

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ В. Н. КАРАЗИНА

ЧЕБОТАРЕВ В. И.

ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В ДЛИННЫХ ЛИНИЯХ

Учебное пособие
для самостоятельной работы студентов
физических специальностей

ХАРЬКОВ – 2008

УДК 621.396
ББК 32.84
Че34

*Рекомендовано ученым советом радиофизического факультета Харьковского
национального университета имени В. Н. Каразина
(протокол № 5 от 23. 05. 2008)*

Рецензенты:

Проф. кафедры прикладной электродинамики ХНУ имени В. Н. Каразина,
доктор физ.-мат. наук Л. П. Яцук;

Зав. отд. космической радиофизики РИ НАН Украины, доктор физ.-мат. наук,
проф. А. А. Минаков.

Чеботарев В. И.

Че34 Волновые процессы в длинных линиях: Учебное пособие для
самостоятельной работы студентов физических специальностей / –
Х.: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2008. – 117 с.

В пособии методами теории электрических цепей рассмотрены волновые процессы в радиотехнических цепях с распределенными параметрами. Представлен гармонический волновой процесс в разновидностях длинных линий. Исследованы явления, присущие этому процессу. Определены входное сопротивление и передаточная функция линий передачи, указаны их практические применения. Операторным методом исследованы нестационарные волновые процессы. Пособие предназначено для самостоятельной работы студентов физических специальностей при изучении курсов «Радиотехнические цепи и сигналы», «Основы радиоэлектроники» и спецкурса кафедры прикладной электродинамики.

У посібнику методами теорії електричних кіл розглянуто хвильові процеси в радіотехнічних колах з розподіленими параметрами. Представлено гармонічний хвильовий процес у різновидах довгих ліній. Досліджено явища, які притаманні цьому процесу. Визначено вхідний опір та передавальна функція ліній передачі, подано їх практичне застосування. Операторним методом досліджено нестационарні хвильові процеси. Посібник призначено для самостійної роботи студентів фізичних спеціальностей при вивченні курсів «Радіотехнічні кола та сигнали», «Основи радіоелектроніки» та спецкурсу кафедри прикладної електродинаміки.

© ХНУ имени В. Н. Каразина, 2008.

© Чеботарев В. И., 2008.

© Дончик И. Н., 2008.

1. Общие сведения

1.1. Введение

В физике **волной** называют распространяющееся в среде изменение ее состояния (возмущение). Наиболее важными и часто встречающимися видами волн являются: упругие волны, волны на поверхности жидкости и **электромагнитные волны**. Частными видами электромагнитных волн являются: **радиоволны**, свет, инфракрасное и ультрафиолетовое излучение, рентгеновские лучи и др. Основное свойство всех волн независимо от их природы состоит в том, что **в волнах осуществляется перенос энергии без переноса вещества**. Именно это свойство используется в радиосвязи для передачи информации, а в радиолокации и радионавигации – для сбора информации. Явления, связанные с распространением волн в активных и нелинейных средах, составляют основу широкого класса электронных приборов диапазонов сверхвысоких частот и оптического.

В **теории волн** из всего многообразия волновых процессов выделяют более или менее элементарные, но универсальные типы волн, что позволяет рассматривать их поведение с общих позиций, независимо от их физической природы. Эта общность проявляется, прежде всего, в том, что волновые движения различных физических объектов описываются однотипными уравнениями или соотношениями. Для систем с непрерывно распределенными параметрами это обычно дифференциальные уравнения в частных производных, связывающие изменения функций, характеризующих волновое движение по времени и координатам. Эти функции могут быть как скалярными, так и векторными. Рассматриваемые здесь **одномерные скалярные волны электрических напряжений и токов в электрических цепях с распределенными параметрами** являются их простейшим примером. Движение этих волн зависит только от времени t и одной пространственной координаты x .

Среди одномерных волн выделяются **бегущие волны** $S(t, x)$, профиль которых перемещается без искажений с постоянной скоростью v . Описание одномерных скалярных волн поясняет рис. 1.1. Здесь $S(x)$ – функция,

характеризующая некоторое исходное распределение – профиль волны в момент времени $t = 0$. При смещении (сдвиге) этой функции вправо или влево на величину, равную a , она принимает вид $s(x \mp a)$, который в случае $a = vt$ описывает две бегущие волны. Первая из них $s(x - vt)$ представляет волну, бегущую слева направо, вторая $s(x + vt)$ – волну, бегущую справа налево. Эквивалентными представлениями таких бегущих волн также являются функции вида $s(t - x/v)$ и $s(t + x/v)$.

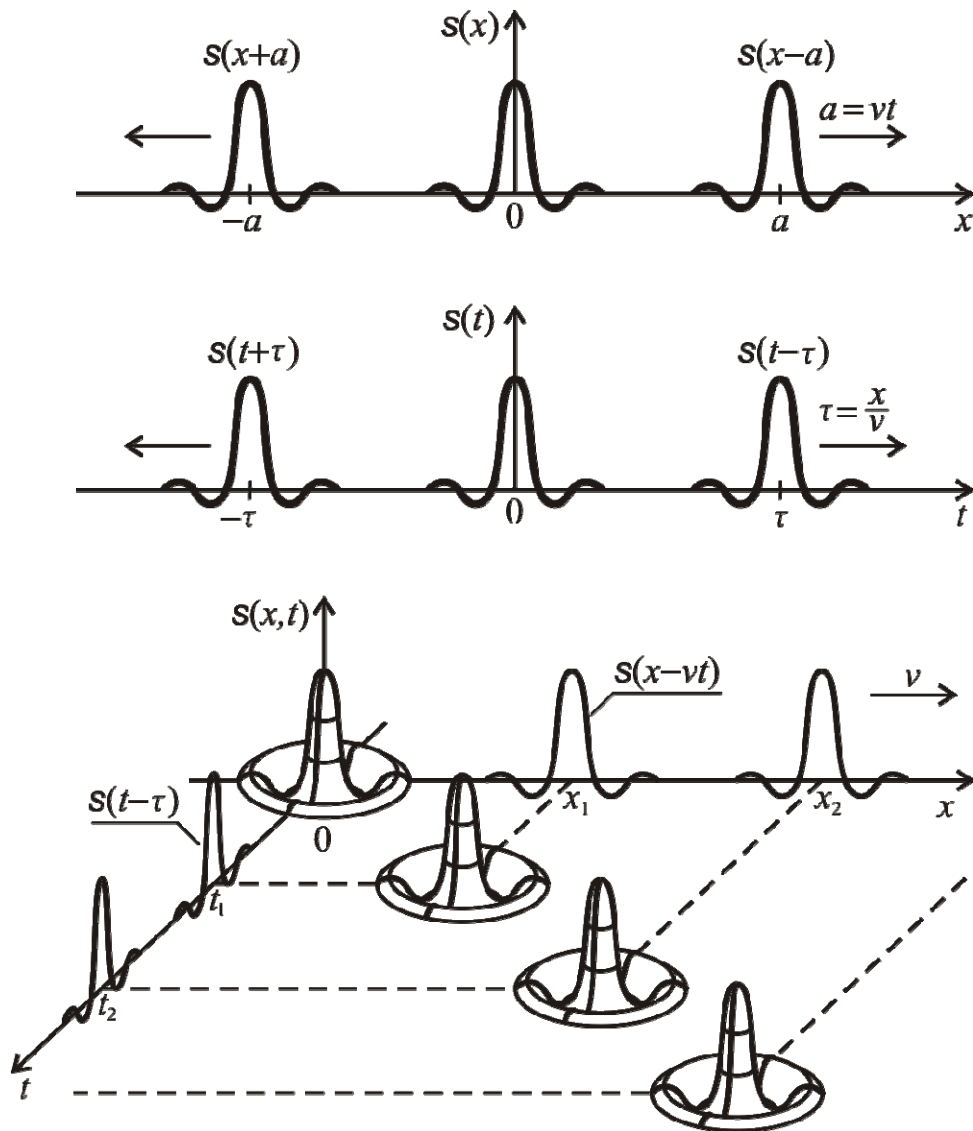


Рис. 1.1. Одномерные скалярные волны

Важным частным случаем бегущих волн является распространяющееся гармоническое колебание:

$$s(t, x) = A \cos(\omega t \mp \beta x + \varphi_0) = A \cos(\omega(t \mp x/v) + \varphi_0). \quad (1.1)$$

Здесь: A – амплитуда, ω – круговая частота, β – волновое число, φ_0 – постоянный сдвиг фазы, $v = \omega/\beta$ – скорость распространения. Знак при переменной x определяет направление распространения волны. Функция (1.1) периодична как во времени (с периодом $T = 2\pi/\omega$), так и в пространстве (с периодом $\lambda = 2\pi/\beta$).

1.2. Электрические цепи с распределенными параметрами

Все реальные радиоэлектронные устройства обладают размерами, электромагнитные процессы, происходящие в них, являются волновыми, а реальные компоненты, входящие в их состав, часто являются нелинейными и изменяют со временем свои параметры. В силу исключительной сложности таких объектов при их исследовании методами теории электрических цепей им ставят в соответствие *модели* – упрощенные идеализированные электрические цепи, составленные из идеальных элементов. Выбор модели диктуется составом компонентов исходного устройства, его размерами, характером протекающих в нем процессов и целями исследования. В частности, если размеры устройства сравнимы с длиной волны λ распространяющихся колебаний или превышают ее, следует учитывать распределение элементов в пространстве и волновой характер процессов. В таком случае, электрические цепи, моделирующие процессы в таких устройствах, называют *цепями с распределенными параметрами (элементами)*.

На этапе составления уравнений таких цепей возникают трудности, обусловленные в первую очередь тем обстоятельством, что в них не выполняются законы Кирхгофа. Вторая особенность состоит в том, что элементарными компонентами этих цепей обычно являются расположенные в пространстве проводники различной формы, иногда само пространство, а иногда диэлектрические и полупроводниковые компоненты или пучок электронов. Для таких объектов выбор элементарных моделей затруднен, а определение их параметров представляет собой самостоятельную задачу прикладной электродинамики или электроники.

Основой для записи уравнений цепей с распределенными элементами все же являются законы Кирхгофа, а общий подход к построению уравнений заключается в том, что цепь разделяется на участки, размеры которых выбираются достаточно малыми, чтобы законы Кирхгофа выполнялись. В результате получается цепь, составленная из $2n$ -полюсников, для которой записывается система уравнений, приближенно описывающая процессы в исходной цепи с распределенными элементами.

В ряде важных случаев устремление к нулю размеров участков цепей приводит к системам дифференциальных уравнений в частных производных, удобных для аналитического исследования процессов. Ниже такой подход будет проиллюстрирован при получении *уравнений длинных линий (телеграфных уравнений)*, описывающих процессы в *длинных линиях* – простейших моделях электрических цепей с распределенными элементами, учитывающих распределение элементов вдоль только одной координаты. Несмотря на простоту таких моделей, уравнения длинных линий играют фундаментальную роль в теории волновых процессов. Они позволяют описывать волновые процессы и явления, происходящие как в различных линиях передачи (двухпроводных, коаксиальных, полосковых), так и в системах, основанных на распространении волн в активных и нелинейных средах.

1.3. Первичные параметры длинных линий

Рассмотрим систему с длинной линией, представленную на рис. 1.2а примером двухпроводной линии передачи длиной ℓ . Здесь же указаны выбранная система отсчета координаты x , напряжения $u(t, x)$ и тока $i(t, x)$.

Электрическая энергия от генератора (Γ) в нагрузку (H) переносится электромагнитным полем, распространяющимся в пространстве, окружающим проводники линии, сами же *проводники являются только направляющими* для передачи энергии к месту назначения – к нагрузке. Поэтому, строго говоря, анализ рассматриваемой системы должен сводиться к расчету векторов

электромагнитного поля, например, напряженностей электрического поля \vec{E} и магнитного поля \vec{H} в каждой точке пространства в любой момент времени. Будем полагать, что поперечные размеры линии малы по сравнению с длиной волны λ . При таком условии распределение электрического и магнитного полей в линии имеет характерный вид, называемый **поперечной волной** – ***T-волной*** или ***ТЕМ-волной***. В случае распространения в линии таких волн напряжение между проводниками однозначно определяется криволинейным интегралом $u(t, x) = \int \vec{E} d\vec{\ell}$, который вычисляют в некотором сечении линии от одного проводника до другого. Ток в проводниках линии определяется контурным интегралом $i(t, x) = \oint \vec{H} d\vec{\ell}$.

Из этих определений следует, что ***при рассмотрении процессов распространения поперечных волн в длинной линии с одинаковым успехом можно пользоваться как методами электродинамики, так и методами теории электрических цепей***. Если линия выполнена из идеально проводящих проводников – оба метода приводят к одинаковым результатам.

В дальнейшем для вывода основных уравнений длинных линий воспользуемся методами теории электрических цепей. Естественными физическими параметрами элементов двухпроводной линии передачи являются индуктивность и сопротивление проводников, емкость между проводниками и проводимость среды, в которой они расположены. Этим физическим элементам длинной линии сопоставляются ***распределенные идеальные элементы***: индуктивность L_P ; емкость C_P ; резистивное сопротивление R_P , учитывающее омические потери в проводнике; резистивная проводимость G_P , учитывающая взаимодействие волн со средой. Каждый из этих распределенных элементов характеризуется ***погонными параметрами*** L , C , R и G , измеряемыми в соответствующих ***единицах на метр***. Эти величины служат ***первичными параметрами*** длинных линий. Подобные распределенные идеальные элементы и соответствующие им погонные параметры сопоставляются и другим разновидностям линий передачи. Значения погонных параметров

рассчитывают по формулам, которые получают для конкретных линий передачи методами электродинамики. Для распространенных линий передачи расчетные формулы приведены в Приложении 1.

Погонные параметры длинных линий L и C принимают только положительные значения, параметр R может быть положительным или равняться нулю, параметр G может быть положительным, равняться нулю и быть отрицательным.

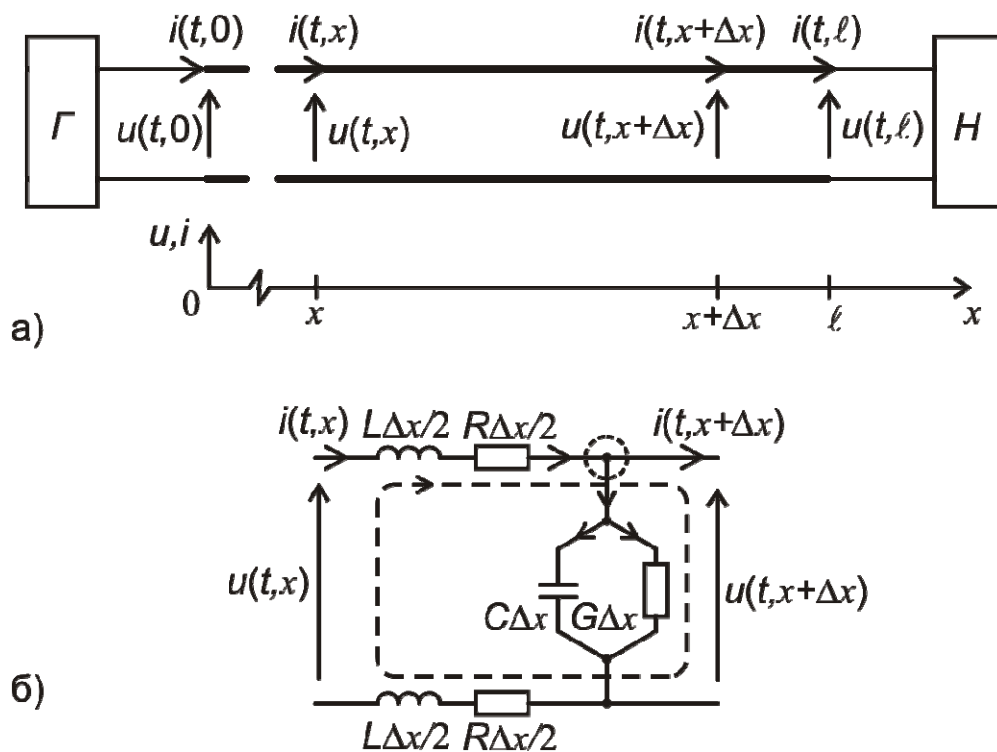


Рис. 1.2. Система с длинной линией:

- а) выбранная система отсчета координаты x , напряжения $u(t,x)$ и тока $i(t,x)$;
- б) схема замещения участка длинной линии

Если погонные параметры сохраняются неизменными вдоль продольной координаты x , линия называется **однородной (регулярной)**, если их значения зависят от координаты x – **неоднородной (нерегулярной)** – изменяющейся в пространстве. Если погонные параметры линии не зависят от времени t , она называется **инвариантной во времени**, если зависят – **параметрической** – изменяющейся во времени. Если значения погонных параметров зависят от

величин токов и напряжений в линии, ее называют **нелинейной**, если не зависят – **линейной**. Если параметр G , характеризующая активные свойства среды, принимает отрицательные значения, линию называют **активной**. Ниже будем рассматривать линейные инвариантные во времени длинные линии.

1.4. Уравнения длинных линий

Рассматривая линейную однородную инвариантную во времени длинную линию, выберем в ней участок, размер которого Δx удовлетворяет неравенству $\Delta x \ll \lambda$. Сопоставим ему схему замещения, содержащую указанные распределенные элементы (рис. 1.2б). Используя законы Кирхгофа для контура, помеченного пунктиром, и для верхнего узла, запишем систему уравнений:

$$\begin{aligned} u(x, t) - u(x + \Delta x, t) - L\Delta x \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} - R\Delta x i(x, t) &= 0, \\ i(x, t) - i(x + \Delta x, t) - C\Delta x \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - G\Delta x u(x, t) &= 0. \end{aligned}$$

Устремляя $\Delta x \rightarrow 0$, получим **уравнения длинных линий (телеграфные уравнения)** – систему двух дифференциальных уравнений в частных производных, связывающую токи и напряжения в произвольном сечении линии. В рассматриваемом случае инвариантной во времени линии эта система имеет вид:

$$-\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} + Ri(x, t), \quad (1.2a)$$

$$-\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = C \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + Gu(x, t). \quad (1.2б)$$

Для построения конкретных решений уравнения длинных линий дополняются **начальными условиями** – заданными функциями, например, в момент времени $t = 0$: $u(x, 0)$, $i(x, 0)$ и **граничными условиями** – заданной связью функций $u(0, t)$ и $i(0, t)$ для левой границы ($x = 0$) и заданной связью функций $u(\ell, t)$ и $i(\ell, t)$ для правой границы ($x = \ell$).

Система (1.2) может быть легко сведена к одному дифференциальному уравнению второго порядка. Для этого достаточно, например, продифференцировать (1.2а) по x , (1.2б) по t , а затем исключить члены, содержащие ток. В результате будет получено одно уравнение относительно напряжения, эквивалентное системе (1.2).

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + (CR + LG) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + RGu(x,t), \quad (1.3)$$

аналогично может быть получено уравнение для тока

$$\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t^2} + (CR + LG) \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + RGi(x,t). \quad (1.4)$$

Эти уравнения описывают процесс волнообразного распространения возмущений вдоль однородной одномерной направляющей структуры и поэтому названы **волновыми уравнениями**. Особенно простой вид волновые уравнения приобретают, когда в системе не учитываются потери ($R = 0$ и $G = 0$):

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t^2}. \quad (1.6)$$

В теории волн часто рассматривается именно этот случай, поскольку учет потерь хотя и вносит дополнительные сведения в общую картину явления, однако значительно усложняет анализ и делает результаты менее наглядными.

Контрольные вопросы и задания

1. Что называют волной? Приведите примеры видов волн. Укажите основное свойство волн, используемое в радиосвязи.
2. Укажите условие, при котором электрические цепи называют цепями с распределенными параметрами.
3. Укажите естественные физические элементы двухпроводной линии передачи и соответствующие им распределенные идеальные элементы и погонные параметры.

4. Ознакомьтесь с Приложением 1. Для каждого типа линий передачи рассчитайте погонные параметры, полагая: в коаксиальной линии передачи $a = 0,5$ мм, $b = 5$ мм; в двухпроводной линии передачи $a = 1$ мм, $D = 20$ мм; в полосковой линии передачи $a = 1$ мм, $h = 1$ мм. В качестве материалов в коаксиальной линии передачи использованы медь и полиэтилен, в полосковой – медь и фторопласт.

5. Укажите основные разновидности длинных линий.

6. Укажите подход, который используется для записи уравнений цепей с распределенными параметрами. В рабочей тетради для самостоятельной работы повторите вывод телеграфных уравнений и соответствующих волновых уравнений.

2. Стационарные волновые процессы в длинных линиях

2.1. Гармонический волновой процесс в линиях

Пусть волновой процесс в линии возбуждается источником гармонических колебаний, расположенным в цепях, подключенных к линии. Поскольку рассматриваемая длинная линия является линейной инвариантной во времени цепью, то в любом ее сечении и напряжение, и ток – гармонические колебания:

$$u(x,t) = U(x)\cos(\omega t + \psi_u(x)); \quad (2.1)$$

$$i(x,t) = I(x)\cos(\omega t + \psi_i(x)). \quad (2.2)$$

Согласно методу комплексных амплитуд сопоставим этим функциям комплексные представления:

$$\dot{u}(x,t) = U(x)e^{j\psi_u(x)}e^{j\omega t} = \dot{U}(x)e^{j\omega t}, \quad (2.3)$$

$$\dot{i}(x,t) = I(x)e^{j\psi_i(x)}e^{j\omega t} = \dot{I}(x)e^{j\omega t}. \quad (2.4)$$

где: $\dot{U}(x) = U(x)e^{j\psi_u(x)}$ и $\dot{I}(x) = I(x)e^{j\psi_i(x)}$ – **распределения комплексных амплитуд напряжения и тока** в линии.

Подставляя комплексы (2.3) и (2.4) в (2.1) и (2.2) получим систему уравнений длинных линий в комплексной форме

$$\begin{aligned} -\frac{d\dot{U}(x)}{dx} &= (R + j\omega L)\dot{I}(x); \\ -\frac{d\dot{I}(x)}{dx} &= (G + j\omega C)\dot{U}(x). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Вводя погонное комплексное сопротивление $Z=(R+j\omega L)$ и погонную комплексную проводимость $Y=(G+j\omega C)$, представим систему уравнений (2.5) в виде:

$$-\frac{d\dot{U}(x)}{dx} = Z\dot{I}(x), \quad (2.6a)$$

$$-\frac{d\dot{I}(x)}{dx} = Y\dot{U}(x). \quad (2.6б)$$

Система (2.6) дополняется граничными условиями: $\dot{U}(0)$ и $\dot{I}(0)$; $\dot{U}(\ell)$ и $\dot{I}(\ell)$, заданными определенным образом согласно условиям задачи.

Дифференцируя по x первое уравнение в (2.6) и подставляя сюда значение $\frac{d\dot{I}(x)}{dx}$ из второго, получим уравнение, которому должна удовлетворять комплексная амплитуда напряжения в однородной линии,

$$\frac{d^2\dot{U}(x)}{dx^2} - ZY\dot{U}(x) = 0. \quad (2.7)$$

Аналогично из (2.6) может быть выведено дифференциальное уравнение, описывающее пространственную зависимость комплексной амплитуды тока:

$$\frac{d^2\dot{I}(x)}{dx^2} - ZY\dot{I}(x) = 0. \quad (2.8)$$

Заметим, что нет необходимости решать оба уравнения (2.7) и (2.8). Если найдено распределение комплексной амплитуды $\dot{U}(x)$, служащее решением (2.7), то распределение $\dot{I}(x)$ может быть получено дифференцированием первого уравнения системы (2.6).

В теории волновых процессов уравнения такого вида играют фундаментальную роль, их называют **одномерными уравнениями Гельмгольца**. Представим уравнение (2.7) в виде:

$$\frac{d^2\dot{U}(x)}{dx^2} - \gamma^2\dot{U}(x) = 0. \quad (2.9)$$

Здесь $\gamma = \sqrt{ZY}$ – **постоянная (коэффициент) распространения** – величина, характеризующая конкретную линию передачи.

Характеристическое уравнение линейного дифференциального уравнения (2.9) имеет вид $p^2 - \gamma^2 = 0$. Его корни $p_{1,2} = \pm\gamma$ определяют общее решение, описывающее распределение комплексной амплитуды напряжения вдоль линии

$$\dot{U}(x) = \dot{A}_1 e^{-\gamma x} + \dot{A}_2 e^{\gamma x}, \quad (2.10)$$

где комплексные величины $\dot{A}_1 = A_1 e^{j\psi_1}$ и $\dot{A}_2 = A_2 e^{j\psi_2}$ – постоянные интегрирования, определяемые с помощью граничных условий. Используя первое уравнение системы (2.6), находим распределение вдоль линии комплексной амплитуды тока

$$\dot{I}(x) = \frac{1}{Z_B} (\dot{A}_1 e^{-\gamma x} - \dot{A}_2 e^{\gamma x}), \quad (2.11)$$

где $Z_B = \sqrt{Z/Y}$ – параметр линии передачи, называемый **волновым сопротивлением**.

Комплексные величины γ и Z_B , характеризующие линию передачи, служат ее **вторичными параметрами**. При расчетах обычно именно их используют в качестве основных характеристик линии передачи. С первичными параметрами L , C , R и G , рассматриваемой длиной линии, они связаны выражениями:

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha + j\beta, \quad (2.12)$$

$$Z_B = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = |Z_B| e^{j\varphi_Z}. \quad (2.13)$$

Физический смысл коэффициентов в выражениях (2.10) и (2.11) будет пояснен ниже.

При теоретическом исследовании процессов, происходящих в линейных однородных инвариантных во времени длинных линиях, наряду с общим случаем будем рассматривать важные для практики варианты: **длинные линии без потерь**, **длинные линии с малыми потерями**, **длинные линии без искажений сигналов и активные длинные линии**.

В **линиях без потерь** погонные параметры R и G , характеризующие потери, считают равными нулю, ($R = 0$, и $G = 0$). В этом случае постоянная распространения γ принимает мнимое значение

$$\gamma = j\omega\sqrt{LC}. \quad (2.14)$$

Таким образом, здесь $\alpha = 0$, $\beta = \omega\sqrt{LC}$. Волновое сопротивление Z_B в линиях без потерь принимает вещественное значение, обозначаемое буквой ρ

$$Z_B = \rho = \sqrt{L/C}. \quad (2.15)$$

В *линиях с малыми потерями* выполняются условия $R \ll \omega L$ и $G \ll \omega C$. Преобразуем формулу (2.12) и используем разложение радикала в степенной ряд:

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{-\omega^2 LC \left(1 + \frac{R}{j\omega L}\right) \left(1 + \frac{G}{j\omega C}\right)} = j\omega\sqrt{LC} \sqrt{\left(1 + \frac{R}{j\omega L}\right)} \sqrt{\left(1 + \frac{G}{j\omega C}\right)} \\ &\approx j\omega\sqrt{LC} \left(1 + \frac{R}{2j\omega L}\right) \left(1 + \frac{G}{2j\omega C}\right). \end{aligned}$$

Раскрывая скобки и удерживая существенные слагаемые, получим коэффициент распространения γ в виде

$$\gamma \approx \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{G}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} + j\omega\sqrt{LC} = \frac{R}{2\rho} + \frac{G\rho}{2} + j\omega\sqrt{LC}.$$

Таким образом, в линиях с малыми потерями составляющие постоянной распространения α и β и волновое сопротивление определяются приближенными выражениями:

$$\alpha = \frac{R}{2\rho} + \frac{G\rho}{2}, \quad \beta = \omega\sqrt{LC}, \quad (2.16)$$

$$Z_B = \rho = \sqrt{L/C}.$$

В *линиях без искажений* сигналов фазовая скорость не должна зависеть от частоты. Такое возможно, когда выполняется условие $L/R = C/G$. В этом случае формула (2.12) для постоянной распространения γ принимает вид:

$$\gamma = \sqrt{RG} + j\omega\sqrt{LC}. \quad (2.17)$$

Таким образом, в линиях без искажений $\alpha = \sqrt{RG}$; $\beta = \omega\sqrt{LC}$. Волновое сопротивление в этом случае принимает вещественное значение $Z_B = \rho$.

В *активных линиях* погонный параметр G принимает отрицательное значение ($G < 0$), указывая тем самым на способность линии увеличивать

энергию распространяющихся в ней волн. Ниже этот случай будет рассмотрен особо.

Контрольные вопросы и задания

1. При каких условиях используется метод комплексных амплитуд? Какова его суть? Поясните смысл понятия «комплексная амплитуда».
2. В рабочей тетради для самостоятельной работы повторите последовательность действий, использованных для вывода уравнений Гельмгольца.
3. Какие понятия используются в качестве вторичных параметров длинных линий?
4. Укажите разновидности длинных линий, используемые при теоретических исследованиях. Для каждой указанной разновидности в рабочей тетради для самостоятельной работы определите вторичные параметры.

2.2. Прямые и обратные в линиях

Осуществим переход от распределений комплексных амплитуд $\dot{U}(x)$ и $\dot{I}(x)$ к распределениям мгновенных значений напряжения $u(t, x)$ и тока $i(t, x)$:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \operatorname{Re} \left\{ \dot{U}(x) e^{j\omega t} \right\} = \\ &= A_1 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \psi_1) + A_2 e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \psi_2), \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} i(t, x) &= \operatorname{Re} \left\{ \dot{I}(x) e^{j\omega t} \right\} = \\ &= \frac{A_1}{Z_B} e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \psi_1 - \varphi_{Z_B}) - \frac{A_2}{Z_B} e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \psi_2 - \varphi_{Z_B}). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Эти выражения поясняют физический смысл полученного решения. В формулах (2.18) и (2.19) первые слагаемые описывают гармонические волны в линии, бегущие в положительном направлении оси x (слева направо). Назовем

их *прямыми* и обозначим $u_{\Pi}(x, t)$ и $i_{\Pi}(x, t)$. Вторые слагаемые описывают гармонические волны в линии, бегущие в отрицательном направлении оси x (справа налево). Назовем их *обратными* и обозначим $u_o(x, t)$ и $i_o(x, t)$. Следовательно, (2.18) и (2.19) можно записать в виде

$$u(t, x) = u_{\Pi}(t, x) + u_o(t, x), \quad (2.20)$$

$$i(t, x) = i_{\Pi}(t, x) + i_o(t, x). \quad (2.21)$$

Такой же смысл имеют распределения комплексных амплитуд (2.10) и (2.11):

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_{\Pi}(x) + \dot{U}_o(x), \quad (2.22)$$

$$\dot{i}(x) = \dot{i}_{\Pi}(x) + \dot{i}_o(x). \quad (2.23)$$

Таким образом, полученные решения уравнений длинных линий описывают явление наложения волн, бегущих навстречу друг другу. Выражения (2.10) и (2.11) определяют комплексные амплитуды этих волн:

$$\dot{U}_{\Pi}(x) = \dot{A}_1 e^{-\gamma x}, \quad (2.24)$$

$$\dot{U}_o(x) = \dot{A}_2 e^{\gamma x}, \quad (2.25)$$

$$\dot{i}_{\Pi}(x) = \frac{\dot{U}_{\Pi}(x)}{Z_B}, \quad (2.26)$$

$$\dot{i}_o(x) = -\frac{\dot{U}_o(x)}{Z_B}. \quad (2.27)$$

Заметим, что при $x = 0$, $\dot{U}_{\Pi}(0) = \dot{A}_1$, $\dot{U}_o(0) = \dot{A}_2$. Следовательно, величины $|\dot{A}_{1,2}| = A_{1,2}$ и $\arg \dot{A}_{1,2} = \psi_{1,2}$ определяют значения амплитуд и начальных фаз комплексных амплитуд прямой и обратной волн напряжения в начале линии.

В рассматриваемой линии сомножители $A_1 e^{-\alpha x}$ и $A_2 e^{\alpha x}$ в выражениях (2.18) и (2.19) описывают уменьшение амплитуды прямой и обратной волн при их распространении в линии. Величина $e^{-\alpha x}$ показывает, во сколько раз уменьшаются амплитуды волн при их прохождении через всю линию. Погонный параметр линии α называют *коэффициентом (постоянной) затухания*. Он определяет степень ослабления амплитуд волн в линии при их

распространении на единицу длины. Единицей измерения коэффициента затухания служат *непер на метр* (Нп/м) или *децибелл на метр* (дБ/м). Так, например, для прямой волны

$$\alpha = \ln \left| \left(U_{\Pi}(x_2) / U_{\Pi}(x_1) \right) \right|, \text{ Нп/м} \quad (2.28)$$

или

$$\alpha = 20 \lg \left| \left(U_{\Pi}(x_2) / U_{\Pi}(x_1) \right) \right|, \text{ дБ/м}, \quad (2.29)$$

где $x_2 - x_1 = 1$ м. Из этих соотношений следует, что $1 \text{ дБ} \approx 0,115 \text{ Нп}$ или $1 \text{ Нп} \approx 8,686 \text{ дБ}$. На рис. 2.1 представлены распределения мгновенных значений напряжений прямой и обратной волн для трех последовательных моментов времени.

Смысл величин ω и β , входящих в аргументы тригонометрических функций в формулах (2.18) и (2.19), сходен:

ω – **круговая (временная) частота** волнового процесса, измеряемая в радианах за секунду (рад/с). С нею связаны частота $f = \omega / 2\pi$, измеряемая в герцах (Гц), и **период колебаний** $T = 1/f = 2\pi/\omega$, измеряемый в секундах (с);

β – **волновое число (коэффициент фазы)**. Фактически β – **пространственная круговая частота** волнового процесса, измеряемая в радианах на метр (рад/м). С нею связана **длина волны** $\lambda = 2\pi/\beta$, измеряемая в метрах (м), являющаяся **пространственным периодом** волнового процесса. При расчетах волновое число β удобно выражать через длину волны $\beta = 2\pi/\lambda$.

Скорость распространения в линии *состояния равной фазы волны* называют **фазовой скоростью** и обозначают v_{ϕ} . Ее определяют дифференцированием выражения $\omega t - \beta x + \psi_1 = \text{const.}$ В результате получим

$$v_{\phi} = dx/dt = \omega / \beta. \quad (2.30a)$$

Для линий без потерь коэффициент фазы определяется формулой $\beta = \omega \sqrt{LC}$, и в этом случае фазовая скорость равна

$$v_\phi = 1/\sqrt{LC}. \quad (2.306)$$

Из соотношений (2.26) и (2.27) следует, что *волновое сопротивление* линии Z_B связывает в линии комплексные амплитуды прямых и обратных волн напряжения и тока:

$$Z_B = \frac{\dot{U}_n(x)}{\dot{I}_n(x)} = -\frac{\dot{U}_o(x)}{\dot{I}_o(x)}. \quad (2.31)$$

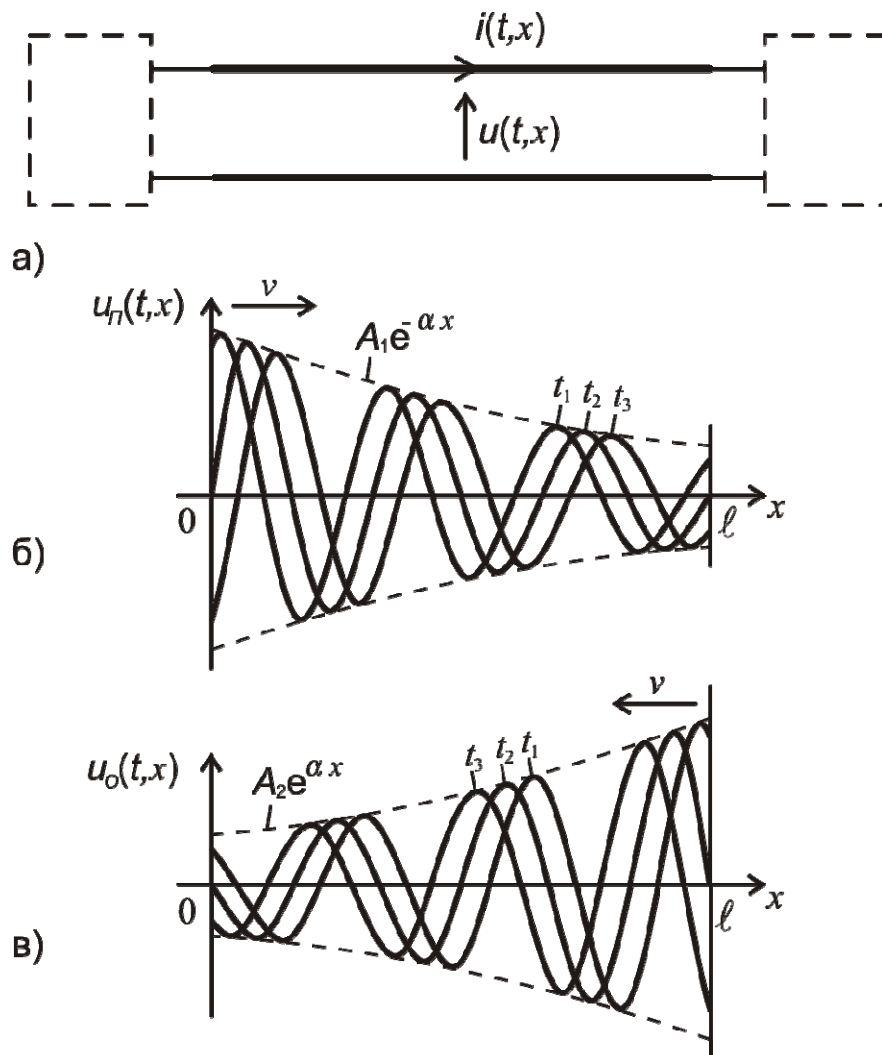


Рис. 2.1. Волны в длинной линии:

- а) система с длинной линией;
- б) прямая волна;
- в) обратная волна

Различие знаков в последней формуле связано с противоположным направлением токов прямой и обратной волн.

Найденные распределения комплексных амплитуд напряжения и тока позволяют определить потоки мощности, переносимые бегущими волнами. Для прямой волны имеем $\dot{U}_n(x) = Z_B \dot{I}_n(x)$. С учетом этого соотношения средняя (активная) мощность, переносимая прямой бегущей волной, определяется выражением:

$$P_n(x) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\dot{U}_n(x) \bar{\dot{I}}_n(x)) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(Z_B \dot{I}_n(x) \bar{\dot{I}}_n(x)) = \frac{1}{2} I_n^2(x) \operatorname{Re} Z_B, \quad (2.32)$$

здесь черта над комплексной амплитудой имеет смысл комплексно-сопряженной величины. Для обратной волны имеем $\dot{U}_o(x) = -Z_B \dot{I}_o(x)$. С учетом этого соотношения для средней мощности, переносимой обратной бегущей волной, имеем:

$$P_o(x) = -\frac{1}{2} \operatorname{Re}(\dot{U}_o(x) \bar{\dot{I}}_o(x)) = -\frac{1}{2} I_o^2(x) \operatorname{Re} Z_B. \quad (2.33)$$

Различие знаков в выражениях (2.32) и (2.33) связано с противоположным направлением потоков энергии в бегущих прямой и обратной волнах.

Особенно простой вид имеет формула для средней переносимой мощности для линии без потерь:

$$P = \frac{\rho}{2} I_n^2 - \frac{\rho}{2} I_o^2 = \frac{1}{2\rho} U_n^2 - \frac{1}{2\rho} U_o^2. \quad (2.34)$$

Контрольные вопросы и задания

1. Используя результаты предыдущего параграфа, в рабочей тетради для самостоятельной работы получите выражения, определяющие распределения мгновенных значений напряжения и тока в длинной линии. Поясните физический смысл слагаемых и коэффициентов, входящих в эти формулы.

2. Определите понятие «коэффициент затухания».

2.1. Рассчитайте его величину, если: длина линии равна 20 метров, амплитуда прямой волны в начале линии равна 50 мВ, а в конце линии она равна 45 мВ.

2.2. Рассчитайте амплитуду обратной волны в конце линии длиной 50 метров, если в начале линии она равна 35 мВ, а коэффициент затухания равен 0,3 дБ/м.

3. Коаксиальный кабель РК-75 на частоте 100 МГц имеет затухание 0,105 дБ/м. Рассчитайте амплитуду колебаний напряжения в конце кабеля, если в его начале она равна 10 мВ. Указание: имейте в виду, что $\alpha[\text{Нп/м}] = 0,115[\text{дБ/м}]$.

4. Определите понятия «*круговая частота*» и «*период колебаний*».

5. Определите понятия «*волновое число*» и «*длина волны*».

6. Определите понятие «*фазовая скорость*». Используя формулу (2.30б) и формулы (1) и (2), приведенные в Приложении 1 для параметров коаксиальной линии передачи, получите выражение для фазовой скорости и рассчитайте ее величину, если в качестве диэлектрика используется полистирол. Как в этом случае фазовая скорость отличается от скорости электромагнитных волн в вакууме? Рассчитайте для того же случая волновое число и длину волны в линии передачи, если она возбуждается колебаниями с частотой $f = 900$ МГц. Обратите внимание на сходство выражения (2.30б) с формулой, определяющей скорость распространения электромагнитных волн в вакууме.

7. Охарактеризуйте понятие «*волновое сопротивление линии*». С помощью формул (1) и (2), приведенных в Приложении 1, проверьте приведенное там же выражение (5) и рассчитайте волновое сопротивление коаксиальной линии передачи, если: $a = 0,5$ мм, $b = 5$ мм, а в качестве диэлектрика используется полистирол.

8. Определите потоки мощности, переносимые бегущими волнами в линии.

2.3. Отражение волн в линии

2.3.1. Коэффициенты отражения

Пусть генератор гармонических колебаний, расположенный в начале линии (рис. 2.2), возбуждает в ней прямые волны $\dot{U}_n(x)$ и $\dot{I}_n(x)$. Любая неоднородность на пути распространения этих волн, которые в такой постановке задачи называют *падающими*, вызывает их *отражение* – появление обратных волн, которые называют *отраженными*. Характеристикой явления отражения волн служит *коэффициент отражения* $\dot{\Gamma}$, связывающий пропорциональной зависимостью комплексные амплитуды отраженных $\dot{S}_{отр}(x')$ и падающих $\dot{S}_{пад}(x')$ волн в том сечении линии x' , где находится неоднородность

$$\dot{S}_{отр}(x') = \dot{\Gamma} \dot{S}_{пад}(x') \quad (2.35)$$

Подобно комплексному коэффициенту передачи \dot{K} линейных систем модуль коэффициента отражения $|\dot{\Gamma}| = \Gamma$ определяет связь амплитуд падающей и отраженной волн $S_{отр} = \Gamma S_{пад}$ (показывая, как при отражении изменяется амплитуда), а аргумент – связь их фаз, $\psi_{отр} = \psi_{пад} + \arg \dot{\Gamma}$ (показывая на какую величину при отражении изменяется фаза).

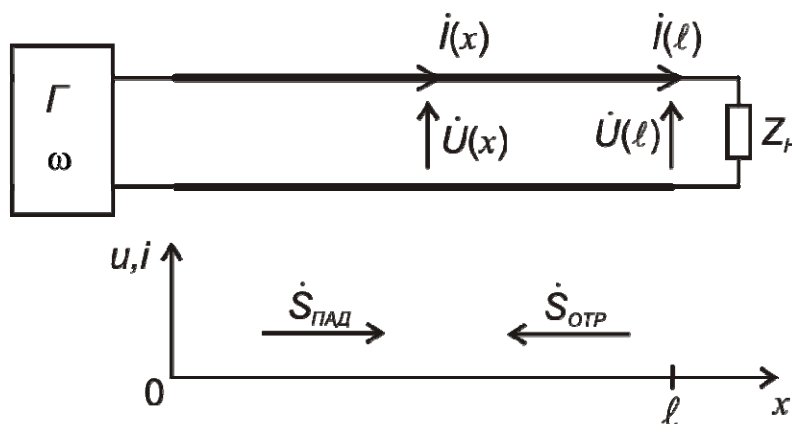


Рис. 2.2. Система с длинной линией

В длинных линиях можно определить две разновидности коэффициента отражения – по напряжению $\dot{\Gamma}_U$ и по току $\dot{\Gamma}_I$.

$$\dot{U}_o(x') = \dot{\Gamma}_U \dot{U}_n(x') \Rightarrow \dot{\Gamma}_U = \frac{\dot{U}_o(x')}{\dot{U}_n(x')}, \quad (2.36)$$

$$\dot{I}_o(x') = \dot{\Gamma}_I \dot{I}_n(x') \Rightarrow \dot{\Gamma}_I = \frac{\dot{I}_o(x')}{\dot{I}_n(x')}. \quad (2.37)$$

Они связаны простым очевидным соотношением $\dot{\Gamma}_I = -\dot{\Gamma}_U$, следующим из формул (2.10) и (2.11).

В рассматриваемом случае линия является однородной, а неоднородности могут располагаться только на ее концах – местах соединения линии с внешними цепями. В данном случае – это правый конец ($x' = \ell$), где к линии подсоединена нагрузка – комплексное сопротивление Z_H . Коэффициент отражения по напряжению от этого конца линии определяется отношением

$$\dot{\Gamma}_U = \frac{\dot{U}_o(\ell)}{\dot{U}_n(\ell)} = \frac{A_2 e^{\gamma \ell}}{A_1 e^{-\gamma \ell}}. \quad (2.38)$$

Для отыскания выражения, определяющего связь $\dot{\Gamma}_U$ и Z_H , используем граничное условие для правого конца линии $x = \ell$. Оно определяется формулой, связывающей в нагрузке комплексные амплитуды приложенного напряжения и протекающего тока $\dot{U}(\ell) = Z_H \dot{I}(\ell)$. Подставляя в нее выражения (2.10) и (2.11), имеем

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 e^{-\gamma \ell} + \dot{A}_2 e^{\gamma \ell} &= \frac{Z_H}{Z_B} (\dot{A}_1 e^{-\gamma \ell} - \dot{A}_2 e^{\gamma \ell}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \dot{A}_2 e^{\gamma \ell} \left(\frac{Z_H}{Z_B} + 1 \right) &= \dot{A}_1 e^{-\gamma \ell} \left(\frac{Z_H}{Z_B} - 1 \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\dot{A}_2 e^{\gamma \ell}}{\dot{A}_1 e^{-\gamma \ell}} &= \frac{\left(\frac{Z_H}{Z_B} - 1 \right)}{\left(\frac{Z_H}{Z_B} + 1 \right)} = \frac{Z_H - Z_B}{Z_H + Z_B} = \dot{\Gamma}_U. \end{aligned}$$

Таким образом, для общего случая комплексные коэффициенты отражения определяется выражениями:

$$\dot{\Gamma}_U = \frac{Z_H - Z_B}{Z_H + Z_B}, \quad (2.39a)$$

$$\dot{\Gamma}_I = -\dot{\Gamma}_U = \frac{Z_B - Z_H}{Z_B + Z_H}. \quad (2.39б)$$

Для линий без потерь и искажений эти формулы принимают вид

$$\dot{\Gamma}_U = \frac{Z_H - \rho}{Z_H + \rho}, \quad (2.40a)$$

$$\dot{\Gamma}_I = \frac{Z_B - \rho}{Z_B + \rho}. \quad (2.40б)$$

Для линии с малыми потерями последние выражения выполняются приближенно.

Примечание. Обратите внимание на сходство полученных выражений с формулами, описывающими отражение плоской электромагнитной волны при нормальном падении на границу раздела сред.

2.3.2. Влияние нагрузки линии на характер протекающих в ней процессов

Используя формулу (2.39), рассчитаем коэффициенты отражения $\dot{\Gamma}_U$, $\dot{\Gamma}_I$ и проведем анализ полученных выражений для ряда значений сопротивлений нагрузки Z_H , ограничиваясь важными для практики вариантами длинных линий: без потерь, с малыми потерями и без искажений сигналов, полагая везде $Z_B = \rho$. Графики, характеризующие волновые процессы для рассмотренных случаев, будут представлены позже на рис. 2.4

1. Если $Z_H = Z_B$ тогда $\dot{\Gamma}_U = \dot{\Gamma}_I = 0$. Такую нагрузку называют *согласованной*. Отражение волн отсутствует, $\dot{U}_O = 0$, $\dot{I}_O = 0$. В длинной линии реализуется *режим бегущих волн*, так как существуют только падающие волны, переносящие энергию слева направо. Это случай идеального переноса энергии и информации.

2. Если $Z_H = 0$ (короткое замыкание на конце линии), тогда

$$\dot{\Gamma}_U = -1 = 1e^{j\pi}, \quad (2.41a)$$

$$\dot{\Gamma}_I = +1 = 1e^{j0}. \quad (2.41б)$$

В этом случае модуль коэффициента отражения по напряжению (2.41a) равен единице, а аргумент равен π . Следовательно, возникающая на конце линии отраженная волна напряжения, имея ту же амплитуду, противофазна падающей. В результате наложения этих волн напряжение на конце линии равно нулю: $U(\ell) = 0$.

Модуль коэффициента отражения по току (2.41б) также равен единице, но аргумент здесь равен 0. Следовательно, возникающая на конце линии отраженная волна тока, имея ту же амплитуду, синфазна падающей. В результате наложения этих волн амплитуда тока удваивается: $I(\ell) = 2I_H(\ell)$.

Рассматриваемый режим волнового процесса в линии называется *режимом стоячих волн*, так как наложение падающих и отраженных волн формирует в линии неподвижные – «стоячие» – распределения амплитуд напряжения $U(x)$ и тока $I(x)$. Чередование максимумов и минимумов в этих «стоячих» распределениях является следствием интерференции волн, которая будет рассмотрена позже в п. 2.4. Отметим, что в рассматриваемом режиме в конце линии имеется минимум напряжения. $U(\ell) = 0$ и максимум тока $I(\ell) = 2I_H(\ell)$. Заметим также, что отраженные волны напряжения и тока в линии переносят справа налево такую же энергию, как и падающие слева направо, т. е. итоговый перенос энергии в линии отсутствует.

3. Если $Z_H \rightarrow \infty$ (холостой ход), тогда

$$\dot{\Gamma}_U = +1 = 1e^{j0}, \quad (2.42a)$$

$$\dot{\Gamma}_I = -1 = 1e^{j\pi}. \quad (2.42б)$$

В этом случае модуль коэффициента отражения по напряжению (2.42a) равен единице, а аргумент равен нулю. Отраженная волна напряжения, возникающая на конце линии, имея ту же амплитуду, синфазна падающей. В

результате наложения этих волн амплитуда напряжения на конце линии удваивается $U(\ell) = 2U_{\pi}(\ell)$.

Модуль коэффициента отражения по току (2.42б) равен единице, а аргумент равен π . Поэтому, возникающая на конце линии отраженная волна тока, имея ту же амплитуду, противофазна падающей. В результате наложения этих волн ток на конце линии равен нулю: $I(\ell) = 0$.

Здесь, как и в предыдущем случае, в линии реализуется **режим стоячих волн**. Распределения в линии амплитуды напряжения $U(x)$ и амплитуды тока $I(x)$ также имеют максимумы и минимумы, но теперь в конце линии находится максимум напряжения $U(\ell) = 2U_{\pi}(\ell)$ и минимум тока $I(\ell) = 0$. Итоговый перенос энергии в линии отсутствует.

4. Если $Z_H = jX_H$ (нагрузкой служит реактивное сопротивление), тогда

$$\dot{\Gamma}_U = \frac{-\rho + jX_H}{\rho + jX_H} = \frac{\sqrt{\rho^2 + X_H^2}}{\sqrt{\rho^2 + X_H^2}} e^{-j2\arctg(X_H/\rho)} = 1e^{-j2\arctg(X_H/\rho)}, \quad (2.43a)$$

$$\dot{\Gamma}_I = -\dot{\Gamma}_U = 1e^{j(\pi - 2\arctg(X_H/\rho))}. \quad (2.43б)$$

В этом случае модули коэффициентов отражения равны единице, а аргументы зависят от соотношения величин X_H и ρ . Следовательно, возникающие на конце линии отраженные волны напряжения и тока, сохраняя амплитуду падающих волн, отличаются от них по фазе на величину, определяемую значениями аргументов коэффициентов отражения (3.43).

Здесь, как и в предыдущих случаях, в линии реализуется **режим стоячих волн**. Распределения в линии амплитуд напряжения $U(x)$ и тока $I(x)$ также имеют максимумы и минимумы, но теперь в конце линии они принимают промежуточные значения между максимальными и минимальными величинами. Так, в частности величина амплитуды напряжения на конце линии, определяется выражением

$$U(\ell) = U_{\pi}(\ell) |1 + \dot{\Gamma}_U|. \quad (2.44)$$

Оно выводится из формул (2.22) и (2.39), полагая $x' = \ell$. Перенос энергии в линии отсутствует.

5. Если $\dot{Z}_H = R_H$ (нагрузкой служит активное сопротивление), тогда

$$\dot{\Gamma}_U = \frac{R_H - \rho}{R_H + \rho}, \quad (2.45a)$$

$$\dot{\Gamma}_I = -\dot{\Gamma}_U. \quad (2.45b)$$

В этом случае коэффициенты отражения принимают только вещественные значения в пределах $-1 < \Gamma_{U,I} < 1$. В линии реализуется **режим смешанных волн** – существование бегущих и стоячих волн одновременно. Такой режим характеризуют **коэффициентом стоячей (бегущей) волны**, который будет определен позже.

Когда $R_H > \rho$, тогда коэффициент отражения по напряжению $\Gamma_U > 0$, т. е. $\arg \dot{\Gamma}_U = 0$, следовательно, отраженная волна напряжения синфазна падающей. Напряжение на конце линии принимает максимальное значение $U(\ell) = U_{\Pi}(\ell) + U_{\text{O}}(\ell)$. При указанном условии коэффициент отражения по току $\Gamma_I < 0$, т. е. $\arg \dot{\Gamma}_I = \pi$, следовательно, отраженная волна тока противофазна падающей. Ток на конце линии принимает минимальное значение $I(\ell) = I_{\Pi}(\ell) - I_{\text{O}}(\ell)$.

Когда $R_H < \rho$, тогда коэффициент отражения по напряжению $\Gamma_U < 0$, т. е. $\arg \dot{\Gamma}_U = \pi$, следовательно, отраженная волна напряжения противофазна падающей. Напряжение на конце линии принимает минимальное значение $U(\ell) = U_{\Pi}(\ell) - U_{\text{O}}(\ell)$. При указанном условии коэффициент отражения по току $\Gamma_I > 0$, т. е. $\arg \dot{\Gamma}_I = 0$, следовательно, отраженная волна тока синфазна падающей. Ток на конце линии принимает максимальное значение $I(\ell) = I_{\Pi}(\ell) + I_{\text{O}}(\ell)$.

В этом режиме энергия, переносимая в линии прямыми волнами, превышает энергию, переносимую обратными волнами, т. е. имеет место частичный перенос энергии сигнала от источника в нагрузку. Только при

условии $R_H = \rho$ отражение в конце линии отсутствует, и энергия, переносимая волнами, максимальна.

6. Если Z_H – комплексное сопротивление $\dot{Z}_H = R_H + jX_H$, тогда

$$\dot{\Gamma}_U = \frac{R_H - \rho + jX_H}{R_H + \rho + jX_H} = \frac{\sqrt{(R_H - \rho)^2 + X_H^2}}{\sqrt{(R_H + \rho)^2 + X_H^2}} e^{j(\arctg(X_H/(R_H - \rho)) - \arctg(X_H/(R_H + \rho)))}, \quad (2.46a)$$

$$\dot{\Gamma}_I = \dot{\Gamma}_U. \quad (2.46b)$$

В этом случае модули коэффициентов отражения (2.46) менее единицы, а аргументы определяются соотношением величин X_H и ρ . Возникающие на конце линии отраженные волны напряжения и тока имеют амплитуды, величина которых меньше по сравнению с амплитудами падающих волн. Фазы отраженных волн отличаются на величины, определяемые значениями аргументов коэффициентов отражения (2.46). Как и в предыдущем случае, в линии реализуется **режим смешанных волн**. Энергия, переносимая в линии прямыми волнами, превышает энергию, переносимую обратными волнами, т. е. имеет место частичный перенос энергии сигнала от источника в нагрузку. Даже при выполнении условия $R_H = \rho$ полный перенос энергии в линии невозможен.

Контрольные вопросы и задания

1. Определите явление «*отражение волн*» в линии передачи. Чем оно характеризуется? Что связывает модуль, а что аргумент этой характеристики явления?

2. Каким соотношением связаны коэффициенты отражения по напряжению и по току? В рабочей тетради для самостоятельной работы повторите последовательность действий при выводе формул, определяющих связь $\dot{\Gamma}_U, Z_H$ и $\dot{\Gamma}_U, Z_H, Z_B$.

3. В рабочей тетради для самостоятельной работы рассчитайте коэффициенты отражения для рассмотренных ранее разновидностей нагрузок:

$Z_H = Z_B$, $Z_H = 0$, $Z_H \rightarrow \infty$, $\dot{Z}_H = \pm jX_H$, $\dot{Z}_H = R_H > \rho$, $\dot{Z}_H = R_H < \rho$, $\dot{Z}_H = R_H \pm jX_H$. Для каждого случая осмыслите влияние нагрузки линии на характер протекающих в ней процессов.

2.4. Интерференция волн в линии

2.4.1. Анализ явления интерференции

Наличие в линии гармонических волн, бегущих в противоположных направлениях, обуславливает их **интерференцию** – наложение волн, при котором в одних сечениях линии происходит увеличение амплитуд колебаний, а в других – их уменьшение. Чтобы найти закон распределения амплитуд напряжения, запишем (2.18) в упрощенном виде

$$u(t, x) = U_{\Pi} \cos(\omega t + \psi_{\Pi}) + U_O \cos(\omega t + \psi_O). \quad (2.47)$$

Здесь:

$$U_{\Pi} = U_{\Pi}(x) = A_1 e^{-\alpha x}, \quad \psi_{\Pi} = \psi_{\Pi}(x) = -\beta x + \psi_1,$$

$$U_O = U_O(x) = A_2 e^{\alpha x}, \quad \psi_O = \psi_O(x) = \beta x + \psi_2.$$

Выражение (2.47) показывает, что в любом сечении линии происходит суммирование гармонических колебаний, первое из которых соответствует прямой волне напряжения, второе – обратной. Отметим, что гармоническим колебаниям одинаковой частоты присуще важное свойство – их сумма также является гармоническим колебанием той же частоты. Следовательно, выражение (2.47) можно представить в виде

$$U_{\Pi} \cos(\omega t + \psi_{\Pi}) + U_O \cos(\omega t + \psi_O) = U \cos(\omega t + \psi). \quad (2.48)$$

Для нахождения распределения амплитуд $U = U(x)$ учтем, что равенство (2.47) выполняется тождественно, т. е. в любой момент времени. Полагая $\omega t = 0$, получим

$$U_{\Pi} \cos \psi_{\Pi} + U_{\text{O}} \cos \psi_{\text{O}} = U \cos \psi.$$

Полагая $\omega t = \pi/2$, имеем

$$U_{\Pi} \sin \psi_{\Pi} + U_{\text{O}} \sin \psi_{\text{O}} = U \sin \psi.$$

Возведем оба последних равенства в квадрат и сложим их. Получим

$$U_{\Pi}^2 + U_{\text{O}}^2 + 2U_{\Pi}U_{\text{O}}(\cos \psi_{\Pi} \cos \psi_{\text{O}} + \sin \psi_{\Pi} \sin \psi_{\text{O}}) = U^2.$$

Здесь выражение в скобках есть косинус разности двух аргументов:

$$\cos \psi_{\Pi} \cos \psi_{\text{O}} + \sin \psi_{\Pi} \sin \psi_{\text{O}} = \cos(\psi_{\text{O}} - \psi_{\Pi}).$$

С учетом обозначений, введенных в формуле (2.47), распределение амплитуды колебаний $U = U(x)$ вдоль линии определяется выражением:

$$U(x) = \sqrt{U_{\Pi}^2(x) + U_{\text{O}}^2(x) + 2U_{\Pi}(x)U_{\text{O}}(x)\cos(2\beta x - \Delta\psi)}, \quad (2.49)$$

где $\Delta\psi = \psi_1 - \psi_2$.

Полученная формула (2.49) характеризует интерференцию в линии прямой и обратной волн. Сомножитель $\cos(2\beta x - \Delta\psi)$ в этом выражении определяет чередование максимумов и минимумов. При условии:

$$2\beta x_{\text{MAX}} - \Delta\psi = 2\pi n, \quad n = 0; \pm 1; \pm 2; \dots \quad (2.50)$$

наблюдаются максимумы, равные $U_{\text{MAX}} = U_{\Pi} + U_{\text{O}}$, а при условии:

$$2\beta x_{\text{MIN}} - \Delta\psi = \pi(2n + 1) \quad (2.51)$$

– минимумы, равные $U_{\text{MIN}} = |U_{\Pi} - U_{\text{O}}|$.

Из полученных соотношений (2.50) и (2.51) видно, что **расстояние между соседними максимумами и соседними минимумами в линии равно $\lambda/2$** . Действительно, положим $\Delta\psi = 0$, обозначим через Δx расстояние между соседними максимумами и запишем уравнение, которому оно удовлетворяет: $2\beta \Delta x = 2\pi$. Из этого выражения с учетом того, что $\beta = 2\pi/\lambda$, следует: $\Delta x = \lambda/2$.

Отметим, что при интерференции волн отсутствует простое суммирование их мощностей. В интерференционных максимумах интенсивность волнового процесса больше суммы интенсивностей прямой и обратной волн, а в интерференционных минимумах – меньше их суммы, т. е. **интерференция волн приводит к перераспределению мощностей колебаний** вдоль линии. Однако в среднем для всей линии мощность волнового процесса равна сумме мощностей прямой и обратной волн.

В случае линии без потерь ($\alpha = 0$) интерференционное распределение $U(x)$ – периодическая функция x . Здесь все максимумы и все минимумы одинаковы, а их отношение U_{MAX}/U_{MIN} определяет важный показатель волнового процесса в линии, называемый **коэффициентом стоячей волны напряжения**

$$K_{CBH} = \frac{U_{MAX}}{U_{MIN}} = \frac{U_{\Pi} + U_O}{|U_{\Pi} - U_O|}. \quad (2.52)$$

В режиме **стоячих волн** в линиях без потерь прямая и обратная волны, распространяющиеся в линии, имеют одинаковые амплитуды $U_{\Pi} = U_O$. В этом случае выражение (2.49) приводится к виду

$$U(x) = 2U_{\Pi} \sqrt{\frac{1 + \cos(2\beta x - \Delta\psi)}{2}} = 2U_{\Pi} \left| \cos\left(\beta x - \frac{\Delta\psi}{2}\right) \right|. \quad (2.53)$$

Здесь использована формула $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$.

В режиме **смешанных волн** прямая и обратная волны, распространяющиеся в линии, имеют неравные амплитуды, и интерференционное распределение $U(x)$ определяется полученной формулой (2.49).

2.4.2. Пример исследования интерференции в линии

В качестве примера, поясняющего волновые явления в длинных линиях, предлагаем провести численное исследование интерференционного

распределения $U(x)$ при заданных параметрах линии и нагрузки. Для этого запаситесь чистым тетрадным листом в клетку, карандашом и линейкой.

Полагаем заданными (в условных единицах):

- длина линии $\ell = 20$ (клеток);
- длина волны в линии $\lambda = 8$ (клеток);
- волновое сопротивление линии ρ ;
- затухание в линии, характеризуемое величиной $e^{-\alpha\ell} = 0,8$;
- сопротивление нагрузки $Z_H = (1 - j2)\rho$;
- сопротивление генератора, возбуждающего в линии прямые волны, $Z_r = \rho$;
- амплитуда прямой волны в начале линии $U_n(0) = 10$.

Используя следующий алгоритм, выполним все предложенные расчеты, и построения, получая в результате график интерференционного распределения $U(x)$.

1. На листе бумаги в клетку строим систему координат x , $U(x)$; отмечаем значение $x = \ell$; откладываем величину амплитуды прямой волны $U_n(0) = 10$ при $x = 0$.

2. Прямая волна по мере распространения в линии затухает. Рассчитываем и откладываем при $x = \ell$ ее амплитуду – величину

$$U_p(\ell) = U_p(0)e^{-\alpha\ell} = U_p(20) = 10 \cdot 0,8 = 8.$$

3. Рассчитываем модуль и аргумент коэффициента отражения $\dot{\Gamma}_U = |\Gamma_U|e^{j\arg\dot{\Gamma}_U}$. В общем случае используем формулу $\dot{\Gamma}_U = \frac{Z_H - Z_B}{Z_H + Z_B}$. В данном примере

$$\dot{\Gamma}_U = \frac{Z_H - \rho}{Z_H + \rho} = \frac{(1 - j2)\rho - \rho}{(1 - j2)\rho + \rho} = \frac{-j}{1 - j} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\pi/4}.$$

4. Рассчитываем амплитуду отраженной волны в конце линии

$$U_o(\ell) = U_n(\ell) |\dot{\Gamma}_v| \Rightarrow U_o(20) = U_n(20) |\dot{\Gamma}_v| = \frac{8}{\sqrt{2}} \approx 5,6.$$

Откладываем эту величину на графике при $x = \ell$.

5. Рассчитываем амплитуду отраженной волны в начале линии $U_o(0) = U_o(\ell) e^{-\alpha \ell} \Rightarrow U_o(0) = 5,6 \cdot 0,8 = 4,48$. Откладываем эту величину на графике при $x = 0$.

6. Для начала и конца линии рассчитываем величины $U_n \pm U_o$ и откладываем их на графике при $x = 0$ и при $x = \ell$, тем самым определяя область возможных значений $U(x)$ на концах линии. При $x = 0$ имеем: $U_n + U_o \approx 14,5$, $U_n - U_o \approx 5,5$. При $x = \ell$ имеем: $U_n + U_o \approx 13,6$, $U_n - U_o \approx 2,4$.

7. Соединяем линиями точки, соответствующие величинам $U_n + U_o$ и $U_n - U_o$ при $x = 0$ и при $x = \ell$, определяя область, в которой расположится график $U(x)$. (Здесь используется приближенное представление экспоненциальной функции $e^{ax} \approx 1 + ax + \dots$ – график e^{ax} аппроксимирован линейной зависимостью).

8. На **комплексной плоскости** строим векторную диаграмму, соответствующую комплексным амплитудам волн $\dot{U}_n(\ell)$ и $\dot{U}_o(\ell)$. Сначала вдоль действительной положительной полуоси откладываем вектор, соответствующий комплексной амплитуде падающей (прямой) волны $\dot{U}_n(\ell) \Rightarrow U_n(20) e^{j0}$ (выбрав его аргумент равным нулю). Затем откладываем вектор, соответствующий комплексной амплитуде отраженной (обратной) волны $\dot{U}_o(\ell) \Rightarrow \dot{U}_o(20) = 5,6 e^{-j\pi/4}$, ориентируя его под углом $\varphi = \arg \dot{\Gamma} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{4} = -45^\circ$. Строим суммарный вектор $\dot{U}(\ell) \Rightarrow \dot{U}(20)$. Его модуль (длина) $U(20)$ определяет амплитуду

напряжения при $x = \ell = 20$ (в конце линии) – конечную точку интерференционного распределения $U(x)$. Эту величину измеряем $U(20) \approx 12,6$ и откладываем при $x = \ell = 20$.

9. Определяем вид экстремума, ближайшего к концу линии. Для этого рекомендуем сначала построить биссектрису угла φ . В данном примере $\varphi = -\frac{\pi}{4} = -45^\circ \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = -\frac{\pi}{8} = -22,5^\circ$. Затем определяем, каким будет ближайший к концу экстремум. Для этого учитываем, что, смещая рассматриваемую точку x' от конца линии к ее началу, вектор $\dot{U}_n(x')$ разворачивается на векторной диаграмме по часовой стрелке (прямая волна достигает точки x' раньше), а вектор $\dot{U}_o(x')$ – против часовой стрелки (обратная волна достигает точки x' позже). Таким образом, ближайшим к концу экстремумом может оказаться, в первом случае – **максимум**, (если векторы $\dot{U}_n(x')$ и $\dot{U}_o(x')$ первоначально станут коллинеарными), во втором случае – **минимум** (если векторы $\dot{U}_n(x')$ и $\dot{U}_o(x')$ первоначально станут противоположно ориентированными). В рассматриваемом примере ближайшим к концу экстремумом является максимум. При этом суммарный вектор на диаграмме будет ориентирован под углом, равным биссектрисе угла φ , т. е. $\varphi/2 = -\pi/8$.

10. Определяем расстояние до ближайшего экстремума, учитывая, что повороту вектора на диаграмме на угол, равный 2π , соответствует отрезок линии, равный длине волны λ ($\lambda = 2\pi$ рад.). В первом случае расстояние на графике до максимума определит угол, отсчитываемый от действительной положительной полуоси до упомянутой биссектрисы. Во втором случае расстояние на графике до минимума определит угол, отсчитываемый от действительной положительной полуоси до линии, перпендикулярной к упомянутой биссектрисе. В данном примере ближайший к концу линии максимум расположится на

расстоянии $\pi/8$ рад, т. е. на расстоянии $\lambda/16$ (половина клетки от конца линии).

11. Расположение найденного экстремума определяет положения всех остальных. Учитывая, что расстояние между соседними максимумами (минимумами) равно $\lambda/2$ (4 клетки), откладываем на линиях $U_{\Pi} + U_{\text{O}}$ и $U_{\Pi} - U_{\text{O}}$ точки максимумов и минимумов.

12. Соединяем точки экстремумов линией, представляющей график $U(x)$.

Рассмотренный пример численного исследования интерференционного распределения в линии амплитуд колебаний напряжения $U(x)$ при заданных параметрах линии и нагрузки иллюстрирует рис. 2.3. Векторная диаграмма в нижней части рисунка поясняет характер наложения колебаний в конце линии ($x = \ell = 20$).

Рис. 2.4 иллюстрирует распределения $U(x)$ в окрестности конца линии для всех случаев, рассмотренных ранее в п. 2.3.

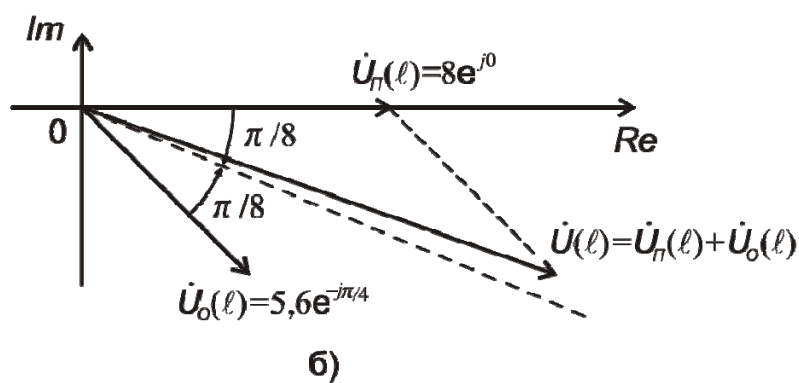
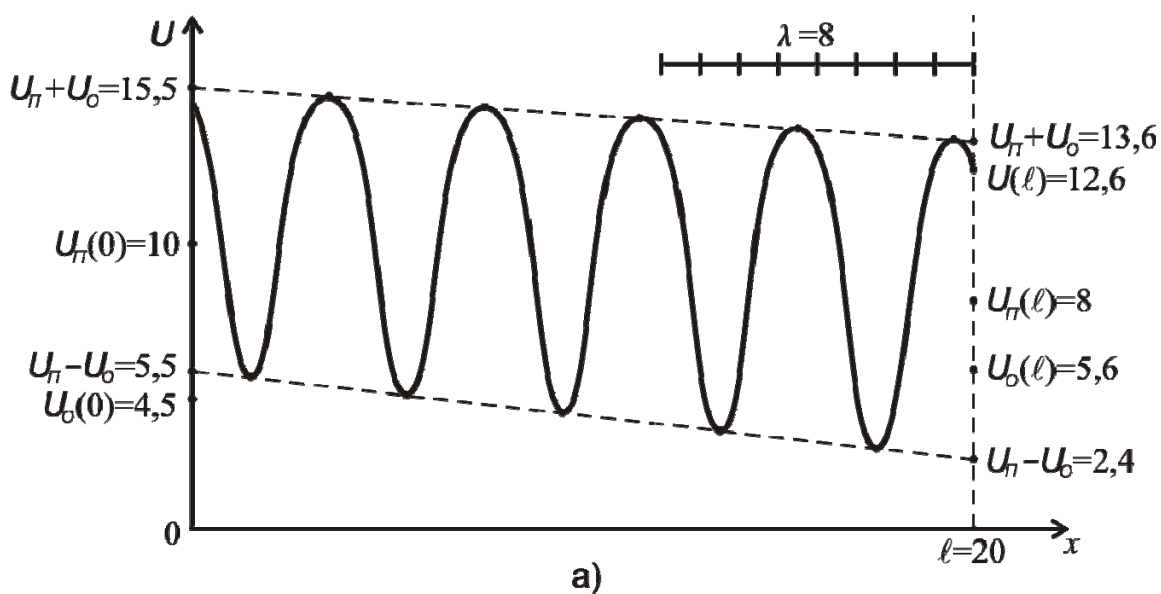


Рис. 2.3. Распределение $U(x)$ и векторная диаграмма рассмотренного примера

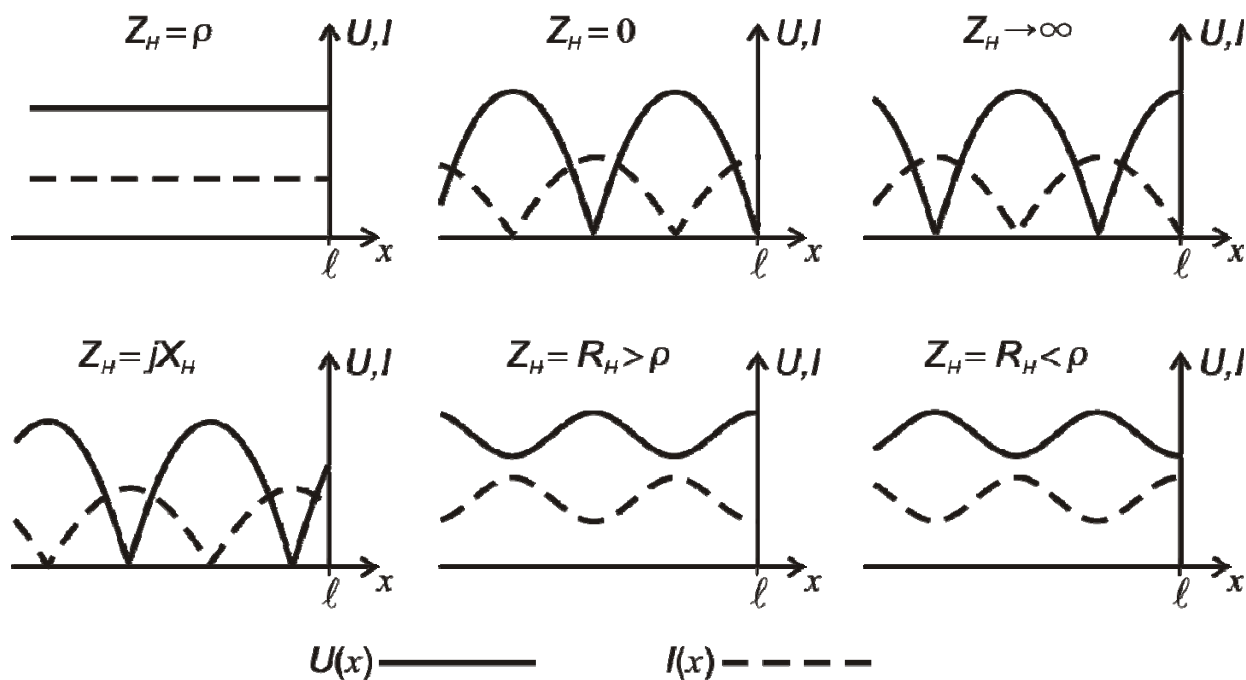


Рис. 2.4. Распределения $U(x)$ в окрестности конца линии

Контрольные вопросы и задания

1. Определите явление «интерференции волн» в линии передачи. В чем оно выражается?

2. В рабочей тетради для самостоятельной работы повторите вывод выражения, определяющего распределение амплитуды колебаний вдоль линии. Определите условия, при которых формируются максимумы и минимумы распределения амплитуд колебаний. Определите расстояние между соседними экстремумами.

3. Докажите, что в интерференционных максимумах интенсивность волнового процесса больше суммы интенсивностей прямой и обратной волн, а в интерференционных минимумах – меньше их суммы.

4. Определите понятие «коэффициент стоячей волны напряжения».

5. Охарактеризуйте режимы волнового процесса.

6. В рабочей тетради для самостоятельной работы выполните предложенное в п.2.4.2 исследование интерференционного распределения амплитуд напряжения в длинной линии с заданными параметрами линии и нагрузки. Постройте соответствующие схему, векторные диаграммы и график распределения амплитуд.

7. Повторите исследование интерференционного распределения, изменив параметр линии $e^{-\alpha \ell}$ в пределах от 0,5 до 1 включительно и выбрав сопротивление нагрузки из списка: $Z_H = 0$, $Z_H \rightarrow \infty$, $Z_H = n\rho$, $Z_H = \rho/n$, $Z_H = \pm jn\rho$, $Z_H = \pm j\rho/n$, $Z_H = (m \pm jn)\rho$, где n и m – целые числа. Постройте соответствующие векторные диаграммы и график распределения амплитуд.

2.5. Затухание и дисперсия волн в линии

Наличие в линии потерь энергии, представленных первичными погонными параметрами R и G , обуславливает существование в ней затухания волн, заключающегося в убывании их амплитуд колебаний при распространении, и дисперсии волн – явления зависимости фазовой скорости

волны $v_\phi = \frac{\omega}{\beta}$ от частоты. Заметим, что дисперсия волн отсутствует, когда волновое число β пропорционально частоте ω .

Обратимся к формуле (2.12), определяющей постоянную распространения γ ,

$$\alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}.$$

В этом выражении α определяет затухание волн, а β – дисперсию волн. Найдем для них явные выражения вещественной и мнимой составляющей. Для этого обе части этой формулы возведем в квадрат:

$$\alpha^2 + j2\alpha\beta - \beta^2 = (R + j\omega L)(G + j\omega C),$$

Отсюда выделим вещественную часть:

$$\alpha^2 - \beta^2 = RG - \omega^2 LC.$$

Кроме этого, запишем выражение для квадрата модуля γ :

$$|\gamma|^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)}.$$

Рассмотрение суммы и разности двух последних формул приводит к получению вещественной и мнимой частей γ :

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(RG - \omega^2 LC) + \frac{1}{2}\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)}}, \quad (2.54)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2}(\omega^2 LC - RG) + \frac{1}{2}\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)}}. \quad (2.55)$$

Из этих формул следует, что коэффициент затухания α с ростом частоты увеличивается от значения $\alpha(0) = \sqrt{RG}$, стремясь в пределе $\omega \rightarrow \infty$ к

значению $\frac{R}{2\rho} + \frac{G\rho}{2}$, а волновое число β только при $\omega \rightarrow \infty$ изменяется

пропорционально частоте $\beta = \omega\sqrt{LC}$. Характерные графики зависимости α и β от частоты, построенные по формулам (2.54) и (2.55), изображены на рис. 2.5.

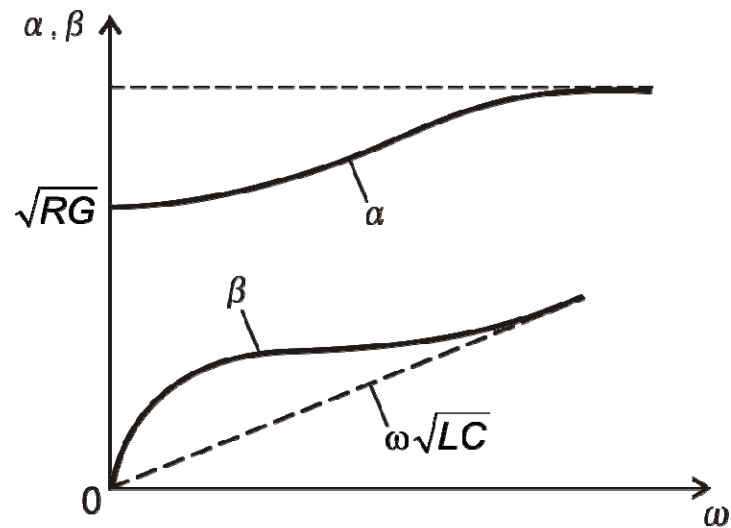


Рис. 2.5. Зависимости коэффициента затухания и волнового числа от частоты

Следует отметить, что в формулах (2.54) и (2.55) не учтена зависимость первичных параметров R и G от частоты. Электродинамический анализ этих параметров показывает, что с ростом частоты погонное резистивное сопротивление потерь в проводнике R увеличивается пропорционально $\sqrt{\omega}$, а погонная резистивная проводимость среды G – пропорционально ω .

Исследование зависимости коэффициента затухания α и фазовой скорости v_ϕ от частоты волны имеет большое практическое значение, обусловленное следующими обстоятельствами. Сигналы, передаваемые вдоль линии передачи, характеризуются своим спектром – набором гармонических составляющих, из которых складывается зависящий от времени сигнал. Наличие затухания и дисперсии волн в линии приводит к тому, что волны отдельных спектральных составляющих перемещаются в линии с разными фазовыми скоростями и затухают в разной степени. В результате сигнал искажается: форма принимаемого сигнала (в конце линии) получается отличной от формы передаваемого (в начале линии). Зависимость $\alpha(\omega)$ представляет неравномерность амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) линии и определяет искажения сигналов, названные амплитудными. Нелинейность зависимости $\beta(\omega)$ влечет за собой нелинейность фазово-частотной характеристики (ФЧХ) линии и определяет искажения сигналов,

названные фазовыми. Для уменьшения искажения сигналов используют линии с параметрами, удовлетворяющими условию $L/R = C/G$. Такие линии, названные линиями без искажений сигналов, упоминались выше. Для них $\alpha = \sqrt{RG}$, $\beta = \omega\sqrt{LC} \Rightarrow v_\phi = 1/\sqrt{LC}$, $Z_B = \rho$. Другим средством устранения искажений сигналов при передаче по линиям служит использование корректирующих четырехполюсников, компенсирующих неравномерность АЧХ и нелинейность ФЧХ линии.

Контрольные вопросы и задания

1. Определите явления «затухание волн» и «дисперсия волн». Чем они обусловлены?
2. В рабочей тетради для самостоятельной работы повторите последовательность действий, используемых при выводе формул, определяющих коэффициент затухания и волновое число.
3. Какое влияние на сигналы, передаваемые вдоль линии, оказывает наличие в ней затухания и дисперсии волн?

2.6. Комплексное входное сопротивление линии

Рассмотрим линию длиной ℓ , нагруженную на правом конце ($x = \ell$) комплексным сопротивлением Z_H (рис. 2.6). Параметры линии γ и Z_B заданы. По отношению к внешним цепям, подключенным к левому концу линии ($x = 0$), она является двухполюсником и характеризуется **комплексным входным сопротивлением линии** Z_{BX} равным отношению

$$Z_{BX} = \frac{\dot{U}(0)}{\dot{I}(0)}, \quad (2.56)$$

или **комплексной входной проводимостью** $Y_{BX} = 1/Z_{BX}$.

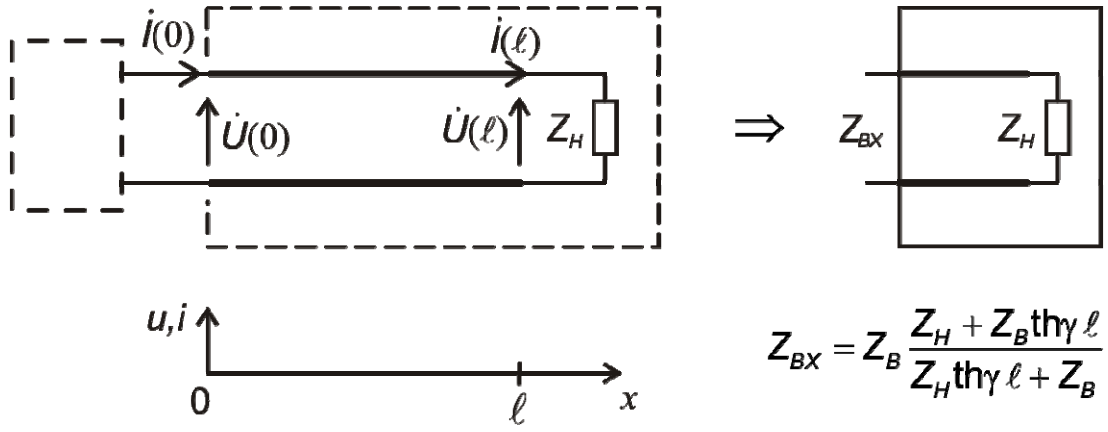


Рис. 2.6. Рассматриваемая система с длинной линией

Найдем комплексные амплитуды $\dot{U}(0)$ и $\dot{i}(0)$, присутствующие в формуле (2.56), определяющей Z_{BX} . Для этого используем формулы (2.10) и (2.11) при $x = \ell$:

$$\begin{aligned}\dot{U}(\ell) &= \dot{A}_1 e^{-\gamma \ell} + \dot{A}_2 e^{\gamma \ell}, \\ Z_B \dot{i}(\ell) &= \dot{A}_1 e^{-\gamma \ell} - \dot{A}_2 e^{\gamma \ell}.\end{aligned}$$

Используя сумму и разность этих выражений, находим коэффициенты \dot{A}_1 и \dot{A}_2 :

$$\begin{aligned}\dot{A}_1 &= \frac{\dot{U}(\ell) + Z_B \dot{i}(\ell)}{2} e^{+\gamma \ell}, \\ \dot{A}_2 &= \frac{\dot{U}(\ell) - Z_B \dot{i}(\ell)}{2} e^{-\gamma \ell}.\end{aligned}$$

Подставляя эти коэффициенты в формулы (2.10) и (2.11) при $x = 0$ получим:

$$\begin{aligned}\dot{U}(0) &= \frac{\dot{U}(\ell) + Z_B \dot{i}(\ell)}{2} e^{\gamma \ell} + \frac{\dot{U}(\ell) - Z_B \dot{i}(\ell)}{2} e^{-\gamma \ell}, \\ \dot{i}(0) &= \frac{1}{Z_B} \left(\frac{\dot{U}(\ell) + Z_B \dot{i}(\ell)}{2} e^{\gamma \ell} - \frac{\dot{U}(\ell) - Z_B \dot{i}(\ell)}{2} e^{-\gamma \ell} \right).\end{aligned}$$

Посредством формул, определяющих гиперболические функции:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{— гиперболический синус,}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \text{гиперболический косинус,}$$

приведем эти выражения к виду:

$$\dot{U}(0) = \dot{U}(\ell) \operatorname{ch} \gamma \ell + Z_B \dot{I}(\ell) \operatorname{sh} \gamma \ell,$$

$$\dot{I}(0) = \frac{1}{Z_B} \dot{U}(\ell) \operatorname{sh} \gamma \ell + \dot{I}(\ell) \operatorname{ch} \gamma \ell.$$

Беря их отношение, учитывая, что $\dot{U}(\ell) = Z_H \dot{I}(\ell)$ (граничное условие для правого конца линии), а также используя формулу $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$, определяющую гиперболический тангенс, получаем окончательное выражение, для **комплексного входного сопротивления нагруженной длинной линии**

$$Z_{BX} = Z_B \frac{Z_H + Z_B \operatorname{th} \gamma \ell}{Z_H \operatorname{th} \gamma \ell + Z_B}. \quad (2.57)$$

Из этой формулы следует зависимость Z_{BX} от значений параметров: $\ell, Z_H, Z_B, \gamma = \alpha + j\beta$, а через их посредство – от частоты ω волнового процесса.

Используя полученное выражение (2.57), рассмотрим несколько важных для практических приложений случаев.

1. Если $Z_H = Z_B$ (согласованная нагрузка), тогда из (2.57) получаем $Z_{BX} = Z_B$. В этом случае отражение волн отсутствует, в линии реализуется режим бегущих волн, комплексные амплитуды прямых волн напряжения $\dot{U}_n(x)$ и тока $\dot{I}_n(x)$ в любом сечении, в том числе и при $x = 0$, естественно связаны волновым сопротивлением Z_B .

2. Если $\alpha \ell \gg 1$, затухание волн в линии столь велико, что при любом сопротивлении нагрузки линии Z_H , отраженные ею волны, возвратившись к входу, малы, по сравнению с величиной прямых волн, и не оказывают заметного влияния на волновой процесс в начале линии. То есть выполняются неравенства: $U_n(0) \gg U_o(0), I_n(0) \gg I_o(0)$. Тогда, пренебрегая отраженными

волнами при $x = 0$, имеем, как и в предыдущем случае, $Z_{BX} \approx \dot{U}_\Pi(0)/\dot{I}_\Pi(0) = Z_B$. Тот же результат можно получить, используя формулу (2.56). В ней при условии $\alpha\ell \gg 1$ величина гиперболического тангенса мало отличается от единицы ($\text{th}(\alpha\ell + j\beta\ell) \approx 1$), и следовательно, $Z_{BX} \approx Z_B$.

3. В линиях без потерь и с малыми потерями влияние отраженных волн тем заметнее, чем значительней отличие сопротивления нагрузки Z_H от волнового сопротивления линии Z_B . Наибольшего значения амплитуды отраженных волн достигают, когда $Z_H = 0$ (короткое замыкание), $Z_H \rightarrow \infty$ (холостой ход) и $Z_H = jX_H$ (реактивное сопротивление нагрузки).

Для режимов линии при коротком замыкании (КЗ) и на холостом ходу (ХХ) формула (2.57) принимает вид:

$$Z_{BX.K3} = Z_B \text{th} \gamma \ell, \quad (2.58)$$

$$Z_{BX.XX} = \frac{Z_B}{\text{th} \gamma \ell} = Z_B \text{cth} \gamma \ell. \quad (2.59)$$

3.1. Для линии без потерь имеем: $\alpha = 0$, $\beta = \omega\sqrt{LC}$, $Z_B = \rho$. Учтем, что $\text{th} \gamma \ell = \text{th} j\beta\ell = j \text{tg} \beta\ell$. В этом случае входные сопротивления замкнутой и разомкнутой линии определяются выражениями

$$Z_{BX.K3} = j\rho \text{tg}(\sqrt{LC}\omega\ell) = jX_{BX.K3}, \quad (2.60)$$

$$Z_{BX.XX} = -j\rho \text{ctg}(\sqrt{LC}\omega\ell) = jX_{BX.XX}. \quad (2.61)$$

Заметим, во-первых, что в обоих случаях входное сопротивление одинаково зависит как от длины линии ℓ , так и от частоты волнового процесса ω . Во-вторых, входное сопротивление линии является чисто реактивным (потери в линии и нагрузке отсутствуют). В-третьих, входное сопротивление линии поочередно носит то индуктивный, то емкостной характер, стремясь то к бесконечности, то обращаясь в ноль через интервалы, равные $\lambda/4$. Графики этих зависимостей представлены на рис. 2.7.

3.2. Для линии с малыми потерями имеем: $\alpha\ell \ll 1$, $\beta = \omega\sqrt{LC}$, $Z_B = \rho$. Используя тригонометрическое равенство

$$\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th}x + \operatorname{th}y}{1 + \operatorname{th}x\operatorname{th}y}$$

и приближенное равенство, выполняемое при $x \ll 1$,

$$\operatorname{th}x \approx x,$$

запишем формулы (2.50) и (2.51) в таком виде:

$$Z_{BX.K3} = Z_B \frac{\operatorname{th}\alpha l + j\operatorname{tg}\beta l}{1 + j\operatorname{th}\alpha l\operatorname{tg}\beta l} \approx \rho \frac{\alpha l + j\operatorname{tg}\sqrt{LC}\omega l}{1 + j\alpha l\operatorname{tg}\sqrt{LC}\omega l}, \quad (2.62)$$

$$Z_{BX.XX} = Z_B \frac{1 + j\operatorname{th}\alpha l\operatorname{tg}\beta l}{\operatorname{th}\alpha l + j\operatorname{tg}\beta l} \approx \rho \frac{1 + j\alpha l\operatorname{tg}\sqrt{LC}\omega l}{\alpha l + j\operatorname{tg}\sqrt{LC}\omega l}. \quad (2.63)$$

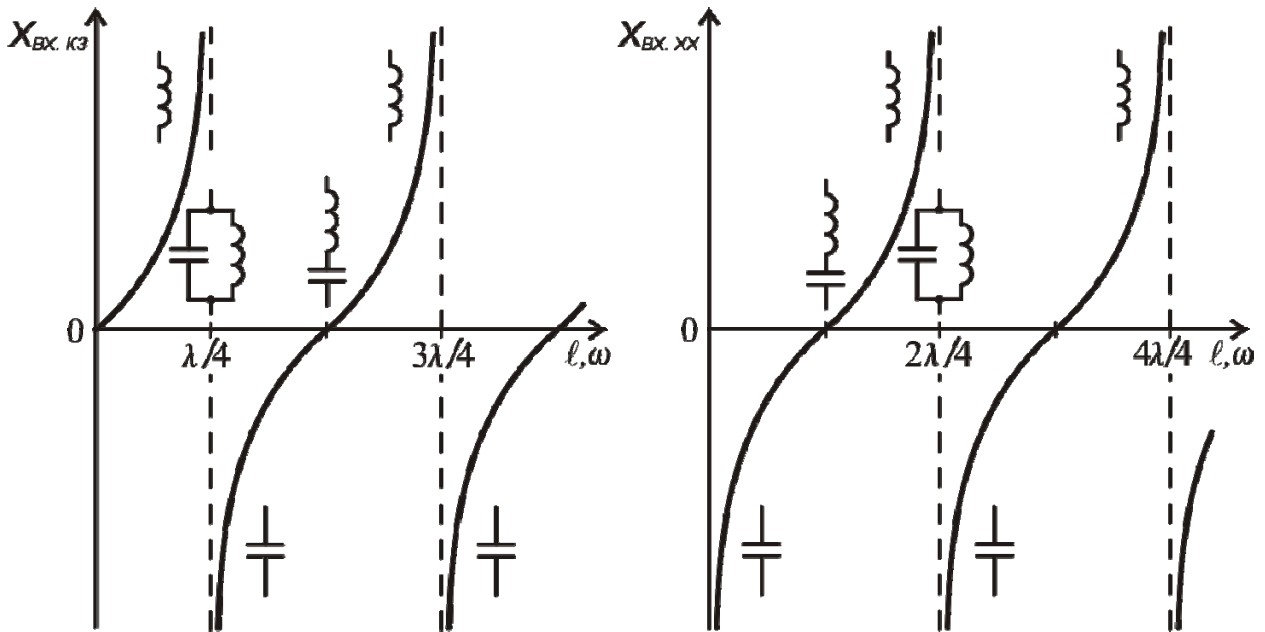


Рис. 2.7. Зависимости $X_{BX.K3}$ и $X_{BX.XX}$ от частоты и длины отрезка линии

Из этих выражений следует, что для тех значений l или ω при которых значение X_{BX} линии без потерь обращалось в 0 или стремилось к ∞ , в случае линии с потерями величина (модуль) входного сопротивления $|Z_{BX}|$ достигает минимальных или максимальных значений:

$$Z_{BX.MIN} = Z_B \operatorname{th}\alpha l \approx \rho \alpha l, \quad (2.64)$$

$$Z_{BX.MAX} = Z_B \operatorname{cth}\alpha l \approx \rho / \alpha l. \quad (2.65)$$

Соответствующие графики зависимостей $|Z_{BX.K3}|$ и $|Z_{BX.XX}|$ от длины линии ℓ , представленные в логарифмическом масштабе, показаны на рис.2.8.

Зависимость входного сопротивления от частоты волнового процесса ω в общем случае определяется довольно громоздким выражением (2.57). Перепишем его, указав зависимость входящих в него величин от ω

$$Z_{BX}(\omega) = Z_B(\omega) \frac{Z_H(\omega) + Z_B(\omega) \operatorname{th}(\alpha(\omega) + j\beta(\omega))\ell}{Z_H(\omega) \operatorname{th}(\alpha(\omega) + j\beta(\omega))\ell + Z_B(\omega)} \quad (2.66)$$

В практически важных случаях линий без потерь и с малыми потерями $Z_{BX.K3}(\omega)$ и $Z_{BX.XX}(\omega)$ описываются простыми выражениями (2.60) – (2.63), а также соответствующими им графиками, представленными на рис. 2.7, и на рис. 2.8.

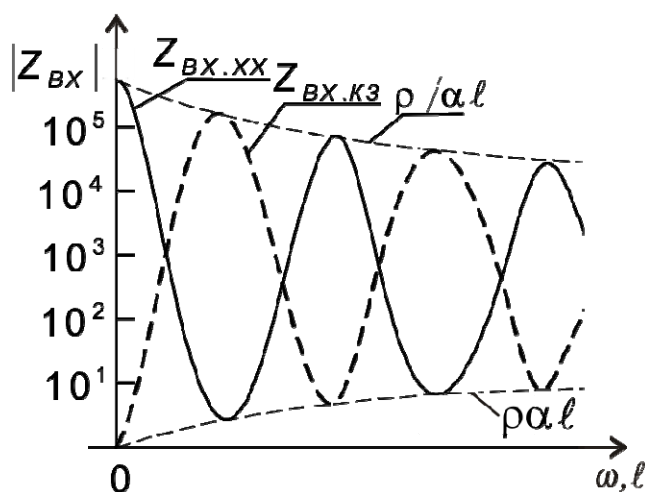


Рис. 2.8. Зависимости $Z_{BX.K3}$ и $Z_{BX.XX}$ от частоты и длины отрезка линии

Контрольные вопросы и задания

1. Определите понятие «*комплексное входное сопротивление длинной линии*». В рабочей тетради для самостоятельной работы повторите вывод формулы, определяющей эту характеристику системы с длинной линией.

2. Почему при согласованной нагрузке входное сопротивление линии равно ее волновому сопротивлению?

3. Рассмотрите входное сопротивление линии при условии $\alpha\ell \gg 1$. Почему оно мало отличается от волнового сопротивления линии?

4. Рассмотрите входное сопротивление линии в режиме короткого замыкания ее правого конца. Для случая линии без потерь получите формулу, определяющую ее входное сопротивление. Рассчитайте величину $X_{ВХ.КЗ}$, полагая: $\rho = 50$ Ом; $\lambda = 16$ см; ℓ принимает значения: 2, 4, 6, 8, 10 см. Оцените возможность использовать отрезки такой линии в качестве индуктивности или емкости.

5. Рассмотрите входное сопротивление линии в режиме холостого хода (разомкнутого правого конца). Для случая линии без потерь получите формулу, определяющую ее входное сопротивление. Рассчитайте величину $X_{ВХ.ХХ}$, полагая: $\rho = 75$ Ом; $\lambda = 32$ см; ℓ принимает значения: 4, 8, 12, 16, 20 см. Оцените возможность использования отрезков такой линии в качестве емкости или индуктивности.

6. Рассмотрите входное сопротивление длинной линии с малыми потерями в режимах короткого замыкания и холостого хода, повторите вывод формул (2.62) – (2.65). Рассчитайте максимальное и минимальное значения входного сопротивления, которые могут быть достигнуты, когда $\rho = 100$ Ом, а $\alpha\ell = 0,001$.

2.7. Комплексный коэффициент передачи и передаточная функция системы с длинной линией

2.7.1. Постановка задачи

Рассмотрим систему, в которой посредством длинной линии осуществляется передача сигналов от источника к потребителю (рис. 2.9а). Исчерпывающей характеристикой, ориентированной на анализ такого процесса в линейных системах спектральным методом, является комплексная передаточная функция системы $K(\omega)$.

Методом комплексных амплитуд исследуем систему в режиме гармонических колебаний, найдем комплексный коэффициент передачи \dot{K} и, рассматривая частоту ω в качестве независимой переменной, получим функцию $K(\omega)$.

Представим генератор гармонических колебаний в виде последовательно соединенных источника напряжения $\dot{e}_r(t) = \dot{E}_r e^{j\omega t}$ и комплексного сопротивления Z_r (рис. 2.9а). Параметрами линии передачи служат постоянная распространения γ и волновое сопротивление Z_B .

Нагрузку линии передачи представим комплексным сопротивлением Z_H . Значения сопротивлений Z_r, Z_B, Z_H в общем случае различны. В качестве входного колебания будем рассматривать напряжение источника $e_r(t)$, а в качестве выходного – напряжение на сопротивлении нагрузки, т. е. на конце линии $u(t, \ell)$. Охарактеризуем эти сигналы комплексными амплитудами \dot{E}_r и $\dot{U}(\ell)$.

Определим комплексный коэффициент передачи напряжения отношением

$$\dot{K}_{\text{сист.}} = \frac{\dot{U}(\ell)}{\dot{E}_r}. \quad (2.67)$$

Имеется два способа получить формулу, определяющую этот коэффициент. Ниже покажем оба приема.

2.7.2. Способ, основанный на представлении рассматриваемой системы совокупностью функциональных узлов

Представим рассматриваемую систему совокупностью функциональных узлов (рис.11б), каждый из которых определяется своим коэффициентом передачи.

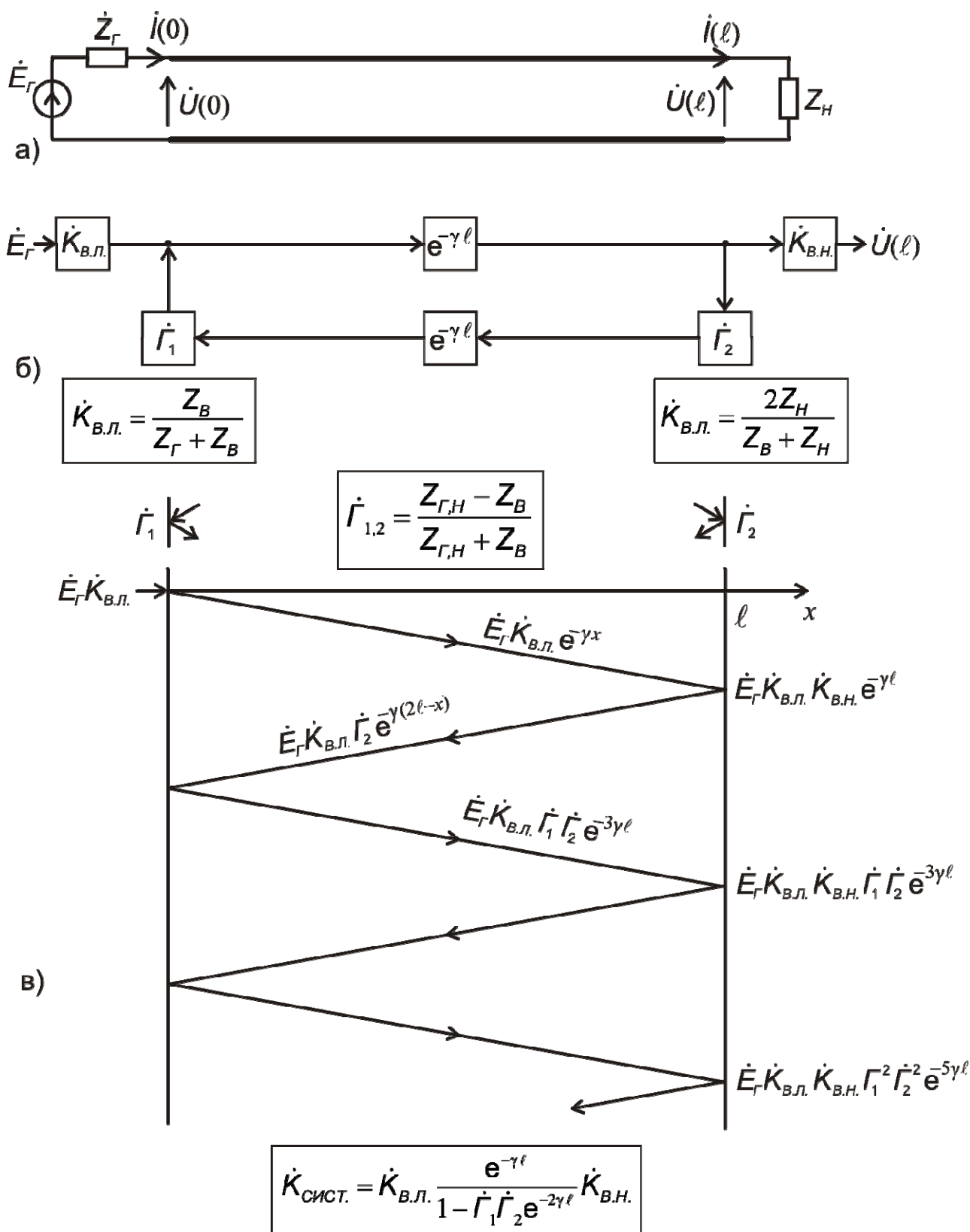


Рис.2.9. К выводу коэффициента передачи системы с длинной линией:

а) схема рассматриваемой системы;

б) функциональная схема системы;

в) график, поясняющий распространение и отражение волн в системе

Первый узел проясняет, как генератор возбуждает в начале линии прямую волну. Соответствующий коэффициент передачи первого узла \dot{K}_1 назовем *коэффициентом возбуждения линии* $\dot{K}_{B.л.}$. Так как цепь, моделирующая этот процесс – делитель напряжения, образованный комплексными сопротивлениями Z_Γ и Z_B , имеем

$$\dot{K}_1 = \dot{K}_{B.л.} = \frac{Z_B}{Z_\Gamma + Z_B}. \quad (2.68)$$

Второй узел представляет распространение прямой волны от начала линии ($x = 0$) к ее концу ($x = \ell$), и определяется по формуле (2.24) коэффициентом передачи

$$\dot{K}_2 = \frac{\dot{U}_\Pi(\ell)}{\dot{U}_\Pi(0)} = e^{-\gamma\ell}. \quad (2.69)$$

Третий узел представляет отражение прямой волны от правого конца линии и определяется по формуле (2.34) коэффициентом отражения от нагрузки

$$\dot{K}_3 = \dot{\Gamma}_2 = \frac{Z_H - Z_B}{Z_H + Z_B}. \quad (2.70)$$

Четвертый узел представляет распространение обратной (отраженной) волны от конца линии к ее началу ($x = 0$) и определяется по формуле (2.26) коэффициентом передачи

$$\dot{K}_4 = \frac{\dot{U}_O(\ell)}{\dot{U}_O(0)} = \dot{K}_2 = e^{-\gamma\ell}. \quad (2.71)$$

Пятый узел представляет отражение обратной волны от левого конца линии ($x = 0$), и определяется по формуле (2.32) коэффициентом отражения

$$\dot{K}_5 = \dot{\Gamma}_1 = \frac{Z_\Gamma - Z_B}{Z_\Gamma + Z_B}. \quad (2.72)$$

Обратная волна, отражаясь от левого конца линии, становится прямой и складывается с волной, возбужденной генератором. Очевидно, что в рассматриваемой системе имеется обратная связь, образованная вторым,

третьим, четвертым и пятым узлами. При этом второй узел фактически служит **звеном прямой передачи**, а третий, четвертый и пятый – **образуют звено обратной связи**. Результирующий коэффициент передачи этих узлов системы определяется известным для цепей с обратными связями выражением

$$\dot{K}_{oc} = \frac{\dot{K}_{з.п.п.}}{1 - \dot{K}_{з.п.п.}\dot{B}_{з.о.с.}}, \quad (2.73)$$

где $\dot{K}_{з.п.п.}$ и $\dot{B}_{з.о.с.}$ – комплексные коэффициенты передачи звеньев прямой передачи и обратной связи. Используя эту формулу, получим

$$\dot{K}_{2-5} = \frac{\dot{K}_2}{1 - \dot{K}_2\dot{K}_3\dot{K}_4\dot{K}_5} = \frac{e^{-\gamma\ell}}{1 - \dot{\Gamma}_1\dot{\Gamma}_2e^{-2\gamma\ell}}. \quad (2.74)$$

Шестой узел проясняет, как прямая волна в конце линии возбуждает колебания в нагрузке. Соответствующий коэффициент передачи шестого узла \dot{K}_6 назовем **коэффициентом возбуждения нагрузки** $\dot{K}_{в.н.}$. Для его определения представим длинную линию эквивалентным генератором с источником напряжения. Его задающее напряжение определяется режимом «холостого хода», то есть напряжением на конце разомкнутой линии. Ранее было получено, что оно равно $U(\ell) = 2U_{\pi}(\ell)$. Сопротивление эквивалентного генератора равно волновому сопротивлению линии Z_B . Цепь, моделирующая этот процесс – делитель напряжения, образованный комплексными сопротивлениями Z_H и Z_B . С учетом указанного удвоения амплитуды напряжения падающей волны, имеем

$$\dot{K}_6 = \dot{K}_{в.н.} = \frac{2Z_H}{Z_B + Z_H}. \quad (2.75)$$

Результирующий комплексный коэффициент передачи системы в соответствии с ее функциональной схемой определяется выражением

$$\dot{K}_{сист.} = \dot{K}_1\dot{K}_{2-5}\dot{K}_6 = \dot{K}_1 \frac{\dot{K}_2}{1 - \dot{K}_2\dot{K}_3\dot{K}_4\dot{K}_5} \dot{K}_6 = \dot{K}_{в.л.} \frac{e^{-\gamma\ell}}{1 - \dot{\Gamma}_1\dot{\Gamma}_2e^{-2\gamma\ell}} \dot{K}_{в.н.}$$

С учетом выражений, полученных для коэффициентов передачи отдельных узлов, окончательно имеем:

$$\dot{K}_{\text{сист.}} = \frac{Z_B}{Z_r + Z_B} \cdot \frac{e^{-\gamma \ell}}{1 - \dot{\Gamma}_1 \dot{\Gamma}_2 e^{-2\gamma \ell}} \cdot \frac{2Z_H}{Z_B + Z_H}. \quad (2.76)$$

2.7.3. Способ, основанный на использовании граничных условий

Второй способ, позволяющий найти эту формулу, заключается в использовании граничных условий для определения комплексных коэффициентов \dot{A}_1 и \dot{A}_2 , входящих в общее решение (2.10), (2.11) уравнения Гельмгольца. Граничное условие для левого конца линии ($x = 0$) определяется выражением

$$\dot{U}(0) = \dot{E}_r - \dot{Z}_r \dot{I}(0). \quad (2.77)$$

Полагая в формулах (2.4) и (2.5) $x = 0$ получим

$$\dot{A}_1 + \dot{A}_2 = \dot{E}_r - \frac{Z_r}{Z_B} (\dot{A}_1 - \dot{A}_2).$$

Отсюда следует

$$\dot{A}_1 \left(1 + \frac{Z_r}{Z_B} \right) + \dot{A}_2 \left(1 - \frac{Z_r}{Z_B} \right) = \dot{E}_r. \quad (2.78)$$

Граничное условие для правого конца линии ($x = \ell$) определяется выражением

$$\dot{U}(\ell) = \dot{Z}_H \dot{I}(\ell). \quad (2.79)$$

Полагая в формулах (2.10) и (2.11) $x = \ell$, получим

$$\dot{A}_1 e^{-\gamma \ell} + \dot{A}_2 e^{\gamma \ell} = \frac{Z_H}{Z_B} (\dot{A}_1 e^{-\gamma \ell} - \dot{A}_2 e^{\gamma \ell}).$$

Отсюда следует

$$\dot{A}_1 \left(1 - \frac{Z_H}{Z_B} \right) e^{-\gamma \ell} + \dot{A}_2 \left(1 + \frac{Z_H}{Z_B} \right) e^{\gamma \ell} = 0. \quad (2.80)$$

Выражения (2.79) и (2.80) представим системой алгебраических уравнений

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_\Gamma}{Z_B} & 1 - \frac{Z_\Gamma}{Z_B} \\ \left(1 - \frac{Z_H}{Z_B}\right)e^{-\gamma\ell} & \left(1 + \frac{Z_H}{Z_B}\right)e^{\gamma\ell} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{A}_1 \\ \dot{A}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{E}_\Gamma \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.81)$$

Посредством правила Крамера и, используя введенные выше коэффициенты, находим

$$\dot{A}_1 = \frac{\dot{K}_{В.Л.} \dot{E}_\Gamma}{1 - \dot{\Gamma}_1 \dot{\Gamma}_2 e^{-2\gamma\ell}}, \quad \dot{A}_2 = \dot{A}_1 \dot{\Gamma}_2 e^{-2\gamma\ell}. \quad (2.82)$$

Представим комплексный коэффициент передачи системы (2.51) в виде

$$\dot{K}_{СИСТ.} = \frac{\dot{U}(\ell)}{\dot{E}_\Gamma} = \frac{\dot{A}_1 e^{-\gamma\ell} + \dot{A}_2 e^{\gamma\ell}}{\dot{E}_\Gamma}. \quad (2.83)$$

Подставляя сюда найденные коэффициенты \dot{A}_1 и \dot{A}_2 , получим формулу, совпадающую с выражением (2.76), выведенным предыдущим способом.

Осуществим преобразование этой формулы. Входящий в ее состав сомножитель $\frac{1}{1 - \dot{\Gamma}_1 \dot{\Gamma}_2 e^{-2\gamma\ell}}$ с учетом неравенства $|\dot{\Gamma}_1 \dot{\Gamma}_2 e^{-2\gamma\ell}| < 1$ представим бесконечным рядом по формуле геометрической прогрессии $\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \dots$, где $|x| < 1$. После подстановки ряда в (2.37) получим

$$\dot{K}_{СИСТ.} = \dot{K}_{В.Л.} \dot{K}_{В.Н.} e^{-\gamma\ell} (1 + \dot{\Gamma}_1 \dot{\Gamma}_2 e^{-2\gamma\ell} + \dot{\Gamma}_1^2 \dot{\Gamma}_2^2 e^{-4\gamma\ell} + \dots). \quad (2.84)$$

Последнее выражение имеет простой физический смысл. Выходной сигнал формируется в результате наложения многократных отражений входного сигнала от концов длинной линии. Иллюстрация этого процесса представлена на рис 2.9в.

Выражением, определяющим комплексную передаточную функцию рассматриваемой системы, является полученная формула (2.76), в которой следует использовать конкретные частотные зависимости выражения комплексных сопротивлений Z_Γ, Z_B, Z_H . В общем случае она принимает вид

$$K_{\text{сист.}}(\omega) = \frac{K_{\text{в.л.}}(\omega)K_{\text{в.н.}}(\omega)e^{-\gamma(\omega)\ell}}{1 - \Gamma_1(\omega)\Gamma_2(\omega)e^{-2\gamma(\omega)\ell}}. \quad (2.85)$$

Контрольные вопросы и задания

1. Определите понятие «*комплексный коэффициент передачи системы*».
2. В рабочей тетради для самостоятельной работы начертите схему системы, в которой посредством длинной линии осуществляется передача сигналов от источника к потребителю (рис. 11а). Получите выражение, определяющее комплексный коэффициент передачи системы, используя оба приведенные ранее подхода.
3. Рассчитайте величину коэффициента передачи, полагая $Z_r = R_r = 100$ Ом, $Z_B = \rho = 100$ Ом, $Z_H = 100 - j100$ Ом, $e^{-\alpha\ell} = 0,9$.

2.8. Основные режимы использования линий при передаче сигналов

Возьмем за основу выражения (2.68) – (2.76) и исследуем характер процесса передачи сигнала в линии и частотные характеристики системы для двух важных случаев.

1. Сопротивление нагрузки согласовано с волновым сопротивлением линии, т. е. $Z_H = Z_B$. Тогда $\dot{\Gamma}_2 = 0 \Rightarrow \dot{K}_{\text{сист.}} = \dot{K}_{\text{в.л.}} e^{-\gamma\ell}$. В этом случае отраженная волна не возникает, и в согласовании сопротивления генератора с волновым сопротивлением линии нет необходимости. Если при этом $Z_r \ll Z_B$, то $\dot{K}_{\text{в.л.}} = 1 \Rightarrow \dot{K}_{\text{сист.}} = e^{-\gamma\ell}$, что соответствует максимальному коэффициенту передачи сигнала, а если $Z_r = Z_B$, то $\dot{K}_{\text{в.л.}} = 1/2 \Rightarrow \dot{K}_{\text{сист.}} = 0,5 e^{-\gamma\ell}$, что соответствует условию максимальной передачи мощности при заданной величине Z_r .

2. Сопротивление генератора согласовано с волновым сопротивлением линии, т. е. $Z_r = Z_B$. Тогда $\dot{\Gamma}_1 = 0 \Rightarrow \dot{K}_{\text{сист.}} = 0,5 \dot{K}_{\text{в.н.}} e^{-\gamma\ell}$. В этом случае, если

$Z_H \neq Z_B$, происходит однократное отражение сигнала от нагрузки. Это "эхо" сигнала поглощается генератором, т.е. не возвращается к нагрузке и не мешает наблюдению выходных колебаний.

Рассмотрим частотные характеристики для таких вариантов линий: без потерь ($\alpha=0$, $\beta=\omega\sqrt{LC}$); с малыми потерями ($\alpha \approx \frac{R}{2\rho} + \frac{G\rho}{2}$, $\beta=\omega\sqrt{LC}$); без искажений ($\alpha=\sqrt{RG}$, $\beta=\omega\sqrt{LC}$). Во всех этих случаях волновое сопротивление линии $Z_B=\rho$ и коэффициент затухания α от частоты не зависят, волновое число $\beta=\omega\sqrt{LC}$ изменяется прямо пропорционально частоте (дисперсия волн в линии отсутствует), а передаточная функция, описывающая распространение прямой волны $e^{-\gamma\ell} = e^{-\alpha\ell} e^{-j\beta\ell} = e^{-\alpha\ell} e^{-j\omega\sqrt{LC}\ell}$ характеризует передачу сигналов по линии с сохранением формы и задержкой во времени на величину $\tau = \ell\sqrt{LC} = \ell/v_\phi$. Предположим к тому же, что Z_r и Z_H являются активными сопротивлениями, равными R_r и R_H . При оговоренных условиях коэффициенты отражения $\dot{\Gamma}_1$ и $\dot{\Gamma}_2$ – вещественные числа, принимающие значения в пределах $-1 < \Gamma_{1,2} < 1$, коэффициент возбуждения линии $K_{в.л.}$ – вещественное положительное число $0 < K_{в.л.} < 1$, а передаточная функция длинной линии определяется выражением

$$K_{\text{сист.}}(\omega) = \frac{K_{в.л.} K_{в.н.} e^{-\alpha\ell} e^{-j\omega\tau}}{1 - \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-2\alpha\ell} e^{-j2\omega\tau}} \quad (2.86)$$

Модуль числителя этой функции от частоты не зависит, а модуль знаменателя периодически изменяется с частотой 2ω , определяя чередование положительной и отрицательной обратной связи в этой системе передачи сигналов. В соответствии с критерием Найквиста система устойчива, так как в линиях с потерями при любых значениях Γ_1 и Γ_2 величина $|\Gamma_1 \Gamma_2| e^{-2\alpha\ell} < 1$. Если она близка к единице, то амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) системы имеет такой же вид, как у гребенчатого фильтра, при ее уменьшении АЧХ выравнивается, становясь равномерной, когда Γ_1 или Γ_2 равны нулю.

Графики АЧХ передаточной функции длинной линии при различных значениях величины $|\Gamma_1 \Gamma_2| e^{-2\alpha \ell}$ представлены на рис. 2.10.

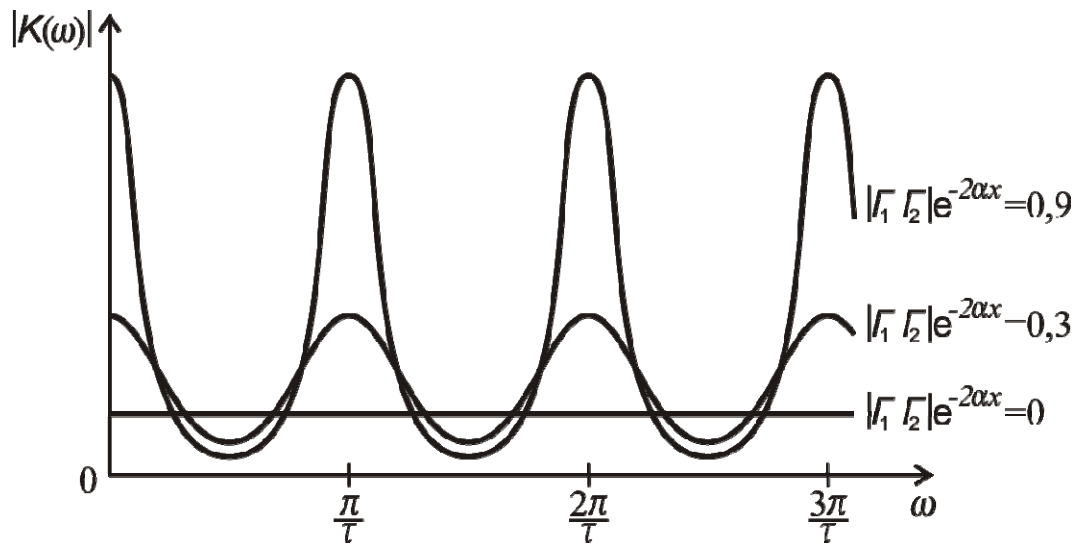


Рис. 2.10. Графики АЧХ передаточной функции длинной линии при различных значениях величины $|\Gamma_1 \Gamma_2| e^{-2\alpha \ell}$

Обратимся к функции $e^{-\gamma(\omega)\ell}$, содержащейся в числителе и знаменателе общего выражения передаточной функции (2.85) и описывающей распространение в линии прямой и обратной волн. В линии с затуханием и дисперсией ее АЧХ, равная $|K(\omega)| = e^{-\alpha(\omega)\ell}$, и ФЧХ, равная $\arg K(\omega) = -\beta(\omega)\ell$, определяются частотными зависимостями коэффициента затухания $\alpha(\omega)$ и волнового числа $\beta(\omega)$, рассмотренными ранее. Характер этих зависимостей может оказать существенное влияние на формирование АЧХ и ФЧХ длинной линии и привести к амплитудным и фазовым искажениям передаваемых по ней сигналов.

Контрольные вопросы и задания

1. Какое условие составляет основу рассмотренных режимов использования длинных линий при передаче сигналов?

2. Какое явление устраняется в рассмотренных режимах? Какой вид имела бы АЧХ, если бы это явление не было устранено?

2.9. Применения длинных линий

2.9.1. Передача сигналов

Основное назначение длинных линий – передача информации на расстояние посредством электрических сигналов. Форма этих сигналов и следовательно, их спектр бывают самыми разнообразными. Главным требованием, предъявляемым к линиям в таком качестве, является передача сигналов с минимальными искажениями. Схема системы с длинной линией, предназначенной для передачи сигналов, представлена на рис. 2.11. Ее режимы использования определены ранее в п. 2.8.

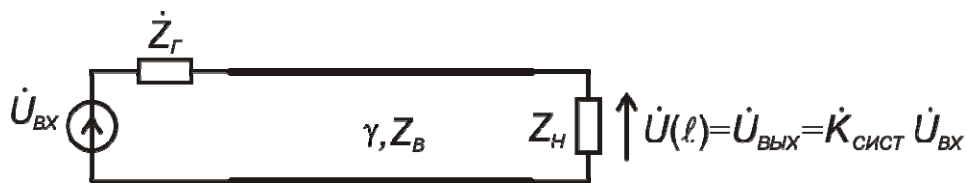


Рис. 2.11. Система с длинной линией, предназначенная для передачи сигналов

На практике для передачи узкополосных сигналов используют линии с минимальными потерями, для передачи широкополосных сигналов – линии без искажений. В обоих случаях обеспечивают согласование со смежными цепями с обеих сторон: $Z_G = Z_H = Z_B$. В этом случае:

$$\dot{K}_{СИСТ.} = 0,5e^{-\alpha l} e^{-j\omega\tau}. \quad (2.87)$$

Используя спектральный метод анализа передачи сигналов, учитывая теорему запаздывания преобразования Фурье, можно получить выражение, определяющее выходной сигнал при условии согласования со смежными цепями

$$u_{ВЫХ.}(t) = 0,5e^{-\alpha l} u_{ВХ.}(t - \tau). \quad (2.88)$$

2.9.2. Линии задержки

Длинные линии можно использовать в устройствах задержки сигналов. Время задержки сигнала в линии τ определяется отношением $\tau = \ell / v_\phi = \ell \sqrt{LC}$. Соответствующая схема представлена на рис. 2.11, основной результат определяется выражением (2.88).

2.9.3. Элементы индуктивности и емкости

Из формул (2.60) и (2.61), определяющих входное сопротивление короткозамкнутой и разомкнутой на конце длинной линии без потерь, и соответствующих им графиков, приведенных на рис. 2.7, следует возможность применения отрезков таких линий в качестве индуктивности и емкости. Величина этих элементов зависит от длины отрезка линии ℓ . Длину, обеспечивающую заданную величину индуктивности L_Σ или емкости C_Σ , можно найти, приравняв входное сопротивление (проводимость) линии входному сопротивлению (проводимости) эквивалентного элемента.

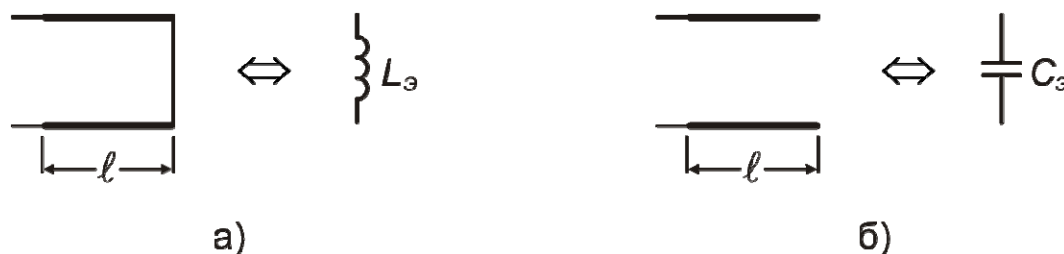


Рис. 2.12. Отрезки линий, эквивалентные элементам индуктивности и емкости

В качестве первого примера найдем длину ℓ_x короткозамкнутого отрезка линии без потерь, эквивалентного индуктивности L_Σ (рис. 2.12а). Для отрезка линии без потерь имеем (2.60) $Z_{BX.K3} = j\rho \operatorname{tg} \beta \ell_x$, для сопротивления эквивалентной индуктивности имеем $Z_{L_\Sigma} = j\omega L_\Sigma$. Приравняем эти выражения $j\rho \operatorname{tg} \beta \ell_x = j\omega L_\Sigma$. Откуда следует

$$\ell_x = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{\omega L_{\mathcal{E}}}{\rho} = \frac{1}{\omega \sqrt{LC}} \operatorname{arctg} \frac{\omega L_{\mathcal{E}}}{\rho}.$$

Аналогично найдем длину ℓ_x разомкнутого отрезка линии без потерь, эквивалентного емкости $C_{\mathcal{E}}$ (рис. 2.12б). В результате сравнения комплексных проводимостей линии и емкости $C_{\mathcal{E}}$ получим

$$\ell_x = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{\omega C_{\mathcal{E}}}{\rho} = \frac{1}{\omega \sqrt{LC}} \operatorname{arctg} \frac{\omega C_{\mathcal{E}}}{\rho}.$$

2.9.4. Резонаторы

Короткозамкнутые и разомкнутые на конце отрезки длинной линии с малыми потерями длиной, кратной $\lambda/4$, используют в качестве резонаторов последовательного и параллельного типов. Основой для расчетов таких резонаторов являются формулы (2.62) и (2.63), определяющие входные сопротивления длинных линий.

Покажем, например, как рассчитываются параметры четвертьволнового отрезка короткозамкнутой линии, используемого в качестве параллельного резонатора (рис. 2.13). Из формулы (2.62) находим, что на частоте $\omega_0 = \pi / (2\ell \sqrt{LC})$, соответствующей длине волны λ_0 , входное сопротивление отрезка длиной $\lambda_0/4$ является активным и достигает максимального значения, приближенно равного величине $Z_{\text{ВХ.КЗ.МАХ}} \approx \rho / \alpha \ell$. Ширина полосы пропускания на уровне $Z_{\text{ВХ.КЗ.МАХ}} / \sqrt{2}$ приближенно равна $\Delta\omega_{0,707} = \omega_{\text{ГР.В}} - \omega_{\text{ГР.Н}} \approx 2\alpha / \sqrt{LC}$. Сопоставляя эти данные с характеристиками LC-резонаторов, находим, что четвертьволновый короткозамкнутый отрезок

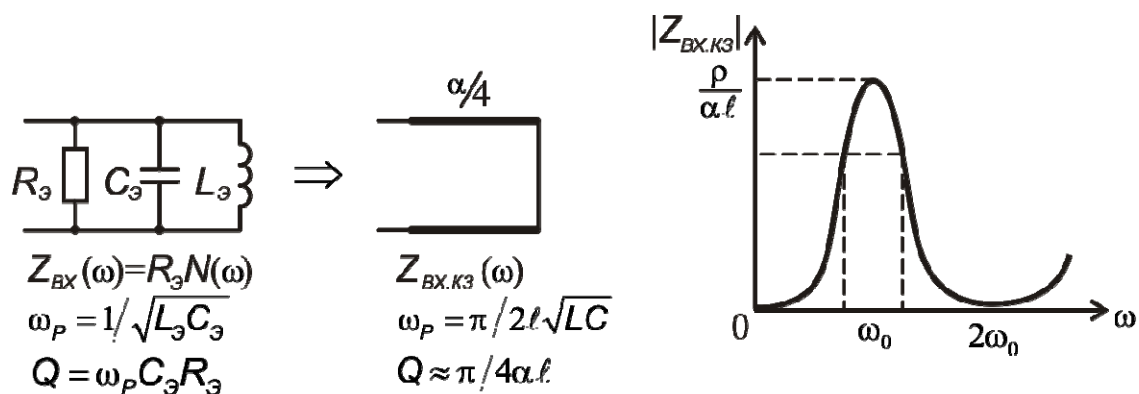


Рис. 2.13. Отрезок линии, эквивалентный параллельному резонатору

линии, применяемый в качестве параллельного резонатора, обладает параметрами: $\omega_p = \pi/2\ell\sqrt{LC}$, $Q \approx \pi/4\alpha\ell$. Значения добротности резонатора, вычисленные по последней формуле, могут достигать нескольких тысяч, что позволяет использовать такие отрезки для частотной избирательности в диапазонах $10^8 \div 10^{10}$ Гц.

2.9.5. Металлические изоляторы

Входное сопротивление четвертьволнового короткозамкнутого отрезка линии с малыми потерями, определяемое формулой (2.62), приближенно равно величине $Z_{BX.K3}(\lambda_0/4) \approx \rho/\alpha\ell$. Поскольку она значительно превышает величину волнового сопротивления линии ρ ($Z_{BX.K3} \gg \rho$), то на частоте колебаний $\omega_0 = \pi/2\ell\sqrt{LC}$ такие отрезки используют в качестве изоляторов, которые называют металлическими. Их применяют, например, для крепления двухпроводных воздушных линий (рис. 2.14а), для крепления внутреннего проводника коаксиальной линии (рис. 2.14б) и т. п.

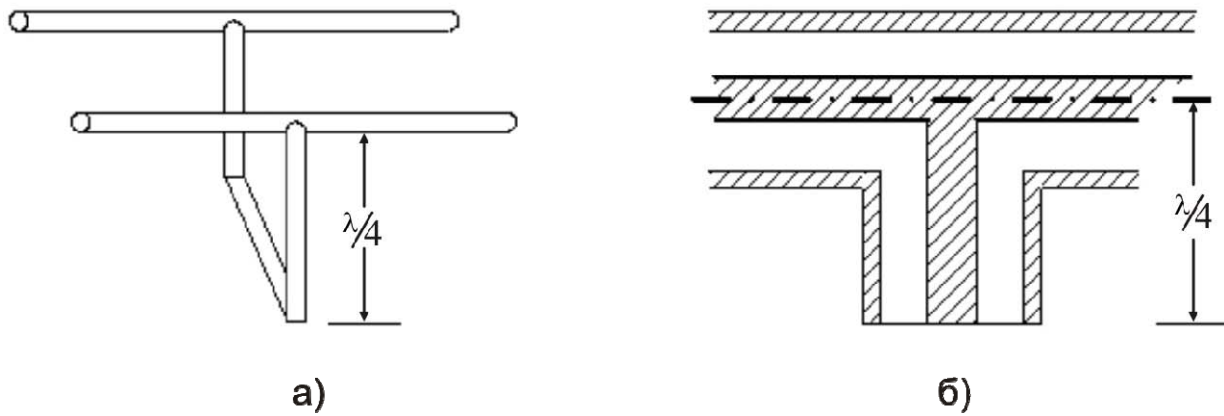


Рис. 2.14. Металлические изоляторы

2.9.6. Четвертьволновый трансформатор сопротивлений

Рассмотрим входное сопротивление четвертьволнового отрезка длиной линии без потерь, нагруженного активным сопротивлением R_H . В соответствии с формулой (2.57), когда $\alpha = 0$ и $\ell = \lambda_0 / 4$, оно является чисто активным и равняется величине

$$R_{BX} = Z_{BX} = \rho^2 / R_H. \quad (2.89)$$

Отсюда видно, что изменением величины волнового сопротивления ρ такого отрезка можно в широких пределах регулировать его входное сопротивление R_{BX} . Это свойство четвертьволновых отрезков длинных линий с малыми потерями широко используют в технике сверхвысоких частот (СВЧ) для преобразования (трансформации) сопротивлений.

Посредством четвертьволновых трансформаторов сопротивлений обычно согласуют линии передачи и их нагрузки, если последние обладают чисто активным сопротивлением. Пусть, например, волновое сопротивление линии передачи равно ρ_L , а сопротивление нагрузки $R_H \neq \rho_L$ (рис. 2.17а). Используя формулу (2.89), найдем волновое сопротивление четвертьволнового трансформатора сопротивлений $\rho_{TP} = \sqrt{R_H \rho_L}$.

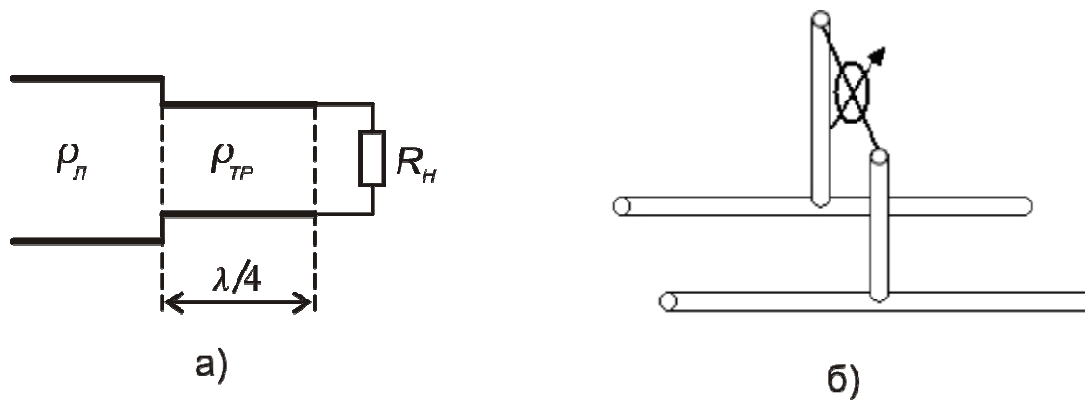


Рис. 2.15. Устройства, использующие свойства длинных линий:

- а) трансформатор сопротивлений;
- б) линейный вольтметр

Другой пример применения четвертьволнового трансформатора сопротивлений – его использование в измерительной технике СВЧ. Измерительный прибор с малым входным сопротивлением (термопара, термистор) подключают к измеряемому объекту через четвертьволновый отрезок линии (рис. 2.17б). Такое измерительное устройство называют линейным вольтметром. Его входное сопротивление $R_{вх}$ тем выше, чем больше волновое сопротивление трансформатора $\rho_{тр}$ и чем меньше входное сопротивление измерительного прибора $R_{пр}$, так как $R_{вх} = \rho_{тр}^2 / R_{пр}$.

Последняя формула аналогична известному из оптики соотношению для коэффициента преломления четвертьволновой пленки, «просветляющей» границу раздела двух различных сред. В обоих случаях происходит взаимная компенсация волн, отраженных обеими неоднородностями.

2.9.7. Измерительная линия

Для измерения комплексных сопротивлений устройств в диапазоне СВЧ используются линии с малыми потерями в виде так называемых **измерительных линий**. В измерительной линии с линейным вольтметром сочетается двухпроводная линия (воздушная или полосковая). Измеряя $K_{свн}$ и расстояние x_1 от конца измерительной линии до ближайшего минимума напряжения, по известному значению волнового сопротивления линии ρ

вычисляют значение комплексного сопротивления Z_H , подключенного к ней устройства, используя формулу

$$Z_H = \frac{\rho(1 - jK_{CBH} \operatorname{tg} \beta x_1)}{K_{CBH} - j \operatorname{tg} \beta x_1}, \quad (2.90)$$

которая является следствием выражения (2.29) и равенства $Z_{BX}(\ell)|_{\ell=x_1} = \rho/K_{CBH}$.

С помощью измерительной линии, закороченной на конце, можно определять частоту (длину волны) генератора гармонических колебаний по расстоянию Δ между двумя соседними минимумами напряжения ($\lambda_0 = 2\Delta$).

Рассмотренные случаи не исчерпывают всех возможностей применения длинных линий. В технике СВЧ можно встретить немало других устройств, полезные качества которых основаны на свойствах длинных линий.

Контрольные вопросы и задания

В рабочей тетради для самостоятельной работы выполните упражнения:

1. Сигнал $u_{BX}(t)$ на частоте 100 МГц передается (схема на рис. 2.11) по кабелю РК-75, который характеризуется параметрами: волновое сопротивление 75 Ом, затухание 0,105 дБ/м, скорость распространения волн 185 м/мкс. Найдите $u_{ВЫХ}(t)$, рассчитав коэффициент передачи и величину задержки сигнала в линии передачи. Сопротивление нагрузки 75 Ом.

2. При каких условиях отрезки длинных линий используют в качестве элементов индуктивности и емкости?

Используя условие равенства сопротивлений двухполюсников:

а) получите формулу для расчета длины закороченного отрезка линии, имеющего входное сопротивление, равное значению заданной индуктивности;

б) получите формулу для расчета длины разомкнутого отрезка линии, имеющего входное сопротивление, равное значению заданной емкости.

3. При каких условиях отрезки длинных линий используют в качестве резонаторов? Сопоставляя параметры параллельного LC-контра и

короткозамкнутого отрезка линии, получите формулы для расчета резонансной частоты и добротности резонатора.

4. При каких условиях короткозамкнутые отрезки используют в качестве металлических изоляторов? Какие явления обуславливают эту возможность? Укажите примеры использования металлических изоляторов.

5. Рассмотрите четвертьволновый трансформатор сопротивлений. Получите формулу, определяющую его входное сопротивление. Укажите примеры использования четвертьволновых резонаторов.

2.10. Волны в активных длинных линиях

В активных длинных линиях погонный параметр G принимает отрицательные значения ($G < 0$), учитывая тем самым способность линии компенсировать потери и увеличивать энергию распространяющихся в ней волн. Такими длинными линиями моделируют волновые процессы, происходящие в электронных системах, основанных на распространении волн в активных средах. К ним относятся, например, различного рода усилители и генераторы бегущей волны, использующие в одних случаях активные свойства электронных пучков, а в других – различные квантовые явления в средах.

Представим погонный параметр G в виде $G = -g$, где $g > 0$. Уравнения (2.7) и (2.8), описывающие гармонический волновой процесс частоты ω , решения этих уравнений (2.10) и (2.11), а также окончательные выражения (2.18) и (2.19) сохраняют свой вид для активных линий. Постоянная распространения γ и волновое сопротивление Z_B определяются формулами (2.12) и (2.13), которые в этом случае принимают вид:

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(-g + j\omega C)} = \alpha + j\beta, \quad (2.91)$$

$$Z_B = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{-g + j\omega C}}. \quad (2.92)$$

При выполнении условий $R \ll \omega L$, $g \ll \omega C$ коэффициенты α , β и волновое сопротивление Z_B , подобно случаю линии с малыми потерями, рассмотренному в п. 2.1, определяются приближенными выражениями

$$\alpha = \frac{R}{2\rho} - \frac{g\rho}{2}, \beta = \omega\sqrt{LC}, \quad (2.93)$$

$$Z_B = \rho = \sqrt{L/C}. \quad (2.94)$$

Из (2.93) следует, что при условии $R/\rho > g\rho$, величина α положительна ($\alpha > 0$). В этом случае распределения мгновенных значений напряжения $u(t, x)$ и тока $i(t, x)$ определяются формулами (2.18) и (2.19), описывающими прямые и обратные волны, затухающие при распространении, как в обычной линии (рис. 2.1).

При выполнении условия $R/\rho < g\rho$ величина α становится отрицательной ($\alpha < 0$). В этом случае формулы (2.18) и (2.19) принимают вид:

$$u(t, x) = A_1 e^{+\alpha|x} \cos(\omega t - \beta x + \psi_1) + A_2 e^{-|\alpha|x} \cos(\omega t + \beta x + \psi_2), \quad (2.95)$$

$$i(t, x) = \frac{A_1}{Z_B} e^{+\alpha|x} \cos(\omega t - \beta x + \psi_1 - \varphi_{Z_B}) - \frac{A_2}{Z_B} e^{-|\alpha|x} \cos(\omega t + \beta x + \psi_2 - \varphi_{Z_B}), \quad (2.96)$$

описывая прямые и обратные волны, **нарастающие при распространении**.

Их амплитуды по мере движения волны увеличиваются пропорционально $e^{|\alpha|x}$ (рис. 2.16). И в соответствии с формулами (2.32) и (2.33) увеличиваются потоки мощности, переносимые этими бегущими волнами.

Следовательно, активные линии могут описывать процессы, связанные с увеличением мощности колебаний – усилением и генерированием колебаний. Источником энергии здесь является внешний источник, обеспечивающий и поддерживающий состояние среды с отрицательным значением поперечной проводимости.

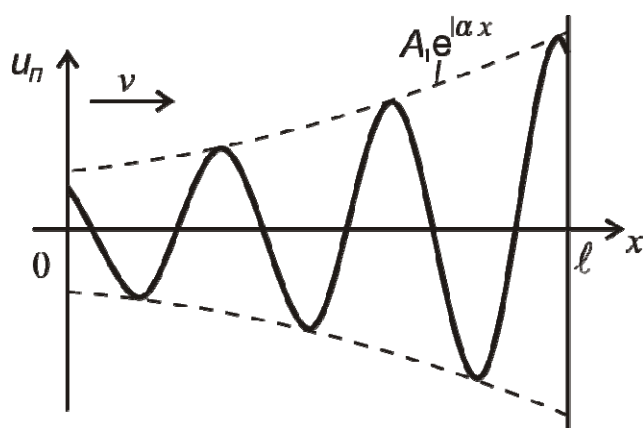


Рис. 2.16. Прямая волна в активной длинной линии

2.10.1. Усиление колебаний в активных линиях

Обобщенной схемой усилителя бегущей волны может служить схема системы передачи сигналов, представленная на рис. 19а. Определим условия устойчивости процессов в активной линии, показанной на рис. 2.17а, предназначенной для усиления сигналов. Рассмотрим ее как систему с обратной связью (ОС) (рис. 2.9б), характеризующуюся передаточной функцией (2.73). В соответствии с критерием устойчивости Найквиста заключаем, что система

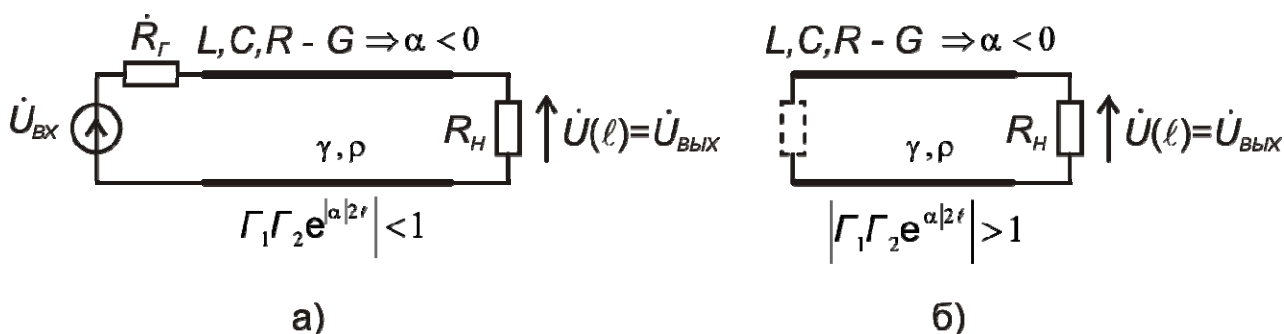


Рис. 2.17. Схемы, моделирующие принцип работы электронных устройств:

а) усилитель;

б) автогенератор

устойчива, когда $|\Gamma_1 \Gamma_2 e^{|\alpha|2\ell}| < 1$. Это условие легко выполняется, например, когда $R_n = \rho \Rightarrow \Gamma_2 = 0$ или когда $R_r = \rho \Rightarrow \Gamma_1 = 0$. В первом случае одновременно обеспечивается максимальный коэффициент полезного действия усилителя, так как среда не расходует энергию на усиление

отраженной волны. Во втором случае, если линия является взаимной, а $R_H = 0$ или $R_H \rightarrow \infty \Rightarrow |\Gamma_2| = 1$, усиливаемый сигнал дважды взаимодействует со средой, что приводит к увеличению коэффициента усиления системы, но вызывает трудности, связанные с разделением на входе линии прямой и обратной волн.

2.10.2. Генерирование колебаний в активных линиях

При выполнении условия

$$|\Gamma_1 \Gamma_2| e^{2|\alpha|\ell} \geq 1 \quad (2.97)$$

система является неустойчивой. В этом случае в активной линии возникают и устанавливаются автоколебания. Их источником энергии, как и в предыдущем случае, является среда, активность которой поддерживается внешним источником энергии.

Из неравенства (2.97) следует, что при построении автогенератора на активной линии выгодно обеспечивать максимальные значения коэффициентов отражения $|\Gamma_1|$ и $|\Gamma_2|$. Поэтому на одном из концов линии нагрузкой служит короткое замыкание $R_{H1} = 0$, а на другом достаточно малое сопротивление $R_{H2} < \rho$. Обобщенная схема такого автогенератора на рис. 2.176.

Значения частот автоколебаний ω_r , возникающих в этой схеме, определяются условием баланса фаз, имеющего здесь вид равенства:

$$\arg \Gamma_1 + \arg \Gamma_2 + 2\beta\ell = 2\pi n, \quad (n = 0; 1; 2 \dots). \quad (2.98)$$

Из него при $\Gamma_1 = -1 \Rightarrow \arg \Gamma_1 = \pi$ и $R_{H2} < \rho \Rightarrow \arg \Gamma_2 = \pi$ следует простое выражение

$$\ell = n\lambda_r / 2, \quad (2.99)$$

показывающее, что на длине активной линии должно укладываться целое число полуволн генерируемых колебаний.

Одновременное выполнение условий баланса амплитуд и баланса фаз определяет спектр автоколебаний. Существенную роль здесь играет зависимость $\alpha(\omega)$, т. е. зависимость отрицательной проводимости среды от частоты.

К числу автогенераторов, для которых активные линии могут служить моделями, относятся квантовые генераторы оптического, инфракрасного и субмиллиметрового диапазонов, а также генераторы СВЧ диапазона (клистроны, лампы обратной волны, генераторы дифракционного излучения).

Контрольные вопросы и задания

1. Какие линии называют активными?
2. В рабочей тетради получите выражение, определяющее постоянную распространения активной линии. Укажите условие, при котором амплитуды распространяющихся волн нарастают.
3. Используя критерий Найквиста, рассмотрите режим использования системы с длинной линией в качестве усилителя колебаний.
4. Используя критерий Найквиста, рассмотрите режим использования системы с длинной линией в качестве автогенератора. Докажите, что на длине активной линии должно укладываться целое число полуволн.

2.11. Волны в неоднородных длинных линиях

2.11.1. Уравнения неоднородных линий

В неоднородных длинных линиях значения погонных параметров L , C , R и G зависят от продольной координаты x . Такая зависимость может быть плавной (рис. 18а) или, при каскадном соединении отрезков однородных линий, скачкообразной (рис. 2.18б). Наличие в конструкции линии неоднородностей может придавать ей полезные свойства. Примером здесь может служить рассмотренный ранее четвертьволновый трансформатор

сопротивлений. Неоднородные длинные линии находят широкое применение в качестве согласующих устройств в радиотехнике СВЧ диапазона.



Рис. 2.18. Неоднородные длинные линии:

а) плавная;

б) скачкообразная

Заметим, что рассматриваемые линии относятся к классу линейных инвариантных во времени цепей с распределенными параметрами. Подход, использованный в п. 3 при выводе телеграфных уравнений (1.2) для однородных линий, приемлем и в рассматриваемом случае. В результате получим систему уравнений с переменными коэффициентами

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} &= L(x) \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + R(x)i(x,t), \\ -\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} &= C(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + G(x)u(x,t). \end{aligned} \quad (2.100)$$

Подключение неоднородной линии к источнику гармонических колебаний приводит к возбуждению в ней гармонического волнового процесса. В любом сечении такой линии напряжение и ток – гармонические колебания. Они, как и ранее в п. 4, представляются выражениями (2.1) – (2.4). Посредством метода комплексных амплитуд уравнения длинных линий (2.100) приводятся к системе уравнений

$$\begin{aligned} -\frac{d\dot{U}(x)}{dx} &= Z(x)\dot{I}(x), \\ -\frac{d\dot{I}(x)}{dx} &= Y(x)\dot{U}(x), \end{aligned} \quad (2.101)$$

где $Z(x)$ и $Y(x)$ – погонные комплексные сопротивление и проводимость.

Система (2.101) может быть сведена к единственному дифференциальному уравнению. Для этого продифференцируем вначале обе части первого уравнения системы

$$\frac{d^2\dot{U}(x)}{dx^2} = -\frac{dZ(x)}{dx}i(x) - Z(x)\frac{di(x)}{dx}.$$

Из того же уравнения следует, что

$$i(x) = -\frac{1}{Z(x)} \frac{d\dot{U}(x)}{dx}. \quad (2.102)$$

Используя тождество

$$\frac{1}{Z(x)} \cdot \frac{dZ(x)}{dx} = \frac{d\ln Z(x)}{dx} \quad (2.103)$$

и формулу (2.101), получим окончательное выражение, которому должно удовлетворять распределение комплексной амплитуды напряжения в неоднородной длинной линии

$$\frac{d^2\dot{U}(x)}{dx^2} - \left(\frac{d}{dx} \ln Z(x) \right) \frac{d\dot{U}(x)}{dx} - Z(x)Y(x)\dot{U}(x) = 0. \quad (2.104)$$

Аналогично из (2.101) может быть получено дифференциальное уравнение, описывающее распределение комплексной амплитуды тока в неоднородной длинной линии $\dot{I}(x)$

$$\frac{d^2\dot{I}(x)}{dx^2} - \left(\frac{d}{dx} \ln Y(x) \right) \frac{d\dot{I}(x)}{dx} - Z(x)Y(x)\dot{I}(x) = 0. \quad (2.105)$$

Однако, как и ранее, нет необходимости решать оба уравнения. Если найдено распределение комплексной амплитуды $\dot{U}(x)$, служащее решением (2.104), то распределение $\dot{I}(x)$ может быть получено посредством формулы (2.102).

Введем переменную постоянную распространения $\gamma = \gamma(x) = \sqrt{Z(x)Y(x)}$ и переменное волновое сопротивление $Z_B = Z_B(x) = \sqrt{Z(x)/Y(x)}$. Подставляя их в уравнения (2.104) и (2.105), получим системы уравнений с переменными коэффициентами

$$\frac{d^2 \dot{U}(x)}{dx^2} - \left(\frac{d}{dx} \ln \gamma Z_B \right) \frac{d \dot{U}(x)}{dx} - \gamma^2 \dot{U}(x) = 0, \quad (2.106)$$

$$\frac{d^2 \dot{I}(x)}{dx^2} - \left(\frac{d}{dx} \ln \frac{Z_B}{\gamma} \right) \frac{d \dot{I}(x)}{dx} - \gamma^2 \dot{I}(x) = 0. \quad (2.107)$$

Математических приемов, которые позволяли бы получать замкнутые выражения для решений произвольных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, не существует. Строгие решения известны только для некоторых частных случаев, один из которых продемонстрирован ниже.

2.11.2. Неоднородная линия передачи экспоненциального типа

Рассмотрим классический пример анализа неоднородной линии, допускающий строгое решение. Пусть первичные погонные параметры длинной линии зависят от продольной координаты x по экспоненциальному закону

$$L(x) = L_0 e^{-\sigma x}; C(x) = C_0 e^{\sigma x}, \quad (2.108)$$

где L_0, C_0 – значения соответствующих параметров при $x=0$, а σ – коэффициент, характеризующий их изменение от координаты x . Пусть также в этой линии отсутствуют омические потери, т. е.: $R = 0$, $G = 0$. Следовательно

$$\begin{aligned} Z(x) &= j\omega L(x) = j\omega L_0 e^{-\sigma x}, \\ Y(x) &= j\omega C(x) = j\omega C_0 e^{\sigma x}; \\ \gamma &= j\omega \sqrt{L(x)C(x)} = j\omega \sqrt{L_0 C_0}, \\ Z_B &= \sqrt{\frac{L(x)}{C(x)}} = e^{-\sigma x} \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = Z_{B0} e^{-\sigma x}. \end{aligned} \quad (2.109)$$

При этих условиях

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln Z(x) &= \frac{d}{dx} \ln \gamma Z_B = \frac{1}{j\omega L_0 e^{-\sigma x}} \cdot \frac{dj\omega L_0 e^{-\sigma x}}{dx} = -\sigma, \\ \frac{d}{dx} \ln Y(x) &= \frac{d}{dx} \ln \frac{Z_B}{\gamma} = \frac{1}{j\omega C_0 e^{\sigma x}} \cdot \frac{dj\omega C_0 e^{\sigma x}}{dx} = -\sigma \end{aligned} \quad (2.110)$$

Тогда уравнение (2.106) для экспоненциальной линии запишется так:

$$\frac{d^2 \dot{U}(x)}{dx^2} + \sigma \frac{d \dot{U}(x)}{dx} - \gamma^2 \dot{U}(x) = 0. \quad (2.111)$$

Общее решение этого дифференциального уравнения (2.111) имеет вид

$$\dot{U}(x) = \dot{A}_1 e^{p_1 x} + \dot{A}_2 e^{p_2 x}, \quad (2.112)$$

где p_1 и p_2 – корни характеристического уравнения

$$p^2 + \sigma p - \gamma^2 = 0, \quad (2.113)$$

т. е.

$$p_{1,2} = -\frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \gamma^2} = -\frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 - \omega^2 L_0 C_0}. \quad (2.114)$$

При условии $\omega \sqrt{L_0 C_0} > \sigma/2$ корни уравнения (2.113) – комплексные числа

$$p_{1,2} = -\frac{\sigma}{2} \pm j\omega \sqrt{L_0 C_0} \sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{4\omega^2 L_0 C_0}} = \alpha \mp j\beta, \quad (2.115)$$

где действительная составляющая $\alpha = -\frac{\sigma}{2}$ определяет закон изменения амплитуд колебаний волн по мере их движения, а мнимая составляющая β – волновое число экспоненциальной линии. В итоге искомое решение приобретает вид

$$\dot{U}(x) = \dot{A}_1 e^{-\frac{\sigma}{2}x} \cdot e^{-j\beta x} + \dot{A}_2 e^{-\frac{\sigma}{2}x} \cdot e^{+j\beta x}. \quad (2.116)$$

В этом выражении, подобно полученной ранее в п. 3 формуле (2.10), первое из слагаемых соответствует прямой волне, второе – обратной. Подобный результат был рассмотрен в п. 4 (формулы (2.20) – (2.27)). Однако здесь имеется существенное отличие. Представим (2.116) следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{U}(x) &= \dot{U}_n(x) + \dot{U}_o(x) = \left(\dot{A}_1 e^{-j\beta x} + \dot{A}_2 e^{j\beta x} \right) e^{-\frac{\sigma}{2}x} = \\ &= \left(\dot{U}_n(0) e^{-j\beta x} + \dot{U}_o(0) e^{j\beta x} \right) e^{-\frac{\sigma}{2}x}. \end{aligned} \quad (2.117)$$

Отсюда следует, что, хотя омические потери в неоднородной линии экспоненциального типа отсутствуют, амплитуды колебаний напряжения прямой и обратной волн по мере их движения изменяются. Так, амплитуда колебаний напряжения прямой волны по мере своего движения уменьшается, а амплитуда колебаний напряжения обратной волны по мере своего движения увеличивается.

Чтобы разобраться в этом явлении, найдем распределение комплексной амплитуды тока в рассматриваемой линии. Используя (2.105) и (2.117), получим

$$\begin{aligned} i(x) = i_{\pi}(x) + i_o(x) = & \left(\frac{\dot{A}_1(\sigma/2 + j\beta)}{j\omega L_0} e^{-j\beta x} + \right. \\ & \left. + \frac{\dot{A}_2(\sigma/2 - j\beta)}{j\omega L_0} e^{+j\beta x} \right) e^{+\frac{\sigma}{2}x}. \end{aligned} \quad (2.118)$$

Из (2.118) следует, что теперь наоборот амплитуда колебаний тока прямой волны по мере своего движения увеличивается, а амплитуда колебаний тока обратной волны по мере своего движения уменьшается.

Поскольку изменения амплитуд колебаний напряжения и тока при движении волн имеют противоположные знаки, средняя мощность, переносимая волнами, распространяющимися вдоль линии, постоянна

$$P_{\pi,o} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\dot{U}_{\pi,o}(x) \bar{\dot{I}}_{\pi,o}(x) \right) = \text{const}. \quad (2.119)$$

Из полученного выражения (2.119) следует важное свойство – в экспоненциальной линии происходит трансформация уровней напряжений и токов. В отличие от обычного трансформатора, известного из электротехники, этот процесс носит пространственно-распределенный характер. В зависимости от знака параметра σ такой волновой трансформатор может быть как повышающим, так и понижающим.

Используя коэффициент фазы β , содержащейся в (2.116), определим фазовую скорость волн в линии экспоненциального типа

$$v_{\Phi} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0} \sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{4\omega^2 L_0 C_0}}}, \quad (2.120)$$

Отсюда следует, что экспоненциальной линии присуща частотная дисперсия, несвойственная однородным линиям без потерь.

Исходя из выражений (2.117) и (2.118), определим волновое сопротивление неоднородной линии. Для прямой волны получим:

$$Z_{в.п}(x) = \frac{\dot{U}_п(x)}{\dot{I}_п(x)} = \frac{j\omega L_0}{\sigma/2 + j\beta} e^{-\sigma x}. \quad (2.121)$$

Для обратной волны получим:

$$Z_{в.о}(x) = \frac{\dot{U}_о(x)}{\dot{I}_о(x)} = \frac{j\omega L_0}{\sigma/2 - j\beta} e^{-\sigma x}. \quad (2.122)$$

Сравнение этих выражений показывает, что волновые сопротивления экспоненциальной линии для прямой и обратной волн, во-первых, отличаются друг от друга, во вторых, являются комплексными величинами. Последнее обстоятельство указывает на трудности согласования экспоненциальной линии с активным сопротивлением нагрузки. В частности, присоединение однородной линии с постоянным волновым сопротивлением к концу экспоненциальной линии вызывает отражение, так как волновое сопротивление однородной линии, согласованной со своей нагрузкой – вещественная величина. И только когда коэффициент σ , характеризующий экспоненциальное изменение параметров, мал по сравнению с величиной β , тогда

$$Z_B(x) \approx \frac{\omega L_0}{\beta} e^{-\sigma x} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} e^{-\sigma x} = \rho_0 e^{-\sigma x}. \quad (2.123)$$

Последняя формула указывает на принципиальную возможность использовать отрезки экспоненциальных линий передачи в качестве согласующих устройств, позволяющих практически избежать отражений при чисто активном сопротивлении нагрузки. Для этого достаточно выбрать

параметр ρ_0 экспоненциальной линии равным волновому сопротивлению основной питающей линии $Z_{В.Л.}$.

Пусть, например, необходимо согласовать волновое сопротивление основной однородной питающей линии $Z_{В.Л.} = \rho_L$ и сопротивление нагрузки R_H . Выбираем начальное значение волнового сопротивления экспоненциальной линии $\rho_L = \rho_0$. Считая заданным параметр σ экспоненциального участка, определяем его длину ℓ

$$\ell = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{\rho_0}{R_H}. \quad (2.124)$$

Контрольные вопросы и задания

1. Какие линии называют неоднородными?
2. В рабочей тетради для самостоятельной работы представьте систему телеграфных уравнений неоднородных линий. Сведите ее к уравнениям (2.106) и (2.107), определяющим искомые функции.
3. Рассмотрите неоднородную линию передачи экспоненциального типа. Получите выражения, определяющие распределения в линии комплексных амплитуд напряжения и тока. Получите формулы, определяющие волновые сопротивления линии для прямой и обратной волны. Осмыслите принципиальную возможность использовать отрезки экспоненциальных линий в качестве согласующих устройств.

2.12. Волны в связанных длинных линиях

Длинные линии называют **связанными**, когда они размещены в пространстве таким образом, что области, где сосредоточены электромагнитные поля, переносимые этими линиями, взаимно пересекаются в той или иной мере (рис. 2.19). В этом случае линии влияют друг на друга, и их свойства отличаются от соответствующих свойств одиночных линий в отсутствие связи. Взаимная связь линий здесь носит пространственно-

распределенный характер, и ее анализ осуществляют методами электродинамики.

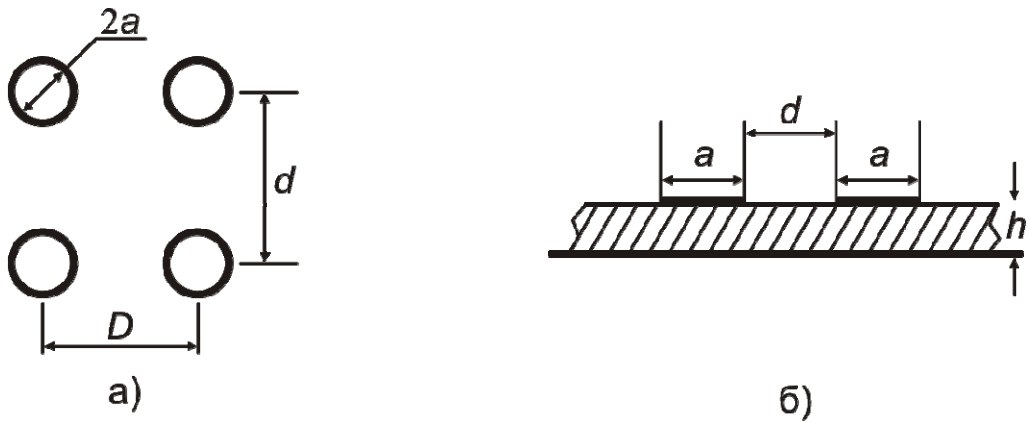


Рис. 2.19. Связанные линии:

- а) двухпроводные;
- б) полосковые

Математический анализ явлений в связанных длинных линиях в общем случае чрезвычайно громоздок. Поэтому здесь ограничимся простейшим случаем, когда связаны две одинаковые однородные линии размещены в пространстве параллельно друг другу.

В режиме возбуждения системы гармоническим воздействием вся совокупность волновых явлений в связанных линиях описывается следующей системой телеграфных уравнений:

$$\begin{aligned}
 -\frac{d\dot{U}_1(x)}{dx} &= Z\dot{I}_1(x) + Z_{CB}\dot{I}_2(x), \\
 -\frac{d\dot{I}_1(x)}{dx} &= Y\dot{U}_1(x) + Y_{CB}\dot{U}_2(x), \\
 -\frac{d\dot{U}_2(x)}{dx} &= Z\dot{I}_2(x) + Z_{CB}\dot{I}_1(x), \\
 -\frac{d\dot{I}_2(x)}{dx} &= Y\dot{U}_2(x) + Y_{CB}\dot{U}_1(x).
 \end{aligned}
 \tag{2.125}$$

Здесь: $Z = (R + j\omega L)$ и $Y = (G + j\omega C)$ – погонные комплексные сопротивление и проводимость линий; $Z_{CB} = j\omega L_{CB}$ и $Y_{CB} = j\omega C_{CB}$ – погонные параметры электромагнитной связи, носящие чисто реактивный характер.

Отметим, что в соответствии с принципом взаимности теории электрических цепей связь между линиями является взаимной. Уравнения (2.125) дополняются граничными условиями: $\dot{U}_{1,2}(0)$ и $\dot{I}_{1,2}(0)$; $\dot{U}_{1,2}(\ell)$ и $\dot{I}_{1,2}(\ell)$, заданными некоторым определенным образом.

Система уравнений (2.125) может быть расщеплена на две независимые системы. Для этого от переменных $\dot{U}_{1,2}(x)$ и $\dot{I}_{1,2}(x)$ перейдем к новым переменным $\xi_{1,2}(x)$ и $\eta_{1,2}(x)$ посредством линейного преобразования

$$\begin{aligned}\xi_1(x) &= \dot{U}_1(x) + \dot{U}_2(x), \\ \xi_2(x) &= \dot{U}_1(x) - \dot{U}_2(x), \\ \eta_1(x) &= \dot{I}_1(x) + \dot{I}_2(x), \\ \eta_2(x) &= \dot{I}_1(x) - \dot{I}_2(x).\end{aligned}\tag{2.126}$$

Новые переменные, введенные этими выражениями, являются **нормальными координатами** для системы двух связанных линий.

Складывая и вычитая соответствующие уравнения, входящие в (2.125), получим две независимые системы дифференциальных уравнений, каждая из которых подобна уравнениям (2.6), полученным и рассмотренным ранее:

$$\begin{aligned}-\frac{d\xi_1(x)}{dx} &= (Z + Z_{CB})\eta_1(x), \\ -\frac{d\eta_1(x)}{dx} &= (Y + Y_{CB})\xi_1(x);\end{aligned}\tag{2.127}$$

$$\begin{aligned}-\frac{d\xi_2(x)}{dx} &= (Z - Z_{CB})\eta_2(x), \\ -\frac{d\eta_2(x)}{dx} &= (Y - Y_{CB})\xi_2(x).\end{aligned}\tag{2.128}$$

Решения систем (2.127) и (2.128) называют **нормальными волнами**. Независимость нормальных волн друг от друга указывает на то, что две связанные линии передачи обладают двумя типами волн – двумя **модами**. В общем случае волновой процесс в системе связанных линий передачи является наложением нормальных волн.

Переходя от нормальных координат к исходным распределениям комплексных амплитуд напряжений и токов в линиях, имеем

$$\begin{aligned}\dot{U}_1(x) &= \frac{1}{2}(\xi_1(x) + \xi_2(x)), \\ \dot{U}_2(x) &= \frac{1}{2}(\xi_1(x) - \xi_2(x)), \\ i_1(x) &= \frac{1}{2}(\eta_1(x) + \eta_2(x)), \\ i_2(x) &= \frac{1}{2}(\eta_1(x) - \eta_2(x)).\end{aligned}\tag{2.129}$$

Заметим, что если линии возбуждены так, что $\xi_2(x) = 0$ и $\eta_2(x) = 0$, тогда комплексные амплитуды колебаний напряжений и токов в линиях синфазны: $\dot{U}_1(x) = \dot{U}_2(x)$ и $i_1(x) = i_2(x)$. Такую моду называют **четной** нормальной волной. Если же $\xi_1(x) = 0$ и $\eta_1(x) = 0$, то комплексные амплитуды колебаний напряжений и токов в линиях противофазны: $\dot{U}_1(x) = -\dot{U}_2(x)$ и $i_1(x) = -i_2(x)$. Такую моду называют **нечетной** нормальной волной.

Рассматривая уравнения (2.127) и (2.128), введем погонные комплексные сопротивления и проводимости для четной и нечетной волн

$$\begin{aligned}Z_{чТ} &= Z + Z_{сВ}, \\ Y_{чТ} &= Y + Y_{сВ}, \\ Z_{нч} &= Z - Z_{сВ}, \\ Y_{нч} &= Y - Y_{сВ}.\end{aligned}\tag{2.130}$$

В соответствии с определениями, изложенными ранее в п. 2.2, находим для каждой из волн постоянные распространения:

$$\begin{aligned}\gamma_{чТ} &= \sqrt{Z_{чТ} Y_{чТ}} = \alpha_{чТ} + j\beta_{чТ}, \\ \gamma_{нч} &= \sqrt{Z_{нч} Y_{нч}} = \alpha_{нч} + j\beta_{нч}\end{aligned}\tag{2.131}$$

и волновые сопротивления:

$$\begin{aligned}Z_{в.чТ} &= \sqrt{\frac{Z_{чТ}}{Y_{чТ}}}, \\ Z_{в.нч} &= \sqrt{\frac{Z_{нч}}{Y_{нч}}}.\end{aligned}\tag{2.132}$$

Для линий без потерь эти выражения принимают вид

$$\begin{aligned}\alpha_{\text{чТ}} &= 0; \quad \beta_{\text{чТ}} = \omega \sqrt{(L + L_{\text{CB}})(C + C_{\text{CB}})}, \\ \alpha_{\text{нЧ}} &= 0; \quad \beta_{\text{нЧ}} = \omega \sqrt{(L - L_{\text{CB}})(C - C_{\text{CB}})};\end{aligned}\tag{2.133}$$

$$\begin{aligned}Z_{\text{в.чТ}} &= \rho_{\text{чТ}} = \sqrt{\frac{L + L_{\text{CB}}}{C + C_{\text{CB}}}}, \\ Z_{\text{в.нЧ}} &= \rho_{\text{нЧ}} = \sqrt{\frac{L - L_{\text{CB}}}{C - C_{\text{CB}}}}.\end{aligned}\tag{2.134}$$

Различие коэффициентов фазы для четной и нечетной волн свидетельствует о том, что нормальные волны обладают разными фазовыми скоростями

$$\begin{aligned}v_{\text{ф.чТ}} &= \frac{1}{\sqrt{(L + L_{\text{CB}})(C + C_{\text{CB}})}}, \\ v_{\text{ф.нЧ}} &= \frac{1}{\sqrt{(L - L_{\text{CB}})(C - C_{\text{CB}})}}.\end{aligned}\tag{2.135}$$

Различие фазовых скоростей четной и нечетной волн приводит к тому, что в связанных линиях передачи наблюдаются **пространственные биения** этих волн. Поясним это явление следующим примером.

Рассмотрим систему из двух связанных идентичных линий, представленную на рис. 2.20а. Слева к линии 1 подключен источник напряжения, возбуждающий в ней гармонические колебания с комплексной амплитудой \dot{E} , вход линии 2 закорочен. Справа к концам обеих линий подключены согласованные нагрузки, обеспечивая в линиях режим бегущих волн.

Граничные условия для правых концов линий определяются выражениями:

$$\begin{aligned}\dot{U}_1(0) &= \frac{1}{2}(\xi_1(0) + \xi_2(0)) = \dot{E}, \\ \dot{U}_2(0) &= \frac{1}{2}(\xi_1(0) - \xi_2(0)) = 0.\end{aligned}\tag{2.136}$$

Используя (2.134) в качестве системы уравнений относительно начальных амплитуд нормальных волн $\xi_1(0)$ и $\eta_1(0)$ получим

$$\xi_1(0) = \xi_2(0) = \dot{E}. \quad (2.137)$$

Итак, в рассматриваемой системе при заданных начальных условиях существуют обе нормальные волны, распространяющиеся слева направо, т. е. являясь прямыми волнами. Обратные волны в системе отсутствуют, поскольку правые концы обеих линий согласованы с нагрузками. Распределение комплексных амплитуд напряжений этих прямых волн вдоль линий определяется формулами:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1(x) &= \frac{\dot{E}}{2} (e^{-j\beta_{чТ}x} + e^{-j\beta_{нч}x}), \\ \dot{U}_2(x) &= \frac{\dot{E}}{2} (e^{-j\beta_{чТ}x} - e^{-j\beta_{нч}x}). \end{aligned} \quad (2.138)$$

Отличие в (2.138) коэффициентов фазы четной $\beta_{чТ}$ и нечетной $\beta_{нч}$ волн, связанное с отличием их фазовых скоростей, обуславливает пространственные биения волн, выражающиеся в неравномерном распределении амплитуд колебаний напряжений вдоль линий. Найдем законы распределения амплитуд $U_1(x) = |\dot{U}_1(x)|$ и $U_2(x) = |\dot{U}_2(x)|$. Для этого в выражениях (2.138) перейдем к распределениям мгновенных значений напряжений и воспользуемся преобразованиями полученных выражений подобно тому, как это было сделано ранее при исследовании явления интерференции в п. 7. В результате получим:

$$U_1(x) = \frac{E}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \cos(\beta_{чТ}x - \beta_{нч}x)} = E \left| \cos\left(\frac{\beta_{чТ} - \beta_{нч}}{2}x\right) \right|, \quad (2.139)$$

$$U_2(x) = \frac{E}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \cos(\beta_{чТ}x - \beta_{нч}x)} = E \left| \sin\left(\frac{\beta_{чТ} - \beta_{нч}}{2}x\right) \right|. \quad (2.140)$$

Соответствующие графики представлены на рис. 2.20б. Период пространственных биений, определяемый из формул (2.139) и (2.140), должен удовлетворять соотношению

$$\left(\frac{\beta_{\text{чТ}} - \beta_{\text{нЧ}}}{2} \right) \Lambda_{\text{БИЕН}} = \pi ,$$

откуда имеем

$$\Lambda_{\text{БИЕН}} = \frac{2\pi}{\beta_{\text{чТ}} - \beta_{\text{нЧ}}} . \quad (2.141)$$

Рассмотренное явление в связанных линиях находит широкое применение при конструировании устройств, работающих в диапазоне СВЧ.

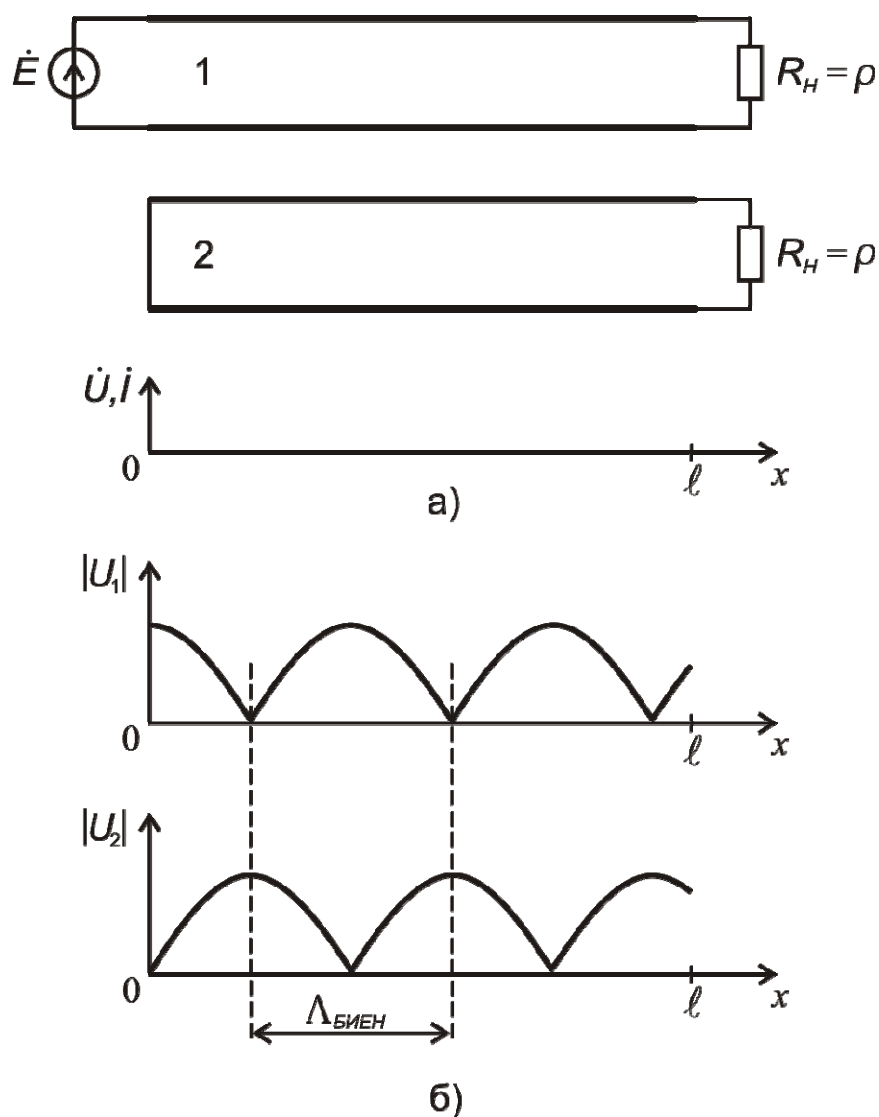


Рис. 2.20. Пространственные биения волн:

- а) схема рассматриваемой системы;
- б) распределения в линиях амплитуд волн

Контрольные вопросы и задания

1. Какие линии называют связанными?
2. В рабочей тетради для самостоятельной работы представьте систему уравнений для двух связанных длинных линий. Сведите ее к уравнениям (2.127) и (2.128), определяющим нормальные волны.
3. Определите четную и нечетную нормальную волну. Для каждой из них получите формулы, определяющие постоянную распространения, волновое сопротивление и фазовую скорость.
4. Проанализируйте пространственные биения четной и нечетной волн в системе, состоящей из двух связанных идентичных линий.

3. Нестационарные волновые процессы в длинных линиях

3.1. Уравнения длинных линий в условиях нестационарных волновых процессов

3.1.1. Уравнения длинных линий в операторной форме

Материал, излагавшийся в предыдущей главе, относился к случаю, когда в рассматриваемой системе с длинной линией действовал источник гармонических колебаний, обуславливающий в линии стационарный гармонический волновой процесс. Основным инструментом исследований являлся метод комплексных амплитуд, позволивший получить много важных результатов, представленных выше для одночастотного режима. Хотя такой режим в радиоэлектронных устройствах используется редко, все же знание поведения системы в режиме гармонических колебаний в сочетании с классическим спектральным методом, основанным на преобразовании Фурье, позволяют исследовать нестационарные процессы в системах с длинными линиями. Трудности здесь возникают при учете начальных условий для длинной линии и при учете отражений волн от ее концов. В рамках единого подхода такие задачи гораздо удобнее решать операторным методом (операционным методом), основанным на преобразовании Лапласа. Необходимые сведения об операторном методе изложены в Приложении 2. Ниже этот метод будет использован при исследовании нестационарных волновых процессов в однородных длинных линиях.

Будем исходить из основных уравнений (1.2), выведенных ранее для однородной инвариантной во времени длинной линии

$$\begin{aligned}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} &= L \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + Ri(x,t), \\ -\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} &= C \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + Gu(x,t).\end{aligned}\tag{1.2}$$

Применяя преобразование Лапласа по временной переменной, получим

$$\begin{aligned}-\frac{dU(p,x)}{dx} &= (pL + R)I(p,x) - Li(0,x), \\ -\frac{dI(p,x)}{dx} &= (pC + G)U(p,x) - Cu(0,x),\end{aligned}\tag{3.1}$$

где $U(p,x)$ и $I(p,x)$ – распределения **операторного напряжения** и **операторного тока** вдоль линии, являющиеся **изображениями** искомых функций; $u(0,x)$ и $i(0,x)$ – начальные условия – заданные функции, представляющие распределения напряжения и тока в линии в момент времени $t = 0$.

Введем для длинной линии понятия погонное **операторное сопротивление** $Z = Z(p) = pL + R$, погонную **операторную проводимость** $Y = Y(p) = pC + G$ и перепишем (3.1) в виде

$$\begin{aligned}-\frac{dU(p,x)}{dx} &= ZI(p,x) - Li(0,x), \\ -\frac{dI(p,x)}{dx} &= YU(p,x) - Cu(0,x).\end{aligned}\tag{3.2}$$

Замечаем, что уравнения (3.2) содержат начальные условия – распределения $u(0,x)$ и $i(0,x)$ и дополняются только граничными условиями, соответствующими поставленной задаче. Дифференцируя первое уравнение системы (3.2) по x и подставляя сюда значение $\frac{dI(p,x)}{dx}$ из второго, получаем неоднородное уравнение Гельмгольца, описывающее распределение в линии операторного напряжения

$$\frac{d^2U(p,x)}{dx^2} - \gamma^2 U(p,x) = F_U^0(p,x),\tag{3.3}$$

где

$$\gamma = \gamma(p) = \sqrt{ZY} = \sqrt{(pL + R)(pC + G)}\tag{3.4}$$

– **операторная постоянная распространения** – вторичный параметр длинной линии в операторной форме;

$$F_U^0(p, x) = L \frac{d i(0, x)}{dx} - Z C u(0, x) \quad (3.5)$$

– известная функция заданных начальных условий.

Аналогично из (3.2) может быть получено дифференциальное уравнение для распределения в линии операторного тока

$$\frac{d^2 I(p, x)}{dx^2} - Z Y I(p, x) = F_I^0(p, x). \quad (3.6)$$

где

$$F_I^0(p, x) = C \frac{d u(0, x)}{dx} - L Y i(0, x) \quad (3.7)$$

– известная функция заданных начальных условий.

Решение неоднородных уравнений Гельмгольца (3.3) и (3.6) состоит из общих решений однородных уравнений и частных решений, определяемых правыми частями исходных уравнений. Как и ранее, нет необходимости решать оба уравнения. Если найдено распределение операторного напряжения $U(p, x)$, служащее решением (3.3), то распределение операторного тока $I(p, x)$ может быть получено посредством формулы (3.2).

3.1.2. Решения и следствия однородных уравнений длинных линий

При нулевых начальных условиях $F_U^0(p, x) = 0$ уравнение (3.3) становится однородным и его решение $U(p, x)$, подобно полученной ранее формуле (2.10), принимает вид

$$U(p, x) = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x}, \quad (3.8)$$

где операторные величины $A_1 = A_1(p)$ и $A_2 = A_2(p)$ – постоянные интегрирования, определяемые с помощью граничных условий.

Используя первое уравнение системы (3.2), находим распределение в линии операторного тока:

$$I(p, x) = \frac{1}{Z_B} (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}), \quad (3.9)$$

где

$$Z_B = Z_B(p) = \sqrt{\frac{pL + R}{pC + G}} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} \quad (3.10)$$

– **операторное волновое сопротивление** – вторичный параметр длинной линии в операторной форме. В случае линии без потерь $Z_B = \sqrt{L/C} = \rho$.

Сопоставляя (3.8) и (3.9) с полученными и исследованными ранее аналогичными формулами (2.10) и (2.11), приходим к выводу, что слагаемые в (3.8) и (3.9) описывают распространяющиеся в линии прямые и обратные волны напряжения и тока.

Этим волнам присуще отражение от концов линии, которое можно характеризовать **операторным коэффициентом отражения**. Используя рассуждения и выкладки, выполненные ранее в п. 2.3 при выводе коэффициента отражения по напряжению в схеме рис. 2.4, получим формулу, аналогичную выражению (2.39) для комплексного коэффициента отражения по напряжению

$$\Gamma = \Gamma(p) = \frac{Z_H - Z_B}{Z_H + Z_B}. \quad (3.11)$$

Тот же подход применим и к другим выражениям, полученным в предыдущей главе методом комплексных амплитуд. Так, при рассмотрении в п. 2.6 входного сопротивления нагруженной длинной линии (рис. 2.8) было получено выражение (2.57). Заменяя в нем комплексные сопротивления операторными, получим формулу для **операторного входного сопротивления** нагруженной длинной линии

$$Z_{BX} = Z_{BX}(p) = Z_B \frac{Z_H + Z_B \operatorname{th} \gamma \ell}{Z_H \operatorname{th} \gamma \ell + Z_B}. \quad (3.12)$$

При рассмотрении в п. 2.7 комплексной передаточной функции системы с длинной линией (рис. 2.9а) были получены выражения (2.67) – (2.85), характеризующие отдельные звенья системы, а затем и всю систему целиком. Заменяя в них комплексные величины операторными, получим аналогичные

формулы, определяющие в итоге *операторную передаточную функцию* системы с длинной линией.

$$K_{\text{сист.}} = K_{\text{сист.}}(p) = \frac{Z_B}{Z_\Gamma + Z_B} \cdot \frac{e^{-\gamma \ell}}{1 - \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-2\gamma \ell}} \cdot \frac{2Z_H}{Z_B + Z_H} =$$

$$= K_{\text{в.л.}} \frac{e^{-\gamma \ell}}{1 - \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-2\gamma \ell}} K_{\text{в.н.}}, \quad (3.13)$$

где $K_{\text{в.л.}} = \frac{Z_B}{Z_\Gamma + Z_B}$ – коэффициент возбуждения линии, $K_{\text{в.н.}} = \frac{2Z_H}{Z_B + Z_H}$ – коэффициент возбуждения нагрузки.

Контрольные вопросы и задания

1. Ознакомьтесь со сведениями об операторном методе, изложенными в Приложении 2.

2. В рабочей тетради для самостоятельной работы повторите вывод операторных уравнений, описывающих нестационарные процессы в длинных линиях.

3. Рассматривая решения однородных операторных уравнений, определите понятия: «операторный коэффициент отражения», «операторное входное сопротивление», «операторная передаточная функция».

3.2. Процессы в линии, обусловленные ненулевыми начальными распределениями напряжения и тока

3.2.1. Общий случай

Рассмотрим линейную однородную инвариантную во времени длинную линию, к концам которой подключены двухполюсники, обладающие операторными входными сопротивлениями $Z_1(p)$ и $Z_2(p)$ (рис. 3.1). Выберем систему отчета напряжения и тока в линии. Пусть в результате действия некоторых внешних источников к моменту времени $t = 0$ в линии

сформированы определенные распределения напряжения $u(0, x)$ и тока $i(0, x)$. Если в момент времени $t=0$ эти источники прекращают свое действие, в линии начинается *переходной процесс*, завершающийся состоянием покоя.

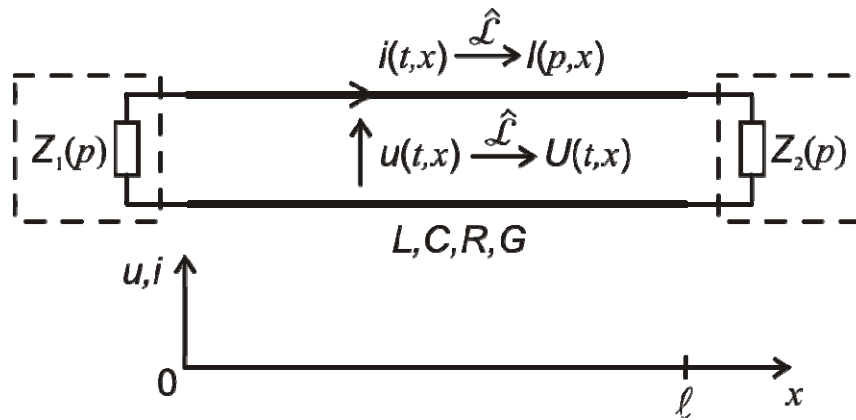


Рис. 3.1 Схема рассматриваемой системы

Рассмотрим неоднородное уравнение Гельмгольца (3.3). Замечаем, что оно уже содержит начальные распределения $u(0, x)$, $i(0, x)$ и дополняется только граничными условиями. Решение этого уравнения, представляющее распределение операторного напряжения в линии, состоит из известного решения однородного уравнения Гельмгольца (3.8) и частного решения уравнения $U^0(p, x)$

$$U(p, x) = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x} + U^0. \quad (3.14)$$

Решение для распределения операторного тока $I(p, x)$ находим из первого уравнения системы (3.2), подставляя в него распределение (3.14). В результате получим

$$I(p, x) = \frac{1}{Z_B} (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}) + I^0, \quad (3.15)$$

где

$$I^0(p, x) = \frac{L}{Z} i(0, x) - \frac{1}{Z} \frac{dU^0}{dx} \quad (3.16)$$

– известная операторная функция начальных условий.

Коэффициенты $A_1 = A_1(p)$ и $A_2 = A_2(p)$ в формулах (3.14) и (3.15) определяем посредством граничных условий. В выбранной системе отчета напряжения и тока в линии имеем для ее левого конца

$$x = 0 \Rightarrow U(p, 0) = Z_1(p)I(p, 0), \quad (3.17)$$

для ее правого конца

$$x = \ell \Rightarrow U(p, \ell) = Z_2(p)I(p, \ell). \quad (3.18)$$

С учетом этих выражений (3.14) и (3.15) принимают вид системы двух алгебраических уравнений, определяющей коэффициенты $A_{1,2}$,

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_B} & 1 - \frac{Z_1}{Z_B} \\ \left(1 - \frac{Z_2}{Z_B}\right)e^{-\gamma\ell} & \left(1 + \frac{Z_2}{Z_B}\right)e^{\gamma\ell} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -U^0 - Z_1 I^0 \\ -U^0 + Z_2 I^0 \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Решение этой системы уравнений записывается на основании правила Крамера. После эквивалентных преобразований полученных выражений решения примут вид

$$A_1 = -\frac{(U^0 + Z_1 I^0)K_1 + (U^0 + Z_2 I^0)K_2 \Gamma_1 e^{-\gamma\ell}}{1 - \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-2\gamma\ell}}, \quad (3.20)$$

$$A_2 = -\frac{(U^0 - Z_2 I^0)K_2 e^{-\gamma\ell} + (U^0 + Z_1 I^0)K_1 \Gamma_2 e^{-2\gamma\ell}}{1 - \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-2\gamma\ell}}, \quad (3.21)$$

где

$$\Gamma_{1,2} = \frac{Z_{1,2} - Z_B}{Z_{1,2} + Z_B} \quad (3.22)$$

– коэффициенты отражения волн напряжения от концов линии;

$$K_{1,2} = \frac{Z_B}{Z_{1,2} + Z_B} \quad (3.23)$$

– коэффициенты возбуждения линии двухполюсниками, подключенными к ее концам.

Подставляя найденные коэффициенты $A_{1,2}$ в формулы (3.8) и (3.9), можно получить изображение распределений в окончательном виде.

Поясним смысл слагаемых и коэффициентов в формулах (3.14) и (3.15). Первые слагаемые здесь представляют изображения прямых волн в линии, бегущих слева направо; вторые слагаемые – изображения обратных волн, бегущих справа налево. Операторное волновое сопротивление линии $Z_B(p)$ связывает изображения прямых (обратных) волн напряжения и тока. Третьи слагаемые представляют начальные условия – распределения $u(0,x)$ и $i(0,x)$, порождающие прямые и обратные волны в линии. Наложение этих волн в длинной линии является формой проявления переходного процесса. Коэффициенты $A_1(p)$ и $A_2(p)$ характеризуют заданные начальные распределения $u(0,x)$, $i(0,x)$, результат распространения волн в линии и заданные граничные условия, определяющие отражения волн от концов линии.

Обратное преобразование Лапласа, восстанавливающее оригиналы $u(t,x)$ и $i(t,x)$, можно осуществить посредством формул, приведенных в Приложении 2. Однако окончательные выражения удастся найти только для частных случаев. Рассмотрим некоторые из них.

3.2.2. Линия без потерь

В этом случае $R = 0$ и $G = 0 \Rightarrow \gamma(p) = p\sqrt{LC}$, $Z_B = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho$ и поэтому распределения (3.14) принимают вид

$$U(p,x) = A_1(p)e^{-p\sqrt{LC}x} + A_2(p)e^{p\sqrt{LC}x} + U^0(p,x), \quad (3.24)$$

$$I(p,x) = \frac{1}{\rho} \left(A_1(p)e^{-p\sqrt{LC}x} - A_2(p)e^{p\sqrt{LC}x} \right) + I^0(p,x). \quad (3.25)$$

Используя теорему запаздывания (5⁰ в Приложении 2) находим

$$u(t,x) = a_1 \left(t - \frac{x}{v} \right) + a_2 \left(t + \frac{x}{v} \right) + u^0(t,x), \quad (3.26)$$

$$i(t,x) = \frac{1}{\rho} \left[a_1 \left(t - \frac{x}{v} \right) - a_2 \left(t + \frac{x}{v} \right) \right] + i^0(t,x), \quad (3.27)$$

где $v = v_\phi = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $a_{1,2}(t) = \hat{L}^{-1} \{A_{1,2}(p)\}$, $u^0(t, x) = \hat{L}^{-1} \{U^0(p, x)\}$,

$$i^0(t, x) = \hat{L}^{-1} \{I^0(p, x)\}.$$

В этих решениях первые и вторые слагаемые представляют прямые и обратные волны, которые распространяются со скоростью $v_\phi = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, сохраняя свою величину и форму $a_{1,2}(t, x)$. Третьи слагаемые $u^0(t, x)$ и $i^0(t, x)$ – функции начальных условий.

3.2.3. Линия без искажений

В этом случае выполняются соотношения $R/L = G/C$. Тогда $\gamma(p) = \sqrt{p^2 LC(1 + R/pL)(1 + G/pC)} = p\sqrt{LC} + \sqrt{RG}$, $Z_B = \rho$ и распределения (3.8) и (3.9) принимают вид

$$U(p, x) = A_1(p)e^{-(p\sqrt{LC} + \sqrt{RG})x} + A_2(p)e^{(p\sqrt{LC} + \sqrt{RG})x} + U^0(p, x), \quad (3.28)$$

$$I(p, x) = \frac{1}{\rho} \left[A_1(p)e^{-(p\sqrt{LC} + \sqrt{RG})x} - A_2(p)e^{(p\sqrt{LC} + \sqrt{RG})x} \right] + I^0(p, x). \quad (3.29)$$

Используя, как и в предыдущем случае, теорему запаздывания (5⁰ в Приложении 2), находим

$$u(t, x) = a_1 \left(t - \frac{x}{v} \right) e^{-\alpha x} + a_2 \left(t + \frac{x}{v} \right) e^{\alpha x} + u^0(t, x), \quad (3.30)$$

$$i(t, x) = \frac{1}{\rho} \left[a_1 \left(t - \frac{x}{v} \right) e^{-\alpha x} - a_2 \left(t + \frac{x}{v} \right) e^{\alpha x} \right] + i^0(t, x). \quad (3.31)$$

Здесь $\alpha = \sqrt{RG}$ – величина, являющаяся коэффициентом затухания волны, так как очевидно, что сомножители $e^{\mp \alpha x}$ описывают ослабление прямых (обратных) волн в процессе их распространения вдоль линии. Форма волн при их распространении сохраняется.

3.2.4. Линия с малыми потерями

В этом случае $R \ll |p|L$, $G \ll |p|C$. Используем приближенные представления

$$\begin{aligned} \gamma(p) &= \sqrt{p^2 LC \left(1 + \frac{R}{pL}\right) \left(1 + \frac{G}{pC}\right)} \approx p\sqrt{LC} \left(1 + \frac{R}{2pL}\right) \left(1 + \frac{G}{2pC}\right) = \\ &= p\sqrt{LC} + \left(\frac{R}{2\rho} + \frac{G\rho}{2}\right) + \frac{RG}{p4\sqrt{LC}} = \frac{p}{v} + \alpha + \frac{\varepsilon}{p}, \end{aligned}$$

$$\text{где } v = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \alpha = \frac{R}{2\rho} + \frac{G\rho}{2}, \quad \varepsilon = \frac{RG}{4\sqrt{LC}}.$$

Тогда, в силу условия малости потерь и того, что

$$e^{\pm \frac{\varepsilon}{p}x} \approx 1 \pm \frac{\varepsilon}{p}x,$$

распределения (3.14) и (3.15) примут вид:

$$U(p, x) = A_1(p) e^{-p \frac{x}{v} - \alpha x} \left(1 - \frac{\varepsilon x}{p}\right) + A_2(p) e^{p \frac{x}{v} + \alpha x} \left(1 + \frac{\varepsilon x}{p}\right) + U^0(p, x), \quad (3.32)$$

$$I(p, x) = \frac{1}{\rho} \left[A_1(p) e^{-p \frac{x}{v} - \alpha x} \left(1 - \frac{\varepsilon x}{p}\right) - A_2(p) e^{p \frac{x}{v} + \alpha x} \left(1 + \frac{\varepsilon x}{p}\right) \right] + I^0(p, x). \quad (3.33)$$

Используя теоремы интегрирования (4⁰ в Приложении 2) и запаздывания (5⁰ в Приложении 2), находим:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \left[a_1 \left(t - \frac{x}{v} \right) - \varepsilon x \int_0^t a_1 \left(\tau - \frac{x}{v} \right) d\tau \right] e^{-\alpha x} + \\ &+ \left[a_2 \left(t + \frac{x}{v} \right) - \varepsilon x \int_0^t a_2 \left(\tau + \frac{x}{v} \right) d\tau \right] e^{\alpha x} + u^0(t, x), \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} i(t, x) &= \frac{1}{\rho} \left[a_1 \left(t - \frac{x}{v} \right) - \varepsilon x \int_0^t a_1 \left(\tau - \frac{x}{v} \right) d\tau \right] e^{-\alpha x} - \\ &- \frac{1}{\rho} \left[a_2 \left(t + \frac{x}{v} \right) - \varepsilon x \int_0^t a_2 \left(\tau + \frac{x}{v} \right) d\tau \right] e^{\alpha x} + i^0(t, x). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Эти решения описывают затухающие прямые и обратные волны в линии, изменяющие свою форму в процессе распространения вследствие явления дисперсии волн.

Учет бóльшего количества слагаемых в разложениях, представляющих функции $\gamma(p)$ и $e^{f(p)x}$, приводит к наличию в распределениях (3.32) и (3.33) слагаемых, пропорциональных p^{-n} , а в мгновенных распределениях (3.34) и (3.35) – n -кратных интегралов от $a_{1,2}(\tau, x)$. Такой учет позволяет более точно описывать изменение формы волн в линии вследствие их дисперсии.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение понятия «переходной процесс в длинной линии». Что служит причиной этого волнового процесса?

2. В рабочей тетради для самостоятельной работы повторите вывод выражений, определяющих переходной процесс в длинной линии: а) в общем случае; б) в линии без потерь; в) в линии без искажений; г) в линии с малыми потерями. Осмыслите полученные результаты.

3.3. Примеры анализа переходных процессов в длинных линиях

При решении задач анализа переходных процессов в длинных линиях операторных методом целесообразно использовать следующий алгоритм.

1. Определяем начальные распределения $u(0, x)$ и $i(0, x)$.
2. Записываем неоднородное дифференциальное уравнение (3.3) для конкретных начальных распределений.
3. Находим его решение $U^0(p, x)$.
4. На основании общего решения дифференциального уравнения (3.3) записываем распределения $U(p, x)$ и $I(p, x)$.
5. Посредством граничных условий находим коэффициенты $A_1(p)$ и $A_2(p)$ решений (3.14) и (3.15).

6. Подставляем $A_1(p)$ и $A_2(p)$ в (3.14) и (3.15), записываем распределения $U(p, x)$ и $I(p, x)$ в окончательном виде в пространстве изображений.
7. Посредством обратного преобразования Лапласа находим распределения мгновенных значений $u(t, x)$ и $i(t, x)$ в пространстве оригиналов.
8. Анализируем полученный результат.

3.3.1. Разряд разомкнутой линии без потерь через активное сопротивление, равное волновому сопротивлению линии

Пусть однородная длинная линия без потерь (рис. 3.2а), правый конец которой разомкнут, заряжена до напряжения E_0 и в момент времени $t = 0$ замыкается левым концом на сопротивление $R = \rho$, где ρ – волновое сопротивление линии. Исследуем процесс разряда линии, определяя зависимость $u(t, x)$ в различных ее сечениях.

В соответствии с предложенным алгоритмом имеем:

1. Начальные условия: $u(0, x) = E_0$, $i(0, x) = 0$.
2. Уравнение (3.8) принимает вид

$$\frac{d^2 U(p, x)}{dx^2} - p^2 L C U(p, x) = -p L C E_0. \quad (3.36)$$

3. Решение неоднородного уравнения:

$$F^0 = const \Rightarrow U^0 = \frac{E_0}{p}. \quad (3.37)$$

4. Распределения $U(p, x)$ и $I(p, x)$

$$U(p, x) = A_1 e^{-p\sqrt{LC}x} + A_2 e^{p\sqrt{LC}x} + \frac{E_0}{p}, \quad (3.38)$$

$$I(p, x) = \frac{1}{\rho} (A_1 e^{-p\sqrt{LC}x} - A_2 e^{p\sqrt{LC}x}). \quad (3.39)$$

5. Определение коэффициентов $A_{1,2}(p)$:

$$x = 0 \Rightarrow U(p, 0) = -RI(p, 0),$$

$$x = \ell \Rightarrow I(p, \ell) = 0, \text{ (линия разомкнута).}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} x = 0 \Rightarrow A_1 + A_2 + \frac{E_0}{p} &= -(A_1 - A_2) \Rightarrow A_1(p) = -\frac{E_0}{2p}, \\ x = \ell \Rightarrow A_1 e^{-\gamma \ell} - A_2 e^{\gamma \ell} &= 0 \Rightarrow A_2(p) = A_1(p) e^{-p^2 \sqrt{LC} \ell}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

6. Окончательный вид решения в пространстве изображений

$$U(p, x) = \frac{E_0}{p} \left(1 - \frac{1}{2} e^{-p \frac{x}{v}} - \frac{1}{2} e^{p \left(\frac{x}{v} - 2\tau \right)} \right), \quad (3.41)$$

где $\tau = \ell / v$ – время задержки сигнала в линии.

7. Окончательный вид решения в пространстве оригиналов

$$u(t, x) = E_0 \left[\sigma(t) - \frac{1}{2} \sigma\left(t - \frac{x}{v}\right) - \frac{1}{2} \sigma\left(t + \frac{x}{v} - 2\tau\right) \right]. \quad (3.42)$$

8. Анализ полученного результата:

а) Определим форму напряжения в сечениях $x = 0$; $x = \frac{\ell}{2}$; $x = \ell$.

При $x = 0$ имеем из (3.42)

$$u(t, 0) = \frac{E_0}{2} (\sigma(t) - \sigma(t - 2\tau)). \quad (3.43)$$

Зависимость $u(t, 0)$ является результатом следующего процесса. В момент времени $t = 0$ в начале линии возникает прямая волна напряжения ступенчатой формы, разряжающая линию до величины напряжения $E_0/2$. Отразившись в момент времени $t = \tau$ от разомкнутого конца линии ($\Gamma_2 = 1$), волна напряжения ступенчатой формы, став обратной, разряжает линию до нуля. Общее время распространения прямой и обратной волн разряда линии равно 2τ . Поэтому в начале линии наблюдается импульс напряжения прямоугольной формы, имеющей длительность 2τ и величину $E_0/2$ (рис. 3.2б).

При $x = \ell/2$ имеем из (3.42)

$$u\left(t, \frac{\ell}{2}\right) = E_0 \left[\sigma(t) - \frac{1}{2} \sigma\left(t - \frac{\tau}{v}\right) - \frac{1}{2} \sigma\left(t - \frac{3\tau}{2}\right) \right]. \quad (3.44)$$

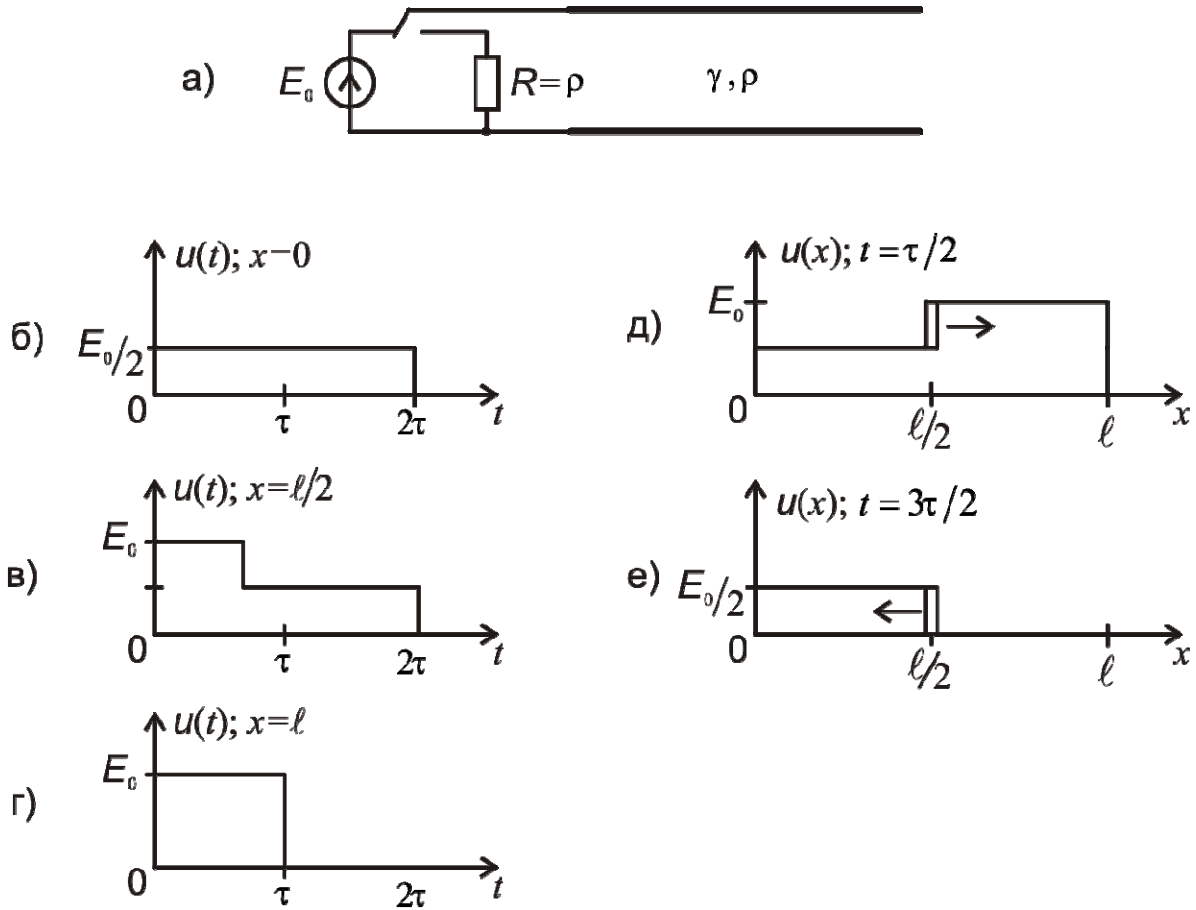


Рис. 3.2. Разряд разомкнутой линии без потерь:

а) схема рассматриваемой системы;

б – г) зависимость напряжения от времени для указанных сечений линии;

д – е) распределение напряжения в линии для указанных моментов времени

В сечение линии с координатой $x = \ell/2$ прямая волна разряда приходит в момент времени $t = \tau/2$, понижая напряжение до величины $E_0/2$, а еще спустя промежуток времени, равный τ , отраженная волна в этом сечении линии понижает напряжение до нуля (рис. 3.2в).

При $x = \ell$ имеем из (3.42)

$$u(t, \ell) = E_0 [\sigma(t) - \sigma(t - \tau)]. \quad (3.45)$$

Напряжение на конце линии имеет ступенчатую форму (рис. 3.2г) величины E_0 и длительности τ , так как волна разряда достигает конца линии за промежуток времени, равный τ .

б) Рассмотрим распределение напряжения в различные моменты времени.

Пусть $t = \tau/2$, тогда из (3.42) (с учетом $\sigma(t) = 1$ при $t \geq 0$) имеем

$$u\left(\frac{\tau}{2}, x\right) = E_0 - \frac{E_0}{2} \sigma\left(\frac{\tau}{2} - \frac{x}{v}\right) - \frac{E_0}{2} \sigma\left(\frac{x}{v} - \frac{3\tau}{2}\right). \quad (3.46)$$

Здесь первое слагаемое описывает постоянный уровень напряжения, равный E_0 , второе слагаемое – прямую волну ступенчатой формы высотой $E_0/2$, третье – обратную волну ступенчатой формы, являющуюся зеркальным отображением прямой волны. В рассматриваемый момент времени $t = \frac{\tau}{2}$ фронт обратной волны находится в сечении $x > \ell$, т. е. в «зазеркалье», и распределение напряжения определяется первыми двумя слагаемыми (рис. 3.2д).

Пусть $t = \frac{3\tau}{2}$, тогда из (3.42) имеем

$$u\left(\frac{3\tau}{2}, x\right) = E_0 - \frac{E_0}{2} \sigma\left(\frac{3\tau}{2} - \frac{x}{v}\right) - \frac{E_0}{2} \sigma\left(\frac{x}{v} - \frac{\tau}{2}\right). \quad (3.47)$$

Здесь первое слагаемое имеет тот же смысл, второе – описывает прямую волну, ушедшую в «зазеркалье», третье – обратную волну, вышедшую из-за «зазеркалья». Распределение напряжения, соответствующее этому моменту времени, представлено на рис. 3.2е.

3.3.2. Разряд линии без потерь через сопротивления, подключенные к ее концам

Рассмотрим наиболее общий случай разряда линии, позволяющий получить точные конечные выражения, определяющие распределения $u(t, x)$ и $i(t, x)$. Пусть однородная длинная линия без потерь, заряженная до напряжения E_0 , в момент времени $t = 0$ замыкается левым концом на

сопротивление $Z_1 = R_1$, а вторым – на сопротивление $Z_2 = R_2$ (рис. 3.3а). Исследуем процесс разряда линии, определяя зависимость $u(t, x)$. Используя предложенный алгоритм, замечаем, что первые его четыре позиции те же, что и в первом примере. Опускаем их и продолжаем рассмотрение задачи, начиная с пятой позиции алгоритма.

5. Определяем коэффициенты $A_{1,2}(p)$:

$$\left. \begin{aligned} x=0 &\Rightarrow U(p, 0) = -Z_1 I(p, 0) \\ x=\ell &\Rightarrow U(p, \ell) = Z_2 I(p, \ell) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{c|c} 1 + \frac{Z_1}{Z_B} & 1 - \frac{Z_1}{Z_B} \\ \hline \left(1 - \frac{Z_2}{Z_B}\right) e^{-\gamma \ell} & \left(1 + \frac{Z_2}{Z_B}\right) e^{\gamma \ell} \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{E_0}{p} \\ -\frac{E_0}{p} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A_{1,2} = \frac{\Delta_{1,2}}{\Delta} \Rightarrow A_1 = -\frac{E_0}{p} \cdot \frac{\Gamma_1 K_2 e^{-\gamma \ell} + K_1}{1 - \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-2\gamma \ell}}, \quad A_2 = -\frac{E_0}{p} \cdot \frac{K_2 e^{-\gamma \ell} + \Gamma_2 K_1 e^{-2\gamma \ell}}{1 - \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-2\gamma \ell}}, \quad (3.48)$$

где $K_{1,2} = \frac{Z_B}{Z_{1,2} + Z_B}$ и $\Gamma_{1,2} = \frac{Z_{1,2} - Z_B}{Z_{1,2} + Z_B}$ – коэффициенты возбуждения и отражения. Полагая $|\Gamma_1 \Gamma_2| < 1$, используем разложение в ряд сомножителя

$$\frac{1}{1 - \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-2\gamma \ell}} = 1 + \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-2\gamma \ell} + (\Gamma_1 \Gamma_2)^2 e^{-4\gamma \ell} + (\Gamma_1 \Gamma_2)^3 e^{-6\gamma \ell} + \dots$$

и представим коэффициенты $A_{1,2}$ в виде

$$A_1 = -\frac{E_0}{p} \left[K_1 \sum_{n=0}^{\infty} (\Gamma_1 \Gamma_2)^n e^{-2n p \tau} + \Gamma_1 K_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\Gamma_1 \Gamma_2)^n e^{-(2n+1) p \tau} \right],$$

$$A_2 = -\frac{E_0}{p} \left[K_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\Gamma_1 \Gamma_2)^n e^{-(2n+1) p \tau} + \Gamma_2 K_1 \sum_{n=0}^{\infty} (\Gamma_1 \Gamma_2)^n e^{-2(n+1) p \tau} \right]. \quad (3.49)$$

6. Окончательный вид решения в пространстве изображений:

$$\begin{aligned}
u(p, x) &= A_1 e^{-p \frac{x}{v}} + A_2 e^{p \frac{x}{v}} + \frac{E_0}{p} = \\
&= \frac{E_0}{p} \left[1 - K_1 \sum_{n=0}^{\infty} (\Gamma_1 \Gamma_2)^n e^{-p \left(\frac{x}{v} - 2n\tau \right)} - \Gamma_1 K_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\Gamma_1 \Gamma_2)^n e^{-p \left(\frac{x}{v} + (2n+1)\tau \right)} - \right. \\
&\quad \left. - K_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\Gamma_1 \Gamma_2)^n e^{p \left(\frac{x}{v} - (2n+1)\tau \right)} - \Gamma_2 K_1 \sum_{n=0}^{\infty} (\Gamma_1 \Gamma_2)^n e^{p \left(\frac{x}{v} - 2(n+1)\tau \right)} \right].
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Дальнейшее построение решений возможно при условии, что $K_{1,2}$ и $\Gamma_{1,2}$ действительные величины, так как обратное преобразование Лапласа функций, имеющих вид произведений изображений, существует только в простейших частных случаях. Поэтому полагаем, что $Z_{1,2} = R_{1,2} \Rightarrow K_{1,2} = \frac{\rho}{R_{1,2} + \rho}$ и

$$\Gamma_{1,2} = \frac{R_{1,2} - \rho}{R_{1,2} + \rho} - \text{действительные величины.}$$

7. Окончательный вид решения в пространстве оригиналов при оговоренном условии:

$$\begin{aligned}
u(t, x) &= E_0 \left[\sigma(t) - K_1 \sum_{n=0}^{\infty} (\Gamma_1 \Gamma_2)^n \sigma \left(t - \frac{x}{v} - 2n\tau \right) - \right. \\
&\quad - \Gamma_1 K_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\Gamma_1 \Gamma_2)^n \sigma \left(t - \frac{x}{v} - (2n+1)\tau \right) - K_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\Gamma_1 \Gamma_2)^n \sigma \left(t + \frac{x}{v} - (2n+1)\tau \right) - \\
&\quad \left. - \Gamma_2 K_1 \sum_{n=0}^{\infty} (\Gamma_1 \Gamma_2)^n \sigma \left(t + \frac{x}{v} - 2(n+1)\tau \right) \right].
\end{aligned}$$

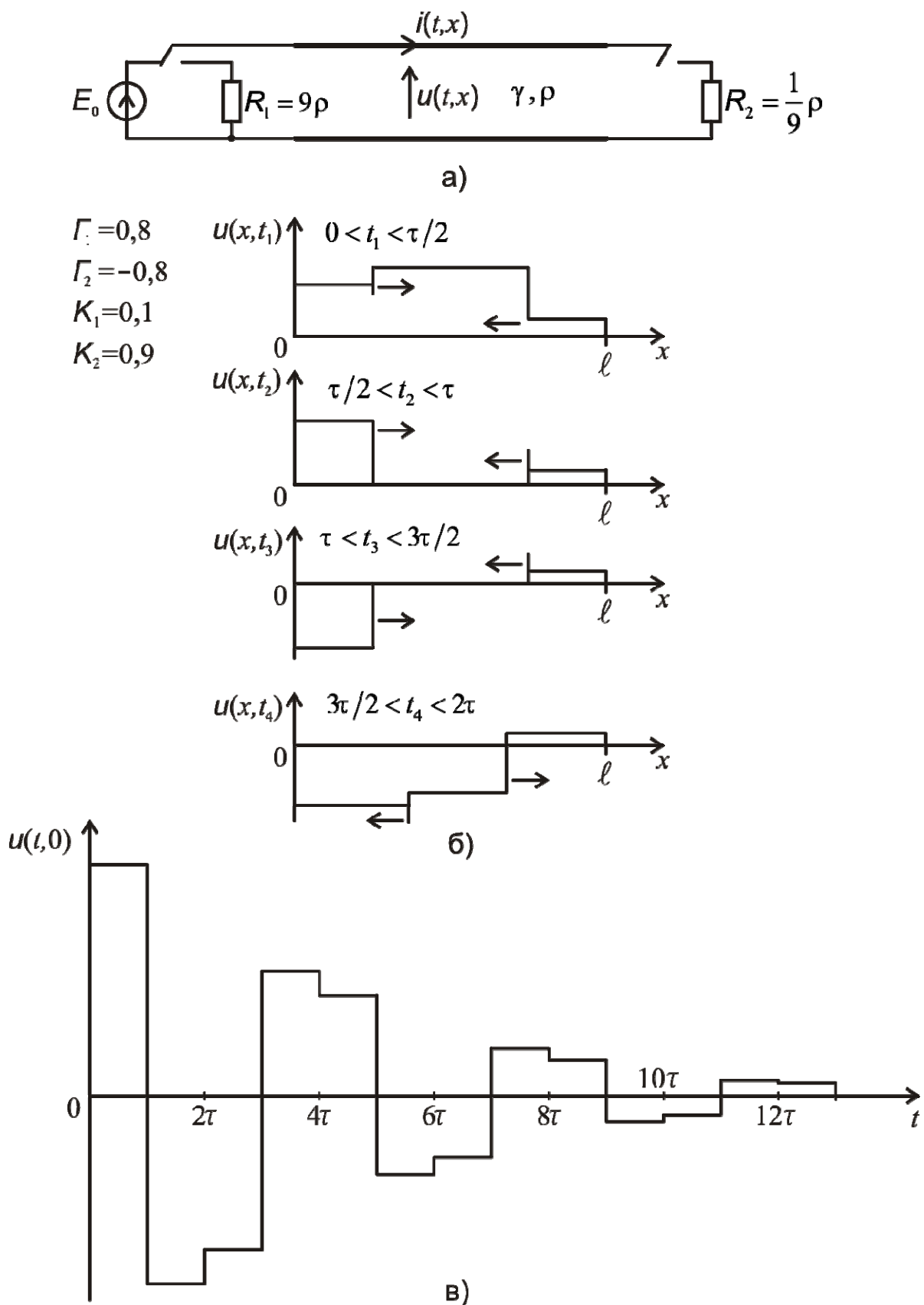


Рис. 3.3. Разряд разомкнутой линии без потерь:

а) схема рассматриваемой системы;

б) распределение напряжения в линии для указанных моментов времени;

в) зависимость напряжения от времени в начале линии ($x=0$)

Для удобства анализа найденного решения перепишем его в виде

$$\begin{aligned}
 u(t, x) = & E_0 \left\{ \sigma(t) - K_1 \left[\sigma\left(t - \frac{x}{v}\right) + \Gamma_1 \Gamma_2 \sigma\left(t - \frac{x}{v} - 2\tau\right) + (\Gamma_1 \Gamma_2)^2 \sigma\left(t - \frac{x}{v} - 4\tau\right) + \dots \right] - \right. \\
 & - \Gamma_1 K_2 \left[\sigma\left(t - \frac{x}{v} - \tau\right) + \Gamma_1 \Gamma_2 \sigma\left(t - \frac{x}{v} - 3\tau\right) + (\Gamma_1 \Gamma_2)^2 \sigma\left(t - \frac{x}{v} - 5\tau\right) + \dots \right] - \\
 & - K_2 \left[\sigma\left(t + \frac{x}{v} - \tau\right) + \Gamma_1 \Gamma_2 \sigma\left(t + \frac{x}{v} - 3\tau\right) + (\Gamma_1 \Gamma_2)^2 \sigma\left(t + \frac{x}{v} - 5\tau\right) + \dots \right] - \\
 & \left. - \Gamma_2 K_1 \left[\sigma\left(t + \frac{x}{v} - 2\tau\right) + \Gamma_1 \Gamma_2 \sigma\left(t + \frac{x}{v} - 4\tau\right) + (\Gamma_1 \Gamma_2)^2 \sigma\left(t + \frac{x}{v} - 6\tau\right) + \dots \right] \right\}. \tag{3.51}
 \end{aligned}$$

8. Анализ полученного результата.

Найденное выражение (3.51) показывает, что распределение напряжения в линии – результат многократного отражения волн ступенчатой формы. Их величина с течением времени уменьшается пропорционально величинам коэффициентов $K_{1,2}$ и $|\Gamma_{1,2}|$. Причиной уменьшения величин ступенек является рассеяние запасенной в линии энергии на сопротивлениях R_1 и R_2 , подключенных к ее концам.

В деталях этот процесс выглядит следующим образом. В начальный момент времени $t=0$ у краев линии возникают две волны напряжения ступенчатой формы, бегущие навстречу друг другу, разряжающие линию. Величины ступенек пропорциональны K_1 и K_2 . К моменту времени $t=\tau$ линия разряжается до значения напряжения $E_0(1-K_1-K_2)$. В момент времени $t=\tau$ на концах линии происходит отражение волн с соответствующими коэффициентами Γ_1 и Γ_2 . Возникающие в результате отражения ступенчатые волны меньшей величины распространяются навстречу друг другу, разряжая линию, если $\Gamma > 0$, или перезаряжая ее, если $\Gamma < 0$. В момент времени $t=2\tau$ ступеньки докатываются до концов линии, происходит их отражение, и

процесс повторяется. При каждом очередном отражении величины ступенек волн уменьшаются пропорционально $|\Gamma|$.

Таким образом, в общем выражении (3.51), представляющем набор бегущих волн напряжения ступенчатой формы, в течение каждого из интервалов времени $n\tau < t < (n+1)\tau$, где $n=0, 1, 2, 3, \dots$, реально существуют только две волны, одна из которых прямая, другая – обратная. Все остальные волны отсутствуют, находясь как бы в «зазеркалье», т. е. вне пределов линии. Поэтому выражение (3.51) можно представить в виде разложения, иллюстрирующего приведенные рассуждения,

$$u(t, x) = u_1(t, x) + u_2(t, x) + u_3(t, x) + \dots = \sum_{r=1}^{\infty} u_r(t, x), \quad (3.52)$$

где:

$$u_1(t, x) = E_0 \left[1 - K_1 \sigma \left(t - \frac{x}{v} \right) - K_2 \sigma \left(t + \frac{x}{v} - \tau \right) \right], \quad \text{для } 0 < t < \tau;$$

$$u_2(t, x) = E_0 \left[1 - K_1 - K_2 - \Gamma_1 K_2 \sigma \left(t - \frac{x}{v} - \tau \right) - \Gamma_2 K_1 \sigma \left(t + \frac{x}{v} - 2\tau \right) \right], \quad \text{для } \tau < t < 2\tau;$$

$$u_3(t, x) = E_0 \left[1 - K_1 - K_2 - \Gamma_1 K_2 - \Gamma_2 K_1 - K_1 \Gamma_1 K_2 \sigma \left(t - \frac{x}{v} - 2\tau \right) - K_2 \Gamma_1 \Gamma_2 \sigma \left(t + \frac{x}{v} - 3\tau \right) \right],$$

для $2\tau < t < 3\tau$;

$$u_4(t, x) = \dots \dots \dots$$

Теперь видно, что в любом фиксированном сечении линии напряжение скачком изменяется во времени через промежутки, равные τ . Это скачкообразно изменяющееся напряжение и есть проявление переходного процесса в данном сечении линии. Так, например, для левого конца линии из (3.51), полагая $x=0$, получаем формулу для переходного процесса в этом сечении линии

$$u(t, 0) = E_0 \left[1 - K_1 - K_2(1 + \Gamma_1) \sigma(t - \tau) - K_1 \Gamma_2(1 + \Gamma_1) \sigma(t - 2\tau) - \right. \\ \left. - K_2 \Gamma_1 \Gamma_2(1 + \Gamma_1) \sigma(t - 3\tau) - K_1 \Gamma_1 \Gamma_2^2(1 + \Gamma_1) \sigma(t - 4\tau) - \dots \right]. \quad (3.53)$$

Графики, иллюстрирующие распределения $u_1(t, x)$ и $u_2(t, x)$, соответствующие первым слагаемым разложения (3.52), и колебание $u(t, 0)$, построенное по формуле (3.53), представлены на рис. 3.3.

В заключение вернемся в этом примере к более общему случаю, когда $Z_{1,2} = Z_{1,2}(p)$, и, следовательно, $K_{1,2} = K_{1,2}(p)$ и $\Gamma_{1,2} = \Gamma_{1,2}(p)$. Полагая $p = j\omega$, видим, что коэффициенты возбуждения и отражения зависят от частоты и поэтому характеризуются неравномерными и нелинейными ФЧХ. Представляя падающую волну набором гармонических составляющих, замечаем, что при отражении искажаются ее амплитудный и фазовый спектр, т. е. изменяется форма волны. При многократных отражениях волн от концов линии происходит накопление искажений. В линейных системах этот процесс выражается произведением передаточной функции системы и спектральной функции сигнала. Именно поэтому усложняется последний этап данной задачи анализа – обратное преобразование Лапласа изображения (3.50) искомого распределения. Наличие здесь произведений функций $\frac{E_0}{p}$,

$\Gamma_1(p)$, $\Gamma_2(p)$, $K_1(p)$ и $K_2(p)$ вынуждает использовать теорему умножения (11⁰ в Приложении 2). Решение в пространстве оригиналов перегружается свертками функций, становясь все более громоздким с учетом каждого очередного акта отражения волн от концов линии.

Контрольные вопросы и задания

1. Усвойте алгоритм решения задач анализа переходных процессов в длинных линиях операторных методом.
2. В рабочей тетради для самостоятельной работы рассмотрите переходные процессы: а) разряд разомкнутой линии без потерь через активное сопротивление, равное волновому сопротивлению линии; б) разряд линии без потерь через активные сопротивления, подключенные к ее концам.

3.4. Передача сигналов в цепях с длинными линиями

3.4.1. Общий случай

Вернемся к рассмотренной ранее в п. 2.7 системе, осуществляющей передачу сигналов от источника к потребителю (рис. 2.9а). В режиме гармонических колебаний исчерпывающей характеристикой этой системы служит комплексный коэффициент передачи $\dot{K}_{\text{сист.}}$ (2.76), в спектральном методе – комплексная передаточная функция $K_{\text{сист.}}(\omega)$ (2.85), теперь в операторном методе – операторная передаточная функция $K_{\text{сист.}}(p) = K_{\text{сист.}}$ (3.13)

$$K_{\text{сист.}} = K_{\text{в.л.}} \frac{e^{-\gamma \ell}}{1 - \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-2\gamma \ell}} K_{\text{в.н.}}$$

Приведенную формулу можно преобразовать, представив операторную передаточную функцию системы в более удобном виде. Входящий в ее состав сомножитель $1/(1 - \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-2\gamma \ell})$ с учетом неравенства $|\Gamma_1 \Gamma_2 e^{-2\gamma \ell}| < 1$ разложим в степенной ряд и после подстановки этого ряда в (3.13) получим выражение

$$\begin{aligned} K(p) &= K_{\text{в.л.}} K_{\text{в.н.}} e^{-\gamma \ell} \sum_{n=0}^{\infty} (\Gamma_1 \Gamma_2 e^{-2\gamma \ell})^n = \\ &= K_{\text{в.л.}} K_{\text{в.н.}} e^{-\gamma \ell} (1 + \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-2\gamma \ell} + \Gamma_1^2 \Gamma_2^2 e^{-4\gamma \ell} + \Gamma_1^3 \Gamma_2^3 e^{-6\gamma \ell} + \dots), \end{aligned} \quad (3.54)$$

описывающее явление многократного отражения сигнала от концов линии. Это явление, существующее, когда Γ_1 и Γ_2 отличаются от нуля, иллюстрирует диаграмма, приведенная на рис. 2.9в.

3.4.2. Передача прямоугольного импульса в цепи с длинной линией без искажений.

Рассмотрим длинную линию без искажений с заданными погонными параметрами L , C , R и G , включенную в цепь передачи импульсного сигнала $e_r(t)$ от генератора с внутренним сопротивлением R_r к нагрузке, обладающей входным сопротивлением R_H . Соответствующая схема приведена на рис. 3.4а.

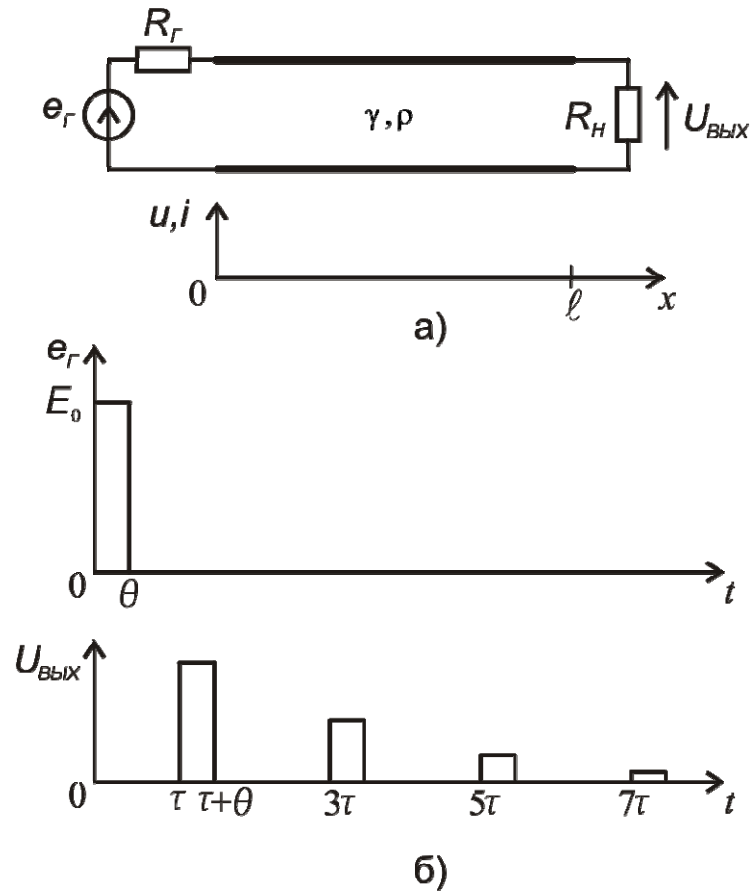


Рис. 3.4. Передача прямоугольного импульса в цепи с длинной линией:

а) схема рассматриваемой системы;

б) импульсы на входе и выходе линии передачи

Возьмем за основу полученное ранее выражение (3.13) для передаточной функции системы с длинной линией и определим все коэффициенты, входящие в это выражение:

$$\begin{aligned}\gamma &= \sqrt{RG} + p\sqrt{LC}; \quad \sqrt{RG} = \alpha; \quad 1/\sqrt{LC} = v_\phi; \quad \ell/v_\phi = \tau \Rightarrow \gamma\ell = \alpha\ell + p\tau; \\ Z_B = \rho &\Rightarrow K_{B.L.} = \rho/(R_r + \rho); \quad K_{B.H.} = R_H/(R_H + \rho); \\ \Gamma_{1,2} &= (R_{r,H} - \rho)/(R_{r,H} + \rho).\end{aligned}$$

Замечаем, что за исключением слагаемого $p\tau$ в $\gamma\ell$, все величины являются действительными.

Далее делаем так:

$$1. \quad K(p) = \frac{K_{B.L.} K_{B.H.} e^{-\gamma\ell}}{1 - \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-2\gamma\ell}} = K_{B.L.} K_{B.H.} \sum_{n=0}^{\infty} (\Gamma_1 \Gamma_2)^n e^{-(\alpha\ell + p\tau)(2n+1)}.$$

$$2. e_r(t) = E_0 [\sigma(t) - \sigma(t - \theta)] \xrightarrow{\mathcal{L}} E_r(p) = \frac{E_0}{p} (1 - e^{-p\theta}).$$

$$3. U_{BbIX}(p) = K_{B.Л.} K_{B.Н.} \sum_{n=0}^{\infty} (\Gamma_1 \Gamma_2)^n e^{-\alpha \ell (2n+1)} E_r(p) e^{-p\tau(2n+1)}.$$

$$4. u_{BbIX}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (\Gamma_1 \Gamma_2)^n e^{-\alpha \ell (2n+1)} e_r(t - \tau(2n+1)) =$$

$$= E_0 K_{B.Л.} K_{B.Н.} \sum_{n=0}^{\infty} (\Gamma_1 \Gamma_2)^n e^{-\alpha \ell (2n+1)} [\sigma(t - \tau(2n+1)) - \sigma(t - \theta - \tau(2n+1))].$$

При условии неравенства сопротивлений ρ и $R_{\Gamma,Н}$, т. е. когда $\Gamma_1 \Gamma_2 \neq 0$, а также при $\tau > 0$, выходной сигнал представляет собой последовательность импульсов, величина которых убывает в геометрической прогрессии со знаменателем, равным $\Gamma_1 \Gamma_2 e^{-2\alpha \ell}$ и описывающим отражение сигнала от концов линии, а также его ослабление из-за потерь в линии (рис.3.4б). Первый импульс – собственно сигнал, второй и последующие – «эхо» сигнала.

Если сопротивление на одном из концов линии согласованы, то $\Gamma_1 \Gamma_2 = 0$ и тогда

$$u_{BbIX}(t) = E_0 K e^{-\alpha \ell} [\sigma(t - \tau) - \sigma(t - \theta - \tau)],$$

т. е. на выходе наблюдается сигнал, задержанный на величину τ . Коэффициент K принимает максимальное значение, равное 1, при условии $R_r \rightarrow 0$ или при условии $R_H \rightarrow \infty$ в зависимости от того, какой из концов линии согласован.

Контрольные вопросы и задания

1. В рабочей тетради для самостоятельной работы рассмотрите задачи анализа передачи сигналов в общем случае и в случае передача прямоугольного импульса в системе с длинной линией без искажений.

Приложение 1

Расчетные формулы распространенных линий передачи

На рис. 1 приведены формы поперечных сечений распространенных линий передачи. Ниже представлены соответствующие расчетные формулы.

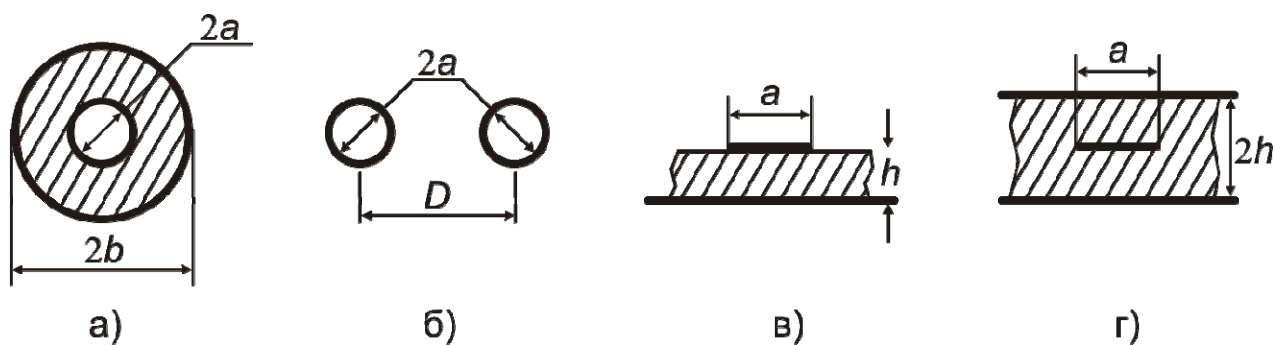


Рис. 1. Поперечные сечения линий передачи:

- а) коаксиальная;
- б) симметричная двухпроводная;
- в) полосковая несимметричная;
- г) полосковая симметричная

1. Коаксиальная линия передачи

Однородная коаксиальная линия передачи (рис. 1а) представляет собой систему из двух хорошо проводящих металлических цилиндров, пространство между которыми заполнено диэлектриком. В радиотехнике наиболее широкое распространение получили гибкие коаксиальные кабели, у которых внутренний проводник – одно- или многожильный провод, а внешний проводник выполнен из тонкой проволоки. В качестве диэлектрика обычно используется полиэтилен (диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 2,25$) или фторопласт ($\varepsilon = 2,08$).

Параметры коаксиальных линий передачи можно рассчитать по приближенным формулам:

Погонная емкость

$$C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}{\ln(b/a)}, \text{ Ф/м,} \quad (1)$$

где $\varepsilon_0 = 10^{-9}/(36\pi) = 8,84 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – *электрическая постоянная*.

Погонная индуктивность

$$L = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}, \text{ Гн/м}, \quad (2)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 12,56 \cdot 10^{-7}$ Гн/м – *магнитная постоянная*, μ – относительная магнитная проницаемость, которую для диэлектриков полагают равной единице.

Погонное сопротивление потерь

$$R = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega\mu\mu_0}{2\sigma}} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right), \text{ Ом/м}, \quad (3)$$

где σ – удельная объемная проводимость металла, равная для меди $5,81 \cdot 10^7$ См/м.

Погонная проводимость потерь

$$G = \omega C \operatorname{tg} \delta, \text{ См/м}, \quad (4)$$

где $\operatorname{tg} \delta$ – тангенс угла потерь в диэлектрике – малая величина, которой обычно пренебрегают, полагая $G = 0$.

Волновое сопротивление

$$Z_B = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{138}{\sqrt{\varepsilon}} \lg \frac{b}{a}, \text{ Ом}. \quad (5)$$

Коаксиальные кабели, выпускаемые промышленностью, имеют волновые сопротивления 50, 75, 100, 150, 200 Ом.

2. Симметричная двухпроводная линия передачи

Эта линия передачи образована двумя круглыми проводниками, имеющими диаметр $2a$, расстояние между центрами проводников равно D (рис. 1б).

Параметры двухпроводных линий передачи с воздушным диэлектриком в предположении $D \gg a$ можно рассчитать по приближенным формулам:

Погонная емкость

$$C = \frac{\pi \varepsilon_0}{\ln(D/a)} = \frac{10^{-9}}{36 \ln(D/a)}, \text{ Ф/м.} \quad (6)$$

Погонная индуктивность

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{D}{a} = 4 \ln \frac{D}{a} 10^{-7}, \text{ Гн/м.} \quad (7)$$

Погонное сопротивление потерь

$$R = \frac{1}{\pi a} \sqrt{\frac{\omega \mu \mu_0}{2\sigma}}, \text{ Ом/м.} \quad (8)$$

Погонная проводимость потерь не учитывается, т. е. $G = 0$.

Волновое сопротивление

$$Z_B = \sqrt{\frac{L}{C}} = 120 \ln \frac{D}{a}, \text{ Ом.} \quad (9)$$

3. Полосковые линии передачи

В этих линиях передачи направляющими проводниками служат полосы металла, отделенные друг от друга подложкой – слоем диэлектрика с малыми потерями. Различают несимметричные (рис. 1в) и симметричные (рис. 1г) полосковые линии.

Параметры полосковых линий передачи можно рассчитать по приближенным формулам:

Погонная емкость

$$C = \varepsilon \varepsilon_0 b / h, \text{ Ф/м.} \quad (10)$$

Для симметричной линии этот результат должен быть удвоен.

Погонная индуктивность

$$L = 1 / (v_\phi^2 C), \text{ Гн/м.} \quad (11)$$

Здесь v_ϕ – фазовая скорость $v_\phi = c / \sqrt{\varepsilon}$, где c – скорость света.

Погонное сопротивление потерь

$$R = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{2\omega \mu \mu_0}{\sigma}}, \text{ Ом/м.} \quad (12)$$

Погонная проводимость потерь не учитывается, т. е. $G = 0$.

Волновое сопротивление

$$Z_B = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{h}{b}, \text{ Ом.} \quad (13)$$

Обычно применяемые полосковые линии имеют волновые сопротивления от 25 до 100 Ом.

Приложение 2

Основы операторного метода

В основу операторного метода положено **преобразование Лапласа** – интегральное преобразование, которое функциям действительного переменного $f(t)$ – **оригиналам**, по формуле

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (1)$$

ставит в соответствие функции $F(p)$ комплексного переменного $p = \alpha + j\omega$ – **изображения**. Для связи $f(t)$ и $F(p)$ используют различные обозначения, в том числе такие, как $F(p) = \hat{L}[f(t)]$ или $f(t) \xrightarrow{\hat{L}} F(p)$, где \hat{L} – оператор прямого преобразования Лапласа.

Укажем основные свойства этого преобразования, вытекающие из соответствующих теорем:

1⁰. **Единственность преобразования (теорема единственности):**

любой функции – оригиналу $f(t)$ соответствует единственная функция – изображение $F(p)$ и наоборот.

2⁰. **Линейность преобразования (теорема линейности):**

$$\hat{L}\left[\sum_n a_n f_n(t)\right] = \sum_n a_n F_n(p). \quad (2)$$

3⁰. **Изображение производной (теорема дифференцирования):**

$$\hat{L}[f^{(1)}(t)] = pF(p) - f(0), \quad (3a)$$

$$\hat{L}[f^{(n)}(t)] = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \dots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \quad (3б)$$

4⁰. **Изображение интеграла (теорема интегрирования):**

$$\hat{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{p} F(p), \quad \hat{L}\left[\left(\int_0^t d\tau\right)^n f(\tau)\right] = \frac{1}{p^n} F(p). \quad (4)$$

5⁰. *Изображение функции с запаздывающим (опережающим) аргументом (теорема запаздывания - опережения):*

$$\hat{L}[f(t \pm \theta)] = e^{\pm p \theta} F(p) \quad (5)$$

6⁰. *Изображение функции с экспоненциальным сомножителем (теорема сдвига):*

$$\hat{L}[e^{at} f(t)] = F(p - a). \quad (6)$$

7⁰. *Изображение функции с измененным масштабом (теорема подобия):*

$$\hat{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right). \quad (7)$$

8⁰. *Изображение периодической (при $t \geq 0$) функции:*

$$\hat{L}[f(t)] = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-pT}}, \quad (8)$$

где T – период, $F_0(p) = \int_0^T f(t) e^{-pt} dt$.

Обратное преобразование Лапласа определяется интегралом:

$$f(t) = \hat{L}^{-1}[F(p)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(p) e^{pt} dp. \quad (9)$$

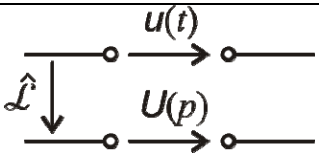
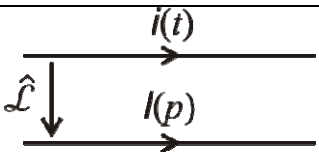
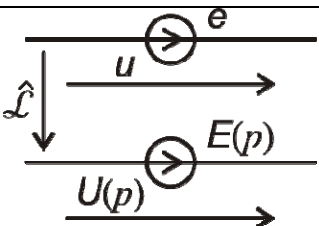
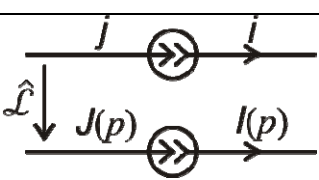
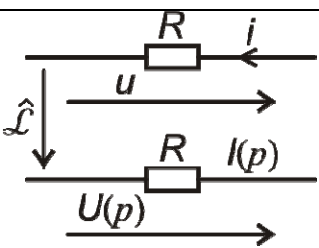
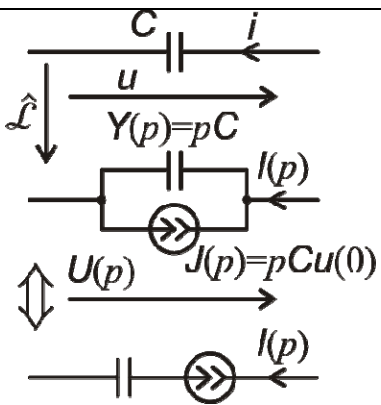
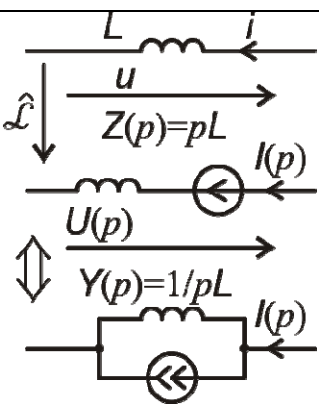
В задачах, связанных с исследованием колебательных процессов, значение этого интеграла удобно определять по теореме о вычетах, т. е.

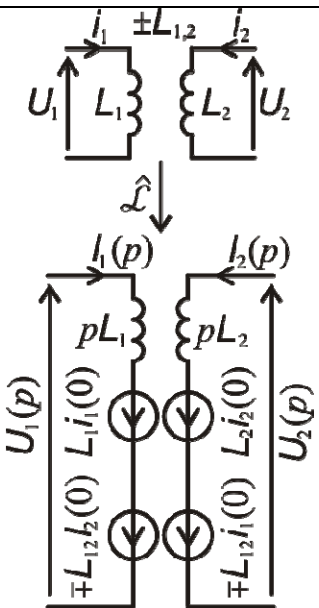
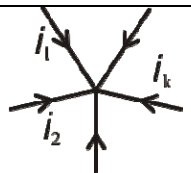
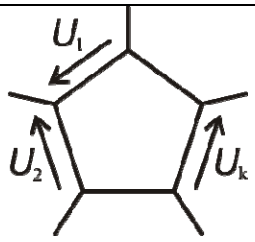
$$f(t) = \sum_n \text{Res}[F(p) e^{pt}, p_n]. \quad (10)$$

Аксиомы теории цепей в операторной форме.

При использовании операторного метода для решения задач теории цепей удобно применять преобразование Лапласа для основных соотношений, составляющих аксиоматику цепей. Это позволит миновать этап составления интегродифференциальных уравнений. Для случая линейных элементов с постоянными параметрами аксиоматика теории цепей в операторной форме принимает вид, представленный в таблице.

Изображение токов и напряжений, фигурирующее в аксиоматике, будем называть ***операторными напряжениями*** и ***операторными токами***. Линейная связь операторных величин $U(p)$ и $I(p)$ в аксиомах элементов R , L и C служит основой для введения понятий ***операторного сопротивления*** $Z(p)$ и ***операторной проводимости*** $Y(p) = 1/Z(p)$ как для этих основных элементов, так и для различных их соединений. В последнем случае правила, определяющие результирующие значения операторного сопротивления (проводимости) соединений элементов, подобны правилам для аналогичного соединения резистивных сопротивлений. В частности, при последовательном соединении элементов складываются их операторные сопротивления, при параллельном – операторные проводимости. Можно заметить, что при $p = j\omega$ операторные сопротивления (проводимости) двухполюсников совпадают с их комплексными сопротивлениями (проводимостями).

	$u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(p).$
	$i(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} I(p).$
	$u(t) = e(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(p) = E(p).$
	$i(t) = j(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} I(p) = J(p).$
	$u = Ri \Leftrightarrow i = Gu \xrightarrow{\mathcal{L}}$ $\rightarrow U(p) = RI(p) \Leftrightarrow I(p) = RU(p).$
	$i = C \frac{du}{dt} \Leftrightarrow u = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u(0) \xrightarrow{\mathcal{L}}$ $\rightarrow I(p) = pCU(p) - Cu(0) \Leftrightarrow U(p) = \frac{1}{pC} I(p) + \frac{u(0)}{p}$
	$u = L \frac{di}{dt} \Leftrightarrow i = \frac{1}{L} \int_0^t u dt + i(0) \xrightarrow{\mathcal{L}}$ $\rightarrow U(p) = pLI(p) - Li(0) \Leftrightarrow I(p) = \frac{1}{pL} U(p) + \frac{i(0)}{p}$

	$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm L_{12} \frac{di_2}{dt}, \\ u_2 = \pm L_{12} \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}. \end{array} \right\} \xrightarrow{\hat{\mathcal{L}}} \left\{ \begin{array}{l} U_1(p) = pL_1 I_1(p) \pm pL_{12} I_2(p) - L_1 i_1(0) \mp L_{12} i_2(0), \\ U_2(p) = \pm pL_{12} I_1(p) + pL_2 I_2(p) \mp L_{12} i_1(0) - L_2 i_2(0). \end{array} \right\}$
	$\sum_k i_k = 0 \xrightarrow{\hat{\mathcal{L}}} \sum_k I_k(p) = 0$
	$\sum_k u_k = 0 \xrightarrow{\hat{\mathcal{L}}} \sum_k U_k(p) = 0$

Список использованной и рекомендованной литературы

1. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи с распределенными параметрами. Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. школа, 1980. – 152 с.
2. Баскаков С. И. Лекции по теории цепей. – М.: Изд-во МЭИ, 1991. – 224 с.
3. Радіотехніка: Енциклопедичний навчальний довідник: Навч. посібник / За ред. Ю. Л. Мазора, В. І. Правди. – К.: Вища шк., 1999. – 838 с.
4. Скот Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. – М.: Сов. радио, 1977. – 368 с.
5. Конторович М. И. Операционное исчисление и процессы в электрических цепях. Учеб пособие. – М.: Сов. радио, 1975. – 319 с.
6. Белецкий А. Ф. Теория линейных электрических цепей: Учеб. для вузов. – М.: Радио и связь, 1986. – 544 с.
7. Шимони К. Теоретическая электротехника. – М.: Мир, 1964. – 773 с.
8. Чеботарев В. И. Теоретические основы радиотехники. Часть I: Учеб пособие. – Харьков: ХГУ, 1989. – 103 с.
9. Чеботарев В. И. Теоретические основы радиотехники. Часть II: Учеб пособие. – Харьков: ХГУ, 1990. – 104 с.
10. Чеботарев В. И. Теоретические основы радиотехники. Часть III: Учеб пособие. – Харьков: ХГУ, 1991. – 104 с.
11. Чеботарев В. И., Думин А. Н., Холодов В. И. Генераторы электрических колебаний: Учеб пособие. – Харьков: ХНУ им. В. Н. Каразина, 2007. – 84 с.

Содержание

1. Общие сведения	3
1.1. Введение	3
1.2. Электрические цепи с распределенными параметрами	5
1.3. Первичные параметры длинных линий	6
1.4. Уравнения длинных линий	9
 2. Стационарные волновые процессы в длинных линиях	 12
2.1. Гармонический волновой процесс в линиях	12
2.2. Прямые и обратные в линиях	16
2.3. Отражение волн в линии	22
2.3.1. Коэффициенты отражения	22
2.3.2. Влияние нагрузки линии на характер протекающих в ней процессов	24
2.4. Интерференция волн в линии	29
2.4.1. Анализ явления интерференции	29
2.4.2. Пример исследования интерференции в линии	31
2.5. Затухание и дисперсия волн в линии	37
2.6. Комплексное входное сопротивление линии	40
2.7. Комплексный коэффициент передачи и передаточная функция системы с длинной линией	46
2.7.1. Постановка задачи	46
2.7.2. Способ, основанный на представлении рассматриваемой системы совокупностью функциональных узлов	Ошибка! Закладка не определена.
2.7.3. Способ, основанный на использовании граничных условий	51
2.8. Основные режимы использования линий при передаче сигналов	53
2.9. Применения длинных линий	56
2.9.1. Передача сигналов	56
2.9.2. Линии задержки	57
2.9.3. Элементы индуктивности и емкости	57
2.9.4. Резонаторы	58
2.9.5. Металлические изоляторы	59
2.9.6. Четвертьволновый трансформатор сопротивлений	60
2.9.7. Измерительная линия	61
2.10. Волны в активных длинных линиях	63
2.10.1. Усиление колебаний в активных линиях	65
2.10.2. Генерирование колебаний в активных линиях	66
2.11. Волны в неоднородных длинных линиях	67
2.11.1. Уравнения неоднородных линий	67
2.11.2. Неоднородная линия передачи экспоненциального типа	70
2.12. Волны в связанных длинных линиях	74
 3. Нестационарные волновые процессы в длинных линиях	 82
3.1. Уравнения длинных линий в условиях нестационарных волновых процессов	82
3.1.1. Уравнения длинных линий в операторной форме	82
3.1.2. Решения и следствия однородных уравнений длинных линий	84
3.2. Процессы в линии, обусловленные ненулевыми начальными распределениями напряжения и тока	86
3.2.1. Общий случай	86

3.2.2. Линия без потерь.....	89
3.2.3. Линия без искажений.....	90
3.2.4. Линия с малыми потерями.....	91
3.3. Примеры анализа переходных процессов в длинных линиях.....	92
3.3.1. Разряд разомкнутой линии без потерь через активное сопротивление, равное волновому сопротивлению линии.....	93
3.3.2. Разряд линии без потерь через сопротивления, подключенные к ее концам.....	96
3.4. Передача сигналов в цепях с длинными линиями.....	103
3.4.1. Общий случай.....	103
3.4.2. Передача прямоугольного импульса в цепи с длинной линией без искажений.....	103
Приложение 1.....	106
Расчетные формулы распространенных линий передачи.....	106
Приложение 2.....	110
Основы операторного метода.....	110
Аксиомы теории цепей в операторной форме.....	112
Список использованной и рекомендованной литературы.....	115

Навчальне видання

Чеботарьов Вадим Іванович

Хвильові процеси в довгих лініях

Редактор О. М. Думін

Випусковий редактор І. Ю Агаркова

Коректор.....

Комп'ютерна верстка.....

Макет обкладинки І. М. Дончик