ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 4. № 1 (2012). С. 47-52.

УДК 517.518.6

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ ПЕРИОДИЧНОСТИ КВАЗИПОЛИНОМА

Н.П. ГИРЯ, С.Ю. ФАВОРОВ

Аннотация. Мы рассматриваем функции из класса Δ, введенного М.Г. Крейном и Б.Я. Левиным в 1949 году. Этот класс состоит из целых почти периодических функций экспоненциального типа, нули которых лежат в горизонтальной полосе конечной ширины. В частности, этот класс содержит конечные экспоненциальные суммы с чисто мнимыми показателями. Другое описание класса Δ — это аналитические продолжения в комплексную плоскость почти периодических функций на оси с ограниченным спектром, у которых точные верхняя и нижняя грани спектра ему принадлежат.

В заметке доказано, что если у функции класса Δ множество разностей нулей дискретно, то функция с точностью до множителя $C\exp\{i\beta z\}$, β вещественно является конечным произведением сдвигов функции $\sin\omega z$.

Ключевые слова: Почти периодическая функция, целая функция экспоненциального типа, множество нулей, дискретное множество.

В 1949 году М.Г. Крейн и Б.Я. Левин в статье [1] (см. также [2], п.2, гл.6 и Приложение 6) ввели и исследовали класс Δ целых почти периодических функций экспоненциального типа с нулями в горизонтальной полосе конечной ширины. Этот класс является естественным расширением класса конечных экспоненциальных сумм вида

$$\sum_{n=1}^{N} a_n e^{i\lambda_n z}, \quad \lambda_n \in \mathbb{R}, \quad a_n \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

М.Г. Крейн и Б.Я. Левин получили полное описание нулевых множеств функций этого класса, в частности, показали, что множество нулей функций класса Δ является в некотором смысле почти периодическим.

Если нули функции $f \in \Delta$ образуют периодическое множество с периодом T, то функция имеет вид

$$f(z) = Ce^{i\beta z} \prod_{j=1}^{K} \sin(\omega z + b_k), \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad C,\ b_k \in \mathbb{C}, \quad \omega = \pi/T \tag{2}$$

(см. Лемму 1 настоящей заметки).

Заметим, что периодическое дискретное множество в полосе обязательно имеет вид $E + T\mathbb{Z}$, где E — конечное множество. Основным нашим результатом является простое условие, когда такой вид имеет множество нулей функции класса Δ, и, следовательно, сама функция имеет вид (2).

Прежде всего напомним некоторые определения (см., например, [2], [3]).

Множество $E \subset \mathbb{R}$ называется относительно плотным, если существует такое $L < \infty$, что $E \cap [a, a+L] \neq \emptyset$ для любого $a \in \mathbb{R}$.

N.P. Girya, S.Yu. Favorov, Criterium of periodicity for quasipolynomials.

Поступила 21 декабря 2011 г.

Непрерывная функция $f(x)$ на $\mathbb{R}$ называется *почти периодической*, если для любого $\varepsilon > 0$ множество *ε-почти периодов* f

$$E_\varepsilon = \{\tau \in \mathbb{R} : \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon\}$$

является относительно плотным.

Непрерывная функция $f(z)$ называется *почти периодической* в полосе

$$S_{(a,b)} = \{z : \ a < \operatorname{Im} z < b\},$$

если для любой меньшей полосы $S' = S_{(\alpha,\beta)}, \quad a < \alpha < \beta < b$, и любого $\varepsilon > 0$ множество (S', ε)*-почти периодов* f

$$E_{(S',\varepsilon)} = \{\tau \in \mathbb{R} : \sup_{z\in S'} |f(z+\tau) - f(z)| < \varepsilon\}$$

является относительно плотным; в частности, если $a = -\infty, \ b = +\infty$, то $f(z)$ будет почти периодической функцией в $\mathbb{C}$.

Спектром почти периодической функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, называется множество

$$\mathrm{sp} f = \{\lambda \in \mathbb{R} : \ a(\lambda, f) \neq 0\},$$

где

$$a(\lambda, f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x) e^{-i\lambda x} dx$$

коэффициент Фурье функции, соответствующий показателю λ.

Например, спектром конечной экспоненциальной суммы (1) (при условии $\lambda_n \neq \lambda_m$ для $m \neq n$) является множество $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$, а a_n являются коэффициентами Фурье, соответствующими показателям λ_n.

Спектр любой почти периодической функции не более чем счетен ([3]).

Теорема 1 ([2], Гл.6, [3], ч.2, Гл.1)**.** *Любая почти периодическая функция на $\mathbb{R}$ с ограниченным спектром продолжается до целой почти периодической функции экспоненциального типа, и наоборот, сужение любой такой целой функции на $\mathbb{R}$ имеет ограниченный спектр. При этом нули этой целой функции лежат в горизонтальной полосе ограниченной ширины (т.е. функция принадлежит классу Δ) тогда и только тогда, когда точные верхняя и нижняя грани спектра ему принадлежат.*

Таким образом, функции класса Δ являются естественным объектом исследований.

Множество $A \subset D$, где D область в $\mathbb{C}$, будем называть дискретным, если оно не имеет предельных точек в D. Близким к нему является понятие *дивизора* в D — это множество нулей некоторой голоморфной в D функции. Точки дивизора, в отличие от точек множества, могут иметь конечную кратность, т.е. дивизор является мультимножеством. Дивизор можно также представлять как последовательность $\{a_n\} \subset D$ без точек сгущения в D. Дискретное множество можно рассматривать как частный случай дивизора.

Множество (или дивизор) $Z = \{a_n\}$, являющееся нулевым множеством голоморфной функции в горизонтальной полосе $S_{(a,b)}$, называется почти периодическим, если для любого $\varepsilon > 0$ и любой меньшей полосы $S' = S_{(\alpha,\beta)}, \ a < \alpha < \beta < b$, найдется относительно плотное множество $E_{(S',\varepsilon)} \subset \mathbb{R}$, что для каждого $\tau \in E_{(S',\varepsilon)}$ существует биекция $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, при которой справедлива импликация

$$a_n \in S' \bigvee a_{\sigma(n)} \in S' \quad \Longrightarrow \quad |a_n + \tau - a_{\sigma(n)}| < \varepsilon.$$

(см. [4]).

В случае, когда $a = -\infty$, $b = \infty$, т.е. $S_{(a,b)} = \mathbb{C}$, а дивизор лежит в горизонтальной полосе ограниченной ширины, определение почти периодического дивизора появилось ранее в следующей форме: для любого $\varepsilon > 0$ найдется относительно плотное множество $E_\varepsilon \subset \mathbb{R}$ такое, что для каждого $\tau \in E_\varepsilon$ при некоторой биекции $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n + \tau - a_{\sigma(n)}| < \varepsilon$$

(см. [2], Приложение 6, п. 2). Другое определение почти периодического дивизора, использующее понятие обобщенной функции, рассматривалось в [5], [6]. Эквивалентность определений доказана в [7].

Заметим, что если почти периодический дивизор в $\mathbb{C}$ весь попадает в какую-нибудь горизонтальную полосу конечной ширины, то количество точек дивизора (с учетом кратности) на множестве $\{z : x_0 \le \operatorname{Re} z \le x_0 + 1\}$ ограничено равномерно по $x_0 \in \mathbb{R}$. Действительно, это количество не превосходит количества точек на множестве $\{z : -1 \le \operatorname{Re} z \le L+1\}$, где L выбрано так, что любой сегмент вещественной оси длины L содержит 1-почти периоды дивизора.

Теорема 2 ([2], Приложение 6, п. 2)**.** *Дивизор любой функции класса Δ является почти периодическим.*

В нашей заметке мы доказываем следующую теорему.

Теорема 3. *Если для дивизора $Z_f = \{z_n\}$ функции $f \in \Delta$ множество разностей $z_n - z_m$ является дискретным, то f имеет вид (2).*

Заметим, что обратное утверждение является очевидным.

Следствие 1. *Если для дивизора $\{z_n\}$ экспоненциального полинома*

$$P(z) = \sum_{n=1}^{N} a_n e^{i\lambda_n z}, \quad \lambda_n \in \mathbb{R}, \quad a_n \in \mathbb{C}$$

множество разностей $z_n - z_m$ является дискретным, то

$$P(z) = Ce^{i\beta z} \prod_{j=1}^{K} \sin(\omega z + b_k), \quad \omega, \beta \in \mathbb{R}, \quad C,\ b_k \in \mathbb{C}.$$

Докажем вначале следующие леммы.

Лемма 1. *Для любой функции $f \in \Delta$ найдется число $R < \infty$ такое, что любая замкнутая вертикальная полоса ширины R содержит нули функции f.*

Доказательство леммы. По Теореме 2 дивизор Z_f функции f почти периодический. Поэтому найдется число $L < \infty$ такое, что каждый сегмент вещественной оси длины L содержит 1-почти период дивизора функции f. Для любых точек $a \in Z_f$ и $x_0 \in \mathbb{R}$ можно найти 1-почти период $\tau \in [x_0 - \operatorname{Re} a - L/2,\ x_0 - \operatorname{Re} a + L/2]$, и поэтому точка дивизора, находящаяся на расстоянии не больше 1 от $a + \tau$, попадет в вертикальную полосу

$$\{z : x_0 - (L/2 + 1) \le \operatorname{Re} z \le x_0 + (L/2 + 1)\}.$$

Таким образом, утверждение леммы выполняется для $R = L + 2$.

Лемма 2. *Если множество нулей Z функции $f \in \Delta$ имеет период T, то функция имеет вид (2).*

Доказательство леммы. Так как нули функции f лежат в горизонтальной полосе конечной ширины и не имеют точек сгущения, то множество $\{z = x + iy : 0 \le x < T\}$

содержит конечное число корней функции f, пусть это будут точки $c_1, \dots, c_K$. Тогда множество корней может быть записано в виде $\{c_1, \dots, c_K\} + T\mathbb{Z}$. Положим $\omega = \frac{\pi}{T}, b_k = -\omega c_k, k = 1, 2, \cdots, K$.

Функция

$$\frac{f(z)}{\prod_{k=1}^{K} \sin(\omega z + b_k)} \tag{3}$$

является целой без нулей. Так как знаменатель равномерно отграничен от нуля вне кругов одинакового малого радиуса с центрами в корнях, а из почти периодичности функции f следует ее ограниченность в любой горизонтальной полосе конечной ширины, то функция (3) имеет экспоненциальный рост в плоскости, ограничена на вещественной оси и поэтому равна $Ce^{i\beta z}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{C}$.

Доказательство теоремы. Выберем число H так, что для любых нулей z_n, z_m функции f выполняется неравенство $|\mathrm{Im}\,(z_n - z_m)| \le H$, и пусть R число из Леммы 1.

По условию множество, состоящее из разностей точек из Z_f, дискретно. Поэтому можно выбрать столь маленькое $\varepsilon > 0$, чтобы для любых точек a, b, c, $d \in Z_f$ таких, что

$$|a - b| < R + H + 2, \quad |c - d| < R + H + 2, \quad a - b \ne c - d,$$

всегда выполнялось неравенство $\varepsilon < |(c - d) - (a - b)|$. Можно также считать, что $\varepsilon < 1$. В частности, при $c = d$ получаем, что $\varepsilon < |a - b|$, если только a, $b \in Z_f$ и $a \ne b$.

Зафиксируем $a \in Z_f$, и пусть $\tau \in \mathbb{R}$ произвольный $(\varepsilon/2)$-почти период Z_f. Заметим, что существует единственное $c \in Z_f$ такое, что $|a + \tau - c| < \varepsilon/2$. Действительно, в противном случае мы имеем

$$|c - c'| \le |a + \tau - c| + |a + \tau - c'| < \varepsilon,$$

что невозможно ввиду выбора ε.

Далее, положим $T = c - a$. Для любого $a' \in Z_f$ найдется $a'' \in Z_f$ такое, что $|a' + \tau - a''| < \varepsilon/2$, и поэтому

$$|a' + T - a''| \le |a' + \tau - a''| + |c - a - \tau| < \varepsilon.$$

Таким образом, T является ε-почти периодом дивизора Z_f. Покажем, что в действительности T является периодом этого дивизора.

Пусть $b \in Z_f$ такое, что $b \ne a$ и $|\mathrm{Re}\,(b - a)| < R + 1$. Так как T является ε-почти периодом Z_f, найдется точка $d \in Z_f$ такая, что $|b + T - d| < \varepsilon$, и поэтому

$$|(a - b) - (c - d)| = |d - T - b| < \varepsilon.$$

Так как

$$|a - b| \le |\mathrm{Re}\,(a - b)| + |\mathrm{Im}\,(a - b)| < R + H + 1$$

и

$$|c - d| \le |a - b| + |b + T - d| < R + H + 2,$$

мы ввиду выбора ε получаем, что $a - b = c - d$, следовательно, $d = b + T$. Повторим эти рассуждения для всех $b \in Z_f$ таких, что $|\mathrm{Re}\,(b - a)| < R + 1$. После этого, для всех $b' \in Z_f$ таких, что $|\mathrm{Re}\,(b' - b)| < R + 1$ для какой-либо точки b, выбраной ранее. После конечного или счетного числа шагов мы построим множество $Z' \subset Z_f$ такое, что $a + T \in Z'$ для всех $a \in Z'$.

Покажем, что $Z' = Z_f$. Если разность $Z_f \setminus Z'$ непустое множество, положим

$$R_1 = \inf\{|\mathrm{Re}\,(a - b)| : a \in Z',\, b \in Z_f \setminus Z'\}.$$

Мы имеем $R_1 \ge R + 1$, поскольку в противном случае хотя бы одна точка из $Z_f \setminus Z'$ участвовала бы в нашей процедуре и поэтому принадлежала бы Z'. Выберем $a' \in Z'$ и

$b' \in Z_f \setminus Z'$ так, что $R_1 \le |\mathrm{Re}\,(a'-b')| < R_1+1$ и положим $x_0 = \mathrm{Re}\,(a'+b')/2$. Тогда для любой точки $c \in Z'$ имеем

$$|\mathrm{Re}\ c - x_0| = \left|\mathrm{Re}\,(c-b') - \mathrm{Re}\,\frac{a'-b'}{2}\right| > R_1 - \frac{R_1+1}{2} \ge R/2,$$

и для любой точки $d \in Z_f \setminus Z'$ имеем

$$|\mathrm{Re}\ \ d - x_0| = \left|\mathrm{Re}\ (d-a') - \mathrm{Re}\ \frac{b'-a'}{2}\right| > R_1 - \frac{R_1+1}{2} \ge R/2.$$

Поэтому полоса

$$\{z:\ x_0 - R/2 \le \mathrm{Re}\ z \le x_0 + R/2\}$$

не пересекается с Z_f, что, как было отмечено в Лемме 1, невозможно. Итак, $Z_f = Z'$ и T является периодом Z_f. Применив Лемму 2, получаем утверждение теоремы.

Замечание. Так как дивизор Z_f лежит в горизонтальной полосе конечной ширины, то период T с необходимостью будет вещественным.

Отметим, что в доказательстве теоремы 3 участвовали не все возможные разности нулей функции, а только разности, не большие, чем $R+H+2$. Поэтому условие теоремы можно ослабить.

Теорема 4. *Пусть для нулей $\{z_n\}$ функции $f \in \Delta$ (или конечной экспоненциальной суммы) множество*

$$\{z = z_n - z_m,\ |z| \le R+H+2\}$$

конечно; здесь H ширина горизонтальной полосы, в которой лежат все нули, а R такое, что любая вертикальная полоса ширины R содержит хотя бы один нуль. Тогда для f справедливо представление (2).

Заметим, что условие принадлежности функции классу Δ снять нельзя, как показывает следующий пример.

Пусть

$$Z = \{z_{n,k} = 2^n\pi + i3^k,\ n \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\}$$

дискретное множество в полосе $S_{(-\infty,\infty)} = \mathbb{C}$. Легко видеть, что этот дивизор является почти периодическим, причем разности его точек образуют дискретное множество. Заметим, что проекция множества Z на мнимую ось не плотна в ней, поэтому по Теореме 1 работы [7] найдется целая почти периодическая функция с дивизором Z, не являющаяся функцией из класса Δ. Для нее, очевидно, представление в виде конечного произведения синусов не имеет места.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крейн М.Г., Левин Б.Я. *О целых почти периодических функциях экспоненциального типа* // ДАН СССР. 1949. Т. LXIV, № 2. С. 285–287.
2. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций.* Госиздат. тех.-теор. лит., Москва, 1956. 632 с.
3. Левитан Б.М. *Почти-периодические функции.* М.: Гостехиздат, 1953. 396 с.
4. H. Tornehave *Systems of zeros of holomorphic almost periodic functions,* Kobenhavns Universitet Matematisk Institut, Preprint No. 30, 1988, 52 p.
5. J.C. Lagarias *Mathematical quasicrystals and the problem of diffraction* // Directions in Mathematical Quasicrustals, M. Baake and R. Moody, eds., CRM Monograph series, Vol. 13, AMS, Providence RI. 2000. P. 61–93.
6. L.I. Ronkin *Almost periodic distributions and divisors in tube domains,* Zap. Nauchn. Sem. POMI **247** (1997). P. 210–236 (Russian).
7. S.Yu. Favorov, A.Yu. Rashkovskii, A.I. Ronkin *Almost periodic divisors in a strip*, J. d'Analyse Math., Vol 74 (1998). P. 325–345.

Наталия Петровна Гиря,
Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина,
пл. Свободы, 4,
61022, г. Харьков, Украина
E-mail: n_girya@mail.ru

Сергей Юрьевич Фаворов,
Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина,
пл. Свободы, 4,
61022, г. Харьков, Украина
E-mail: sfavorov@gmail.com