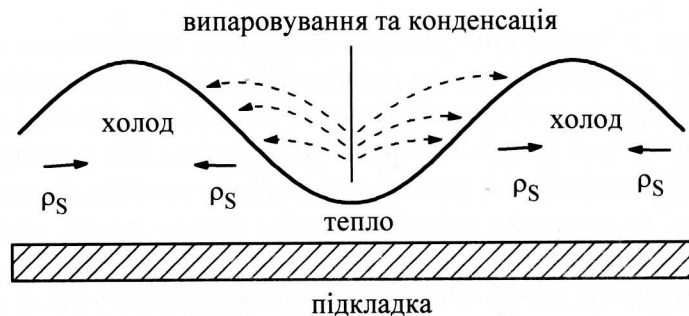


Рис.5.2. Хвиля третього звуку у плівці He-II.

де σ - поверхневий натяг, f - сила на одиницю маси гелію, яка обумовлена вандерваальсовим притяганням з боку підкладки. Ця сила є основним чинником коливань. Для дуже довгих хвиль у (5.24) домінує перший член. Ураховуючи, що у He-

II рухається ліше надплинний компонент ($\vec{v}_n = 0$), швидкість третього звуку можна виразити у вигляді

$$U_3^2 = \rho_s f d / \rho \quad (5.25)$$

Швидкість третього звуку за порядком величини співпадає зі спостережуваними швидкостями потоку у насичених плівках гелію і знаходиться у межах 10 - 100 м/с. Третій звук уперше спостерігали Пікар та Аткинс (1969 р.) за допомогою оптичного методу. У найбільш точних експериментах на підкладку напильюють дві тонкі алюмінієві плівочки. Розташовуючи ці плівочки у зовнішньому магнітному полі, або пропускаючи крізь них сталий струм, можливо домогтись, щоб плівочки опинились біля надпровідного перетворення. За цієї умови мале змінення температури спричиняє вельми значну зміну електроопору плівок. Таким чином вдається детектувати третій звук завдяки варіаціям температури, що його супроводять. Повна теорія третього звуку користується рівняннями дворідинної моделі з відповідними граничними умовами.

5.3.2. Четвертий звук. У достатньо вузьких каналах та капілярах з розмірами $d < 0,1$ мкм, як було відмічено раніше, нормальний компонент практично нерухомий: $\vec{v}_n = 0$. За цих умов розповсюдження малих коливань у He-II уявляє собою нову моду, як довели Пеллам та Скот (1948 р.), а також Аткинс (1959 р.). Цю моду Аткинс назвав четвертим звуком. У четвертому звуці виникають коливання температури і повної густини рідкого гелію. Дійсно, у вузьких щілинах та капілярах довжина вільного перебігу квазічастинок стає рівною, або навіть перевищує розміри капілярів. Розуміло, що при цьому нормальний компонент у He - II із-за в'язкості буде залишатись нерухомим, а у надплинному компоненті можуть розповсюджуватись звукові коливання.

Швидкість четвертого звуку знайдемо за допомогою лінійаризованих гідродинамічних рівнянь (5.1) - (5.4), з урахуванням того, що імпульс рідини не зберігається через взаємодію нормального компонента з твердою поверхнею капіляра. Тому у системі рівнянь належить покласти $\vec{v}_n = 0$ та відмовитись від використання другого рівняння. Відтоді лінійаризована система рівнянь (5.1) - (5.4) збігає до трьох рівнянь

$$\partial \rho / \partial t + \rho_s \operatorname{div} \vec{v}_s = 0 \quad (5.26)$$

$$\partial v_s / \partial t + \nabla \mu = 0 \quad (5.27)$$

$$\partial s / \partial t = 0 \quad (5.28)$$

Для того, щоб отримати пошуковане хвильове рівняння, вилучимо v_s з (5.26) та (5.27) і скориставшись рівнянням (5.7) маємо

$$\partial^2 \rho / \partial t^2 = (\rho_s / \rho) \nabla^2 P - s \rho_s \nabla^2 T \quad (5.29)$$

Рівняння (5.28) нехтуючи коефіцієнтом теплового розширювання $\partial \rho / \partial T$ дає

$$\rho (\partial s / \partial t) \nabla^2 T + s (\partial \rho / \partial t) \nabla^2 P = 0 \quad (5.30)$$

з (5.29) та (5.30) отримуємо хвильове рівняння для P

$$\partial^2 P / \partial t^2 - [(\rho_s / \rho) (\partial P / \partial \rho) + (\rho_s s / \rho) (\partial s / \partial t)^{-1}] \nabla^2 P = 0 \quad (5.31)$$

яке має періодичне рішення, що розповсюджується зі швидкістю

$$U_4^2 = (\rho_s / \rho) U_1^2 + (\rho_n / \rho) U_2^2 \quad (5.32)$$

Тут U_1 та U_2 - швидкості першого та другого звуків, які визначені співвідношеннями (5.16) та (5.17). Тому що у виразі (5.32) практично за усіх $T < T_\lambda$ другий член суттєво менший за перший, часто використовується спрощений вираз

$$U_4 \cong (\rho_s / \rho)^{1/2} U_1 \quad (5.33)$$

Видно, що це співвідношення дозволяє експериментально визначити густину надплинного компонента у вузьких каналах.

У хвилі четвертого звуку, як це можна побачити з (5.32) одночасно коливаються густина - тиск та ентропія - температура. Однак, коливання тиску більш інтенсивні ніж коливання температури ($y \approx 10^4$ разів). Тому четвертий звук зручніше збуджувати шляхом коливання густини або тиску, подібно до першого звуку.

Швидкість U_4 у повній згоді з виразом (5.32) у значній мірі залежить від температури: $U_4 \cong U_1$ при $T \rightarrow 0$ та близька до U_2 коли $T \rightarrow T_\lambda$, де U_4 обертається до нуля (див. рис.5.3).

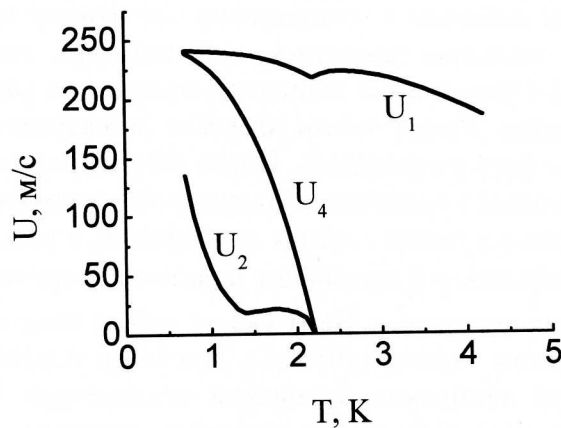


Рис.5.3. Температурна залежність швидкості другого $-U_2$, четвертого $-U_4$ та першого $-U_1$ звуків у He-II.

5.3.3. П'ятий звук. Як було передбачено Рудником, Майнардон та інш.(1979 р), окрім вищерозглянутих температурних хвиль, можливе існування нової звукової хвилі, що отримала назву п'ятий звук. П'ятий звук можна збудити у вузьких щілинах та капілярах, але за умови, що рідина має вільну поверхню, на якій $\vec{v}_n = 0$. Інша можливість розповсюдження п'ятого звуку - тонка плівка ($\vec{v}_n = 0$), над якою штучно побудовані умови для пригнічення випаровування. Це можна реалізувати, якщо близько до поверхні плівки розташована площина.

Швидкість п'ятого звуку дорівнює

$$U_5 = (\rho_n / \rho)^{1/2} U_2 \quad (5.34)$$

Як було експериментально доведено (Вільямс та інш. 1979 р., Джелатіс та інш., 1979 р.) п'ятий звук спостерігається як у чистому ^4He , так і в розчинах $^3\text{He} - ^4\text{He}$. Експериментально виміряні значення U_5 знаходяться у згоді з формулою (5.34).

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Чому виникають розбіжності у визначенні температурної залежності швидкості другого звуку при наднизьких температурах у теорії та експерименті?
2. Порівняйте швидкості другого та четвертого звуків у He-II.
3. Як можна визначити швидкість третього звуку?

6. ПЛІВКА ГЕЛІЮ-II ТА СУТТЄВО НАДПЛИННА ТЕЧІЯ

6.1.Плівка гелію-II.

У тому ж томі «Nature», де повідомлялось про відкриття надплинності, були опубліковані ще два повідомлення про інші дивовижні явища у He -II. Автори цих робіт Кікоін та Лазарев у Харкові (1939 р.) і Даунт та Мендельсон у Оксфорді (1939 р.) повідомили про свої спостереження за плівками гелію. Перші вказівки на якийсь особливий механізм переносу у гелії були отримані до відкриття λ -переходу. У 1922 р. Камерлінг-Оннес розпочали спроби отримати ще більш низьку температуру рідкого гелію шляхом відкачки пари. Вони скористались приладом, що складався з двох

концентричних дюарів. Зовнішній захищав гелій у внутрішньому від нагріву зовнішнім випромінюванням. Сталось так, що у процесі відкачки рівень гелію в обох посудинах знижувався з однією і тією ж швидкістю. Більш того, коли кріостат освітлювався зовні і рівень гелію у зовнішній посудині опускався швидше, як тільки ліхтарик вимикався, рівні в обох посудинах ставали однаковими.

Гелій-II, як і будь яка рідина утворює плівкове покриття на поверхні твердого тіла, що знаходиться з ним у прямому чи непрямому (шляхом пари) контакті. Якщо плівка утворюється за тиском насиченої пари, то зветься насиченою. При інтенсивній відкачці пари утворюються тонкі плівки. Вони зветься ненасиченими, і знаходяться у рівновазі з ненасиченою парою. Товщину насиченої плівки He-II уперше виміряли Кікоін з Лазаревим та Доунт з Мендельсоном. У цих дослідах при $T > T_\lambda$ у гелій занурювали тіло з розвинутою поверхнею. У дослідах Кікоїна і Лазарева застосовувались пластинки, закріплені у вигляді радіальних ребер на спільній вісі. Доунт та Мендельсон використовували згорнуту у рулон тонку фольгу. Після занурення тіла та його здобування рівень рідини помітно зменшувався. Поділ об'єму рідини, що утворила плівку, на її площу визначав товщину. В обох дослідах вона дорівнювала $d = 3,5 \cdot 10^{-6}$ см.

Більш досконалі методи вимірювань товщини плівки базуються на застосуванні явища обертання площини поляризації світла при його проходженні у речовині, так як ефект пропорційний до відстані, що долає світло у речовині. Оптичні методи дають можливість також дослідити залежність товщини плівки від висоти h над рівнем гелію. Оптичні вимірювання (Джексон і Траймс, 1958 р.) показали також, що типова товщина плівки за тиском насиченої пари складає 100 атомних шарів, цього достатньо для забезпечення течії рідини уздовж плівки. Присутність плівки на стінках призводить до того, що порожня пробірка, що занурена у ванну з He -II, починає заповнюватись рідиною, доки рівні не стануть однаковими. Якщо пробірку трохи підняти, то спостерігається зворотний процес, доки рівні знову стануть однаковими. Кінець кінцем, коли пробірка, що заповнена рідким He-II, повністю виймається з ванни, можна бачити краплини, що падають з її донця (рис.6.1) за рівні інтервали часу.

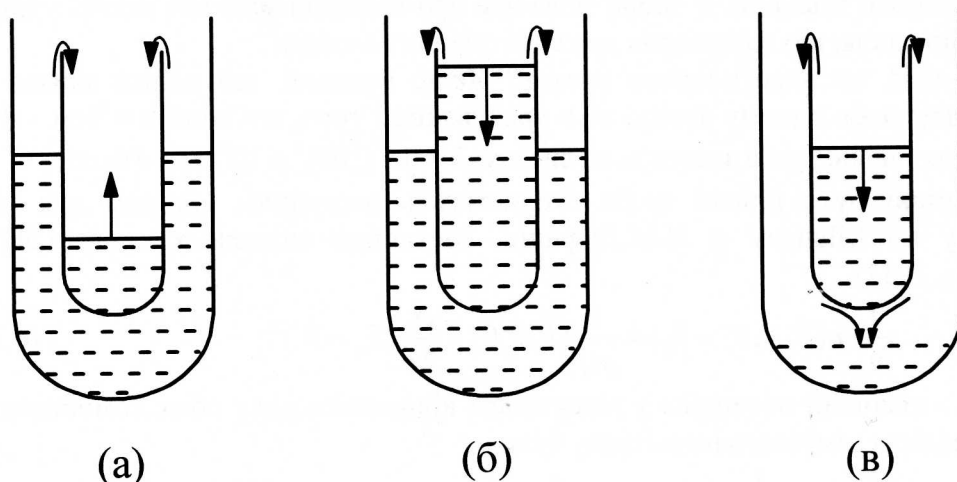


Рис.6.1. Течія плівки гелію-II уздовж стінок пробірки.

Цей дослід наводить нас до висновку, що надплинний компонент рухається уздовж плівки завжди, коли існує різниця рівнів поміж двома об'ємами рідини. Таким чином, плівка працює як сифон, а рушійну силу для надплинного компонента створює різниця гравітаційного потенціалу поміж кінцями плівки. Спостерігаючи за швидкістю змінення рівня рідини у пробірці, можна визначити видкість надплинного компоненту.

Типове значення цієї швидкості складає 20 см/с. Під час такої течії рідини уздовж плівки, нормальний компонент через свою в'язкість, залишається у плівці майже нерухомим ($\vec{v}_n \approx 0$). Тому така плівка уявляє собою один з видів «надщільни». Якщо на стінці кріостату присутня гелієва плівка, то це може призвести до значних витрат гелію - обставина, що обов'язково повинна бути урахованою при побудові експериментальних пристроїв.

При вивченні властивостей гелієвої плівки, зручно користуватись поняттям хімічного потенціалу. Якщо рідина у плівці нерухома - хімічний потенціал на одиницю маси можна відобразити у вигляді

$$\frac{1}{m_4} \mu = \frac{P}{\rho} - \sigma T + gh - \frac{\alpha}{y^3} \quad (6.1)$$

Тут $\sigma = S / Nm_4$ - повна ентропія одиниці маси, gh - гравітаційна потенціальна енергія одиниці маси на висоті h , α / y^3 - потенціальна енергія на відстані y від стінки, що обумовлена вандерваальсовими силами, а стала α визначається матеріалом стінки. Як було з'ясовано раніше (див. формулу (1.10)), енергія взаємодії поміж двома молекулами пропорційна до R^{-6} . Легко знайти величину цієї взаємодії атома гелію зі стінкою, що знаходиться на відстані R від нього. Так як енергія взаємодії дуже швидко зменшується при збільшенні відстані, ми можемо нехтувати взаємодією з усіма атомами стінки, що віддалені від атома, що розглядається, на відстань більшу, ніж $2R$. При такому підході кількість атомів стінки, що беруть ефективну участь у побудові сил Ван дер Ваальса, пропорційна до R^{-3} .

Позначимо як d товщину плівки на висоті h над рівнем рідкого гелію та скористаємось тим фактом, що в усіх точках вільної поверхні хімічний потенціал має одне і теж значення. Тоді за ізотермічних та ізобаричних умов з співвідношення (6.1) збігає, що профіль статичної гелієвої плівки може бути наданий формулою

$$d = (\alpha / gh)^{1/3} \quad (6.2)$$

Більш детальна теорія Дзялошинського, Ліфшиця та Пітаєвського (1959, 1961 р.р.) також призводить до залежності $d \approx h^{-1/n}$, де $n = 3$ для тонких плівок і $n = 4$ для плівок відносно великої товщини. У теорії мова йде про товщини малі або великі у порівнянні з довжиною хвиль, що характерна для спектрів поглинання.

На якій же висоті плівка зникне? Якщо вважати, що плівка зникає якщо її товщина дорівнює одному атому, то з урахуванням того, що коли $h = 1$ см - d складає 100 атомних шарів, треба звестись на висоту: $h = 1 \times (100)^3 \approx 10^6$ см = 10 км!

У стані руху плівки треба скористатись наступним виразом для хімічного потенціалу (Л.Д.Ландау и И.М.Лифшиц. Механика сплошных сред, ГИТТЛ, М: Физматгиз, 1953).

$$\frac{1}{m_4} \mu(P, T, \vec{v}_n - \vec{v}_s) = \frac{1}{m_4} (P, T, 0) - \frac{\rho_n}{2\rho} (\vec{v}_n - \vec{v}_s)^2 \quad (6.3)$$

де $(P, T, 0)$ - хімічний потенціал у відсутності відносного руху обох компонентів He-II. Відтоді градієнт хімічного потенціалу буде

$$\frac{1}{m_4} \nabla \mu = \frac{1}{\rho} \nabla P - \sigma \nabla T - \frac{\rho_n}{2\rho} (\vec{v}_n - \vec{v}_s)^2 + \nabla (gh - \frac{\alpha}{y^3}) \quad (6.4)$$

Підставляючи вираз (6.4) до рівняння руху надплинної рідини (4.33) у стаціонарних умовах ($\partial \vec{v}_s / \partial t = 0$) при сталих тиску та температурі маємо

$$\nabla (\frac{1}{2} \frac{\rho_s}{\rho} v_s^2 + gh - \frac{\alpha}{y^3}) = 0 \quad (6.5)$$

Інтегрування (6.5) призводить до рівняння Бернуллі

$$\frac{1}{2} v_s^2 + \frac{P}{\rho} - \sigma T = \text{const} \quad (6.6)$$

для потенціального надплинного потоку, яке при застосуванні до плинної гелієвої плівки ми доповнили гравітаційною потенціальною енергією та потенціалом сил Ван-дер-Ваальса.

Треба відмітити, що товщина плівки залежить також від стану поверхні. Так, шляхом змішування з газуватим гелієм перед його скрапленням 1% повітря, Граймс та Джексон (1959 р.) винайшли досить помітне збільшення товщини гелієвої плівки у порівнянні з гладкою поверхнею.

Товщина ненасиченої плівки, природно, залежить від тиску пари P та відображується формулою

$$\frac{A}{\alpha^n} = \frac{RT}{M} \ln \frac{P_{\text{нас}}}{P} \quad (6.7)$$

де A - деяка стала, $P_{\text{нас}}$ - тиск насиченої пари, R - універсальна газова стала, M - молярна маса.

Вимірювання, що були проведені методом стоячих акустичних хвиль (Андерсон, Сабіські, 1970, 1973 р.р.), продемонстрували суттєву залежність сталої вандерваальсової взаємодії від матеріалу підкладки. Якщо надати потенціал взаємодії плівки з підкладкою у вигляді $\mu = \alpha / l^3$, де l - кількість атомних шарів рідкого гелію у плівці ($l = d / a$, $\alpha = MA / Ra^3$, a - міжатомна відстань), то стала $\alpha = 87\text{-}98$ К для звичайних підкладок і значно менша для лужно-земельних галогенідів. Так, для CaF_2 стала $\alpha = 23$ К.

6.2 Перенос гелію-II уздовж плівки.

Як це вже згадувалось вище, надплинність найбільш яскраво виявляється у надвзъких щілинах, капілярах та плівках. В'язкість нормального компонента практично повністю запобігає його руху і в таких умовах можлива тільки надплинна течія. Таким чином, явища, пов'язані з течією по плівці надають нам можливість вивчити природу «ідеальної надплинності».

Перенос гелію по плівці уперше досліджений Доунтом та Мендельсоном (1939 р.). Ці автори виявили, що швидкість переносу, з якою рідина перетікала з заповненої посудини у ванну, за весь час витікання суттєво не змінюється. У першому ж експерименті було відмічено, що швидкість переносу трохи збільшується, коли рівень рідини знаходиться у декількох мм від вінця посудини, але потім вона стає незмінною.

Як можна побачити на рис. 6.2, змінення зовнішнього рівня на 33-й хвилині не вплинуло на швидкість переносу. Починаючи з 6-й хвилини, висота внутрішнього рівня є лінійною функцією часу. Це означало, що швидкість переносу є сталою і не залежить від різниці рівнів усередині та зовні пробірки. Для перевірки цієї обставини на 33-й хвилині різниця рівнів була раптово зменшена на 65%. Однак це не викликало ніякого змінення швидкості переносу. Таким чином, ці досліди показали, що перенос гелію уздовж п лівки не залежить від різниці висот, довжини шляху та висоти проміжного бар'єру.

На рис.6.3 ілюструється вплив звуження, яке розташоване вище рівня рідини, на перенос уздовж плівки. У цьому приладі були зроблені звуження. Коли порожня посудина частково занурювалась у ванну, рідина починала перепливати до середини з тією ж самою швидкістю, що і у попередньому експерименті. Так як зовнішня посудина була достатньо вузька, рівень у ній помітно знижувався в міру підймання рівня у внутрішній посудині. З цього моменту швидкість переносу зменшувалась, до

того ж відношення її до первісного значення дорівнювало відношенню діаметра звуження до діаметра внутрішньої посудини.

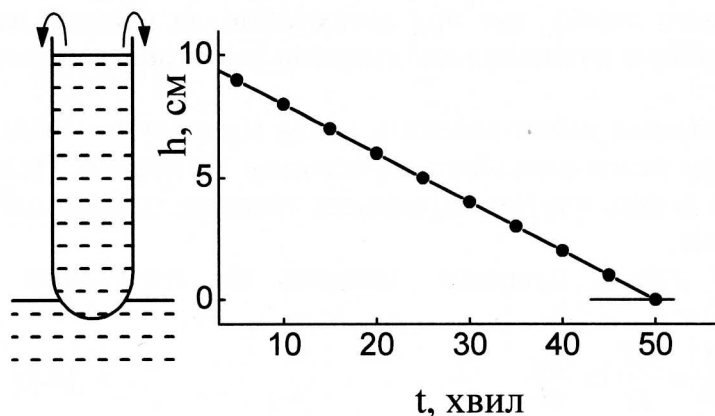


Рис.6.2. Перенос He-II по плівці у залежності від часу.

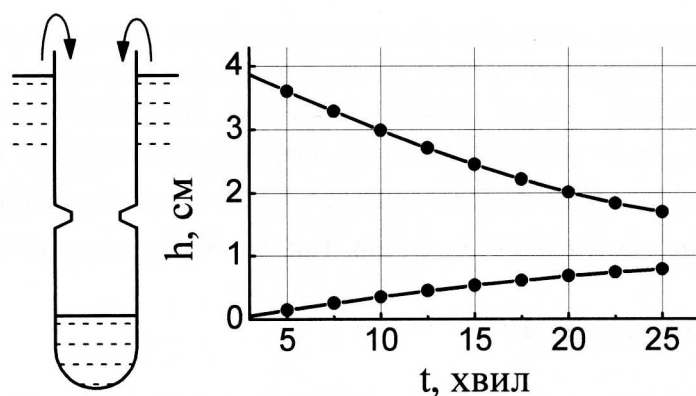


Рис.6.3. Вплив звуження на швидкість течії по плівці: - верхня крива зовнішній рівень, нижня крива - внутрішній рівень.

На рис.6.4 наведені експериментальні результати, які потверджують, що швидкість переносу пропорційна до діаметрів, а не їх квадратів, і що спостережені явища не викликані будь-якими тепловими ефектами.

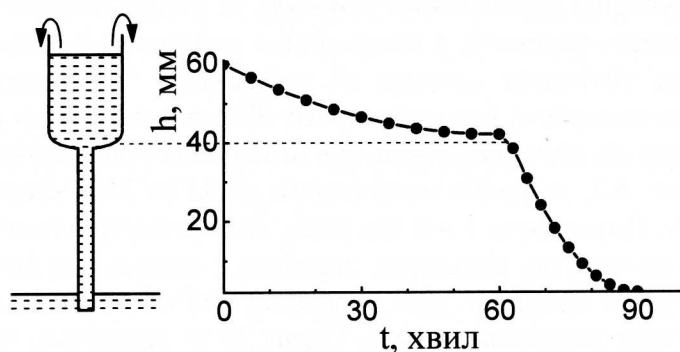


Рис. 6.4. Залежність швидкості переносу від розміру периметра з'єднуючого капіляра.

Була використана не покрита сріблом дьюарівська маленька посудина, нижня частина якої була вужчою ніж верхня. Теплообмін у цьому приладі мог чинитись тільки шляхом випаровування з поверхні. Якщо перенос визначався би тільки цим чинником, то він повинний бути пропорційним до квадратів, відповідно, верхнього та нижнього діаметрів внутрішньої посудини. Розуміло, що у He-II подібне явище не спостерігається.

6.3. Бездисипативна течія уздовж плівки He-II.

Як було наведено у попередніх розділах, у плівці He-II рухається тільки надплинний компонент. Однак, перенос He-II по плівці, суворо кажучи, не є щиро надплинним, у тому сенсі, що він певно супроводжується дисипацією енергії - рівномірне нівелювання рівнів вказує на зменшення потенціальної енергії при незмінній кінетичній. Підкреслимо, однак, що рух надплинного гелію чиниться не тільки під впливом гравітації, але і завдяки присутності термомеханічного ефекту. Якщо є різниця температур ΔT то надплинний компонент рухатиметься туди, де тепліше.

Суттєво надплинний рух уздовж плівки He-II уперше був спостережений Доунтом та Мендельсоном у 1946 р. Ще у 1942 р. ці автори звернули увагу на глибоку аналогію поміж явищами надплинності та надпровідності, вони підкреслювали існування в обох явищах критичної швидкості переносу, що залежить від температури і нижче якої перенос характеризується повною відсутністю дисипації. Прилад, за допомогою якого був спостережений суттєво надплинний рух, показаний на рис. 6.5.

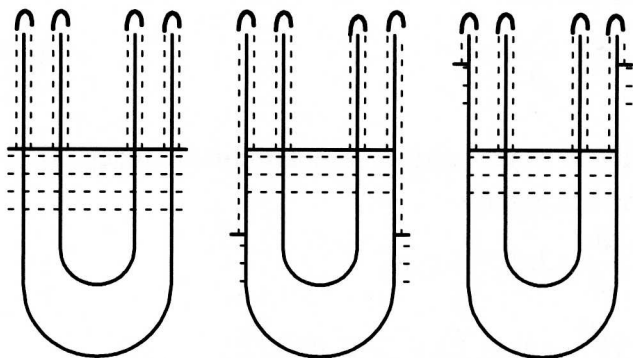


Рис.6.5. Перенос по плівці He-II при нульовій різниці тисків.

У надпровідниках відсутність дисипації виявляється в існуванні незгасаючого струму або у тім, що при проходженні по надпровідникові сталого струму, меншого ніж критичний, різниця потенціалів, що вимірюються на кінцях надпровідника дорівнює нулю. Експеримент по спостереженню за гелієвою плівкою, де надплинні властивості висвітлюються найбільш виразно, проводився при швидкостях, що не перевищували критичну. Прилад, на якому проводились вимірювання, аналогічний до тих, на яких отримують вольт-амперні характеристики надпровідників, і складався з двох посудин (див.рис.6.5). Ці посудини можна було розташовувати на різних рівнях відносно гелієвої ванни. У рівноважних умовах рівні в обох посудинах встановлювались на одній висоті з рівнем гелію у ванні. При підйманні посудини гелій плив по плівці з внутрішньої посудини до зовнішньої, а з зовнішньої - до гелієвої ванни. Прі цьому рівні гелію в обох посудинах співпадали. Теж саме мало місце і при зміні напрямку течії. Повна відсутність різниці тисків поміж внутрішньою та зовнішньою посудинами аналогічна відсутності різниці потенціалів на кінцях надпровідника. Таким чином, у цих дослідах виразно продемонстровано, що при швидкості, яка нижча за критичну, перенос маси гелію по плівці пов'язаний з суттєво потенціальною течією, тобто кінетична енергія рідини під час течії плівки угору та додолу зберігається.

Наприкінці цього розділу ознайомимось з величинами, що використовуються для кількісної характеристики переносу He-II по плівці. Під «критичною швидкістю» течії будемо розуміти ту величину надплинного потоку, за якою починається дисипація. Нехай гелій втікає по плівці у циліндричну посудину з радіусом R . При аналізі ми нехтуємо різницею поміж внутрішнім та зовнішнім радіусами, розглядаючи

стінку посудини ідеально тонкою. Зрозуміло, що об'єм рідини, що втікає до посудини в одиницю часу є

$$dV/dt = \pi R^2 dh/dt \quad (6.8)$$

тут dh/dt - швидкість змінювання рівня - величина, яку можна визначити з експерименту. Ухвалено характеризувати інтенсивність процесу числом переносу, тобто об'ємом, що втікає (витікає) у посудину в одиницю часу крізь одиницю периметру поверхні, по якій тече плівка. Отже число переносу буде

$$\sigma = \frac{1}{2\pi R} dV/dt = \pm dh/dt \quad (6.9)$$

У співвідношенні (6.9) позначку «+» треба використовувати при втіканні плівки, тобто коли $dh/dt > 0$, а «-» при витіканні, коли $dh/dt < 0$. Отже $\sigma > 0$ завжди.

З іншого боку σ можна визначити з швидкості течії по плівці тільки надплинного компонента ($\vec{v}_n = 0$). При цьому після переходу у вільний об'єм, надплинний компонент повинен перейти до теплової рівноваги з гелієм у ванні і тому частково перейти до нормального стану. Розрахунок кількості рідини, яка кожен секунду проходить крізь переріз плівки дає

$$\sigma = \frac{\rho_n}{\rho} v_s d \quad (6.10)$$

де d - товщина плівки.

Позначимо як R_1 та R_2 радіуси внутрішньої та зовнішньої поверхні подвійної посудини. Відтоді при інерційній течії слушно

$$\begin{aligned} \pm \pi R_1^2 \frac{dh}{dt} &= 2\pi R_1 \frac{\rho_s}{\rho} v_{s1} d, \\ \pm \pi (R_2^2 - R_1^2) \frac{dh}{dt} &= 2\pi R_2 \frac{\rho_s}{\rho} v_{s2} d \pm \pi R_1^2 \frac{dh}{dt} \end{aligned}$$

$$\text{або} \quad \frac{v_{s1}}{v_{s2}} = \frac{R_1}{R_2} \quad (6.11)$$

де v_{s1} та v_{s2} - швидкості надплинного компонента на внутрішній та зовнішній поверхні подвійної посудини. Різниця поміж швидкостями v_{s1} та v_{s2} з'являється з тієї причини, що v_{s2} у присутності різниці рівнів швидко зростає до появи дисипації, після чого робиться сталою. Швидкість v_{s1} менша за v_{s2} і з міркувань геометричного характеру уявляє собою швидкість бездисипативного, тобто суттєво надплинного руху.

6.4. Трубка Вентури у надплинній рідині.

Для класичної рідини з закону Бернуллі при стаціонарній течії нестисливої рідини ($\rho = \text{const}$)

$$\frac{1}{2} v^2 + \frac{P}{\rho} + gh = \text{const} \quad (6.12)$$

для усього об'єму рідини постає, що в областях де менша течія, тиск збільшується. Отже у трубках Вентури, що зображені на рис. 6.6, рівень у середній мірній трубці буде самим низьким, бо з урахуванням рівняння безперервності, течія тут має найбільшу швидкість. Рівні у лівій та правій трубках трохи відрізняються із-за невеликих в'язкісних поправок до рівняння Ейлера (1755 р.)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = - (1/\rho) \cdot \text{grad} P \quad (6.13)$$

(6.13) є одним з основних рівнянь гідродинаміки.

Оскільки у He-II надплинний компонент не має в'язкості, використання трубки Вентури могло бути особливо ефективним засобом вивчення поля швидкостей. Однак, як показав Мезервей (1965 р.), оскільки у He-II $\text{rot } \vec{v}_s = 0$ (потенціальна течія), при стаціонарній течії рівні у всіх трьох трубках повинні бути однаковими (рис. 6.6.б). Для розуміння цього результату нам необхідно спочатку більш детально розглянути поведінку класичної рідини. Наявність в'язкості у класичній рідині призводить до того, що вона нерухома на стінках і, якщо мірна трубка достатньо вузька, щоб не впливати на течію, то рідина буде у спокої, як це показано на рис. 6.6.а. Тому, тиск у верхній частині трубки просто дорівнює тиску у її донця з додатком гравітаційного тиску у стовбчику. З іншого боку, тиск у донця трубки дорівнює тиску поблизу середньої лінії струму, оскільки там $\partial P / \partial h = 0$.

Звідси уздовж середньої лінії струму, що співпадає з вісью x маємо

$$\rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \eta \nabla^2 v_x \quad (6.14)$$

З (6.14) постає, що тиск P змінюється за законом Бернуллі (ми нехтуємо невеликою поправкою за рахунок в'язкості). Таким чином, з співвідношення (6.14) прямує, що поміж підмурками мірних трубок повинний існувати перепад тисків, що компенсується різницею рівнів. Застосування рівнянь Бернуллі безпосередньо поблизу межі рідини у мірних трубках спрямувало би нас до результату, що відповідні рівні повинні бути однаковими через те, що в цих місцях швидкість рідини $v = 0$, і, отже, тиски однакові. Так поступати неможна, через те, що навіть при скіль завгодно малій в'язкості, рідина у мірних трубках знаходиться у спокої і у її середині немає ліній струму, які б їх зв'язували.

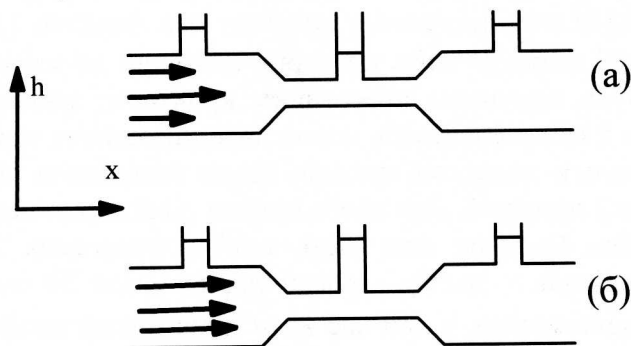


Рис.6.6. Трубка Вентури: а) класична рідина (течія вихрова); б) He-II (течія потенційна). Стрілки - профілі швидкостей.

Повернемось до He-II. Тому що $\text{rot } \vec{v}_s = 0$, надплинний гелій поблизу стінки мірної трубки не може знаходитись у спокої. Більш того, навіть у самих мірних трубках He-II не може знаходитись у спокої, оскільки це означало би присутність біля отвору трубки вихрової поверхні (поверхні розриву швидкості надплинного компонента). Як показав Мазервей, лінії струму надплинної рідини заходять до мірної трубки, оскільки $\text{rot } \vec{v}_s = 0$ і простягаються до її верху (рис.6.7.б).

Скористаємось зараз законом Бернуллі для He-II

$$\mu + \frac{1}{2} v_s^2 + gh = \text{const} \quad (6.15)$$

і застосуємо його до верхньої частини рідини у мірних трубках. Маємо

$$\Delta\mu + \frac{1}{2} \Delta v_s^2 + g\Delta h = 0 \quad (6.16)$$

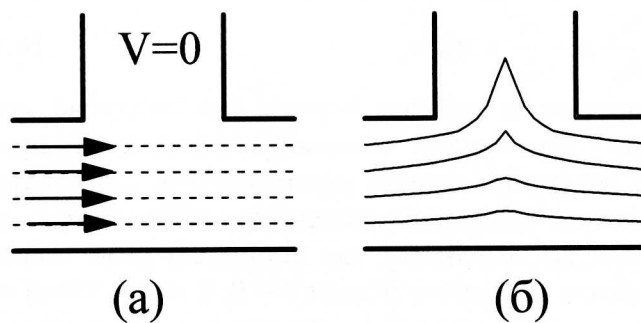
або

$$-s\Delta T + \frac{1}{\rho}\Delta P + \frac{\rho_s}{\rho}\frac{1}{2}\Delta v_s^2 + \frac{\rho_n}{\rho}\Delta(\bar{v}_n\bar{v}_s - \frac{1}{2}\bar{v}_n^2) + g\Delta h = 0 \quad (6.17)$$

тут $\Delta\mu$ - різниця хімічних потенціалів у верхніх частинах двох мірних трубок. Тиск у верхніх частинах мірних трубок повинний дорівнювати тиску пари. Але змінення тиску у газі нехтовно мале через його малу густину, і ми можемо вважати, що $P = 0$. Як було показано Мезервеєм, швидкість надплинного компонента v зменшується експоненційно при збільшенні висоти рівня рідини у мірних трубках. Якщо висота стовпчика рідини h перевищує її ширину, з великою мірою точності можна покласти $v = 0$. З урахуванням того, що $v = 0$ у верхній частині будь-якої з мірних трубок, з (6.17) постає

$$s\Delta T = g\Delta h. \quad (6.18)$$

Таким чином, при течії He-II рівні у мірних трубках не дають інформацію про швидкість.



Мал.6.7. Лінії струму навколо трубок Вентури для класичної рідини (а) та для надплинної рідини (б).

Якщо течія має місце в ізотермічних умовах, отримуємо, що $\Delta h = 0$, тобто однаковість рівнів рідини у всіх мірних трубках не залежить від швидкості під ними.

Результати Мезервея отримали потвердження у дослідах Ван Альфена (1967 р.), що дійсно $\Delta h = 0$, спонукаючи He-II плинути крізь пристрій, подібний до зображеного на рис.6.6 б). Трубка Вентури була заповнена пресованим крокусом, завдяки чому утруднювалось утворення вихорів і забезпечувалась повна потенціальність течії He-II. Незважаючи на це, треба було вжити додаткові заходи, щодо зменшення відносної швидкості течії надплинної рідини у пристрої. Для цього прилад рівномірно підіймався так, щоб у вузькій частині трубки Вентури швидкість течії дорівнювала 29 см/с. Критична швидкість утворення вихорів у цьому приладі дорівнювала 30 см/с. При цьому рівні у всіх трубках були однаковими, у той час коли динамічний напір $\rho_s v_s^2/2$ складав біля 0,45 см стовпчика рідкого гелію.

6.5. Течія гелію-II у каналах.

Потенційний характер течії квантової бозе-рідини був яскраво продемонстрований у дослідах Крега та Пеллама (1957 р.) з надплинною аеродинамічною трубкою (рис.6.8). За теоремою Кутта-Жуковського, при обтіканні крилець пропелера (W) потоком класичної рідини, навколо них повинна виникати циркуляція, якою малою не була б в'язкість рідини. Таким чином, при обтіканні крильця потоком класичної рідини на нього діє підймальна сила Магнуса, величина якої за нижчим порядком малості не залежить від в'язкості.

Використаний Крегом та Пелламом прилад уявляв собою циліндричну посудину, що занурена у ванну з He-II. Кінці циліндру - "надщілини" - (S) пропускали тільки надплинний компонент, залишаючись непроникненними для нормального компоненту. При вмиканні нагрівача (H) крізь аеродинамічну трубу тече тільки надплинний компонент у напрямку, що вказан лініями потоку \bar{v}_s . Хоча нормальний

компонент також міститься в об'ємі труби, але він нерухомий ($\vec{v}_n = 0$). Після виходу з верхньої надщілини цівка надплинного компонента змішується з нормальною рідиною. Швидкість рідини в області розташованій над верхньою надщілиною вимірюється за допомогою трубки Вентури, що дає можливість визначити швидкість надплинної течії в надрідинній аеродинамічній трубі. Характер цівки усередині аеродинамічної труби можна визначити за допомогою пропелера (W), який складається з двох тонких слюдяних лопастів, що підвішені на тонкій кварцовій нитці (Q), на якій також закріплене дзеркальце (G).

Крег та Пелламн звернули увагу, що, оскільки, при надплинній течії $\text{rot } \vec{v}_s = 0$, навколо пропелера не може виникнути циркуляція. Тому відсутній і ефект Магнуса і тому умова потенціальної течії накладає більш жорсткі обмеження, ніж вимога виключно малої в'язкості. У цьому експерименті виключно важливо, щоб нормальний компонент був нерухомим, так як він поводить себе як класична рідина, а ми бажаємо спостерігати суттєво надплинну течію. Але цівка в'язкої рідини, що плине навколо крилець пропелера, стає турбулентною і викликає їх поворот. Такий самий ефект має місце і при обтіканні крила літака.

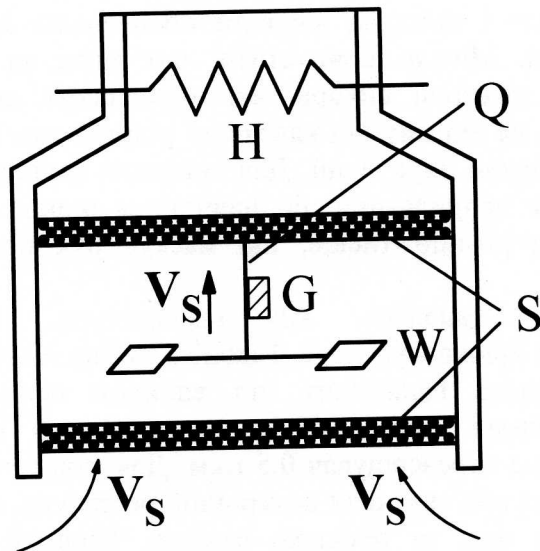


Рис.6.8. Надрідинна аеродинамічна труба для суттєво надплинної течії.

Чутливість прилада, що був використаний Крегом та Пелламом була значно вищою за необхідну для спостереження крутячого моменту у класичній рідині з виключно малою в'язкістю. У цих дослідях було встановлено, що нижче за деяку критичну швидкість підймальна сила не виникає, відповідно до умови $\text{rot } \vec{v}_s = 0$. У багатозв'язаній області можна було б забезпечити виконання безвихрової течії усюди, і проте, при цьому виникала би циркуляція і магнусова підймальна сила. Однак область в аеродинамічній трубі однозв'язана, тому при виконанні умови $\text{rot } \vec{v}_s = 0$ циркуляція буде відсутньою.

На рис.6.9 зображена залежність крутячого моменту, що діє на пропелер, від швидкості надплинного компонента. Для порівняння (пунктиром) зображений крутячий момент очікуваний для в'язкої рідини тієї ж густини. У цьому експерименті спостерігались два режими надплинної течії: при надто низьких скоростях потік надплинної рідини є безвихровим (пропелер не зазнавав ніякого відхилення), демонструючи дотримку парадоксу Даламбера; вище за критичну швидкість, що дорівнює у нашому випадку 6 мм/с, потік поводить себе як класична рідина. Однак, як ми знаємо, критерій надплинності Ландау передбачає для народження ротонів критичну швидкість, що дорівнює 58 м/с. Це значення на чотири порядки за величиною

більше, ніж критична швидкість, що спостерігалась у аеродинамічній трубі. Зрозуміло, що для з'ясування такого низького її значення потрібний інший механізм.

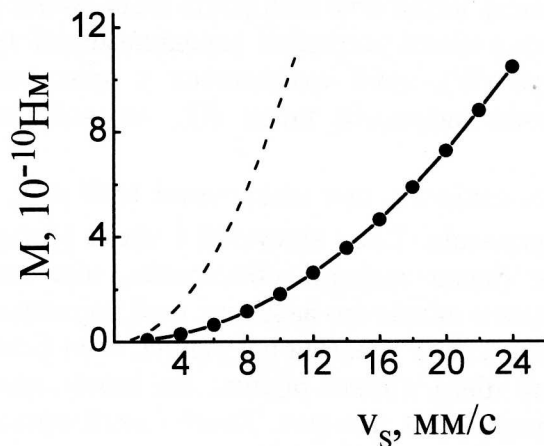
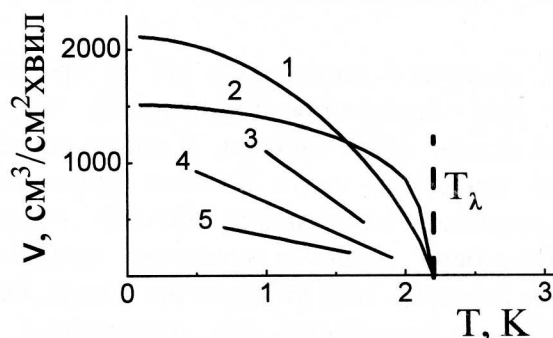


Рис.6.9. Залежність крутячого моменту від швидкості надплинного компонента в надплинній аеродинамічній трубі Крега та Пеллама.

Таким чином, результати дослідів Крега та Пеллама доводять, що течія з $\text{rot } \vec{v}_s = 0$ не тільки може бути виявлена, але і повинна існувати обов'язково при деякій швидкості, що нижча ніж критична. Можна припустити, що вище за критичну швидкість біля крилець виникають квантові вихори, які обумовлюють виникнення магнусової підйімальної сили. Однак, на відміну від класичної рідини, нам невідомий механізм, що призводить у He-II до появи циркуляції. Для вивчення надплинної течії крізь широкі канали метод Пуазейля непридатний, бо надплинна рідина рухається надто легко і рух не залежить від різниці тисків, що маскує рух нормального компонента.

Критична величина потоку залежить від температури. Це було продемонстровано в експериментах де Брюна Оуботера, Таконіса та Ван Альфена (1967 р.), у яких спостерігалась течія крізь надщілину під впливом сили тяжіння. Просверджений у бронзовому циліндрі отвір щільно заповнювався ювелірним крокусом з частинками, розмір яких не перевершував 0,5 мкм. Для утворення потоку крізь таку надщілину, автори підіймали або опускали внутрішній резервуар, створюючи таким чином різницю тисків поміж ним та гелієвою ванною. Швидкість потоку вимірювалась за різницею змінення рівню гелію у резервуарі. В цих дослідях використовувалась також надщілина зроблена з скла «вікор» - поруватого скла з губчастою структурою. Тут надплинний компонент тече по каналах, середній діаметр яких усього 6 нм. Виявилось, що навіть дуже малий перепад тисків достатній для отримання "критичної швидкості потоку". На рис. 6.10 наведена залежність критичної швидкості потоку від температури. Критична швидкість практично не залежить від тиску, але є функцією температури.



Мал.6.10. Температурна залежність критичної швидкості потоку (см³/см²хвил). Криві 1-3 - надщілин, що заповнені ювелірним крокусом; 4-5 - надщілин виготовлених із скла «вікор».

Експерименти довели, що у всіх випадках, за виключенням пір великого розміру, температура виникнення надплинної течії була нижчою ніж T_λ для рідини у великих об'ємах.

Наприкінці цього розділу відмітимо, що у випадку, коли потік He-II має високу швидкість, ми стикаємось зі складною експериментальною ситуацією - з трудностю розподілення механізмів, що призводять до дисипації. Однак узагальнення дворідинної моделі дозволяє створити деякі уявлення про можливі тут фізичні процеси. Можливо, наприклад, визначити значення швидкості нормального компонента v_n , вище якої виникає турбулентність у нормальній рідині, і критичне значення $(v_n - v_s)$, що відповідає появі сили взаємодії поміж двома компонентами He-II, що зветься взаємним тертям. Однак більш цікавим є розгляд зриву надплинності та причин цього. До наступного часу ще немає задовільного пояснення причин зриву надплинності, тобто існування обмежень величини швидкості надплинної течії \vec{v}_s .

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Який компонент рухається уздовж плівки He-II?
2. Що таке бездисипативна течія?
3. Яким чином можна продемонструвати потенціальний характер течії квантової бозе-рідини?

7. КОНДЕНСАЦІЯ БОЗЕ-ЕЙНШТЕЙНА

7.1. Конденсація Бозе-Ейнштейна і надплинність гелію-II.

Ще у 1938 році Ф. Лондон виказав гіпотезу, згідно з якою фазовий перехід, що зазнає рідкий гелій при температурі $T = T_\lambda$, обумовлений бозе-конденсацією, яка була передбачена А. Ейнштейном (1924, 1925 р.р.).

У розділі 1.2 ми показали, що завдяки побудові атомів, гелій зараховують до квантової бозе-рідини. Конденсація Бозе-Ейнштейна - квантове явище у системі бозонів, яка полягає у тому, що при низьких температурах $T < T_B$, яка зветься температурою виродження, частина атомів системи накопичується у стані з нульовим імпульсом, якщо система, як ціле, знаходиться у спокої. Таку назву це явище отримало за аналогією з процесом конденсації молекул пари у рідину при її охолодженні. Необхідно, однак, підкреслити, що ніякої конденсації у звичайній уяві тут не трапляється: розподіл атомів у просторі залишається незмінним, і мова йде лише про конденсацію у просторі імпульсів. Для переважної більшості газів температура виродження досить мала і речовина переходить у твердий стан значно раніше, ніж може настати конденсація Бозе-Ейнштейна. При скрапленні газів частинки утворюють дві фази, розподілені чіткою межею у координатному просторі, тобто у "звичайному" просторі. У протилежність цьому, конденсацію у імпульсному просторі, у результаті якої макроскопічна частка атомів знаходиться у конденсаті - стані з нульовою енергією, можна розглядати, як розподіл у імпульсному просторі, тобто фізичної межі поміж конденсатом та збудженими атомами не існує.

У цьому розділі ми обговоримо властивості модельної системи - ідеального бозе-газу та порівняємо їх з властивостями рідкого He. Раніше ми показали, що при $T < T_\lambda$ значна частина рідини стає надплинною. Математично надплинність характеризується макроскопічним заповненням одного квантового стану - існуванням

конденсата. Фізично надплинність проявляється як пов'язаний з цим квантовим станом рух, який не зустрічає опору. Причиною надплинності є конденсація Бозе-Ейнштейна. Щоб провести кількісне порівняння, знайдемо вираз для T_B і визначимо відносну кількість атомів, що знаходяться у основному стані при $T < T_B$.

Згідно з статистикою Бозе-Ейнштейна функція розподілу частинок у бозе-газі (див.(1.17)) є

$$\langle n(\varepsilon_i, T) \rangle = [\exp[(\varepsilon_i - \mu)/k_B T] - 1]^{-1} \quad (7.1)$$

Нехай рівню з найнижчою енергією частинок відповідає енергія, що дорівнює нулеві. Тоді з (7.1) прямує, що $\mu \leq 0$, бо у протилежному випадку деякі з чисел заповнення $\langle n \rangle$ опиняться від'ємними. Позначимо як N повну кількість атомів у системі, а як N' - кількість частинок, що знаходяться у збудженому стані. При збереженні N у системі їх розподіл за будь-якою температурою підпорядковується правилу сум

$$\sum_i \langle n(\varepsilon_i, T) \rangle = N \quad (7.2)$$

Підсумування за дискретними енергетичними рівнями у (7.2) замінюємо на інтегрування за усіма значеннями ε . Однак, при цьому нам треба урахувати, що густина станів у енергетичному уявленні дорівнює нулю коли $\varepsilon = 0$. Дійсно, густина станів уявляє собою кількість енергетичних рівнів у одиничному інтервалі енергій:

$$D(\varepsilon) = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m_A}{\hbar^2} \right)^{3/2} \varepsilon^{1/2} \quad (7.3)$$

Маємо

$$\sum_i \langle n(\varepsilon_i, T) \rangle \rightarrow \int_0^\infty D(\varepsilon) \langle n(\varepsilon, T) \rangle d\varepsilon \quad (7.4)$$

Однак, при такій заміні треба урахувати, що сума розповсюджується на атоми, що знаходяться на найнижчому енергетичному рівні ($\varepsilon = 0$), а інтеграл - ні, оскільки з (7.3) прямує, що $D(0) = 0$. В інтегралі ураховані лише атоми, що знаходяться у збудженому стані. Так як величина $\langle n(0, T) \rangle$ може за порядком дорівнювати N , замість (7.2) маємо

$$N = \langle n(0, T) \rangle \rightarrow \int_0^\infty D(\varepsilon) \langle n(\varepsilon, T) \rangle d\varepsilon = N_0(T) + N'(T) \quad (7.5)$$

Таким чином, скориставшись виразами (7.1) та (7.2) отримуємо

$$N'(T) = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m_A}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2} d\varepsilon}{\exp\{(\varepsilon - \mu)/k_B T\} - 1} \quad (7.6)$$

При завданій температурі цей вираз досягає максимуму коли $\mu = 0$.

Покладаючи $\mu = 0$, визначимо верхню межу $N'_m(T)$ для $N'(T)$ зробивши заміну $z = \varepsilon/k_B T$. Далі

$$N'(T) < N'_m(T) = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m_A k_B T}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{z^{1/2} dz}{e^z - 1} \quad (7.7)$$

Інтеграл, який міститься у виразі (7.7) добре відомий

$$\int_0^\infty \frac{z^{1/2} dz}{e^z - 1} = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \zeta\left(\frac{3}{2}\right),$$

де гама-функція $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$, а дзета-функція Римана $\zeta(3/2) = 2,612$. Отже, максимальна кількість атомів, що знаходяться у збудженому стані буде

$$N'_m(T) = 2,612V \left(\frac{m_4 k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \quad (7.8)$$

При високих температурах N'_m достатньо велике, для того, щоб атоми опинились на збуджених рівнях. Однак при зниженні температури може бути досягнута критична температура T_B , нижче за яку кількість $N'_m(T) < N$. Іншою мовою, нижче за T_B атоми починають заповнювати найнижчий енергетичний рівень $\varepsilon = 0$. Цей процес підсилюється при подальшому зниженні температури. Критична температура T_B визначається з рівняння $N'_m(T_B) < N$, що дає

$$T_B = \frac{2\pi\hbar^2}{m_4 k_B} \left(\frac{N}{2,612V} \right)^{3/2} \quad (7.9)$$

Температуру T часто називають температурою бозе-конденсації. З співвідношень (7.8) та (7.9) знаходимо, що кількість атомів у збудженому стані дорівнює

$$\frac{N'(T)}{N} = \left(\frac{T}{T_B} \right)^{3/2}, \quad (T \leq T_B) \quad (7.10)$$

а решта $N_0(T)$ атомів знаходяться на рівні $\varepsilon = 0$, до того ж відповідно до (7.5) маємо

$$\frac{N_0(T)}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_B} \right)^{3/2}, \quad (T \leq T_B) \quad (7.11)$$

Ці атоми і утворюють бозе-конденсат.

Перед застосуванням розглянутої вище ідеальної системи до рідкого гелію, спочатку оцінемо температуру виникнення бозе-конденсації для газуватого гелію. Для цього додамо до формули (7.9) густину N/V , що відповідає насиченій парі для нормальної точки кипіння. Це дає $T_B = 0,5$ К. Оскільки точка кипіння дорівнює 4,2 К, конденсація Бозе-Ейнштейна не спостерігається. Але, якщо скористуватись густиною рідкого гелію, то отримаємо $T_B = 3,1$ К - значення достатньо близьке до $T_\lambda = 2,17$ К - температури, коли спостерігається перехід He-I - He-II. Це дозволяє припустити, що T_λ є температурою початку бозе-ейнштейновської конденсації у рідкому He-II. Однак, розрахована аномалія теплоємності ідеального газу Бозе-Ейнштейна з густиною, що дорівнює густині рідкого He, має зовсім інший характер (див. рис.2.2, пунктир). В ідеальному газі крива $C(V)$ має злам, а у рідкому ^4He - особливість типу λ -точки.

Модель ідеального бозе-газу не може надати точного опису λ -переходу, бо рідкий ^4He уявляє собою систему, у якій суттєву роль грають сили притягання поміж атомами. Оскільки задовільної мікроскопічної теорії немає, обмежимося деякими загальними ствердженнями про взаємодіючу бозе-систему, які дозволяють побудувати задовільну картину поведінки надплинного гелію.

Міжчастинкова взаємодія виявляється подвійним чином: по-перше, зменшується кількість атомів, що конденсуються на рівні з $\varepsilon = 0$; по-друге, змінюється природа збуджених станів. Не всі атоми залишаються на найнижчому енергетичному рівні навіть при $T = 0$, бо у результаті взаємодії конденсат "вичерпується". Деякі збуджені стани заповнені, до того ж, як результат взаємодії, ці стани не є одночастинковими. Однак скінчена кількість атомів як і раніше заповнює найнижчий енергетичний рівень і такий стан зберігається аж до деякої відмінної від нуля температури. Зрозуміло, що за усі температури, які вищі ніж абсолютний нуль, термічно збуджені рівні системи у той чи іншій мірі заповнені. Ця ситуація проілюстрована на рис. 7.1.

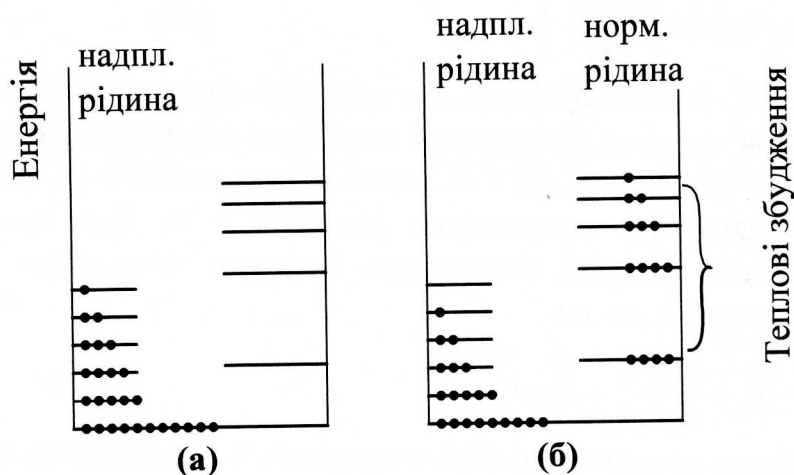


Рис.7.1. Заповнення енергетичних рівнів у взаємодіючому бозе-газі та у He-II. а) $T=0$; б) $0 < T < T_B$ (або T_λ).

Збуджені рівні зараз відповідають не одночастинковим станам у системі, а елементарним збудженням усієї системи, які можна розглядати як невзаємодіючі квазічастинки. Такий опис взаємодіючої бозе-системи можна пов'язати з дворідинною моделлю. Дійсно, згідно з експериментальними даними, He-II при абсолютному нулю повністю надплинний ($\rho_s / \rho = 1$). Отже, надплинний компонент містить і конденсат, і атоми, що знаходяться на рівнях, які відповідають "вичерпанню" конденсату при $T=0$. У той самий час нормальний компонент можна ототожнити з тепловими збудженнями (див.рис. 7.1б). Однак, розглянута модель не з'ясовує явище надплинності, тобто течію He-II без дисипації.

7.2. Хвильова функція бозе-конденсата.

У цьому розділі ми покажемо, що дворідинна (двошвидкісна) модель надплинного He-II може бути обґрунтована у рамках мікроскопічного підходу. До того ж, розвинуті уявлення не суперечать головним положенням квантової механіки. У попередньому розділі ми припустили, що рідкий гелій нижче за T_λ містить конденсат, тобто макроскопічно велику кількість атомів, що заповнюють один квантовий стан. Конденсат визначає основні властивості надплинного компонента He-II. Зараз нам необхідно уточнити зв'язок поміж конденсатом та "надпоток" - надплинною течією. Для цього залучимо для опису конденсата хвильову функцію та висловимо швидкість надпотoku через фазу хвильової функції.

Для більшої наочності наведеного тут розгляду підкреслимо, що "надпотік", тобто течія без дисипації має місце у надпровідниках та в орбітальних струмах електронів у атомних та молекулярних системах. Кожний електрон у стійкому атомі займає стаціонарний квантовий стан, що описується власною функцією відповідного гамільтоніана. За аналогією Ф. Лондон виказав досить сміливу ідею, що надпотік також є квантовим струмом, а хвильова функція простягається на весь надпотік, тобто він постулював макроскопічну хвильову функцію для надпотoku. Атомні та молекулярні хвильові функції обмежені областями з типовими розмірами 10^{-8} см. З іншого боку, якщо ми розглядаємо дріт у надпровідному соленоїді, то його довжина може досягати багатьох метрів! Однак, постулат Лондона зараз підкріплюється великою кількістю експериментальних результатів, що дозволяють вважати, що "надрідини" - надплинні та надпровідні системи характеризуються макроскопічним квантуванням.

У відсутність надплинного руху квантовий стан, що заповнений частинками конденсата, є станом з енергією, яка дорівнює нулю. Однак, зрозуміло, що при

наявності надпотoku квантовий стан конденсата - це стан з енергією, що різниться від нуля і дорівнює кінетичній енергії потоку.

Припустимо, що у стаціонарному стані хвильова функція конденсата має вигляд

$$\psi(\vec{r}) = \psi_0 e^{i\phi(\vec{r})} \quad (7.12)$$

де $\phi(\vec{r})$ - фаза, дійсна функція радіуса-вектора \vec{r} . У визначених умовах амплітуда ψ_0 також змінюється у залежності від \vec{r} . Поки що будьмо вважати, що ψ_0 - стала. Знайдемо вираз для імпульсу конденсата \vec{p} . Для цього застосуємо до $\psi(\vec{r})$ звичайний оператор імпульсу

$$\hat{p}\psi = -i\hbar\nabla\psi = \vec{p}\psi \quad (7.13)$$

Звідси з урахунком (7.12) постає, що

$$\vec{p} = \hbar\nabla\phi \quad (7.14)$$

Таким чином, величина \vec{p} , яка визначається згідно з (7.14), уявляє собою канонічний імпульс, спряжений до радіуса-вектора \vec{r} . Застосуємо (7.14) до He-II. У цьому випадку канонічний імпульс зручніше інтерпретувати як імпульс однієї частинки надплинної рідини. Тому можливо записати $\vec{p} = m_4\vec{v}_s$. Підставляючи цей вираз у (7.14) отримуємо

$$\vec{v}_s = \frac{\hbar}{m_4} \nabla\phi \quad (7.15)$$

Це співвідношення встановлює пропорційність надплинної швидкості до градієнту фази хвильової функції конденсату. Коли надплинна рідина знаходиться у стані спокою, фаза усюди однакова. При відмінній від нуля надплинній швидкості фаза рівномірно змінюється у напрямку \vec{v}_s . Фаза хвильової функції (7.12) когерентна для усієї надплинної рідини. Інакше кажучи, $\phi(\vec{r})$ - повільно змінюється навіть у макроскопічному масштабі. Як результат когерентності фази, атоми конденсата утримуються у стані однорідного руху. Відмітимо, що когерентність фази, сама по собі, дозволяє якісно з'ясувати, яким чином незмінність надплинної швидкості зберігається на протязі тривалого часу. Різке змінення \vec{v}_s обов'язково призвело би до адекватного змінення швидкості макроскопічної кількості атомів, але це настільки неймовірно, що його можна не ураховувати.

Якщо застосувати операцію rot до виразу (7.15) то отримаємо важливе рівняння

$$\text{rot}\vec{v}_s = 0 \quad (7.16)$$

яке уявляє собою, як ми вже бачили, умову відсутності вихорів, якому задовольняє надплинний компонент He-II у випадку потенціальної течії.

Макроскопічна хвильова функція бозе-конденсата (7.12) повинна бути завжди однозначною. Це можливо у тому випадку, коли фаза ϕ є однозначною або періодичною функцією. Така ситуація реалізується при надплинній течії навколо отвору. Тоді надплинна течія по замкненому контуру, що оточує отвір, пов'язана з зміненням фази на $2\pi n$, де n - ціле число або нуль. Відмінне від нуля змінення фази відповідає такій ситуації, коли присутня циркуляція навколо отвору. Тому можлива конденсація у стан з квантованим моментом кількості руху, а не тільки конденсація у стан з однорідним імпульсом. Такий рух і уявляє собою вихровий рух у надплинній рідині, про який мова буде йти у наступному розділі.

7.3. Рівняння для швидкості надплинного компонента.

Розглянемо загальний випадок, коли і амплітуда і фаза хвильової функції можуть змінюватись у просторі та за часом. Тоді (7.12) буде мати вигляд

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_0(\vec{r}, t) e^{i\phi(\vec{r}, t)} \quad (7.17)$$

Нехай $\psi(\vec{r}, t)$ є рішенням рівняння Шредінгера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \psi + \bar{U}(\vec{r}) \psi \quad (7.18)$$

де M - маса, яку ще треба визначити, $U(\mathbf{r})$ - середня потенціальна енергія, сенс якої буде встановлений нижче.

Як пливне з експериментів Андронікашвілі (див. розд. 2.5.1), за усі температури, що нижчі ніж 1 К відносна величина густини надплинного компонента дуже близька до одиниці. З іншого боку ми припускаємо, що надплинна частина пов'язана не тільки з конденсатом, але і з атомами, імпульс яких відмінний від нуля при $T = 0$. Інакше кажучи, атоми, що залишили конденсат у результаті взаємодії (ефект "вичерпання"), усе ж таки прямують за рухом конденсата. Отже, ми повинні нормувати $\psi(\vec{r}, t)$ таким чином, щоб добуток $\psi\psi^*$ дорівнював середній концентрації надплинних атомів. Тому маємо

$$\psi^*(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t) = \psi_0^2(\vec{r}, t) = \frac{\rho_s}{m_4} \quad (7.19)$$

При $T \rightarrow 0$ густина $\rho_s \rightarrow \rho$, тобто величина ρ_s стає порівняною до повної густини рідкого гелію. При $T \neq 0$, але нижче за T_λ відношення $\rho_s / \rho < 1$, а при $T > T_\lambda$, очевидно $\rho_s / \rho = 0$.

Підкреслимо, що використання виразів (7.17) та (7.19) ґрунтується на припущенні, що можливо одночасно вимірювати і густину ρ_s (тобто кількість частинок) і фазу ϕ . Це ствердження не тривіальне, бо у квантовомеханічній системі неможливо одночасно визначити густину і фазу. Ретельні дослідження показують, що коли кількість частинок N велика, ми у змозі фіксувати і N і ϕ , якщо тільки невизначенність кожної з цих величин задовольняє співвідношенню невизначенності

$$\Delta N \cdot \Delta \phi \geq 1 \quad (7.20)$$

Таким чином, фаза може мати невизначенність $\Delta \phi \approx N^{-1/2}$, а N -відносна невизначенність $\Delta N / N \approx N^{-1/2}$. Можливо за аналогією зробити висновок, що при використанні (7.17) та (7.19) повна кількість атомів, що приймають участь у надплинності, повинна бути значною, як це дійсно має місце при $T < T_\lambda$. Густина надплинного компонента у таких умовах є сталою в областях, що мають макроскопічні розміри. Отже, ми можемо описувати надплинний рух у термінах термодинамічних параметрів. Таким параметром, до речі, є повільно змінюючийся потенціал $\bar{U}(\vec{r})$, яким ми скористались у (7.18). Величина $\bar{U}(\vec{r})$ - потенціальна енергія кожної з макроскопічно значної кількості атомів, що містяться в елементі об'єму у точці \vec{r} , і тому вона уявляє собою термодинамічний параметр, до того ж її можна ототожнити з хімічним потенціалом. Доведемо це ствердження. Обернемо змінення повної енергії U_0 рідини, що знаходиться у спокої, задовольняє фундаментальній тотожності Гіббса

$$dU_0 = TdS - PdV + \mu dN \quad (7.21)$$

Звідси хімічний потенціал можна записати у вигляді

$$\mu = \left(\frac{\partial U_0}{\partial N} \right)_{S, V} \quad (7.22)$$

Згідно з (7.22), хімічний потенціал дорівнює приросту енергії системи при додаванні до неї однієї частинки при сталому об'ємі V та ентропії S .

Щоб знайти повну енергію системи, треба до U_0 додати кінетичну енергію надплинного компонента $U_{s,k}$

$$U = U_0 + U_{s,k} \quad (7.23)$$

Нехай елемент об'єму, що містить ΔN "надплинних" атомів, рухається у рідині від точки a до точки b . Так як надплинний потік бездисипативний, повна енергія і ентропія не змінюються.

Розглядаючи елемент об'єму як підсистему, що знаходиться у термодинамічній рівновазі з рештою рідини, застосуємо до нього рівняння (7.21) та (7.23). У результаті маємо

$$\Delta U = 0 = \Delta U_{s,k} + \left[\left(\frac{\partial U_0}{\partial N} \right)_{s,V}^b - \left(\frac{\partial U_0}{\partial N} \right)_{s,V}^a \right] \Delta N \quad (7.24)$$

і з урахуванням (7.22) отримуємо

$$\frac{\Delta U_{s,k}}{\Delta N} = -(\mu_b - \mu_a) \quad (7.25)$$

Таким чином ми бачимо, що хімічний потенціал усієї рідини, що знаходиться у спокої поводить себе як віднесена до однієї частинки потенціальна енергія надплинного компонента. Рухаючись з області з високим значенням хімічного потенціалу в область з низьким значенням, надплинний компонент прискорюється. Отже, в рівнянні (7.18) можна покласти $U(\vec{r}) = \mu$, а масу M змінити на масу одного атому гелію m_4 .

Маємо

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_4} \nabla^2 \psi + \mu \psi \quad (7.26)$$

Підставляючи до (7.26) макроскопічну хвильову функцію (7.19), отримуємо рівняння для фази ϕ . За умови великих N таке рівняння можливо отримати з урахуванням того, що $\hbar\phi$ і N є канонічно спряженими величинами, тобто

$$\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial N} \quad \text{і} \quad \hbar \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \phi} \quad (7.27)$$

де H - функція Гамільтона, у якості котрої треба узяти повну енергію, що містить кінетичну енергію надплинного компонента He-II. Відтоді перше з рівнянь (7.27) приймає вигляд

$$\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\partial U}{\partial N} = -\left(\mu + \frac{m_4 v_s^2}{2}\right) \quad (7.28)$$

Гradient рівняння (7.28) дає нам рівняння гідродинаміки ідеальної рідини - рівняння Ейлера. Дійсно, урахувавши співвідношення (7.15) для \vec{v}_s та узявши gradient від (7.28) отримуємо

$$m_4 \frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} = -\nabla \left(\mu + \frac{m_4 v_s^2}{2} \right) \quad (7.29)$$

Це і є рівняння для руху надплинного компонента He-II, яке описує потенціальний потік без дисипації енергії.

7.4. Рівняння для швидкості нормального компонента.

У розділі 7.3 ми ігнорували нормальний компонент He-II і виходили з того, що для опису надплинної рідини можна використовувати макроскопічну хвильову функцію бозе-конденсата. Розуміло, що отримане рівняння (7.29) відзеркалює рух He-II тільки на межі $\rho_n \rightarrow 0$. Розглянемо зараз загальний випадок, коли присутні обидва

компонента, кожен з яких має свою швидкість. До того ж ми обмежимося випадком, коли \vec{v}_s набагато менша за значення, при якому виникає дисипація, а \vec{v}_n набагато менша за значення, при якому виникає турбулентність. Таким чином, ми як і раніше, використовуємо уяву про потенціальну течію надплинного компонента і незалежну в'язку течію нормального компонента.

Так як надплинний потік не супроводжується дисипацією, він є термодинамічно оборотним. Нормальний компонент має в'язкість, що обумовлює появу дисипації, пропорційної до ∇v_n^2 . Зрозуміло, однак, що доки швидкість нормального компонента \vec{v}_n є малою, дисипацією також можна нехтувати і розглядати потік нормальної рідини оборотним. За таких умов ентропія зберігається. Ентропія, як ми вже бачили, пов'язана тільки з нормальним компонентом, тому рівняння безперервності для густини потоку ентропії $\rho\sigma\vec{v}_n$ буде

$$\frac{\partial(\rho\sigma)}{\partial t} = -\nabla(\rho\sigma\vec{v}_n) \quad (7.30)$$

Для пошуку рівняння нестисливої течії, у якій величини ρ, ρ_s, ρ_n , та σ сталі, з урахуванням того, що в цих умовах $\nabla\vec{v}_n = 0$ і $\nabla\vec{v}_s = 0$, скористуємось рівнянням Нав'є - Стокса

$$\rho_s \left\{ \frac{\partial\vec{v}_s}{\partial t} + (\vec{v}_s \nabla) \vec{v}_s \right\} + \rho_n \left\{ \frac{\partial\vec{v}_n}{\partial t} + (\vec{v}_n \nabla) \vec{v}_n \right\} = -\nabla\rho + \eta_n \nabla^2 \vec{v}_n \quad (7.31)$$

Рівняння (7.31) отримується за умови збереження імпульсу усієї рідини. Воно відзеркалює той факт, що градієнт зовнішнього тиску може викликати рух як одного так і обох компонентів, а опір потоку обумовлений лише в'язкістю нормального компонента η_n .

Надамо, без занадто громіздких розрахунків рівняння для швидкості нормального компонента

$$\rho_n \left\{ \frac{\partial\vec{v}_n}{\partial t} + (\vec{v}_n \nabla) \vec{v}_n \right\} = -\frac{\rho_n}{\rho} \nabla P - \rho_s \sigma \nabla T + \eta_n \nabla^2 \vec{v}_n \quad (7.32)$$

Це рівняння типу Нав'є - Стокса, до якого доданий член з тепловим градієнтом.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. У чому полягає ефект "вичерпання" бозе-конденсата?
2. Чому можливо описувати надплинний рух у термінах термодинамічних параметрів?
3. З'ясуйте, чому хімічний потенціал поводить себе як віднесена до однієї частинки потенціальна енергія надплинного компонента.

8. ФЕНОМЕНОЛОГІЧНІ ТЕОРІЇ НАДПЛИННОСТІ

8.1. Причина надплинності He-II за Р.Фейнманом

Як було показано у розділі 2.4, згідно з критерієм надплинності Ландау (2.14), He-II не був би надплинним, якщо б він мав збудження $(\varepsilon(\vec{p})/p)_{\min} = 0$. Чим обумовлена відсутність у He-II інших низькоенергетичних збуджень окрім фононів, для яких ε/p скінченне? Це питання було вирішене Р.Фейнманом (1955р.) виходячи з досить загальних міркувань. Він довів основне положення надплинності: єдиними низькорозташованими збудженнями у He-II є фонони. Для цього Фейнман розглянув

рівняння Шредінгера для системи атомів гелію. Хоча вирішити його, зрозуміло, неможливо але про деякі загальні властивості його рішень можна збагнути, якщо скористатись основними властивостями хвильових функцій більш простих систем.

Розглянемо хвильову функцію основного стану $\varphi(\vec{R}_1, \vec{R}_2, \dots, \vec{R}_N)$ де R_i - радіус-вектор i -го атому, N - кількість атомів. Оскільки He є бозе-ейнштейнівською рідиною, функція φ повинна бути симетричною, тобто перестановка двох частинок не змінює φ (див. розд. 1.2). Як і для стаціонарних станів більш простих систем, функція φ дійсна і не має вузлів, тобто φ завжди додатна.

Міркування Фейнмана відносно надплинності збігаються до наступного. Якщо користуватись аналогією з більш простими бозе-системами, знаходимо, що хвильова функція першого збудженого стану ψ повинна мати один вузол і бути симетричною. Так як функція φ завжди симетрична і $\int \varphi \psi d^N R = 0$ (умова ортогональності), функція ψ повинна мати додатні значення для однієї половини конфігурацій і від'ємні для другої половини. Хід міркувань Фейнмана про те, що єдиними низькорозташованими збудженнями є фонони, такий. Фонони уявляють собою збуджені стани для хвилі стиснення, або стани, що обумовлені малими зміщеннями кожного атома, які призводять до змінення густини. Щоб фонони мали низьку енергію збудження, флуктуації густини повинні виникати на значних відстанях. Це означає, що фонони повинні мати великі довжини хвиль. Головною проблемою зараз є доказ, чому ніякі інші стани, окрім цих фононів не можуть мати таку ж низьку енергію збуджень.

Як це вже припускалось раніше, хвильова функція ψ не є фононним станом, тобто повинна бути ортогональною до всіх фононних станів, включаючи і функцію φ . Тому функція ψ повинна змінюватись від додатних значень до від'ємних при таких змінах конфігурації, які не змінюють великомасштабні значення густини. Таке змінення функції ψ повинно відбуватись дуже повільно, що відповідає значним "переміщенням" атомів. Однак, атоми тотожні і підпорядковані статистиці Бозе - Ейнштейна. Тому таке "переміщення" атомів стає неможливим.

Позначимо як А конфігурацію атомів, для якої функція ψ має максимальне додатне значення, а розташування атомів у неї α -положеннями. Аналогічно, конфігурацію, для якої ψ набуває максимальне від'ємне значення, позначимо В і розташування атомів у неї β -положеннями. Як було показано вище, у α -положеннях атоми повинні бути розташованими достатньо далеко один від одного. Це означає, що вони не "перекриваються", більш того, їх густина розподілу на великих відстанях повинна бути приблизно однорідною. Для того, щоб конфігурація В якомога більше різнилась від А треба, щоб перехід від А до В був пов'язаним з якомога більшою кількістю переміщень атомів на великі відстані. Інакше функція ψ буде змінюватись надто швидко від додатних значень до від'ємних, хвильова функція буде мати значний градієнт і енергія відповідного стану не буде достатньо низькою.

Нехай для переходу з конфігурації А до В треба значне переміщення атомів. Перемістимо деякі атоми з конфігурації А у лівій частині посудини, що містить рідкий гелій, крізь усю посудину у протилежну частину і отримаємо конфігурацію В (рис. 8.1). При такому переміщенні атому з однієї частини посудини до другої ліворуч з'являється дірка, а праворуч - зайвий атом, тобто відбувається змінювання густини атомів. Ми, однак, можемо уявити, що у той же час інший атом був перенесений у зворотному напрямку і дірки, що виникли, та ущільнення атомів були вирівняні за допомогою невеликої перебудови декількох сусідніх атомів. Таке переміщення двох атомів (кожного на відстань, що приблизно дорівнює розміру усієї посудини), є дійсно великим переміщенням. Тому може здаватись, що конфігурації А і В (на рис. 8.1 показані щільними та пунктирними колами відповідно) повинні значно різнитись одна

від другої. Але ми повинні вважати атоми тотожними отже амплітуда хвильової функції не повинна залежити від того, який атом займає певне положення. Функція ψ не змінюється при простому обміні місцезнаходжень атомів. Тому значні переміщення атомів можна здійснити лише у два заходи: спочатку переставимо атоми, що підлягають переміщенню, в α -положення, які знаходяться ближче усього до кінцевих положень, у котрих повинні опинитись атоми у В - конфігурації. При цьому функція ψ не буде змінюватись, бо всі атоми залишаються у тієї ж самій конфігурації в α -положеннях. Після чого здійснимо перехід до конфігурації В невеликим переміщенням атомів (короткі стрілки на рис. 8.1). При цьому функція ψ повинна швидко змінюватись від додатних значень до від'ємних, тому енергія не може бути малою. Так як хвильова функція не змінюється при перестановці атомів, неможливо отримати конфігурацію В, що значно різниться від А. У такий спосіб взагалі не можуть з'явитись ніякі низькоенергетичні збудження окрім фононів. Теплоємність системи буде прямувати до нуля, коли $T \rightarrow 0$ згідно з законом Дебая, тобто як T^3 . У цьому і полягає за Фейнманом, головне положення, що необхідне для розуміння властивостей рідкого гелію, яке збігає до того, що причина надплинності міститься у тому, що хвильова функція бозе-системи не змінюється при перестановці двох атомів.

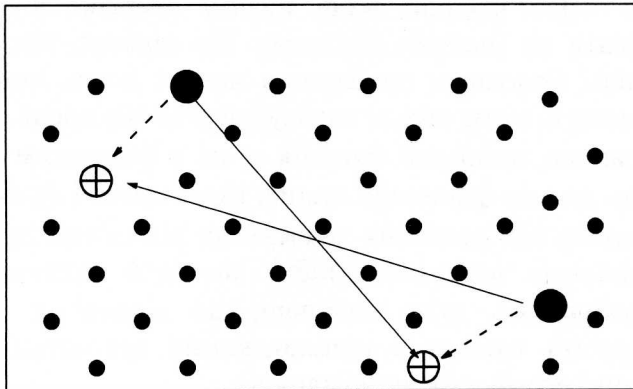


Рис.8.1. Схема великомасштабного змінювання конфігурації атомів (довгі стрілки) та еквівалентного до нього дрібномасштабного змінювання (короткі стрілки).

8.2. Теорія надплинності за Н.Боголюбовим.

У теоретичному аспекті велике значення мала теорія Н.Боголюбова (1947р.), у якій вперше була дана послідовна побудова енергетичного спектру макроскопічного тіла. Він розглянув теоретичну модель газуватого гелію, у якій було припущено, що атоми слабо взаємодіють один з іншим. На відміну від ідеального газу, у взаємодіючих системах фазове перетворення, що пов'язане з макроскопічним заповненням нульового рівня, супроводжується виникненням надплинності.

У теорії Боголюбова розглянута система неідеального бозе-газу частинок зі спіном нуль. Нехай ця система знаходиться поблизу абсолютного нуля. Так як нас цікавлять слабкозбуджені стани (малі імпульси p), матричний елемент взаємодії можна просто замінити на сталу, яку ми позначимо як α . Далі, у теорії спрощуюча обставина для слабкозбудженого стану полягає у тому, що майже усі частинки містяться у конденсаті, тобто мають енергію, яка дорівнює нулеві ($p \approx 0$). Тому повна кількість частинок N дорівнює

$$N = N_0 + \sum_{\vec{p}} N_{\vec{p}} \quad (8.1)$$

до того ж $\sum_{\vec{p}} N_{\vec{p}} \ll N_0$. До енергії взаємодії головний внесок надає взаємодія частинок поміж собою та взаємодія несконденсованих атомів з атомами конденсату.

Помітний результат теорії Боголюбова складається у тому, що слабкозбуджений стан розглянутої системи уявляє собою суперпозицію елементарних збуджень з енергетичним спектром

$$\varepsilon(\vec{p}) = \left\{ \left(\frac{p^2}{2m_4} + \frac{N\alpha}{V} \right)^2 - \left(\frac{N\alpha}{V} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (8.2)$$

При достатньо малих імпульсах $p^2 \ll 4m_4 \frac{N\alpha}{V}$ і (8.2) стає

$$\varepsilon(\vec{p}) = p \sqrt{\frac{N\alpha}{m_4 V}} \quad (8.3)$$

Видно, що елементарні збудження є звуковими фононами зі швидкістю

$$U_1 = \sqrt{\frac{N\alpha}{m_4 V}} \quad (8.4)$$

Таким чином, енергетичний спектр слабконеідеального газу задовольняє критерію надплинності Ландау, див. (2.14), і $(\varepsilon/p)_{\min} = U_1 \neq 0$.

При значних імпульсах має місце більш складний закон дисперсії, що асимптотично наближається до спектру ідеального газу $\varepsilon(p) = p^2 / 2m$. Підкреслимо, що наведені вище виклади слухні лише при достатньо малих значеннях імпульса.

8.3. Теорія В.Гінзбурга - Л.Пітаєвського для He-II

Феноменологічна теорія надплинності, що була побудована Гінзбургом та Пітаєвським (1958 р.) базується на теорії фазових перетворень другого роду Ландау (1937 р.) та на феноменологічній теорії надпровідності ("надплинності зарядженої електронної рідини") Гінзбурга та Ландау (1950 р.). Як і у випадку надпровідників, у якості параметра порядку, що змінюється при перетворенні He-I - He-II (у λ -точці) Гінзбург та Пітаєвський (ГП) вибрали хвильову функцію ψ . Нормування хвильової функції чиниться так, щоб надплинну густину можливо було зобразити у вигляді

$$\rho_s = m_4 |\psi(\vec{r})|^2 \quad (8.5)$$

Густина надплинного компонента дорівнює нулю при $T > T_\lambda$ і повільно зростає від λ -точки до абсолютного нуля, де $\rho_s / \rho = 1$.

Розглядаючи нормальний He-I, що знаходиться у спокої, ГП припустили, що густину вільної енергії можливо розкласти у ряд за степенями $|\psi|^2$ та $|\nabla\psi|^2$. Такий розклад поблизу λ -точки має вигляд

$$f(\vec{r}) = f_1 + \alpha |\psi(\vec{r})|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi(\vec{r})|^4 + \frac{\hbar^2}{2m_4} |\nabla\psi(\vec{r})|^2 \quad (8.6)$$

де f_1 - густина вільної енергії He-I. Стійкий стан при даних температурі та тиску знаходиться за умови мінімуму повної вільної енергії

$$F = \int f(\vec{r}) d^3\vec{r} \quad (8.7)$$

Оскільки хвильова функція ψ - величина комплексна, ми можемо шукати мінімум або відносно ψ , або відносно ψ^* . При мінімізації відносно ψ^* , відповідно до вимог варіаційного обчислення, відповідне рівняння Ейлера - Лагранжа має вигляд

$$\frac{\partial f}{\partial \psi^*} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial (\nabla_i \psi^*)} = 0 \quad (8.8)$$

Тут $\nabla_i \psi^*$ - компонент градієнта у напрямку i . Підставляючи до (8.8) розклад (8.6), ГП отримали наступне рівняння

$$-\frac{\hbar^2}{2m_4}\nabla^2\psi + \alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi = 0 \quad (8.9)$$

Згідно з теорією фазових перетворень другого роду Ландау, коефіцієнти α та β у розкладі вільної енергії можливо також розкласти у ряд за степенями $(T - T_\lambda)$

$$\alpha = A(T - T_\lambda) \quad (8.10)$$

де $A > 0$. Звідси $\alpha < 0$ при $T < T_\lambda$. Далі, позначимо у рівнянні (8.9)

$$\frac{\hbar^2}{2m_4|\alpha|} = \xi(T) \quad (8.11)$$

де $\xi(T)$ зветься довжиною когерентності або кореляційною довжиною для He-II. Вона визначає мінімальні розміри області, у якій відбувається помітне зміння $|\psi|^2$ (або густини надплинного компонента ρ_s). Значення сталої A у (8.10) було оцінено ГП з використанням даних про теплоємність рідкого гелію по обидва боки від T_λ , а також з нахилу кривої $\rho_s(T)$ у точці $T = T_\lambda$. Звідси, комбінуючи (8.10) та (8.11) ГП отримали

$$\xi(T) \approx 4 \cdot 10^{-8} (T_\lambda - T)^{-1/2} \text{ см} \quad 2)$$

За виключенням області, що розташована безпосередньо поблизу T_λ , довжина $\xi(T)$ дорівнює величині міжатомної відстані. У цих умовах теорію Ландау застосовувати неможливо, бо у цьому випадку неможливо розкласти вільну енергію до степеневого ряду, зберігаючи лише малу кількість членів ряду. Довжина когерентності перевищує міжатомну відстань приблизно у 10 разів або більше, коли $(T_\lambda - T) < 10$ мК, але у цьому температурному регіоні домінують флуктуації і теорія Ландау знову порушується.

Феноменологічна теорія надплинності мікроскопічного обґрунтування поки що не має. У зв'язку з чим неодноразово наголошувались сумніви щодо її пристосованості. Проте, вона використовується у якості феноменологічної, яка непогано узгоджується з експериментом та є незамінною у теперішній час при розгляді задач, що потребують урахування просторового розподілу густини надплинного компонента. Наприклад, ГП використовували рівняння (8.9) при розв'язанні задачі про плівку He-II, узявши граничну умову, згідно з якою біля твердої стінки та на вільній поверхні $\psi = 0$. З'ясувалось, що при фіксованій температурі існує мінімальна товщина плівки $d_m = \pi\xi(T)$, нижче за яку немає рішення з $|\psi|^2 \neq 0$; іншими словами $\rho_s = 0$, коли товщина плівки $d < d_m$. Одночасно цей результат каже про те, що у тонких плівках або вузьких каналах, температура виникнення надплинності стає нижчою ніж T_λ згідно з експериментальними фактами.

КОНТОРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Чому у He-II відсутні будь-які низькоенергетичні збудження окрім фононів?
2. Покажіть, що енергетичний спектр слабо неідеального газу задовольняє критерію надплинності Ландау.
3. Який фізичний сенс довжини когерентності?

9. ВИХРОВІ СТАНИ У He-II

9.1. Критичні швидкості та критичні явища.

Згідно з теорією Ландау (див. розд. 2.4 та 3.1) надплинний гелій уявляє собою фонову рідину, деякий плинний "вакуум", типу космічного ефіру, на фоні якого рухається газ квазічастинок (фонони і ротони), тобто газ збуджень цієї рідини. Тому що цей газ дуже розріджений при температурах близьких до абсолютного нуля, він є відповідальним за ті ефекти, які звичайно дописують до нормального компоненту. Але суворо кажучи, не є його проявом: рух газу квазічастинок відповідає протитоку, тобто відносному руху нормального компонента зі швидкістю \vec{v}_n по відношенню до надплинного, що має швидкість \vec{v}_s . Надплинність фонові рідини базується на припущенні про ідеальний плавний та безвихровий рух вакууму, у той час як енергетичний спектр $\epsilon(p)$ квазічастинок (розд. 3.1) обмежує швидкість руху надплинного компонента деякою верхньою межею - так званою критичною швидкістю Ландау \vec{v}_{sc} , див. (2.14). Якщо швидкість вакууму $|\vec{v}_s - \vec{v}_n|$ відносно стінок або нормального компонента менша за \vec{v}_{sc} , то цей рух не супроводжується дисипацією, оскільки вакуум не може передати імпульс збудженням. Якщо $|\vec{v}_s - \vec{v}_n| > \vec{v}_{sc}$, то при русі вакууму з нього можуть народжуватись нові збудження і імпульс надплинного руху дисипує в імпульси квазічастинок, що народжуються, тобто виникає гальмування надплинного руху.

Як було показано у розділі 3.1, згідно з теорією Ландау при швидкостях руху, що перевищують $\vec{v}_{sc} = \Delta / p_0 \approx 6 \cdot 10^3 \text{ cm/s}$ відбувається зрив надплинності, обумовлений утворенням ротонів. Однак експериментальні факти суперечили цим висновкам теорії. У всіх експериментах взаємодія надплинного компонента з твердими тілами або з нормальним компонентом починалось при швидкостях, що були набагато меншими ніж $6 \cdot 10^3 \text{ cm/s}$.

Критичні явища у He-II уперше були відмічені у дослідах Аллена та Майзнера (1938 р.). Виявилось, що швидкість витікання He-II з капіляра не залежить від тиску та довжини капіляра. При зниженні температури в дуже вузьких капілярах (з діаметром $d < 10^{-5} \text{ cm}$) швидкість витікання зростала. Така течія не може бути з'ясована у рамках законів класичної гідродинаміки. Після побудови теорії Ландау зрозумів, що у таких вузьких каналах рухається тільки надплинний компонент. У зв'язку з цим Андронікашвілі визначив швидкість \vec{v}_s поділом виміряної швидкості на ρ_s / ρ , що дало $v_{sc} \approx 10 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ - значення за порядком величини наближене до критичного, за яким виникає опір потоку. Характерно, що у більш широких капілярах, у яких рухається також і нормальний компонент, швидкість течії пропорційна до перепаду тисків, як це і повинно бути при в'язкій ламінарній течії, а не пропорційна до кореню з перепаду тисків, що має місце у разі турбулентної течії нормального компонента. Спостерігалась залежність $v \propto P^\alpha$ (v - виміряна швидкість). Показник степеня змінюється у залежності від ширини капіляра і температури у межах $\alpha = 0 \div 0,8$.

Критичні швидкості були винайдені Доунтом та Мендельсоном (1938 р.) при вивченні гелієвої плівки. У згоді з теорією Ландау, зрозуміло, що уздовж плівки може текти тільки надплинний компонент. Швидкість його руху повинна залежити від різниці рівнів, поміж якими відбувається течія. Однак, як ми відмітили у розділі 6, швидкість течії плівки встановлюється майже миттєво і практично не залежить від різниці рівнів. Отже, починаючи з деякої швидкості течії v , виникає опір, який дуже

швидко зростає при збільшенні різниці $v_s - v_c$. Тому фактична швидкість течії близька до v_c , приблизно дорівнює 20 см/с і практично не залежить від температури в інтервалі 1,3 ÷ 2,08 К. У цих дослідах вимірювалась об'ємна швидкість перетікання плівки, зведена до одиниці периметру: $\sigma = (dV/dt)/P$. Ця величина зветься числом переносу. Лінійна швидкість v обчислюється за формулою $\sigma = vd$, де d - товщина плівки. Так як уздовж плівки рухається тільки надплинний компонент, останню формулу треба змінити на $\sigma = (\rho_s / \rho) v_s d$.

Існування критичної швидкості найбільш безпосередньо висвітлюється у дослідях Капіці (1941 р.) з вимірювання різниці температур поміж гелієвою ванною та бульбочкою, у який виникає виділення тепла, яке обумовлює втікання надплинного компонента (див. рис. 2.12). При малих потужностях тепловиділення в бульбочці різниця температур не з'являється. Це означає, що надплинний компонент без перешкод втікає у кількості, що необхідна для поглинання усього виділеного тепла. Збільшення потужності тепловиділення супроводжується збільшенням швидкості втікання. При певних значеннях потужності спостерігалось швидке зростання різниці температур. Відповідні швидкості природно ототожнити з критичними. У дослідях Капіці вони дорівнювали 18 ÷ 130 см/с при товщинах вхідної щилини 3 ÷ 0,14 мкм при $T \approx 1,6$ К.

Ці приклади показують, як виникла проблема критичних явищ у He-II: критичні швидкості, що були експериментально виміряні виявились на декілька порядків нижчими, ніж це передбачалось у теорії Ландау ($6 \cdot 10^3$ м/с). У теперешній час добре встановлено, що критичні швидкості не пов'язані з утворенням ротонів у He-II. Тільки у 1966р. Рейфільд спромогся ствердити слушність формули Ландау $v_c \approx \Delta / p_0$ в експерименті, у якому ротони генерувались від'ємними іонами, що рухаються у He-II, який знаходиться під тиском 12 атм, скориставшись зменшенням Δ при збільшенні тиску (див. розд.3.1). Природа критичних швидкостей пов'язана з суттєво іншим явищем - утворенням квантових вихорів у He-II. У зв'язку з цим необхідно відмітити - до 1955 р. вважалось, що визначення критичної швидкості є невдача теорії надплинності Ландау, яка чудово з'ясовувала решту експериментальних фактів.

9.2. Обертання надплинної рідини.

Розглянемо циліндричну посудину, заповнену He-II, що рівномірно обертається з кутовою швидкістю $\vec{\Omega}$. Згідно з теорією Ландау, для надплинного компонента повинна здійснюватись умова

$$\text{rot } \vec{v}_s = 0 \quad (9.1)$$

тому вона не може обертатись за звичайним "твердотільним" законом

$$\vec{v} = [\vec{\Omega} \cdot \vec{r}] \quad (9.2)$$

Тут \vec{r} - радіус-вектор деякої точки на вісі. До того ж $\text{rot } \vec{v} = 2\vec{\Omega} \neq 0$.

Надплинний компонент не взаємодіє зі стінками посудини та з нормальним компонентом. Отже, у циліндричній посудині, що обертається разом з He-II тільки нормальний компонент повинний залучатись до обертання, а надплинний повинний залишатись нерухомим.

Ще у 1948 р. Андронікашвілі спостерігав меніск у обертовому гелії. Параболічна форма меніску визначається діями відцентрового ($\rho \omega^2 R^2 / 2$) та гідростатичного (ρgh) тисків. Якщо обертається нормальна рідина, глибина меніску визначається виразом

$$h = \frac{\omega^2}{2g} R^2 \quad (9.3)$$

де h і R - вертикальна та горизонтальна координати точки на поверхні рідини, ω - кутова швидкість, g - прискорення сили тяжіння. Згідно з дворідинною моделлю, тільки нормальний компонент може обертатись. Отже, глибина меніску повинна зменшуватись в ρ_n / ρ разів:

$$h = \frac{\rho_n}{\rho} \left(\frac{\omega^2}{2g} \right) R^2 \quad (9.4)$$

Згідно з (9.4) глибина меніску при $T < 1,5$ К повинна зменшуватись у 10 разів. Залежність глибини меніску від температури (9.4) у експериментах Осборна (1950 р.) та Андронікашвілі (1949 р.) не була стверджена і у всьому інтервалі температур меніск у обертовому He-II не відрізнявся від меніску нормальної рідини. Це свідчить про те, що обернення надплинного та нормального компонентів чиниться з однаковою кутовою швидкістю, що дорівнює швидкості обертання посудини. Цей результат так суперечив з існуючою дворідинною моделлю, яка вже була стверджена у багатьох експериментах, що Андронікашвілі та Каверкін оприлюднили свої дослідження тільки у 1952 р. Наведені досліди можливо було з'ясувати порушенням надплинності при обертанні посудини з He-II. Однак, як довели Андронікашвілі та Каверкін, термомеханічний ефект існує і у обертовому He-II і має таку ж величину, що і в нерухомій рідині. Лінійна швидкість на периферії посудини не перевищувала 10 см/с, а капіляр, у цьому експерименті занурювався у He-II біля вісі обертання, де лінійна швидкість близька до нуля.

Замкарадзе і Цакадзе (1964 р.) вивчали термомеханічний ефект на периферії посудини, де він також виявився незалежним від швидкості обертання. Отже, вміст надплинного компонента не залежить від швидкості обертання, тобто обертається саме надплинний компонент, що не втратив своїх надплинних властивостей - спроможності без перешкод просякати у область підвищеної температури крізь надвузкі пори (капіляри).

9.3. Квантовані вихори у надплинному гелії.

У результаті експериментів, що були проведені Осборном та Андронікашвілі, так саме і в багатьох інших більш складних випадках, коли співіснують турбулентна та дисипативна течії надплинного компонента, постає нова ділема: або теорія надплинності Ландау є хибною, або вона потребує доповнення, оскільки важливі риси у природі надплинності залишились нез'ясованими. Тупик, що виник, був розв'язаний за допомогою нової концепції квантованих вихрових ниток. Ще у 1949 р. Онсагер виказав гіпотезу про те, що у надплинному компоненті He-II утворюються вихрові нитки з квантованою циркуляцією та енергією. Ця гіпотеза отримала загальне визнання тільки після побудови Фейнманом (1955 р.) теорії квантованих вихорів, до ідеї про існування котрих він прийшов незалежно від Онсагера.

Фейнман сформулював атомістичні принципи когерентного стану надплинного гелію, з яких поставали як квазічастинковий спектр Ландау так і нові ступіні свободи, пов'язані з обертальним рухом надплинного компонента - квантованими вихорами. Постулат Ландау про безвихрову течію He-II був доповнений Фейнманом так, що була висвітлена квантова природа надплинного стану: надплинна течія є безвихровою усюди за виключенням особливих ліній, на яких порушується рівність $\text{rot } \vec{v}_s = 0$, де ρ_s обертається до нуля (вузлові лінії хвильової функції), у той час, як в об'ємі He-II ця вимога залишається суттєвою і надплинний компонент зберігається у практично

незмінній кількості до екстремально великих швидкостей обертання (див. нижче). Таку нитку можливо, наприклад, уявити як циліндричну порожнину у надплинному компоненті, навколо якої цей компонент циркулює. Усе, що сказано вище, нагадує вихор у звичайній рідині, але на відміну від неї, вихор у надплинному гелії є квантованим і є квантовим об'єктом, який надзвичайно стійкий.

Для опису обертання надплинного компонента розглянемо He-II, що заповнює кільцеву область, наприклад, простір поміж двома концентричними циліндрами. Нехай $T = 0$, так що He-II містить тільки надплинний компонент. Для знаходження картини течії, розглянемо величину, що зветься циркуляцією

$$\chi = \oint_C \vec{v}_s d\vec{l} \quad (9.5)$$

де інтеграл беруть уздовж деякого контуру C , що повністю знаходиться у рідині. У розділі 7 ми показали, що за допомогою хвильової функції конденсата (7.12), надплинна швидкість може бути записана у вигляді

$$\vec{v}_s = \frac{\hbar}{m_4} \nabla \phi. \quad (9.6)$$

Отже, циркуляцію можливо відобразити через фазу хвильової функції ϕ

$$\chi = \frac{\hbar}{m_4} \oint_C \nabla \phi d\vec{l}. \quad (9.7)$$

Так як хвильова функція надплинного конденсату однозначна, тобто при обході по замкненому контуру вона не змінюється, її значення може бути тільки кратним до 2π , або дорівнювати нулю. Таким чином ми приходимо до висновку, що циркуляція (9.5) квантується і приймає значення

$$\chi = n \frac{h}{m_4}, \quad \text{де } n = 0, 1, 2, \dots \quad (9.8)$$

Величина $\chi_0 = \frac{h}{m_4} = 9,98 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$ зветься квантом циркуляції (h - стала Планка, m - маса атома гелію).

Покажемо, що величина циркуляції не залежить від вибору контура інтегрування. Дійсно, нехай C_1 та C_2 - два контури, що охоплюють вихрову нитку. Різниця циркуляцій швидкості уздовж цих контурів, згідно з теоремою Стокса, дорівнює потоку вектора $\text{rot } \vec{v}_s$ крізь поверхню натягнуту поміж контурами C_1 та C_2 . Тому що ця поверхня ніде не перетинає вихрову нитку, в усіх її точках $\text{rot } \vec{v}_s = 0$, і інтеграл обертається до нуля. Звідси також плине, що вихрова нитка не може перерватись у гелії. Вона або замкнена, або закінчується на стінках посудини (тобто на межах рідини). Дійсно, наявність у вихровій нитці вільного кінця означало би можливість натягнути на контур C поверхню, яка ніде не перетинає вихрову нитку. Так як на цій поверхні $\text{rot } \vec{v}_s = 0$, то

$$\oint_C \vec{v}_s d\vec{l} = \int_S (\text{rot } \vec{v}_s) d\vec{S}$$

Частіше за все надплинний компонент розміщують у кільцеподібну область, так як пристрій такого типу найбільш зручний для вивчення незгасаючих потоків в He-II. Кільцева область уявляє собою приклад багатозв'язаної області, оскільки у цьому випадку можливо вважати, що у надплинній рідині є "отвір", тобто повністю оточена надплинною рідиною область, куди вона не може просякнути. Це забезпечує наявність контура типу "C". Як ми вже бачили, це є достатньою умовою для квантування циркуляції (див. (9.8)).

Такі циліндричні отвори у обертовому гелії He-II можуть створюватись твердими поверхнями або виникати спонтанно. Тоді навколо цих циліндрів виникають стійкі потоки. На рис.9.1. ілюструється структура ізольованого фейнманівського вихора у надплинній рідині. Усереднені сердцевини (керна) радіуса r_c надплинний стан порушується і густина надплинного компонента обертається до нуля. Для побудови повної картини обертання He-II знову звернемося до умови Ландау про потенціальність течії надплинної компоненти $\text{rot } \vec{v}_s = 0$. Щоб з'ясувати наслідки цієї умови, розглянемо замкнений у циліндричну посудину He-II і знайдемо циркуляцію на контурі C .

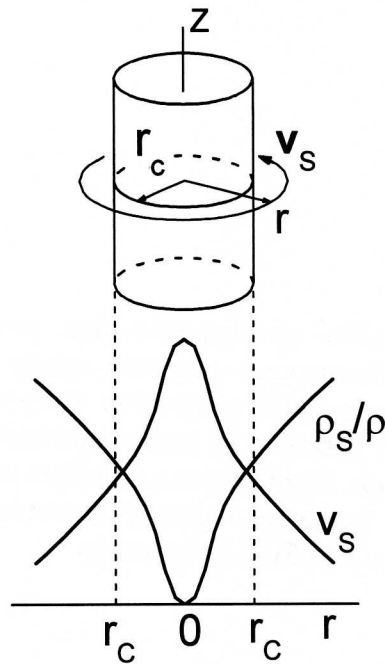


Рис.9.1. Структура самотнього - фейнманівського вихора.

Згідно з теоремою Стокса маємо

$$\chi = \oint_C \vec{v}_s d\vec{l} = \int_S (\text{rot } \vec{v}_s) d\vec{S} \quad (9.9)$$

де S - поверхня, що спирається на контур C . Так як $\text{rot } \vec{v}_s = 0$, то з (9.9) маємо

$$\chi = \oint_{C_1} \vec{v}_s d\vec{l} = 0 \quad (9.10)$$

Таким чином, циркуляція уздовж будь-якого контура в суцільній рідині дорівнює нулеві. Тут ми маємо приклад однозв'язаної області, де будь-який контур можна стягнути в одну точку. Рівняння (9.10) слушне для усієї надплинної рідини у тому випадку, коли у кожній точці $\vec{v}_s = 0$ і обертання неможливе.

Для з'ясування обертання надплинного гелію треба припустити, що він пронизаний чергою вихрових ниток, як це ілюстровано на рис. 9.2. Для контурів, що оточують сердцевину вихора, з котрого надплинна рідина витиснена, як було показано вище, циркуляція квантується: $\chi = nh / m_4$, звідкіля плине, що у деяких точках площини S обмежених контуром C , $\text{rot } \vec{v}_s$ різниться від нуля. Тому, під серцевиною вихора слід розуміти область, у якій $\text{rot } \vec{v}_s \neq 0$. Таким чином при обертанні циліндричної посудини з He-II, хоча на перший погляд ми маємо однозв'язану область, де у всіх точках $\text{rot } \vec{v}_s = 0$, насправді ця область є багатозв'язаною, так як у ній спонтанно виникають вихрові нитки, у серцевині яких $\text{rot } \vec{v}_s \neq 0$.

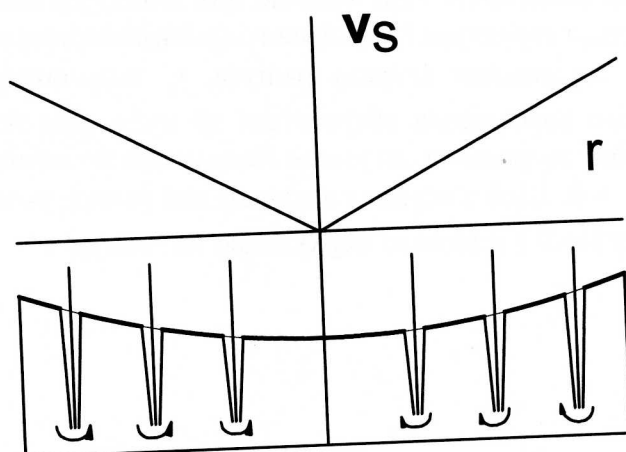


Рис.9.2. Вихрові нитки у обертовому He-II.

9.4. Вихрова нитка у обертовому He-II.

Щоб показати, чому He-II обертається подібно до твердого тіла, розглянемо більш детально характеристики вихрової нитки. Розглянемо самотню пряму вихрову нитку у He-II, що знаходиться при $T = 0$, коли нормальний компонент відсутній (див. рис. 9.1). Потік рідини навколо серцевини уявляє собою ряд концентричних кіл що лежать у площинах, перпендикулярних до вісі вихора. Розрахуємо як лінійна швидкість змінюється за відстанню від вісі вихора, тобто визначимо розподіл швидкостей в рідині, що рухається навколо вихрової нитки. Згідно з (9.5) та (9.8) маємо

$$\chi = \oint \vec{v}_s d\vec{l} = 2\pi r v_s(r) = n \frac{h}{m_4} \quad (9.12)$$

де r - радіус витка.

Згідно з (9.12) для швидкості циркуляційного руху надплинного компонента навколо вихора отримуємо

$$v_s(r) = \frac{\chi}{2\pi r} \quad (9.13)$$

Таким чином, швидкість надплинного компонента зростає в міру наближення до серцевини вихора, тобто також, як і у випадку вихора у класичній рідині. Одна відмінність полягає у наявності квантування у He-II.

Якщо записати співвідношення (9.12) у вигляді

$$m_4 r v_s(r) = n \hbar \quad (9.14)$$

то можна побачити, що момент кількості руху на одну частинку теж квантується в одиницях \hbar .

Як буде показано далі, при обертанні He-II енергетично вигідно виникнення у ньому вихрових ниток одиничної циркуляції: $\chi_1 = h/m_4$, які пронизують рідину та імітують обертання рідини. Відмітимо, що згідно з (9.13) при потенціальному обертанні швидкість зменшується при віддаленні від вісі обертання (вихрової нитки) - у протилежність обертанню як цілого, де швидкість зростає пропорційно до r . Це той же самий закон, за яким зменшується магнітне поле навколо дроту з електричним струмом. Така аналогія з рівняннями Максвела у класичній електродинаміці допомагає вирішувати проблеми турбулентного надплинного руху. Так, згідно з (9.13) швидкість \vec{v}_s обертається до нескінченності на вісі вихора, спричиняючи там розрив надплинного стану, у результаті чого серцевина вихора є нормальною (див. рис. 9.1).

9.5. Енергія та момент кількості руху самотньої вихрової нитки.

Розглянемо самотню вихрову нитку у He-II і знайдемо її енергію. Ця енергія визначається головним чином кінетичною енергією циркулюючої рідини. Енергія одиниці довжини вихора самотньої вихрової нитки дорівнює

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} \int_{r_c}^{r_b} \rho_s v_s^2 2\pi r dr \quad (9.15)$$

де r_c - радіус серцевини вихора (за порядком дорівнює міжатомній відстані), r_b - величина, що приблизно дорівнює або середній відстані поміж вихорами, або розміру посудини.

Підставляючи до (9.15) співвідношення (9.13) отримуємо вираз для енергії одиниці довжини самотнього вихора

$$\varepsilon_1 = \frac{\rho_s \chi^2}{4\pi} \ln \frac{r_b}{r_c} \quad (9.16)$$

Цей вираз має, як кажуть, логарифмічну точність, тобто припускається значним не тільки відношення r_b / r_c , але і його логарифм.

Момент кількості руху одиниці довжини самотнього вихора дорівнює

$$l_1 = \int \rho_s v_s(r) r (2\pi) dr \quad (9.17)$$

Підставляючи до (9.17) вираз (9.13), з урахуванням нерівності $r_b \gg r_c$

$$l_1 = \frac{\rho_s \chi}{2} r_b^2 \quad (9.18)$$

9.6. Критична швидкість вихороутворення.

Визначимо зараз критичну швидкість обертання циліндричної посудини, за якою енергетично вигідним є поява вихрової нитки у надплинному компоненті. Виходячи з міркувань симетрії, зрозуміло, що ця нитка буде розташована уздовж вісі посудини.

Як відомо, при обертанні системи з кутовою швидкістю термодинамічна рівновага досягається за умови, коли величина

$$\Delta E_{\text{оберт.}} = \Delta E - M\Omega \quad (9.19)$$

є мінімальною. У виразі (9.19) ΔE та M - відповідно вільна енергія обертової рідини і її повний момент кількості руху.

Виникнення вихрової нитки термодинамічно вигідно, якщо поява останньої призведе до зменшення $\Delta E_{\text{оберт.}}$. Згідно з (9.16) та (9.18) додаток до ΔE , обумовлений виникненням у посудині радіусом R вихрової нитки з моментом кількості руху l_1 паралельним до $\vec{\Omega}$ дорівнює

$$\varepsilon_1 - l_1 \Omega = \frac{\rho_s \chi^2}{4\pi} \ln \frac{R}{r_c} - \frac{\rho_s \chi}{2} R^2 \Omega \quad (9.20)$$

Поява вихрової нитки енергетично вигідна, якщо права частина (9.20) є меншою або дорівнює нулеві, тобто за умови:

$$\Omega \geq \frac{\chi}{2\pi R^2} \ln \frac{R}{r_c} \quad (9.21)$$

Отже, критична швидкість, що є необхідною для утворення одного вихора одиничної циркуляції $\chi_1 = h/m_4$, згідно з (9.21) дорівнює

$$\Omega_{c1} = \frac{h}{2\pi m_4 R^2} \ln \frac{R}{r_c} \quad (9.22)$$

Критична швидкість надто мала. Для оцінки числового значення Ω_{c1} будемо вважати, що $r_c \approx 4 \cdot 10^{-8}$ см - приблизно міжатомна відстань. Тоді для $R \approx 10$ см, $\Omega_{c1} \approx 2,4 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1}$, а для типового значення $R \approx 1$ см критична швидкість обертання складає $2,7 \cdot 10^{-3} \text{ c}^{-1}$. Ми бачимо, як легко утворюються вихорові нитки і дуже важко виготовити "зразок" He-II, у якому вихори відсутні. У достатньо великих посудинах вихори можуть утворюватись у He-II, що знаходиться у спокої, бо він приймає участь в обертанні Землі, хоча кутова швидкість добового обертання Землі складає всього $7,4 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1}$. Однак, при занадто низьких кутових швидкостях $\Omega < \Omega_{c1}$ стійким є стан надплинної рідини, у якому всюди $\vec{v}_s = 0$. Такий стан спостерігали Гесс і Фейрбенк (1967 р.) при вимірюванні моменту кількості руху циліндричної посудини з рідким гелієм при його охолодженні нижче λ -точки. У цих дослідів момент кількості руху, що набував гелій при утворенні стану з $\vec{v}_s = 0$, визначався за зміненням моменту кількості руху у процесі нагріву рідкого гелію вище за T_λ , тобто у He-I, у якому виникало твердотільне обертання. З цих дослідів постає, що при достатньо низьких $\Omega < \Omega_{c1}$ надплинна рідина виникає з нульовим моментом кількості руху відносно лабораторної системи координат. Значення $\Omega = \Omega_{c1}$, вище якого виникає обертання надплинного компонента, добре узгоджується з розрахованим за допомогою (9.22).

Розглянуті вище міркування дозволяють також зрозуміти причину, за якою вихорові нитки з $n > 1$ у (9.8) є нестійкими. Дійсно, при заміні значення $n = 1$ значенням $n > 1$ енергія збільшується в n разів, а момент M - в n^2 разів. Зрозуміло, що при цьому $\Delta E_{\text{обрт.}}$ задалегідь збільшується.

При узагальненні обчислень, що призводять до співвідношення (9.22) Гесс (1967 р.) визначив кутові швидкості, необхідні для утворення двох, трьох, чотирьох і т.д. одноквантованих вихорів. При цьому залежність кількості вихорів від кутової швидкості має ступінчасту форму, яку і спостерігали Панкард та Сандерс (1969р.) Кількість вихорів визначалась за кількістю захоплених серцевинами вихорів електронів, що були пропущені крізь He-II. Захоплені електрони потім здобувались з вихорів електричним полем, що докладалось уздовж серцевини. Заряд, що був накопичений за певний час на вихорах, був пропорційним до кількості утворених вихорів.

При збільшенні кутової швидкості посудини кількість вихорових ниток одиничної циркуляції зростала. Їх вісі були паралельними до $\vec{\Omega}$. Зрозуміло, що цей процес обмежений критичною швидкістю обертання Ω_{c2} , за якою починається перекривання серцевин вихорових ниток. Звідкіля отримуємо

$$\Omega_{c2} = \frac{h}{m_4 r_c^2} \quad (9.23)$$

Якщо знову покласти $r_c \approx 10^{-8}$ см, то маємо $\Omega_{c2} \approx 10^{-12} \text{ c}^{-1}$. У всіх практичних випадках кутові швидкості задовольняють умові $\Omega < \Omega_{c2}$. Наприкінці стисло розглянемо пружні властивості вихорових ниток. За умови $\Omega \gg \Omega_{c1}$ вісі вихорових ниток повинні розташовуватись паралельно до $\vec{\Omega}$. Так як при наближенні до серцевини вихора

швидкість надплинного компонента \vec{v}_s зростає (див. рис. 9.1), то з рівняння Бернуллі плине, що тиск повинний падати, що і призводить до натягу нитки.

Дійсно, згідно з рівнянням Бернуллі, тиск у рідині дорівнює

$$P = P_0 - \frac{1}{2} \rho_s v_s^2 \quad (9.24)$$

де P_0 - максимальний тиск на нескінченній віддалі від вихора у випадку обертання за законом $v_s = nh / m_4 r$. При наближенні до серцевини вихора тиск падає, що і чинить силу, з якою вихор закріплюється на поверхні де він скінчується. У результаті вихрова нитка буде знаходитись у натягнутому стані, а сила натягу

$$F = \int (P_0 - P) 2\pi r dr \quad (9.25)$$

згідно з виразом (9.15) чисельно співпадає з енергією вихора одиничної довжини ε_1 (бо натяг дорівнює $\partial(\varepsilon l) / \partial l$, де l - довжина вихора). Цим визначаються пружні властивості вихорів.

Якщо вихрова нитка згинається, то виникає сила F , що намагається її вирівняти. Процес вирівнювання призводить до руху вихрової нитки у надплинній рідині, тому вихор зазнає також дію сили Магнуса

$$\vec{F}_M = \rho_s [\vec{\chi}, \vec{v} - \vec{v}_s] \quad (9.26)$$

де v - швидкість вихора.

На рис 9.3 зображені сили, що діють на зогнуту вихрову нитку. Сила Магнуса спрямована перпендикулярно до сили F і обидві сили призводять до того, що уздовж вихрової нитки розповсюджуються поперечні хвилі з круговою поляризацією, які були досліджені Холлом у 1958 р. У його експериментах стос дисків осцилював у обертовому He-II. У результаті зменшення тиску Бернуллі у серцевині вихрових ниток вони прилипали до дисків. Рух дисків збуджував крутильні коливання вихрових ниток. Поміж двома коливаннями спостерігались резонанси, частота котрих добре узгоджувалась з теоретичними висновками. Результати експериментів Холла є подальшим доказом слушності наведених виразів для енергії і циркуляції вихрових ниток в обертовому He-II.

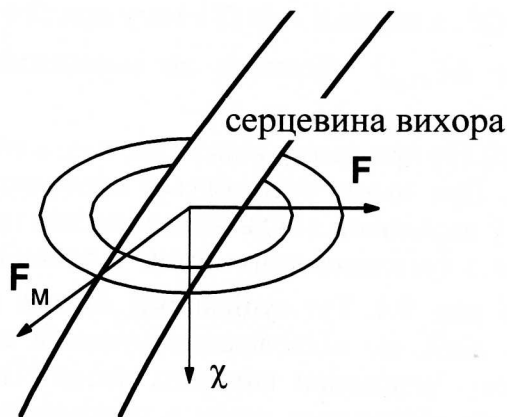


Рис.9.3. Напрямок сил, що діють на зогнуту вихрову нитку.

9.7. Твердотільне обертання надплинної рідини.

Вище ми показали, що при наявності у He-II ниток, навколо яких виникають вихори надплинного компонента, надплинна рідина починає обертатись, хоча $\text{rot } \vec{v}_s \equiv 0$. Зупинимось, далі, на з'ясуванні причин, яким чином присутність вихрових ниток може призвести до обертання надплинного гелію як цілого. Підрахуємо рівноважну густину

вихрових ниток. При збільшенні швидкості обертання циліндричної посудини (за критичне значення Ω_{cl}), виникають нові вихрові нитки одиничної циркуляції і їх вісі паралельні до $\vec{\Omega}$. При $\Omega \gg \Omega_{cl}$ кількість таких ниток буде вже досить великою. Розподіл вихрових ниток по перерізу посудини просте при цьому до рівномірного значення, і у межевому випадку їх сукупність імітує обертання надплинного компонента як цілого.

Кількість вихрових ниток при заданому великому значенні легко визначити, вимагаючи, щоб циркуляція надплинної швидкості по контуру, що охоплює велику кількість ниток, мала би значення, яке відповідає обертанню рідини як цілого. Нехай такий контур охоплює одиничну площину на поверхні перпендикулярній до вісі обертання, тобто

$$\oint \vec{v}_s d\vec{l} = \nu \cdot 2\pi\chi = \nu \frac{h}{m_4} \quad (9.27)$$

де ν - густина розподілу вихрових ниток по перерізу посудини.

З іншого боку, при обертанні рідини як цілого, $\text{rot} \vec{v}_s = 2\vec{\Omega}$, і та ж сама циркуляція дорівнює 2Ω . Порівнявши обидва значення знайдемо

$$\nu = \frac{2\Omega}{\chi} = \frac{m_4\Omega}{\pi\hbar} \quad (9.28)$$

У посудині радіуса R , повна кількість вихорів дорівнює

$$N_b = R^2 \frac{m_4}{\hbar} \Omega \quad (9.29)$$

Звертаючись до формули (9.28) знаходимо, що при $\Omega \approx 1\text{с}^{-1}$ густина вихорів $\nu \approx 1 \cdot 10^3 \text{см}^{-2}$. Отже, вже при одному оберті у секунду вісі вихрових ниток знаходяться на відстані 10^{-2} см одна від одної. Звичайні швидкості обертання приладів з He-II знаходяться в інтервалі $(10^{-1} \div 10^2)\text{с}^{-1}$. Відповідно, густина вихорів складає $(20 \div 2 \cdot 10^5)\text{см}^{-2}$ і відстань поміж ними приблизно $(0,2 \div 2 \cdot 10^{-3})\text{см}$. Як плине з формули (9.29), вихори утворюються біля стінки посудини, а потім розподіляються у всьому об'ємі.

Згідно з формулою (9.29) кількість вихрових ниток пропорційна до Ω . Тому другий член у виразі (9.19) зростає, як Ω^2 , а перший - як Ω і тому при $\Omega \gg \Omega_{cl}$ ним можна нехтувати. Відтоді, мінімізація $\Delta E_{\text{оберт.}}$ збігається до максимізації M , яка досяжна саме при обертанні надплинної рідини як цілого.

З обрахунків постає, що виразу (9.19) при цьому відповідає певна конфігурація вихрових ниток одиничної циркуляції. При цьому утворюється правильна трикутна ґратка з мінімальною вільною енергією у порівнянні з будь-якими іншими ґратками.

Картина потоку, що складається з густопакованих ниток у площині перерізу, перпендикулярного до $\vec{\Omega}$, показана на рис. 9.4. Тут суцільними лініями позначений напрямок течії потоку, штриховими - лінії, що відповідають нульовій швидкості в обертій системі координат, крапками - серцевини вихрових ниток. Така картина спостерігається у системі координат, що обертається разом з посудиною з кутовою швидкістю $\Omega \gg \Omega_{cl}$.

Виникнення вихрових ниток зрозумілим чином порушує надплинні властивості рідини. Елементарні збудження, що складають нормальний компонент He-II, почнуть зараз розсіюватись на нитках, шляхом передачі до них, а втім і до самого надплинного компонента, частини свого імпульсу. Іншими словами, з являються сили взаємного тертя поміж надплинним та нормальним компонентами рідини.

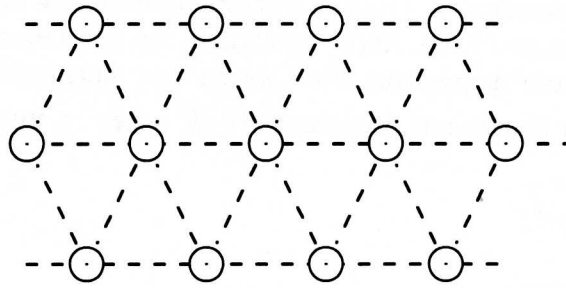


Рис.9.4. Трикутна ґратка фейнманівських вихорів у обертовому надплинному гелії.

Вихрові нитки, взагалі кажучи, переміщуються у просторі разом з рідиною, що плине. При абсолютному нулю, коли рідкий гелій є цілковито надплинним, кожен елемент dl нитки рухається з тією швидкістю \vec{v}_s , яку рідина має у точці знаходження цього елемента. При $T \neq 0$ сила тертя, яку зазнає вихрова нитка, призводить до виникнення деякої швидкості переміщення відносно надплинного компонента.

Холл і Вайнен (1956 р.) отримали силу взаємного тертя \vec{F}_{ns} на одиницю об'єму нормальної рідини, яка виникає, як результат взаємодії поміж сукупністю прямих вихрових ниток, що характеризуються величиною $\vec{\omega} = \nu \chi$, та нормальним компонентом, який рухається з середньою дрейфовою швидкістю \vec{v}_n . Ця сила дорівнює

$$\vec{F}_{ns} = B \frac{\rho_s \rho_n}{2\rho} \cdot \frac{\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{v}_n - \vec{v}_s)]}{\vec{\omega}} + B' \frac{\rho_s \rho_n}{2\rho} \cdot [\vec{\omega} \times (\vec{v}_n - \vec{v}_s)] \quad (9.30)$$

У формулі (9.30) \vec{v}_s - середня надплинна швидкість в області, що містить багато вихрових ниток, B та B' - сталі.

Мабуть, взаємодія, головним чином обумовлена зіткненнями ротонів з вихровими нитками, тому більша частина експериментів проводилась при $T > 1$ К, коли кількість ротонів значна. Відмітимо, однак, що справжня природа сил поміж двома компонентами He-II ще не встановлена.

Рівняння дворідинної гідродинаміки Ландау (див.розд.4[12]), модифіковані додаванням сили взаємного тертя, залишаються слухними тільки при достатньо низьких швидкостях, тому що при значних швидкостях (наприклад, при наявності потужних потоків тепла) режим течії стає турбулентним. У цьому випадку вихрові нитки вже розташовані нерегулярним чином. Це призводить до помітного збільшення взаємодії поміж надплинним та нормальним компонентами.

9.8. Вихрові кільця.

Вихрові нитки, що виникають при обертанні посудини з He-II, мають прямолінійну форму. Однак, течія надплинної рідини уздовж капілярів, або щілин може супроводжуватись утворенням замкнених вихрових ниток - вихрових кілець. Якщо ця течія чиниться з швидкістю, що перевищує критичну, то надплинність порушується. Фактично, значення цих критичних швидкостей залежать від конкретних умов. Суттєво, що вони набагато менші за ті значення, поза якими порушується критерій надплинності Ландау (2.14) [12].

Знайдемо характеристики вихрових кілець і значення критичної швидкості при появі у He-II вихрового кільця. Для вихрової нитки довільної форми розподіл швидкостей визначається наступною формулою

$$\vec{v}_s = \chi \int \frac{d\vec{l} \cdot \vec{R}}{R^3} \quad (9.31)$$

Тут інтегрування проводиться уздовж нитки, а \vec{R} - радіус-вектор, проведений від $d\vec{l}$ до точки спостереження за швидкістю (див.рис.9.5а). Легко помітити, що цей вираз можна написати прямо за аналогією з відомою формулою Біо-Савара для магнітного поля лінійних струмів j . Дійсно, циркуляція швидкості дорівнює $\oint \vec{v}_s d\vec{l} = 2\pi\chi$, а циркуляція магнітного поля H дорівнює $\oint \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$.

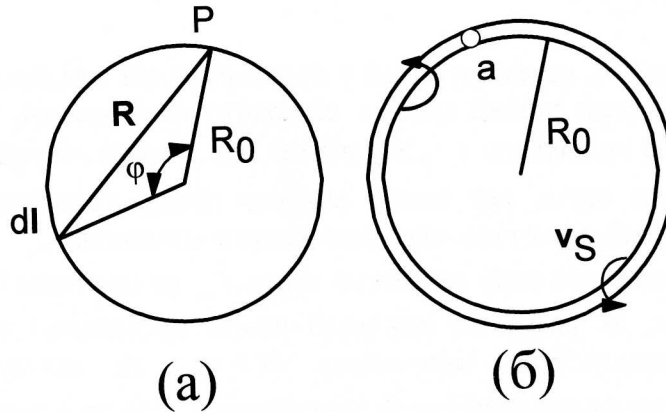


Рис.9.5. Вихрове кільце. а) до визначення v ; б) течія рідини навколо вихрового кільця.

Таким чином, щоб отримати (9.31) треба просто здійснити заміну $\vec{H} \rightarrow \vec{v}_s$ та $\vec{j}/c \rightarrow \chi/2$. Тому що, кожний елемент вихрового кільця рухається з швидкістю \vec{v}_s у даній точці, зважаючи на симетрію задачі, ця швидкість у всіх його точках буде однаковою. Отже достатньо визначити швидкість \vec{v}_s , що створена у будь-якій точці кільця P рештою частин. Елементи $d\vec{l}$ і \vec{R} розташовані у площині кільця, тому швидкість, згідно з формулою (9.31), у точці P перпендикулярна до площини кільця, у результаті чого кільце переміщується без змінення своєї форми і розміру. З рис. 9.5а можна побачити, що: $dl = R_0 d\phi$, $R = R_0 \sin(\phi/2)$, $[\vec{dl} \cdot \vec{R}] = R \sin(\phi/2) dl$. Підставляючи (9.32) до (9.31) знаходимо для швидкості кільця вираз

$$v_s = \frac{\chi}{8R_0} 2 \int \frac{d\phi}{\sin(\phi/2)} \quad (9.32)$$

Так як цей інтеграл логарифмічно розбігається на нижній межі і повинний бути обрізаним на значенні $\phi \approx a/R_0$, яке відповідає атомним відстаням ($\sim a$) елемента dl від точки спостереження P . З логарифмічною точністю інтеграл визначається областю значень $a/R_0 \ll \phi \ll \pi$ і дорівнює $\int_{a/R_0}^{\pi} \frac{2d\phi}{\phi} = 2 \ln \frac{R_0}{a}$. Остаточно маємо

$$v_s = \frac{\chi}{2R_0} \ln \frac{R_0}{a} = \frac{\hbar}{2m_4 R_0} \ln \frac{R_0}{a} \quad (9.33)$$

Енергія вихрового кільця з тією ж логарифмічною точністю буде

$$\varepsilon_p = 2\pi^2 R_0 \rho_s \frac{\hbar^2}{m_4^2} \ln \frac{R_0}{a} \quad (9.34)$$

Так як енергія ε_p зв'язана з швидкістю співвідношенням $d\varepsilon_p/dp = v_s$, де p - імпульс кільця, з (9.33) та (9.34) постає, що

$$dp = \frac{d\varepsilon_p}{v_s} = 4\pi^2 \rho_s \frac{\hbar}{m_4} R_0 dR_0.$$

З логарифмічною точністю при диференціюванні треба вважати великий логарифм сталим, тому

$$p = 2\pi^2 \rho_s \frac{\hbar}{m_4} R_0 \quad (9.35)$$

Отримані формули (9.34) та (9.35) визначають у параметричному вигляді (параметр R_0) залежність $\varepsilon(p)$ для вихрових кілець.

Застосуємо зараз критерій Ландау до вихрових кілець

$$v_{cs} = \min \frac{\varepsilon(p)}{p} = \frac{\hbar}{m_4 R_0} \ln \frac{R_0}{a} \quad (9.36)$$

Отримана формула з'ясовує спостерігаєму сталість добутку $v_{cs} R_0$ і дає близькі до спостерігаємих експериментально значення критичних швидкостей. Рис.9.5 б) ілюструє течію рідкого гелію навколо вихрового кільця радіуса R_0 і з радіусом серцевини a . Рідина циркулює навколо серцевини, а вихрове кільце рухається у напрямку до читача з швидкістю, що надається за формулою (9.33).

Так як вихрові кільця мають як ціле не тільки певні енергії, але і певні імпульси, у цьому сенсі вони уявляють собою особливий тип елементарних збуджень у He-II.

9.9. Експериментальне потвердження існування квантованих вихорів.

Найбільш наочний і дивовижний доказ існування вихорів у He-II був отриманий Рейфільдом та Райфом (1963, 1965 р.р.), які вивчали у ньому рух іонів. Через існування у іонів заряду їх рух крізь рідину легко контролювати. Іони у рідкий гелій потрапляють з джерела α -частинок, які іонізують рідину на своєму шляху. Позитивний іон уявляє собою конгломерат нейтральних атомів і однієї α -частинки діаметром $\sim 10 \text{ \AA}$. Від'ємний іон - це електрон, самозахоплений у порожнині діаметром (10 - 20) \AA .

У цих дослідах вимірюють рухливість іонів

$$\mu = \bar{v} / E \quad (9.37)$$

де \bar{v} - середня дрейфова швидкість іону, E - докладене електричне поле. Дрейфову швидкість можна визначити із спостережень за часом прольоту іону поміж двома електродами, що розташовані у рідкому гелії.

Рейфільд і Райф винайшли, що в інтервалі температур $0,7 < T < 1,8 \text{ K}$ μ як позитивних так і від'ємних іонів змінюється як $\sim \exp(\Delta/k_B T)$ і Δ майже точно співпадає з енергією ротонного мінімуму (див. рис. 3.1). Тому що концентрація ротонів $n_p \sim \exp(\Delta/k_B T)$ довжина вільного перебігу $l \sim \bar{v} \sim n_p^{-1}$. Тому можна вважати, що у вказаному інтервалі температур рух іонів визначається головним чином співударяннями з ротонами.

З іншого боку, при $T \approx 0,3 \text{ K}$ експерименти показали, що \bar{l} як позитивних так і від'ємних іонів значно менша, ніж при більш високих температурах, що можливо з'ясувати нехтовно малою концентрацією ротонів. Енергія іонів падає при збільшенні їх швидкості (Рис.9.6). Така залежність цілковито неможлива для матеріальних частинок. При перевищенні критичної швидкості вихороутворення іон народжує вихрове кільце і, що особливо суттєво, далі рухається разом з ним. Тому рух іонів з надкритичною швидкістю виявився підлеглим до законів динаміки кільцевих вихорів.

Вирази для кінетичної енергії і швидкості вихрового кільця, у якого заповнена рідиною серцевина обертається як тверде тіло, відомі з класичної гідродинаміки.

Застосовуючи їх до надплинного кільця, з (9.33) бачимо, що $v_s \sim 1/R_0$, енергія $\varepsilon_p \sim R_0$ і $v \sim 1/E$.

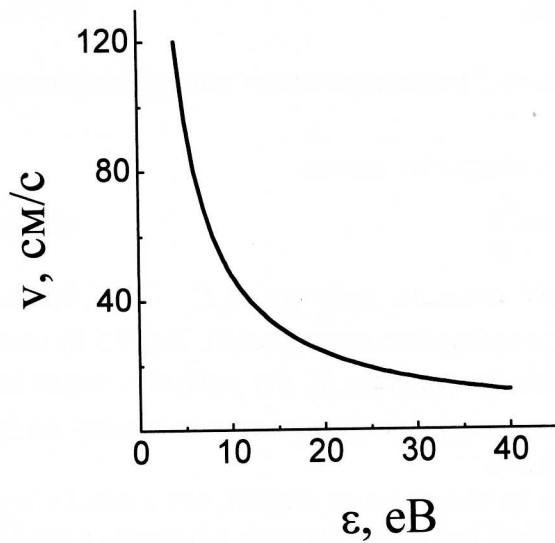


Рис.9.6. Залежність швидкості іонів у He-II від їх енергії.

Рейфільд і Райф отримали чудову згоду експериментальних даних з кривою, яка була отримана на підґрунті згаданих виразів для вихрового кільця, якщо припустити, що циркуляція дорівнює h/m_4 і $a_0 = 1,3 \text{ \AA}$.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Підрахуйте середню відстань поміж вихорами за допомогою співвідношення (9.24), коли $\Omega = 1\text{с}^{-1}$, припустивши, що температура є достатньо низькою, тобто $\rho_s \approx \rho$.
2. З'ясуйте: чи вихрові нитки є новим типом елементарних збуджень?
3. У чому складається "парадокс" критичних швидкостей?
4. Порівняйте енергії самотнього вихора та вихрового кільця. Який висновок можна зробити з цього?

ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Физика низких температур. Под ред. А.И.Шальникова. Глава 10. М. : ИЛ, 1959.
2. Тилли Д.Р., Тилли Дж. Сверхтекучесть и сверхпроводимость. М.: Мир. 1977.
3. Халатников И.М. Теория сверхтекучести. М.: Наука, 1971.
4. Паттерман С. Гидродинамика сверхтекучей жидкости. М.: Мир, 1978.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, т.6. Гидродинамика. М.: Наука, 1978.
6. Лифшиц Е.М. Питаевский Л.П. Теоретическая физика, т.9. Статистическая физика.: Наука, 1978.
7. Капица П.Л. Научные труды. Физика и техника низких температур. М.:Наука, 1989.
8. Андроникашвили Э.Л. , Мамаладзе Ю.Г., Цакадзе С.Дж. Физика сверхтекучего гелия. Книга I. Тбилиси, Мецниереба, 1990.
9. Андроникашвили Э.Л. , Мамаладзе Ю.Г., Цакадзе С.Дж. Физика сверхтекучего гелия. Книга II. Тбилиси, Мецниереба, 1978.
10. Кондратьев А.С., Кучма А.Е. Лекции по теории квантовых жидкостей. Л.: Из-во ЛГУ, 1989.
11. Кресин В.З. Сверхпроводимость и сверхтекучесть. М.: Наука, 1978.