

Министерство образования и науки Украины
Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина

Б. В. Кондратьев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к решению задач по теории функций
комплексного переменного

для студентов радиофизического
и физического факультетов

Харьков – 2010

УДК 517.53/.54(075.8)
ББК 22.161.5я73
М 54

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической радиофизики радиофизического факультета Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина **Колчигин Н. Н.**;
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом радиофизической интроскопии Харьковского института радиофизики и электроники имени академика В. Я. Усикова **Масалов С. А.**

*Рекомендовано к печати Научно-методическим советом
Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина
(протокол №6 от 19.06.09)*

М 54 **Методические** указания к решению задач по теории функций комплексного переменного для студентов радиофизического и физического факультетов / Сост. : Кондратьев Б. В. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2010. – 76 с.

Методические указания имеют целью оказать помощь студентам радиофизического и физического факультетов при подготовке к практическим занятиям по теории функций комплексного переменного и ее приложениям (свойства аналитических функций, их отображения, интегралы и вычеты, операционные методы, плоское электростатическое поле, асимптотические методы и др.). Этот материал входит в первую часть курса "Методы математической физики" и излагается в четвертом семестре.

В указаниях к каждой теме приводятся перечень основных вопросов, ссылки на литературу, решения типичных задач и задания для самостоятельной работы.

УДК 517.53/.54(075.8)
ББК 22.161.5я73

© Харьковский национальный университет
имени В. Н. Каразина, 2010
© Кондратьев Б. В., сост., 2010
© Дончик И. Н., макет обложки, 2010

Оглавление

| | |
|---|----|
| ВСТУПЛЕНИЕ..... | 4 |
| Тема 1. Комплексные числа и действия над ними. Функции комплексного переменного, их аналитичность..... | 5 |
| Тема 2. Конформные отображения, осуществляемые различными элементарными аналитическими функциям..... | 7 |
| Тема 3. Интегрирование ФКП и степенные ряды..... | 11 |
| Тема 4. Ряды Лорана и особые точки ФКП..... | 14 |
| Тема 5. Вычеты и их применения..... | 18 |
| Тема 6. Операционное исчисление..... | 25 |
| Тема 7. Специальные функции и их свойства..... | 31 |
| Тема 8. Теория плоского электростатического поля..... | 36 |
| Тема 9. Основы асимптотических методов..... | 40 |
| Задания для самостоятельного решения..... | 57 |
| СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ..... | 75 |

Вступление

Теория функций комплексного переменного (ТФКП) как продолжает, так и расширяет идеи математического анализа функций действительного переменного. Обычные определения, известные из алгебры чисел и математического анализа функций действительного переменного, остаются почти без изменений, но их содержание меняется весьма существенным образом. Хорошо известно, что уже обычные простейшие операции над действительными числами могут вывести за пределы их области. И решения большинства алгебраических уравнений не могут быть выражены только обычными действительными числами. Поэтому приходится расширять область действительных чисел, а таким расширением этой области и является область комплексных чисел. Причем замечательным свойством комплексных чисел является тот факт, что основные математические операции над комплексными числами не выводят из области комплексных чисел. Однако, множество комплексных чисел не обладает свойством упорядоченности; не существует правил сравнения этих чисел понятий больше или меньше.

Основное понятие комплексного анализа — аналитическая функция. Это понятие позволяет доказать теоремы о существовании производных любого порядка от этих функций, о независимости интегралов от формы пути интегрирования. Позволяет сравнительно единообразно вычислять сложные интегралы с помощью вычетов и многое другое.

Свойство аналитического продолжения различных математических соотношений позволяет единообразно перенести их в комплексную область. А построение графиков действительных функций заменяется конформными отображениями, осуществляемыми аналитическими функциями.

На основе ТФКП построены все свойства специальных функций Эйлера, Бесселя, Лежандра и др. На той же основе построено операционное исчисление, с помощью которого можно упростить решение многих задач радиофизики и гидродинамики. А с помощью конформных отображений можно решать задачи электростатики и определять функцию Грина при решении задач математической физики.

Часто возникает вопрос о приближенном вычислении сложных интегралов или решении дифференциальных уравнений при больших или малых значениях некоторого параметра. На такой вопрос могут дать ответ методы асимптотических оценок, хорошо разработанные в ТФКП.

В предлагаемых методических указаниях приводятся образцы решения примеров по курсу ТФКП, решаемые со студентами на практических занятиях.

Тема 1

Комплексные числа и действия над ними.

Функции комплексного переменного, их аналитичность

Основные вопросы: Модуль и аргумент комплексного числа. Три формы комплексного числа. Условия дифференцируемости ФКП (условия Коши-Римана). Понятие аналитической ФКП в области. Построение аналитической функции по ее заданной части. Аналитичность и вычисление значений элементарных ФКП: степенной, показательной, логарифмической и др.

Литература: 1, гл. 1, § 1-4, гл.3, § 1 (3); 2, п. 1-5, 8-10; 3, § 1, 4, 7.

Задание: 4, № 1(4), 4(2,3), 23, 26, 28, 29, 68(4,6), 71, 74(1,5,6), 81(1,2,4,6), 112, 113, 137, 159, 160.

Пример 1. Найти модуль и аргумент комплексного числа

$$z = re^{i\varphi} = -1 + i\sqrt{3}.$$

Модуль $r = |z| = 2$; аргумент $\varphi = \text{Arg } z = \arg z + 2\pi k$, $k \in Z$,

где главное значение $\arg(-1 + i\sqrt{3}) = \pi - \text{arctg } \sqrt{3} = \frac{2}{3}\pi$.

Пример 2. Исследовать аналитичность функции

$$w(z) = U + iV = \bar{z} \cdot \text{Im } z = xy - iy^2.$$

Так как $\frac{\partial U}{\partial x} = y$, $\frac{\partial V}{\partial y} = -2y$, $\frac{\partial U}{\partial y} = x$ и $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$, то условия Коши-Ри-

мана $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$ выполняются только в точке $z = 0$, следо-

вательно, функция $w(z)$ нигде не аналитическая, но в нуле имеет производную $w'(0) = 0$ функция дифференцируемая.

Пример 3. Построить аналитическую функцию $w(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ по заданной мнимой части:

$$V(x, y) = x^2 + y^2 - 3y.$$

Найдём действительную часть

$$U(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} \frac{\partial V}{\partial y} dx - \frac{\partial V}{\partial x} dy =$$

$$= \int_{(0,0)}^{(x,y)} (-2y - 3) dx - 2x dy = -3x - 2xy + C,$$

тогда $w(z) = U + iV = iz^2 - 3z + C$.

Пример 4. Найти все значения выражений:

а) Вычислить $Arg th(\ln 2 - i\frac{\pi}{4})$. Сначала найдём

$$th(\ln 2 - i\frac{\pi}{4}) = \frac{e^{\ln 4 - \frac{1}{2}\pi i} - 1}{e^{\ln 4 - \frac{1}{2}\pi i} + 1} = -\frac{1+4i}{1-4i} = \frac{15-8i}{17}, \text{ затем}$$

$$Arg \frac{15-8i}{17} = -arctg \frac{8}{15} + 2\pi k, \quad k \in Z,$$

$$\text{где } arctg \frac{8}{15} = \pi \cdot 0,155956... \approx \frac{1}{6}\pi.$$

б) Вычислить $(-2i)^i = e^{i \cdot Ln(-2i)} = \exp\left[i \cdot \ln 2 - \frac{\pi}{2}(4k-1)\right] =$
 $= [\cos(\ln 2) + i \sin(\ln 2)] \cdot \exp\left[-\frac{\pi}{2}(4k-1)\right]$ при $k \in Z$.

Пример 5. Найти все корни уравнений:

а) Уравнение $\cos z = 2$ преобразуем к виду $e^{iz} + e^{-iz} = 4$, затем $e^{2iz} - 4e^{iz} + 1 = 0$, откуда $e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3}$; тогда

$$z = Arc \cos 2 = -i \cdot Ln(2 \pm \sqrt{3}) = \mp i \cdot \ln(2 + \sqrt{3}) + 2\pi k \quad \text{при } k \in Z.$$

Главное значение $\arccos 2 = \mp i \cdot \ln(2 + \sqrt{3})$ при $k = 0$.

б) Уравнение $2ch z + sh z = i$ преобразуем к виду $3e^{2z} - 2ie^z + 1 = 0$, откуда $e^z = \frac{i}{3}(1 \pm 2)$, тогда $z_+ = Ln i = \frac{i}{2}\pi(4k+1)$,
 $z_- = -Ln 3i = -\ln 3 - \frac{i}{2}\pi(4k+1)$ при $k \in Z$.

Тема 2

Конформные отображения, осуществляемые различными элементарными аналитическими функциями

Основные вопросы: Геометрический смысл модуля и аргумента производной аналитической функции. Определение конформного отображения; необходимые и достаточные условия такого отображения. Принцип соответствия границ. Теорема Римана. Дробно-линейное отображение. Отображение на верхнюю полуплоскость луночки (двуугольника), плоскости с разрезом, полосы и полуполосы. Понятие римановой поверхности.

Литература: 1, гл.1, §4(3), гл.3, §1(4), 2(3), гл.6, §1,2; 2, п.6, 24, 26, 31, 33; 3, §8, 34, 35.

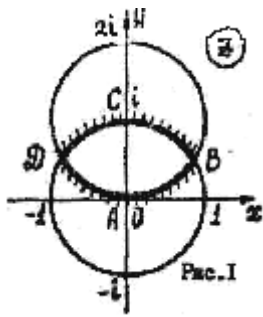
Задание: 4, № 43 (1,3,5), 117, 187, 210 (3), 213, 220(1,2), 229(1,3), 283(2,3), 287, 291-293, 306, 338(1,3,6), 350, 351, 356, 358, 359.

Пример 6. Какая часть плоскости растягивается (сжимается) при отображении с помощью функции $f(z) = z^2 - 2z$; как при этом ведёт себя бесконечно малая окрестность точки $z_0 = 1 - i$.

Коэффициент растяжения равен $K = |f'(z)| = 2|z - 1|$, поэтому внутренность круга $|z - 1|^2 \equiv (x - 1)^2 + y^2 < \frac{1}{4}$ сжимается, а его внешность растягивается в $K = |f'(z_0)| = 2$ раза и поворачивается на угол $\theta = \arg f'(z_0) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$.

Пример 7. Для функции $f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$ при $z = 2$ примем начальное значение $\text{Arg } f(2) = 0$. Считая, что $\text{Arg } f(z)$ изменяется непрерывно, когда точка z делает полный оборот против часовой стрелки по окружности $C = \{|z| = 2\}$ и возвращается в точку $z = 2$, найти приращение аргумента $\Delta_C \text{Arg } f(z)$.

Обозначим $z \pm 1 = r_{1,2} \cdot e^{i\varphi_{1,2}}$, тогда $\text{Arg } f(z) = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$. При ходе по контуру C , внутри которого оказываются обе точки ветвления $z = \pm 1$, каждый из углов φ_1 и φ_2 получит приращение 2π , поэтому $\Delta_C \text{Arg } f(z) = 2\pi$.



Пример 8. Круговую лунку (двуугольник) на рис.1 отобразить на верхнюю полуплоскость $\text{Im } w > 0$.

На плоскости z будет $z_A = 0$ и $z_C = i$, а координаты точек B и D найдём из системы уравнений

$$\begin{cases} |z|^2 \equiv x^2 + y^2 = 1 \\ |z-1|^2 \equiv x^2 + (y-1)^2 = 1 \end{cases},$$

Рис. 1

откуда $x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $y = \frac{1}{2}$; поэтому $z_{B,D} = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{3} + i)$. Дробно-линейная

функция $p(z) = \frac{z - z_B}{z - z_D} = \frac{2z - \sqrt{3} - i}{2z + \sqrt{3} - i}$ выпрямляет дуги $B CD$ и $B AD$ и

отображает заданную лунку $DABCD$ на сектор $D_1 B D_2$ в плоскости p (рис.2), так как $p_B = 0$ и $p_D = \infty$. Поскольку

$p_A(0) = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) = e^{\frac{4}{3}\pi i}$ и $p_C(i) = -\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}) = e^{\frac{2}{3}\pi i}$, то луч $B D_1$

имеет направление $\arg p_A = \frac{4}{3}\pi$, а луч $B D_2$ - направление $\arg p_C = \frac{2}{3}\pi$.

Величина угла, образованного границей лунки в точке B , не изменяется при отображении $p(z)$ и равна $\angle ABC = \arg p_A - \arg p_C = \frac{2}{3}\pi$.

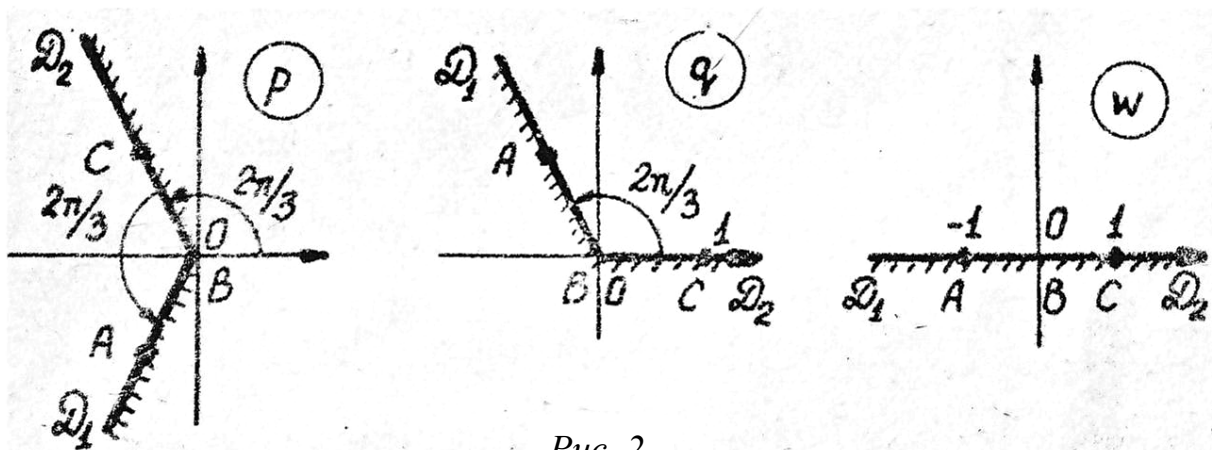


Рис. 2

Отображение $q(p) = p \cdot e^{-\frac{2}{3}\pi i}$ повернёт сектор $D_1 B D_2$ вокруг его вершины B на угол $-\frac{2}{3}\pi$. На плоскости q луч $B D_2$ совпадает

с действительной положительной полуосью; точки $q_A = e^{\frac{2}{3}\pi i}$ $q_C = 1$.

Так как $\arg q_C = 0$ и $\arg q_A = \frac{2}{3}\pi$, то при отображении $w = q^{\frac{3}{2}}$ на плоскости w луч BD_2 останется на месте, а луч BD_1 совпадёт с действительной отрицательной полуосью. Таким образом, сектор D_1BD_2 отобразится на верхнюю полуплоскость $\text{Im } w > 0$ и $w_{A,C} = \mp 1$. Выражая w через z , получим отображающую функцию

$w(z) = -\left(\frac{2z - \sqrt{3} - i}{2z + \sqrt{3} - i}\right)^{3/2}$. Во всех плоскостях z, p, q , и w рассматриваемые области расположены слева от границы.

Пример 9. Верхнюю полуплоскость с вырезанными полукругами (рис. 3), т.е. область $\text{Im } z > 0$ и $|z \pm 1| > 1$, отобразить на верхнюю полуплоскость $\text{Im } w > 0$.

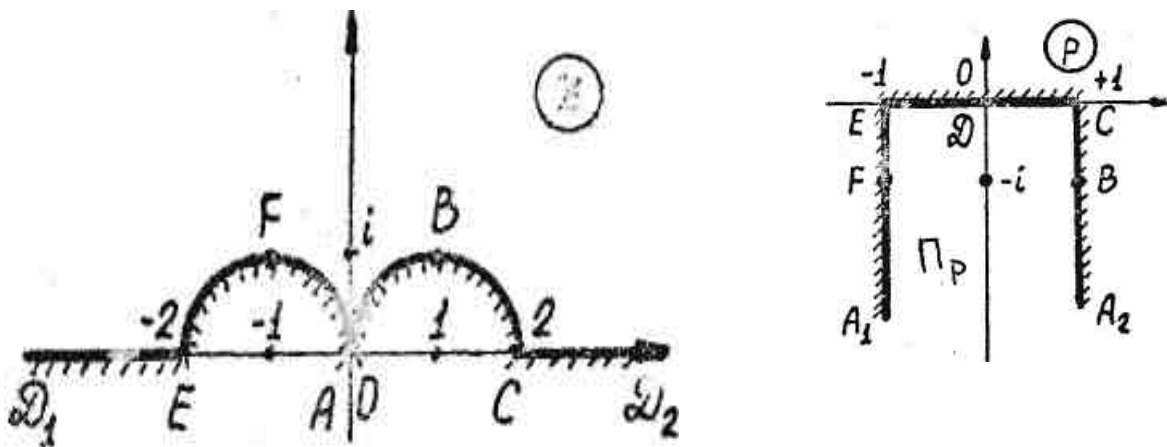


Рис. 3

Функция $p(z) = \frac{2}{z}$ отобразит заданную область в полуполосу $\Pi_p = \{|\text{Re } p| < 1, \text{Im } p < 0\}$, т.е. границы области выпрямляются и $p_{B,F} = \pm 1 - i$; $p_{C,E} = \pm 1$; $p_D = 0$. Функция $q(p) = \xi + i\eta = \frac{\pi}{2} i(p+1)$ переводит полуполосу Π_p в полуполосу $\Pi_q = \{\xi > 0, 0 < \eta < \pi\}$

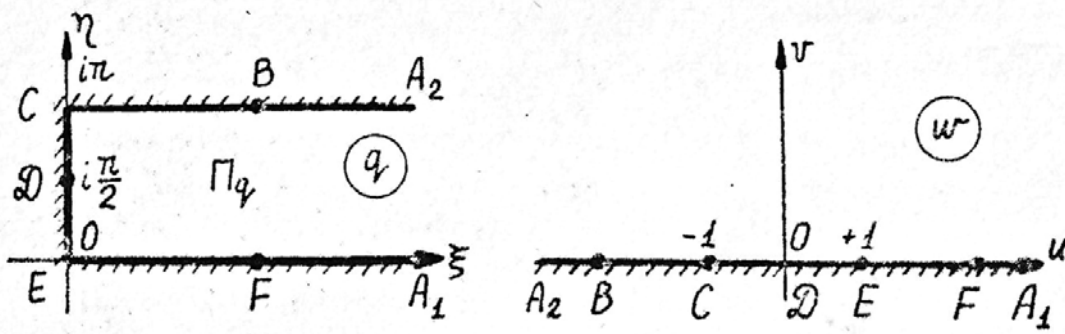


Рис. 4

(рис.4); при этом

$$q_B = \frac{\pi}{2} + \pi i, \quad q_C = \pi i, \quad q_D = \frac{\pi}{2} i, \quad q_E = 0, \quad q_F = \frac{\pi}{2}.$$

Наконец, функция $w = U + iV = ch q$ отобразит полуокладу Π_q на верхнюю полуплоскость $\text{Im } w > 0$; причём $w_{F,B} = \pm ch \frac{\pi}{2} \cong \pm 2,50918$, $w_{E,C} = \pm 1$, $w_D = 0$. Действительно, участок границы полуоклады $EA_1 = \{0 < \xi < \infty, \eta = 0\}$ с помощью функции $w_{EA_1} = ch \xi > 1$ перейдёт на плоскости w в полупрямую $EA_1 = \{U > 1, V = 0\}$; участок $CA_2 = \{0 < \xi < \infty, \eta = \pi\}$ функция $w_{CA_2} = -ch \xi < -1$ переведёт в полупрямую $CA_2 = \{U < -1, V = 0\}$; отрезок $EC = \{\xi = 0, 0 < \eta < \pi\}$ функция $w_{EC} = \cos \eta$ переведёт в отрезок $EC = \{|U| < 1, V = 0\}$. Таким образом заданное отображение сделает функция

$$w(z) = ch i\pi \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{2} \right) = -\sin \frac{\pi}{z}.$$

Тема 3

Интегрирование ФКП и степенные ряды

Основные вопросы: Методы вычисления контурных интегралов. Теорема и формула Коши. Степенные ряды, их радиус сходимости. Разложение аналитических функций в ряд Тейлора. Нули функций, их кратность. Свойство единственности аналитических функций.

Литература: 1, гл.1, §5, 6, гл.2, §1-3, гл.3, §1(1,2), 2(1-3); 2, п.11-14, 17-20; 3, §2, 5, 9-12, 14.

Задание: 4, №388 (1,2), 393 (2,3,5), 403-405, 412, 434, 470, 471, 506-509, 523 (1,2), 525.

Пример 10. Вычислить интеграл $I = \int_L z^{-\frac{1}{3}} dz$ в положительном направлении по левой полуокружности $L = \{ |z|=1, x \leq 0 \}$ от той ветви корня, для которой $\sqrt[3]{i} = -i$.

Для выделения заданной ветви, выберем нужное значение числа k из трёх возможных $k = 0, \pm 1$. Для этого в начальной точке контура интегрирования L запишем

$$\sqrt[3]{i} = \exp \frac{i}{3} \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right) = -i = \exp \left(-i \frac{\pi}{2} \right),$$

откуда $\frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right) = -\frac{\pi}{2}$ или $\frac{1}{2} + 2k = -\frac{3}{2}$, значит $k = -1$.

Под знаком интеграла сделаем замену $z(\varphi) = e^{i\varphi}$ при $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$ и с учётом требуемой ветви подынтегральной функции $z^{-\frac{1}{3}} = e^{-\frac{i}{3}(\varphi-2\pi)}$ запишем

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{-\frac{i}{3}(\varphi-2\pi)} \cdot i e^{i\varphi} d\varphi = ie^{\frac{2\pi i}{3}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{\frac{2i}{3}\varphi} d\varphi = ie^{\frac{2\pi i}{3}} \cdot \frac{3}{2i} e^{\frac{2i}{3}\varphi} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{2} e^{\frac{2}{3}\pi i} \cdot (e^{i\pi} - e^{i\pi/3}) = -\frac{3}{2} e^{\frac{2}{3}\pi i} \cdot e^{\frac{i\pi}{6}} \cdot \left(e^{\frac{i\pi}{6}} + e^{-\frac{i\pi}{6}} \right) = \\
&= -3 e^{\frac{5}{6}\pi i} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = -3 e^{i\pi \left(1 - \frac{1}{6}\right)} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \\
&= \frac{3}{2} \sqrt{3} \cdot e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{3}{2} \sqrt{3} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{3}{4} \sqrt{3} \cdot (\sqrt{3} - i).
\end{aligned}$$

Пример 11. Вычислить интеграл $I = \oint_C \frac{dz}{z(1-z)^3}$, где C самопересекающийся замкнутый контур ("восьмёрка"), который обходит особую точку $z_0 = 0$ в отрицательном направлении, а $z_1 = 1$ в положительном.

Деформируем контур C в "гантель", по перемычке которой интегралы взаимно уничтожаются и остаются интегралы по окружностям около особых точек $C_0 = \{|z| = \varepsilon\}$ и $C_1 = \{|z-1| = \varepsilon\}$ (здесь $0 < \varepsilon \ll 1$); поэтому

$$I = \oint_{C_0} \left(\frac{1}{1-z} \right)^3 \cdot \frac{dz}{z-0} + \oint_{C_1} \left(\frac{1}{z} \right) \cdot \frac{dz}{(z-1)^{2+1}}.$$

Затем, воспользовавшись интегральной формулой Коши, получим

$$I = 2\pi i \left[\left(\frac{1}{1-z} \right)^3 \Big|_{z=0} + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{z} \right)'' \Big|_{z=1} \right] = 4\pi i.$$

Пример 12. Функцию $f(z) = \frac{z}{z+2}$ разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 1$ и найти область сходимости ряда.

Воспользуемся формулой для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии и получим

$$f(z) = 1 - \frac{2}{3} \frac{1}{1 + \frac{1}{3}(z-1)} = 1 - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^{k+1}} (z-1)^k.$$

Важно учесть, что радиус сходимости ряда – это расстояние от точки разложения $z_0 = 1$ до ближайшей к ней особой точки $\tilde{z} = -2$ расклады-

ваемой функции $f(z)$ (в этой точке $f(2) = f'(2) = \infty$); поэтому $R = |z_0 - \tilde{z}| = 3$, а область сходимости $|z - 1|^2 = (x - 1)^2 + y^2 < 9$.

Пример 13. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = i$ ту ветвь функции $f(z) = z^{2/3}$, для которой

$$f(i) = i^{2/3} = -1.$$

Представим функцию в виде

$$f(z) = z^{2/3} = (i + (z - i))^{2/3} = i^{2/3} \cdot (1 - i(z - i))^{2/3}.$$

Для выбора нужной ветви проще использовать первый множитель

$$i^{2/3} = \left(e^{i \frac{\pi}{2} + 2\pi ki} \right)^{2/3} = e^{i \frac{\pi}{3}(4k+1)} \quad \text{при } k = 0, \pm 1. \text{ Очевидно, нужная ветвь}$$

функции получится при $k = -1$; тогда $i^{2/3}|_{k=-1} = e^{-i\pi} = -1$. Затем для второго множителя можно принять главное значение и воспользоваться

формулой разложения бинома $(1+t)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \cdot t^k$, где $|t| < 1$ и

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{1}{k!} \cdot \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots (\alpha - k + 1) \quad \text{биномиальный коэффициент.}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда получим } f(z) &= - \sum_{k=0}^{\infty} (-i)^k \binom{2/3}{k} \cdot (z - i)^k = -1 + \frac{2i}{3}(z - i) - \\ &\quad - \frac{1}{3^2}(z - i)^2 - \frac{4i}{3^4}(z - i)^3 + \frac{7}{3^5}(z - i)^4 + \dots \end{aligned}$$

Ряд сходится в круге $|z - i|^2 = x^2 + (y - 1)^2 < 1$. Радиус сходимости ряда $R = |i - 0| = 1$, где i центр круга разложения и 0 ближайшая особенность (точка ветвления третьего порядка).

Пример 14. Определить порядки всех нулей функции

$$f(z) = (z^2 + 4)/z^5.$$

Функция обращается в нуль при $z_{1,2} = \pm 2i$, но её производная в этих точках $f'(\pm 2i) = -\frac{1}{z^6}(3z^2 + 20) \Big|_{z=\pm 2i} = \frac{1}{8} \neq 0$, значит, точки $z_{1,2} = \pm 2i$ являются простыми нулями. Для определения порядка нуля в бесконечности $z_3 = \infty$ сделаем замену $z = 1/t$, тогда $f(1/t) = \varphi(t) = t^3(4t^2 + 1)$; функция $\varphi(t)$ имеет при $t = 0$ нуль третьего порядка, значит, и функция $f(z)$ имеет при $z_3 = \infty$ так же нуль третьего порядка.

Пример 15. Проверка тождественности двух аналитических функций.

Функции $f_1(z) = \sin \frac{\pi}{z}$ и $f_2(z) = \sin^2 \frac{\pi}{z}$ аналитические во всей плоскости переменного z , за исключением точки $z = 0$ (там существенная особенность). Эти функции совпадают на последовательности $z_k = \frac{1}{k}$ ($k \in \mathbb{N}$, $k \neq 0$). Однако функции не тождественны, так как эта последовательность имеет предельную точку $z = 0$, а функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ в нуле не аналитические.

Тема 4

Ряды Лорана и особые точки ФКП

Основные вопросы: Методы разложения функций в ряд Лорана. Разложение в окрестности бесконечности. Единственность разложения в ряд. Классификация особых точек аналитических функций; поведение функций в окрестности особых точек. Связь между нулями и полюсами.

Литература: 1, гл.3, §2(5); гл.4, §1, 2; 2, п.21, 22, 25; 3, §17, 18.

Задание: 4, №543, 545, 549, 551, 559, 561(1,2,4,8,11), 562(1-3,6), 566-571, 576-578, 580, 582-585, 601, 602.

Пример 16. Функцию $f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}$ при $0 \leq |a| < |b| < \infty$ разложить в ряды Лорана в окрестности точек $z_1 = a$, $z_2 = b$, $z_3 = \infty$ и в кольце $|a| < |z| < |b|$; определить области сходимости этих рядов.

Для разложения рациональных функций в ряды обычно бывает достаточно разложить их на простые дроби и воспользоваться формулой суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии; поэтому в окрестности точки $z_1 = a$ получим

$$f(z) = \frac{-1}{b-a} \left[\frac{1}{z-a} + \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{b-a}} \right] = \frac{-1}{(b-a)^2} \sum_{k=-1}^{\infty} \left(\frac{z-a}{b-a} \right)^k.$$

Этот ряд сходится при $\left| \frac{z-a}{b-a} \right| < 1$, т. е. внутри круга $0 < |z-a| < |b-a|$ с выколотым центром; здесь $R_1 = |a-a| = 0$ и $R_2 = |b-a| > 0$. Аналогично получается разложение в окрестности точки $z_2 = b$

$$f(z) = \frac{1}{(b-a)^2} \sum_{k=-1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{z-b}{a-b} \right)^k \quad \text{при } 0 < |z-b| < |a-b|.$$

Разложение в окрестности бесконечности будет

$$f(z) = \frac{1}{b-a} \left[\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{b}{z}} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} \right] = \frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b^k - a^k}{z^{k+1}};$$

ряд сходится вне круга $|z| = |b|$, т. е. в области $|b| < |z| \leq \infty$.

Разложение внутри кольца $0 < |a| < |z| < |b| < \infty$ имеет вид:

$$f(z) = \frac{1}{b-a} \left[\frac{-1}{b} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{b}} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} \right] = \frac{-1}{b-a} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z^k}{b^{k+1}} - \frac{a^k}{z^{k+1}} \right);$$

здесь первая часть разложения сходится при $\left| \frac{z}{b} \right| < 1$, а вторая – при

$$\left| \frac{a}{z} \right| < 1.$$

По виду разложений заключаем, что в точках $z_1 = a$ и $z_2 = b$ находятся простые полюсы функции $f(z)$, а в точке $z_3 = \infty$ - устраняемая особенность. Вычеты функций в этих точках равны

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = -\operatorname{Res}_{z=b} f(z) = \frac{-1}{b-a}, \quad \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

Пример 17. Функцию $f(z) = z^3 \cdot e^{-\frac{1}{z}}$ разложить в ряды Лорана в окрестности всех её особых точек; определить области сходимости.

При разложении в ряды Лорана элементарных аналитических функций обычно используют их известные разложения в ряды Тейлора. Предложенная функция имеет две особенности при $z_1 = 0$ и $z_2 = \infty$; её лорановское разложение будет:

$$f(z) = z^3 e^{-\frac{1}{z}} = z^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} - \frac{1}{3!z^3} + \dots \right) =$$

| | |
|---|--|
| $= z^3 - \frac{z^2}{1!} + \frac{z}{2!} \dots -$ | $\frac{1}{3!} + \frac{1}{4!z} - \frac{1}{5!z^2} + \dots$ |
| Правильн. часть при $z = 0$ | Главн. часть при $z = 0$ |
| Главн. при $z = \infty$ | Правильн. часть при $z = \infty$ |

Здесь разложения в окрестностях нуля и бесконечности по форме совпадают. Разложение сходится в области $0 < |z| < \infty$.

По виду разложения заключаем, что в точке $z_1 = 0$ находится существенная особенность, а в точке $z_2 = \infty$ полюс третьего порядка. Вычеты в этих точках равны:

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = -\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = +\frac{1}{24}.$$

Пример 18. Найти особые точки функций и выяснить их характер.

а) $f(z) = \frac{1}{z-z^3}$. Так знаменатель $z-z^3 = z(1-z)(1+z)$ имеет простые нули при $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ и $z_3 = -1$, то для функции $f(z)$ это будут простые полюсы. Точка $z_0 = \infty$ является устранимой особенностью, так как $f(\infty) = 0$.

б) $f(z) = z^3 e^{-z}$. Точка $z_0 = \infty$ будет существенно особой, так как $f(+\infty) = 0$ и $f(-\infty) = 0$.

в) $f(z) = z \cdot \operatorname{cth} z$. Точка $z_0 = 0$ устранимая особая, там $f(0) = 1$. Точки $z_k = ik\pi \neq 0$ ($k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$), в которых $\operatorname{sh} z_k = 0$ и $(\operatorname{sh} z_k)' = \operatorname{ch} z_k = (-1)^k \neq 0$ будут простыми полюсами функции. В бесконечности $z = \infty$ находится неизолированная особенность – точка предельная для полюсов.

г) $f(z) = z^2 \cdot \cos \frac{1}{z}$. Представим функцию в виде ряда Лорана $f(z) = z^2 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!z^2} - \frac{1}{6!z^4} + \dots$, очевидно, она имеет при $z_1 = \infty$ полюс второго порядка и при $z_2 = 0$ существенную особенность.

д) $f(z) = \frac{1}{1 - \sqrt{z-1}}$. Функция двузначна, она имеет точки ветвления второго порядка при $z_1 = 1$ и $z_2 = \infty$. Кроме того, та ветвь функции, для которой $\sqrt{+1} = +1$, имеет простой полюс в точке $z_3 = 2$; действительно, числитель функции там постоянный, а её знаменатель $(1 - \sqrt{z-1})|_{z=2} = (1 - \sqrt{1})|_{\sqrt{1}=+1} = 0$, но производная от знаменателя $(1 - \sqrt{z-1})'|_{z=2} = \frac{-1}{2\sqrt{z-1}}|_{z=2} = \frac{-1}{2\sqrt{1}}|_{\sqrt{1}=+1} = -\frac{1}{2} \neq 0$. Для другой ветви, где $\sqrt{1} = -1$, точка $z_3 = 2$ правильная, так как там существуют конечные значения $f(2) = \frac{1}{2}$ и $f'(2) = -\frac{1}{8}$.

Пример 19. Выяснить, допускают ли указанные функции $f(z)$ (или их однозначные ветви) разложение в ряд в окрестности заданной точки z_0 ; если разложение возможно, указать область сходимости ряда D .

а) $f(z) = z \cdot \sin \frac{1}{z}$ при $z_0 = 0$. Точка нуль является изолированной существенно особой точкой функции $f(z)$. Поэтому возможно лорановское разложение в кольцевой области $D = \{0 < |z| < \infty\}$.

б) $f(z) = \operatorname{ctg} z$ при $z_0 = \infty$. Точка бесконечность является изолированной особой точкой, она предельная для полюсов $z_k = \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$); поэтому требуемое разложение невозможно.

в) $f(z) = \ln(z-1)$ при $z_0 = 1$. Многозначная функция $f_k(z) = \operatorname{Ln}(z-1) = \ln(z-1) + 2\pi k i$ ($k \in \mathbb{Z}$) имеет при $z_0 = +1$ точку ветвления логарифмического типа. Для выделения однозначной ветви $f(z) = \ln(z-1)$ при $k = 0$ нужно на плоскости z провести разрез из точки $z_0 = 1$ в бесконечность. Поэтому в окрестности точки $z_0 = 1$ нельзя найти неразрезанное кольцо вида $D = \{0 < |z-1| < \varepsilon\}$, в котором было бы возможно разложение функции $f(z)$.

г) $f(z) = \sqrt[3]{z(z-1)^2}$ при $z_1 = 0$, $z_2 = +1$ и $z_3 = \infty$. Точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1$ точки ветвления третьего порядка функции $f(z)$, поэтому в их окрестностях разложения в ряды невозможны. Бесконечность – простой полюс функции $f(z) = z \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{2/3} \cdot \sqrt[3]{1}$, поэтому в окрестности точки $z_3 = \infty$ возможно лорановское разложение в области $D = \{1 < |z| < \infty\}$.

Тема 5

Вычеты и их применения

Основные вопросы: Вычеты аналитических функций. Методы их вычисления в изолированных особых точках разного типа. Теорема Коши о вычетах. Приложение теории вычетов к вычислению определённых интегралов. Четыре основных леммы. Исследование нулей аналитических функций.

Литература: 1, гл.5 §1,2; 2, 23, 24, 73-75; 3, §28-30.

Задание: 4, № 621, 628, 643, 658, 659, 662, 673, 676, 678, 680, 683, 685, 692-694, 696-698, 702, 704, 714, 716, 733, 788, 793.

Пример 20. Вычислить контурный интеграл $I_r = \oint_{C_r} \frac{z^9 dz}{(z^5 + 1)^2}$

вдоль положительного направления обхода окружности $C_r = \{|z| = r \neq 1\}$.

Подынтегральная функция $f(z)$ на единичной окружности $|z|=1$ имеет пять полюсов второго порядка в точках

$$z_k = \sqrt[5]{-1} = \exp\left(i \frac{\pi}{5} (2k+1)\right) \text{ при } k=0, 1, 2, 3, 4 \text{ и устранимую}$$

особенность в бесконечности (там $f(\infty)=0$). Поэтому $I_r=0$ при $r < 1$, а при $r > 1$ получим:

$$\begin{aligned} I_r &= 2\pi i \cdot \sum_{k=0}^4 \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) = -2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = \\ &= -2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{z=\infty} \left[\frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{z^5}\right)^{-2} \right] = -2\pi i. \end{aligned}$$

Пример 21. Вычислить интеграл от тригонометрической функции $I(\alpha) = \int_0^{3\pi} \operatorname{tg}(\phi + i\alpha) d\phi$ при действительном $\alpha \neq 0$.

Сделав замену $z(\phi) = e^{2i(\phi+i\alpha)}$ и $d\phi = dz/2iz$, перейдём к контурному интегралу

$$I = -i \cdot \int_0^{3\pi} \frac{e^{2i(\phi+i\alpha)} - 1}{e^{2i(\phi+i\alpha)} + 1} d\phi = -\frac{3}{2} \oint_C \frac{z-1}{z(z+1)} dz;$$

здесь $C = \{|z| = e^{-2\alpha} \neq 1\}$ окружность, пробегаемая в положительном направлении. Подынтегральная функция $f(z) = \frac{z-1}{z(z+1)}$ имеет простые полюсы в точках $z_1=0$ и $z_2=-1$ и устранимую особенность при $z_3=\infty$. Если число $\alpha > 0$, то внутрь контура $C_+ = \{|z| = e^{-2\alpha} < 1\}$ попадает одна особая точка $z_1=0$; если же $\alpha < 0$, то внутрь контура $C_- = \{|z| = e^{2|\alpha|} > 1\}$ попадают две особенности $z_1=0$ и $z_2=-1$. Поэтому при $\alpha > 0$ получим:

$$I_+ = -\frac{3}{2} \oint_{C_+} \dots = -3\pi i \cdot \operatorname{Res}_{z=0} \frac{z-1}{z} = -3\pi i \cdot \frac{z-1}{z+1} \Big|_{z=0} = +3\pi i,$$

а при $\alpha < 0$ будет

$$I_- = -\frac{3}{2} \oint_{C_-} \dots = -3\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=0} \frac{z-1}{z} + \operatorname{Res}_{z=-1} \frac{1-\frac{1}{z}}{z+1} \right) = -3\pi i.$$

Окончательно результат запишем в виде: $I(\alpha) = 3\pi i \cdot \operatorname{sign} \alpha$, $I(0) = 0$.

Пример 22. Вычислить интеграл по полуоси $I = \int_0^\infty \frac{\sin ax \cdot dx}{x(x^2 + b^2)^2}$ при $a, b > 0$.

Выберем вспомогательный контурный интеграл вида

$\tilde{I} = \oint_C \frac{e^{iaz} \cdot dz}{z(z^2 + b^2)^2}$, где новая подынтегральная функция имеет простой

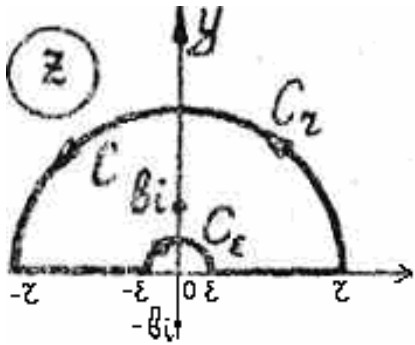


Рис. 5

полюс $z_1 = 0$, полюсы второго порядка $z_{2,3} = \pm bi$ и существенно особую точку $z_4 = \infty$. В верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ выберем контур интегрирования вида $C = (\epsilon, r) + C_r + (-r, -\epsilon) + C_\epsilon$ (рис. 5), где $0 < \epsilon \ll b$ и $b \ll r < \infty$. Тогда вспомогательный интеграл легко вычисляется по теореме о вычетах (все контуры интегрирования будем обходить только против часовой стрелки в положительном направлении)

$$\begin{aligned} \tilde{I} &= 2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{z=bi} \frac{e^{iaz}}{z(z^2 + b^2)^2} = \\ &= 2\pi i \left(\frac{e^{iaz}}{z(z+ib)^2} \right)' \Big|_{z=bi} = -\frac{\pi i}{2b^4} (ab + 2)e^{-ab}. \end{aligned}$$

Затем распишем интеграл \tilde{I} по четырём участкам контура C ; это даст

$$\tilde{I} = \int_\epsilon^r \frac{e^{iax} dx}{x(x^2 + b^2)^2} + \int_{C_r} \frac{e^{iaz} dz}{z(z^2 + b^2)^2} + \int_{-r}^{-\epsilon} \frac{e^{iax} dx}{x(x^2 + b^2)^2} - \int_{C_\epsilon} \frac{e^{iaz} dz}{z(z^2 + b^2)^2}.$$

Сделав в третьем интеграле замену переменной $x \rightarrow -x$, после преобразований получим:

$$2i \cdot \int_{\varepsilon}^r \frac{\sin ax \cdot dx}{x(x^2 + b^2)^2} + \int_{\tilde{C}_r} \frac{e^{iaz} dz}{z(z^2 + b^2)^2} - \int_{\tilde{C}_{\varepsilon}} \frac{e^{iaz} dz}{z(z^2 + b^2)^2} = \frac{-\pi i}{2b^4} (ab + 2)e^{-ab}.$$

В этом равенстве перейдем к пределам $\varepsilon \rightarrow 0$ и $r \rightarrow \infty$, тогда

$$\begin{aligned} 2i \cdot \int_0^{\infty} \frac{\sin ax \cdot dx}{x(x^2 + b^2)^2} + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\tilde{C}_r} \frac{e^{iaz} dz}{z(z^2 + b^2)^2} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\tilde{C}_{\varepsilon}} \frac{e^{iaz} dz}{z(z^2 + b^2)^2} = \\ = \frac{-\pi i}{2b^4} (ab + 2)e^{-ab}. \end{aligned}$$

Здесь предел второго интеграла равен нулю по лемме Жордана, так как $a > 0$ и $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z(z^2 + b^2)^2} = 0$, а предел третьего по лемме о половине вычета равен:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\tilde{C}_{\varepsilon}} \frac{e^{iaz} dz}{z(z^2 + b^2)^2} = \pi i \cdot \operatorname{Res}_{z=0} \frac{e^{iaz}}{(z^2 + b^2)^2} = -\frac{\pi i}{b^4}.$$

После простых преобразований получаем окончательно:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin ax \cdot dx}{x(x^2 + b^2)^2} = \frac{1}{2b^4} \left(1 - \left(1 + \frac{1}{2} ab \right) e^{-ab} \right).$$

Из последнего выражения легко получить значения многих других нетривиальных интегралов, например:

$$I'_a = \int_0^{\infty} \frac{\cos ax \cdot dx}{(x^2 + b^2)^2} = \frac{\pi}{4b^3} (ab + 1)e^{-ab}, \quad I'_a \Big|_{a=0} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + b^2)^2} = \frac{\pi}{4b^3}.$$

Пример 23. Вычислить интеграл от алгебраической функции

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^p \cdot dx}{x^2 - 2x \cdot \cos \alpha + 1} \quad \text{при } 0 < \alpha < \pi \quad \text{и } |p| < 1.$$

Выберем вспомогательный интеграл вида $\tilde{I} = \oint_C \frac{z^p \cdot dz}{z^2 - 2z \cdot \cos \alpha + 1}$,

где новая подынтегральная функция в общем случае бесконечнозначная (так как $z^p = \exp(p \cdot \text{Ln } z) = \exp(p \cdot \ln z + 2\pi k pi)$ при $k \in Z$) и имеет логарифмические точки ветвления в нуле и бесконечности (при $z_3 = 0$ и $z_4 = \infty$); кроме того, каждая ветвь функции имеет простые полюсы при $z_1 = e^{i\alpha}$ и $z_2 = e^{i(2\pi-\alpha)}$ (здесь $|z_{1,2}| = 1$ и $0 < \alpha < \pi$), которые соответствуют простым нулям знаменателя

$$z^2 - 2z \cdot \cos \alpha + 1 = (z - z_1)(z - z_2).$$

Выберем главную ветвь подынтегральной функции (когда $k = 0$ и $0 \leq \arg z < 2\pi$), для этого на плоскости комплексного переменного z проведём разрез по действительной положительной полуоси $0 \leq \text{Re } z < \infty$ и положим на верхнем берегу разреза $\arg z = 0$. Выберем контур интегрирования C , проходящий по берегам этого разреза и дополненный двумя окружностями (рис.6); пусть

$$C = C_r + (r, \varepsilon) \Big|_{\arg z = 2\pi} + C_\varepsilon + (\varepsilon, r) \Big|_{\arg z = 0},$$

где $0 < \varepsilon \ll 1 \ll r < \infty$

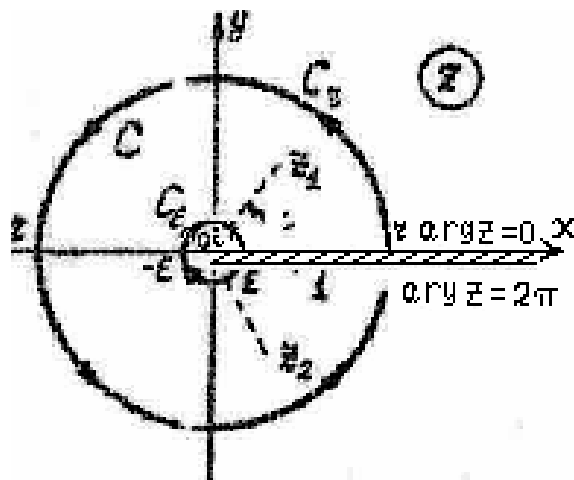


Рис. 6

Тогда вспомогательный интеграл \tilde{I} легко вычисляется по теореме о вычетах:

$$\begin{aligned}\tilde{I} &= 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=z_1} \frac{z^p/(z-z_2)}{z-z_1} + \operatorname{Res}_{z=z_2} \frac{z^p/(z-z_1)}{z-z_2} \right) = \\ &= 2\pi i \cdot \frac{z_1^p - z_2^p}{z_1 - z_2} = 2\pi i \cdot \frac{e^{ip\alpha} - e^{ip(2\pi-\alpha)}}{e^{i\alpha} - e^{i(2\pi-\alpha)}} = \\ &= -2\pi i \frac{\sin p(\pi - \alpha)}{\sin \alpha} \cdot e^{i\pi p}.\end{aligned}$$

Распишем интеграл \tilde{I} по четырём участкам контура C и получим:

$$\begin{aligned}\tilde{I} &= (1 - e^{2\pi pi}) \cdot \int_{\varepsilon}^r \frac{x^p \cdot dx}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1} + \int_{\tilde{C}_r} \frac{z^p \cdot dz}{z^2 - 2z \cos \alpha + 1} - \\ &- \int_{\tilde{C}_\varepsilon} \frac{z^p \cdot dz}{z^2 - 2z \cos \alpha + 1} = -2\pi i \cdot \frac{\sin p(\pi - \alpha)}{\sin \alpha} \cdot e^{i\pi p}.\end{aligned}$$

Здесь учтено, что на верхнем берегу разреза $\arg z = 0$ и $z^p = (x \cdot e^{i0})^p = x^p > 0$, а на нижнем $\arg z = 2\pi$ и $z^p = (x \cdot e^{2\pi i})^p = x^p \cdot e^{2\pi pi}$ (здесь $x^p > 0$). Затем перейдём к пределам $\varepsilon \rightarrow 0$ и $r \rightarrow \infty$, тогда

$$\begin{aligned}(1 - e^{2\pi pi}) \cdot I + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\tilde{C}_r} \frac{z^p \cdot dz}{z^2 - 2z \cdot \cos \alpha + 1} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\tilde{C}_\varepsilon} \frac{z^p \cdot dz}{z^2 - 2z \cdot \cos \alpha + 1} = \\ = -2\pi i \cdot \frac{\sin p(\pi - \alpha)}{\sin \alpha} e^{\pi pi}.\end{aligned}$$

Здесь предел второго интеграла по лемме об оценке равен нулю, так как

$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^{p+1}}{z^2 - 2z \cos \alpha + 1} = \lim_{z \rightarrow \infty} z^{p-1} = 0$ при $p < 1$; предел третьего – по лемме об интегрируемой особенности тоже равен нулю, так как

$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^{p+1}}{z^2 - 2z \cos \alpha + 1} = \lim_{z \rightarrow 0} z^{p+1} = 0$ при $p > -1$. Следовательно, для параметра p можно указать интервал сходимости $-1 < p < 1$. Наконец, после преобразований получим:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^p \cdot dx}{x^2 - 2x \cdot \cos \alpha + 1} = \frac{\pi}{\sin \pi p} \cdot \frac{\sin p(\pi - \alpha)}{\sin \alpha}$$

при $0 < \alpha < \pi$ и $|p| < 1$.

Из этого результата легко получить значения многих нетривиальных

интегралов; например, $I \Big|_{p=0} = \frac{\pi - \alpha}{\sin \alpha}$, $I \Big|_{\alpha=0} = \infty$,
 $I \Big|_{\alpha=\pi} = \frac{\pi p}{\sin \pi p}$ и др.; после дифференцирования по параметру p получим:

$$I'_p = \int_0^{\infty} \frac{x^p \cdot \ln x \cdot dx}{x^2 - 2x \cdot \cos \alpha + 1} =$$

$$= \frac{\pi}{\sin \alpha \cdot \sin \pi p} \left(\pi \frac{\sin \alpha p}{\sin \pi p} - \alpha \cos p(\pi - \alpha) \right),$$

далее найдём $I'_p \Big|_{p=0} = 0$ и т. п.

Пример 24. Сколько нулей функции $f(z) = z^4 - 5z + 1$ находится в круге $|z| < 1$ и в кольце $1 < |z| < 2$?

Положим $f(z) = \varphi(z) + \psi(z) = z^4 - 5z + 1$.

Если $\min |\varphi(z)| > \max |\psi(z)| \neq 0$ на окружности $C = \{|z| = r\}$, то по теореме Руше функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ имеют одинаковое число нулей внутри круга $|z| < r$. Сначала выберем $\varphi_1(z) = -5z$ и $\psi_1(z) = z^4 + 1$, тогда на окружности $C_1 = \{|z| = 1\}$ получим $\min_{z \in C_1} |\varphi_1(z)| = 5$ и

$$\max_{z \in C_1} |\psi_1(z)| = |z^4 + 1| \Big|_{C_1} \leq (|z|^4 + 1) \Big|_{C_1} = 2, \text{ поэтому внутри круга } |z| < 1$$

находится один корень функции $f(z)$, так как там находится один корень функции $\varphi_1(z)$.

Затем выберем $\varphi_2(z) = z^4$ и $\psi_2(z) = -5z + 1$, тогда на окружности $C_2 = \{|z| = 2\}$ получим $\min_{z \in C_2} |\varphi_2(z)| = |z|^4 \Big|_{C_2} = 16$ и

$\max_{z \in C_2} |\psi_2(z)| = |5z - 1| \Big|_{C_2} \leq (5|z| + 1) \Big|_{C_2} = 11$, поэтому внутри круга $|z| < 2$

функция $f(z)$ имеет четыре корня. Внутри кольца $1 < |z| < 2$ функция $f(z)$ имеет $4 - 1 = 3$ корня; причём на окружностях $|z| = 1$ и $|z| = 2$ корней нет.

Тема 6

Операционное исчисление

Основные вопросы: Свойства функций оригиналов и изображений. Показатель роста. Функция Хевисайда. Интегралы Лапласа и Римана-Меллина. Теоремы подобия, смещения, дифференцирования и интегрирования, свёртки, разложения. Методы решения интегрально-дифференциальных уравнений. Вычисление определённых интегралов. Расчёт радиоконтуров.

Литература: 1, гл.8, §1, 2(1,3), 3(1); 2, п.79-81,83,84; 3, §47-49.

Задание: 5, №3, 5(1,2), 7, 8(1-3), 13(1-2), 49(2,3,6), 50(1,2,4,10), 53(1), 96(2,4), 97(1,4,7), 100(1,3,4).

Пример 25. Являются ли заданные функции оригиналами?

$$f_1(t) = \frac{e^{-t}}{t+1} \eta(t) \quad - \text{да}; \quad f_2(t) = \frac{e^t}{t-1} \eta(t) \quad - \text{нет.}$$

Являются ли заданные функции изображениями?

$$F_1(p) = th p / p^2 \quad - \text{да}; \quad F_2(p) = tg p / p^2 \quad - \text{нет.}$$

Пример 26. Найти изображение функции $f(t) = (e^{at} - e^{bt})/t$ при $a, b > 0$ и $a \neq b$.

Функция $f(t)$ удовлетворяет всем трём условиям, накладываемым на функцию-оригинал; её показатель роста $S_0 > \max(a, b)$. Так как известно изображение более простой функции

$$f_0(t) = e^{at} - e^{bt} \rightarrow F_0(p) = \frac{1}{p-a} - \frac{1}{p-b},$$

то по теореме об интегрировании изображения найдём $f(t) = \frac{1}{t} f_0(t) \rightarrow F(p) = \int_p^\infty F_0(q) dq = \ln \frac{p-b}{p-a}$. Полученная функция $F(p)$ удовлетворяет обоим условиям, накладываемым на функции-изображения.

Пример 27. Найти оригинал для функции $F(p) = \frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}$ при $a \geq 0$.

Функция $F(p)$ удовлетворяет обоим условиям для функций-изображений; для неё $S_0 = 1$. Известен оригинал более простой функции

$$F_0(p) = \frac{p}{p^2 + a^2} \rightarrow f_0(t) = \cos at,$$

поэтому по теореме о дифференцировании изображения найдём

$$F(p) = -F_0'(p) \rightarrow f(t) = t \cdot f_0(t) = t \cdot \cos at.$$

Полученная функция $f(t)$ удовлетворяет всем трём условиям, накладываемым на оригиналы.

Пример 28. Воспользовавшись формулой обращения (интеграл Римана-Меллина), найти оригинал $f(t)$ для функции-изображения

$$F(p) = \frac{1}{p} e^{-a\sqrt{p}} \text{ при } a \geq 0$$

Функция $F(p)$ на плоскости $p = S + i\omega$ имеет две точки ветвления второго порядка при $p = 0$ и $p = \infty$; её показатель роста $S_0 = 0$, и можно выбрать путь интегрирования $S_1 = 1$. Для выделения главного значения функции $F(p)$ проведём разрез $-\infty < S \leq 0$ и положим на его верхнем берегу $\arg p = \pi$.

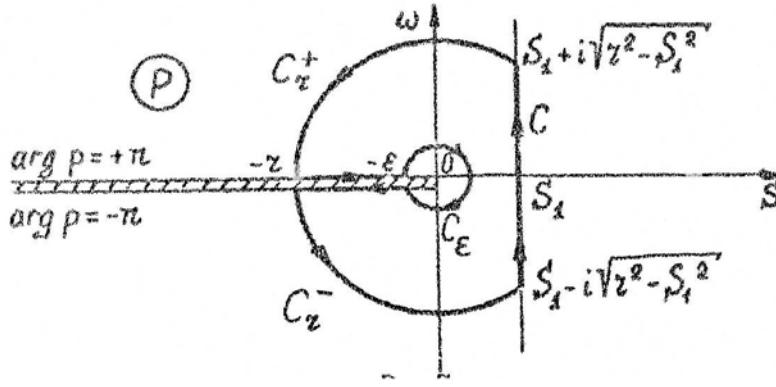


Рис. 7

Рассмотрим вспомогательный интеграл $I = \oint_C F(p)e^{pt} dp$ по замкнутому контуру $C = (S_1 - i\sqrt{r^2 - S_1^2}, S_1 + i\sqrt{r^2 - S_1^2}) +$

$$+ C_r^+ + (-r, -\varepsilon) \Big|_{\arg p = \pi} + C_\varepsilon + (-\varepsilon, -r) \Big|_{\arg p = -\pi} + C_r^-$$

при $0 < \varepsilon < r < \infty$ (рис. 7). По теореме о вычетах он равен нулю. На верхнем берегу разреза $p = Se^{i\pi}$ ($S > 0$), там $F(p) = -\frac{1}{S} e^{-ia\sqrt{S}}$; на нижнем берегу $p = Se^{-i\pi}$ ($S > 0$) и $F(p) = -\frac{1}{S} e^{+ia\sqrt{S}}$; поэтому сумма интегралов по берегам разреза равна $2i \cdot \int_\varepsilon^r e^{-St} \cdot \sin a\sqrt{S} \cdot \frac{dS}{S}$.

После перехода к пределам $\varepsilon \rightarrow 0$ и $r \rightarrow \infty$ получим

$$\int_{S_1 - i\infty}^{S_1 + i\infty} F(p) \cdot e^{pt} dp + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_r^\pm} F(p) \cdot e^{pt} dp + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} F(p) \cdot e^{pt} dp + 2i \cdot \int_0^\infty e^{-st} \cdot \sin a\sqrt{s} \cdot \frac{dS}{S} = 0.$$

Здесь пределы интегралов по контурам $C_r^\pm = \left\{ |p| = r, S \leq S_1, \omega \geq 0 \right\}$ при $r \rightarrow \infty$ обращаются в нуль по видоизменённой лемме Жордана, так

как показатель $t > 0$ и $F(\infty) = 0$. Предел интеграла по окружности $C_\varepsilon = \{|p| = \varepsilon\}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ после замены $p = \varepsilon e^{i\varphi}$ ($-\pi < \varphi \leq \pi$) легко вычисляется:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} F(p) \cdot e^{pt} dp &= -i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(t\varepsilon \cdot e^{i\varphi} - a\sqrt{\varepsilon} \cdot e^{i\varphi/2}) \cdot d\varphi = \\ &= -2\pi i. \end{aligned}$$

Интеграл по прямой $\operatorname{Re} p = S_1 > 0$ даёт искомый оригинал $2\pi i f(t)$, поэтому после преобразований получим ($S = \xi^2$)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_1 - i\infty}^{S_1 + i\infty} F(p) \cdot e^{pt} dp = 1 - \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^\infty e^{-t\xi^2} \cdot \frac{\sin a\xi}{\xi} d\xi.$$

Этот результат можно представить в виде (см. пример 33):

$$f(t) = 1 - \Phi\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right), \quad \text{где} \quad \Phi(\zeta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^\zeta e^{-\tau^2} d\tau.$$

Пример 29. Найти частное решение линейного обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и начальными условиями (задача Коши):

$$y'' + 4y(x) = 2e^{2x}; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

при $0 \leq x < \infty$. Решение делится на три этапа:

1) По задаче для функции-оригинала $y(x)$ поставить задачу для функции-изображения $Y(p)$:

$$p^2 \cdot Y(p) - p \cdot y(0) - y'(0) + 4Y(p) = \frac{2}{p-2}$$

или $Y(p) \cdot (p^2 + 4) - 1 = \frac{2}{p-2}$.

2) Определить функцию-изображение: $Y(p) = \frac{p}{(p-2)(p^2+4)}$.

Эта функция удовлетворяет обоим условиям для изображений; причём $S_0 = 3$.

3) По найденной функции-изображению $Y(p)$ определяем функцию-оригинал $y(x)$. Для этого методом неопределённых коэффициентов разложим изображение $Y(p)$ на простые дроби

$$Y(p) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{p-2} + \frac{2}{p^2+4} - \frac{p}{p^2+4} \right);$$

откуда, зная операционные соответствия этих дробей, получаем

$$y(x) = \frac{1}{4} (e^{2x} + \sin 2x - \cos 2x) \cdot \eta(x).$$

Этот результат можно также получить, воспользовавшись интегралом Римана-Меллина или теоремой об умножении изображений.

Полученное решение удовлетворяет обоим условиям задачи

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Пример 30. Операционные методы вычисления определённых интегралов.

а) Формула обмена (равенство Парсеваля); если $f(t) \rightarrow F(p)$ и $g(t) \rightarrow G(p)$, то $\int_0^{\infty} f(x) \cdot G(x) dx = \int_0^{\infty} F(x) \cdot g(x) dx$.

Вычислим интеграл $I = \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx$ при $a > 0$;

Пусть $f(t) = \sin at \rightarrow F(p) = \frac{a}{p^2 + a^2}$ и $G(p) = \frac{1}{p} \rightarrow g(t) = 1$, тогда

$$I = \int_0^{\infty} \frac{a}{x^2 + a^2} dx = \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

б) Метод преобразования Лапласа под знаком интеграла. Примем за оригинал $f(t) = \int_0^{\infty} \frac{\cos xt}{x^2 + a^2} dx$ при $a > 0$; тогда изображение

$$\begin{aligned}
F(p) &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} \cdot dt = \\
&= \int_0^{\infty} \frac{p}{p^2 + x^2} \cdot \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{p}{p^2 - a^2} \cdot \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{x^2 + a^2} - \frac{1}{x^2 + p^2} \right) dx = \\
&= \frac{p}{p^2 - a^2} \cdot \left(\frac{1}{a} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{1}{p} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{p} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2a} \cdot \frac{1}{p + a};
\end{aligned}$$

возвращаясь к оригиналу, найдём $F(p) \rightarrow f(t) = \frac{\pi}{2a} e^{-at}$.

Пример 31. В электрической цепи последовательно соединены постоянные элементы: R активное сопротивление, L индуктивность, C ёмкость. Первоначально в цепи отсутствовали токи и заряды, но в момент времени $t = 0$ включается ЭДС $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \eta(t)$, где $\varepsilon_0 = \text{const}$; требуется определить в цепи силу тока $J(t)$ при $t > 0$.

С помощью правил Кирхгофа составим уравнение цепи:

$$R \cdot J(t) + L \frac{dJ}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t J(\tau) d\tau = \varepsilon(t), \quad J(0) = 0.$$

Примем ток $J(t)$ за функцию-оригинал и перейдём к уравнению для изображений; если $J(t) \rightarrow I(p)$ операторный ток и $\varepsilon(t) \rightarrow E(p)$ - операторная ЭДС, получим уравнение для операторного тока:

$$I(p) \left(R + pL + \frac{1}{pC} \right) - L \cdot J(0) = E(p) \equiv \frac{\varepsilon_0}{p}.$$

Выведем операторное сопротивление (импеданс) цепи

$Z(p) = R + pL + \frac{1}{pC} = \frac{L}{p} \left((p + \alpha)^2 + \omega^2 \right)$, где $\alpha = \frac{R}{2L} \geq 0$ - декремент

затухания; $\omega^2 = \frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2} > 0$ частота свободных колебаний цепи.

Тогда операторный ток $I(p) = \frac{E(p)}{Z(p)} = \frac{\varepsilon_0/L}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}$.

Функция $I(p)$ обладает всеми свойствами изображения, причём $S_0 = 0$. Теперь, воспользовавшись теоремой сдвига, получим функцию-оригинал $J(t)$ (силу тока при $t > 0$) в виде $J(t) = \frac{\varepsilon_0}{L} e^{-\alpha t} \frac{\sin \omega t}{\omega} \eta(t)$, т.е. в нашей цепи возбуждаются затухающие колебания тока (и напряжения).

Указание Для определения тока $J(t)$ в электрической цепи часто сразу записывают уравнение для операторного тока, где операторная ЭДС $E(p)$ находится по заданной $\varepsilon(t) \rightarrow E(p)$, а импеданс всей цепи $Z(p)$ составляется из импедансов отдельных элементов цепи $Z_R = R$, $Z_L = pL$ и $Z_C = 1/pC$ по правилам Кирхгофа.

Тема 7

Специальные функции и их свойства

Основные вопросы: Гамма-функция Эйлера: определение, связь с факториалом, формулы сдвига и дополнения, особые точки, значения при полуцелом аргументе, асимптотика. Бета-функция Эйлера: определение, связь с гамма-функцией.

Интегралы вероятностей и Френеля; их свойства, представления в виде рядов.

Функции Бесселя; представления в виде ряда и интеграла, уравнение, производящая функция, рекуррентные соотношения, функции Неймана и Ханкеля, нули, графики, функции с полуцелым индексом, асимптотики, интегралы от функций Бесселя.

Функции Лежандра; формула Родрига, интегральные представления, уравнение, нули, графики, производящая функция, рекуррентные соотношения. Присоединенные функции Лежандра, их уравнение и свойства.

Литература: 1, гл.8, §2(3,4); 2, п.16, 70(1,2,4), 80, 90, 94(1-3), 95 (5-7); 6, Дополнение II(1): §1(2,3), 3(1,2), 5(2); Дополнение II(2): §1 (1-3,6,7), 2(1); 7, гл.13, §1, 2, 5-7, гл.16, §1, 3-7; 9, гл.4, §1-4.

Пример 32. Для Γ - и B - функций Эйлера $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx$,

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta) / \Gamma(\alpha + \beta)$$

при $\operatorname{Re} \alpha, \operatorname{Re} \beta > 0$ проверить следующие соотношения ($n, m \in \mathbb{N}$):

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \sqrt{\pi} \cdot \Gamma(2n) = 2^{2n-1} \cdot \Gamma(n) \cdot \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

$$B(n, m) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(n+m-2)!}. \quad B\left(n+1, \frac{1}{2}\right) = \frac{2 \cdot (2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

$$B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha) = 2 \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^{2\alpha-1} \varphi \cdot \cos^{2\beta-1} \varphi \cdot d\varphi = \int_0^{\infty} \tau^{\alpha-1} (1+\tau)^{-\alpha-\beta} d\tau.$$

$$\operatorname{Res}_{\alpha=-n} \Gamma(\alpha) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

$$B(\alpha, 1-\alpha) = \int_0^{\infty} t^{-\alpha} (1+t)^{-1} dt = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} \quad \text{при} \quad 0 < \alpha < 1.$$

Указание. В интегралах сделать соответственно замены $x = \cos^2 \varphi$, $\tau = x/(1+x)$, $t = x/(1-x)$.

Пример 33. Проверить указанные ниже свойства интеграла вероятностей

$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^z e^{-\zeta^2} d\zeta$ при $z \in \mathbb{C}$ и связанных с ним функций:

$$\Phi(-z) = -\Phi(z); \quad \Phi(0) = 0; \quad \Phi(\infty) = 1.$$

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot z^{2k+1}}{(2k+1) \cdot k!} = \frac{2z}{\sqrt{\pi}} - \dots \quad \text{при} \quad |z| < \infty.$$

$$\Phi\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\beta/2\alpha} e^{-\tau^2} d\tau = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 \xi^2} \cdot \frac{\sin \beta \xi}{\xi} d\xi.$$

Здесь разложить в ряд $\sin \beta \xi$, почленно проинтегрировать и воспользоваться значением $\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)$, тогда получится ряд для функции $\Phi(z)$.

С функцией $\Phi(z)$ связаны интеграл ошибок $\text{Erf}(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Phi(z)$ и дополнительный интеграл ошибок

$$\text{Erfc}(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (1 - \Phi(z)) = \int_z^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau.$$

С функцией $\Phi(z)$ связаны интегралы Френеля

$$\frac{1}{\sqrt{2i}} \cdot \Phi\left(z \sqrt{\frac{\pi i}{2}}\right) = C(z) - i \cdot S(z) \equiv \int_0^z \cos \frac{\pi \xi^2}{2} d\xi - i \int_0^z \sin \frac{\pi \xi^2}{2} d\xi.$$

Эти функции нечётные и $C(\infty) = S(\infty) = 1$; их можно разложить в ряды ($|z| < \infty$):

$$C\left(z \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot z^{4k+1}}{(4k+1) \cdot (2k)!} = z \sqrt{\frac{2}{\pi}} - \dots$$

$$S\left(z \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot z^{4k+3}}{(4k+3) \cdot (2k+1)!} = \frac{1}{3} z^3 \sqrt{\frac{2}{\pi}} - \dots$$

Пример 34. Функция Бесселя $J_\nu(z)$ и другие связанные с ними функции.

Проверить, что функция $J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{k! \cdot \Gamma(k+\nu+1)}$ при $\nu \in \mathbb{R}$ является решением уравнения:

$$J_\nu'' + \frac{1}{z} J_\nu' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) \cdot J_\nu(z) = 0.$$

Записать ряды для функций $J_n(z)$ при $n = 0, 1, 2$. Проверить, что

$$J_0(0) = 1, \quad J_0'(0) = J_n(0) = J_n'(0) = 0,$$

$$J_n(-z) = J_{-n}(z) = (-1)^n \cdot J_n(z) \text{ и } |J_n(x)| \leq 1 \text{ при } n \in \mathbb{N}.$$

Воспользовавшись рекуррентными формулами, доказать, что

$$J_2(z) = J_0''(z) - \frac{1}{z} J_0'(z) = 2J_0''(z) + J_0(z).$$

Проверить справедливость соотношений:

$$J_{-\frac{1}{2}}(z) = -N_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \cos z, \quad H_{\frac{1}{2}}^{(1,2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot e^{\pm i\left(z - \frac{\pi}{2}\right)}.$$

$$J_{\frac{3}{2}}(z) = -N_{-\frac{3}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \left(\frac{\sin z}{z} - \cos z \right).$$

Вычислить интегралы:

$$\int J_0(z) \cdot z dz = z \cdot J_1(z); \quad \int J_0(z) \cdot z^3 dz = 2z^2 \cdot J_0(z) + (z^3 - 4z)J_1(z).$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot \int J_n^2(z) \cdot z dz &= z^2 \cdot (J_{n+1}^2(z) + J_n^2(z)) - 2nz \cdot J_{n+1}(z) \cdot J_n(z) = \\ &= (z^2 - n^2) \cdot J_n^2(z) + z^2 \cdot J_n'^2(z). \end{aligned}$$

Доказать операционное соответствие:

$$f(t) = J_0(at) \rightarrow F(p) = (p^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.}$$

Воспользовавшись разложением в ряд для $J_\nu(bx)$, вычислить интеграл **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} \cdot J_\nu(bx) \cdot x^{\nu+1} dx = \frac{1}{2a} \left(\frac{b}{2a} \right)^\nu \cdot e^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

Проверить справедливость разложений

$$\cos(x \cdot \sin \varphi) = J_0(x) + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) \cdot \cos 2n\varphi,$$

$$\sin(x \cdot \sin \varphi) = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(x) \cdot \sin(2n+1)\varphi.$$

Для модифицированных функций $I_\nu(z) = e^{-\frac{\pi i}{2}\nu} \cdot J_\nu(iz)$ доказать, что $I_{-n}(z) = +I_n(z)$ при $n \in \mathbb{Z}$ и $I_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \operatorname{sh} z$.

Пример 35. Полиномы Лежандра $P_n(x)$ и присоединённые функции $P_{nk}(x)$ при $-1 \leq x \leq +1$ и $n, k \in \mathbb{Z}_0$.

Проверить, что полином Лежандра, записанный в виде формулы Родрига $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$, является решением уравнения:

$$(1 - x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1) \cdot P_n(x) = 0.$$

Воспользовавшись формулой Родрига, вычислить $P_n(x)$ при $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

Проверить, что $P_n(\pm 1) = (\pm 1)^n$, $P_n'(\pm 1) = \frac{1}{2} n(n+1)(\pm 1)^{n+1}$,

$P_{2n+1}(0) = 0$, **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**, $P_{2n}'(0) = 0$,

$$P_n(-x) = (-1)^n \cdot P_n(x), \quad |P_n(x)| \leq 1.$$

Используя формулу Родрига, доказать, что

$$(2n+1) \cdot \int P_n(x) dx = P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x).$$

Воспользовавшись производящей функцией $F(x, \zeta) = (1 - 2x\zeta + \zeta^2)^{-\frac{1}{2}}$, получить внутри круга $|\zeta| < 1$ разложение:

$$\frac{1 - \zeta^2}{(1 - 2x\zeta + \zeta^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \cdot P_n(x) \zeta^n.$$

Проверить, что присоединённая функция Лежандра $P_{nk}(x) = (1 - x^2)^{\frac{k}{2}} \cdot P_n^{(k)}(x)$ является решением уравнения:

$$(1-x^2)P_{nk}'' - 2xP_{nk}' + \left(n(n+1) - \frac{k^2}{1-x^2} \right) \cdot P_{nk}(x) = 0.$$

Показать, что $P_{nk}(x) = P_n(x)$ при $k = 0$, $P_{nk}(-x) = (-1)^{n+k} \cdot P_{nk}(x)$,

$$P_{nk}(x) = 0 \text{ при } P_{nn}(x) = (2n-1)!! \cdot (1-x^2)^{\frac{n}{2}}, P_{nk}(\pm 1) = P_{nn}(\pm 1) = 0.$$

Воспользовавшись формулой Родрига, вычислить $P_{nk}(x)$ при $n, k = 0, 1, 2, 3$ и $k \leq n$.

Тема 8

Теория плоского электростатического поля

Основные вопросы: Комплексный потенциал электростатического поля, силовая и эквипотенциальная функции. Определение по известному комплексному потенциалу напряжённости поля, работы и заряда, картины поля. Определение комплексного потенциала методом конформных отображений.

Литература: 1, гл.7. §2(2); 2, п.46, 47 (3,4); 3, §39, 40; 6, Приложение к гл.4, п.5.

Задание: 4, №1335, 1337, 1338, 1340, 1345, 1375.

Пример 36. Исследовать структуру плоского электростатического поля по заданному комплексному потенциалу $W(z) = a \cdot \ln(z - z_0)$, где a и z_0 постоянные.

Сначала определим физический смысл размерной постоянной a . Пусть A работа, совершаемая пробным зарядом при движении по контуру C , и Q поток вектора напряжённости \vec{E} через контур C , создаваемый зарядами, расположенными внутри контура. Тогда

$$A + iQ = i \oint_C W'(z) dz = ia \cdot \oint_C \frac{dz}{z - z_0} = -2\pi a, \text{ где } z_0 \in D \text{ и } C = \partial D -$$

замкнутый контур, а D область внутри этого контура. В потенциальном поле всегда $A|_C = 0$. По теореме Гаусса $Q = 4\pi q$, где q величина линейного заряда, создающего поток Q ; поэтому $a = ia_0$ ($\text{Re } a = 0$) и $a_0 = -2q$. Таким образом, $a = -2iq$ и комплексный потенциал равен

$$W(z) = -2iq \cdot \ln(z - z_0).$$

Исследуем картину поля в плоскости, перпендикулярной к наводящим линейным зарядам. Так как $W(z) = G(x, y) + i\varphi(x, y)$, где $G(x, y)$ силовая и $\varphi(x, y)$ потенциальная функции поля, то, полагая $z - z_0 = re^{i\theta}$, получим $W = G + i\varphi = 2q(\theta - i \ln r)$, где $G(x, y) = 2q\theta = 2q \cdot \operatorname{arctg} \frac{y - y_0}{x - x_0}$ и $\varphi(x, y) = -2q \ln r = -q \cdot \ln[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]$. Поэтому уравнения силовых линий будут $G(x, y) = C_1$ или $y - y_0 = (x - x_0) \cdot \operatorname{tg} \frac{C_1}{2q}$ лучи из точки $M(x_0, y_0)$, а уравнения эквипотенциальных линий $\varphi(x, y) = C_2$ или $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \exp\left(-\frac{C_2}{q}\right)$ семейство окружностей с центром в той же точке $M(x_0, y_0)$. Семейства силовых и эквипотенциальных линий взаимно ортогональны, так как $(\operatorname{grad} G, \operatorname{grad} \varphi) = 0$. Полученная картина поля может создаваться только линейным зарядом q , расположенным в точке $M(x_0, y_0)$; заряд-изображение ($= -q$) находится в бесконечности. Комплексный потенциал поля $W(z)$ должен иметь особенности в тех точках, где находятся заряды, создающие поле.

Вектор напряжённости нашего поля равен

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y) &= E_x(x, y) + iE_y(x, y) = \\ &= E(x, y) \cdot e^{i\theta(x, y)} = -i \cdot \overline{W'(z)} = \frac{2q}{\bar{z}} = \frac{2q}{r} e^{i\theta} \quad \text{при } r > 0. \end{aligned}$$

Указания. Воспользовавшись принципом суперпозиции, комплексный потенциал поля, создаваемого несколькими зарядами q_k , расположенными в точках z_k , можно записать в виде: $W(z) = -2i \cdot \sum_k q_k \cdot \ln(z - z_k)$. Определение комплексного потенциала поля линейных зарядов над металлической поверхностью производится методом электростатических изображений. Напряжённость постоянного

магнитного поля \vec{H} (наведенного постоянным линейным током I из точки z_0) равна $\vec{H} = i\vec{E}$, т.е. силовая и потенциальная функции меняются местами.

Пример 37. Исследование поля диполя.

Пусть линейный заряд $+q$ расположен в начале координат $z = 0$, а заряд $(-q)$ в точке $z = \varepsilon > 0$. Комплексный потенциал такой системы зарядов равен $W_0(z) = 2qi \cdot \ln\left(1 - \frac{\varepsilon}{z}\right)$. Рассмотрим предельный случай для этой системы, когда $\varepsilon \rightarrow 0$ и $q \rightarrow \infty$ так, что произведение $2q \cdot \varepsilon \rightarrow p = const$; тогда получим комплексный потенциал точечного диполя $W(z) = i \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[2q\varepsilon \cdot \ln\left(1 - \frac{\varepsilon}{z}\right)^{1/\varepsilon} \right] = -i \frac{p}{z}$ с дипольным моментом $p > 0$.

В поле диполя работа $A|_C = 0$ и поток $Q = 4\pi(q - q) = 0$. Так как $W(z) = G(x, y) + i\varphi(x, y)$, то уравнения силовых линий будут

$$G(x, y) = -p \cdot \operatorname{Re} \frac{i}{z} = \frac{-py}{x^2 + y^2} = C_1 \text{ или}$$

$x^2 + (y + p/2C_1)^2 = (p/2C_1)^2$ семейство окружностей, которые в начале координат касаются оси абсцисс и имеют центры на оси ординат. Уравнения эквипотенциальных линий $\varphi(x, y) = -p \cdot \operatorname{Im} \frac{i}{z} = \frac{-px}{x^2 + y^2} = C_2$ или $(x + p/2C_2)^2 + y^2 = (p/2C_2)^2$ это семейство окружностей, ортогональных предыдущему. При отображении функцией $W(z) = -i \frac{p}{z}$ на плоскость $W = G + i\varphi$ указанные семейства окружностей переходят в семейства прямых $G = C_1$ и $\varphi = C_2$; т.е. образуют прямоугольную сетку.

Вектор напряжённости поля диполя равен: $\vec{E}(x, y) = -i \overline{W'(z)} = -\frac{p}{z^2} = -\frac{p}{r^2} e^{2i\theta}$ при $r > 0$.

Аналогично исследуются поля мультиполей любого порядка. Лорановские члены разложения комплексного потенциала $W(z)$ соответствуют мультипольному разложению системы зарядов, которые создают этот потенциал.

Пример 38. Найти напряжённость электростатического поля над идеально проводящей незаряженной плоскостью с ортогональной к ней пластиной ширины a . На рис. 8 изображено сечение рассматриваемой системы плоскостью Z , которая ортогональна к незаряженной плоскости $AB_{1,2}A'$ и к пластине $B_{1,2}C$.

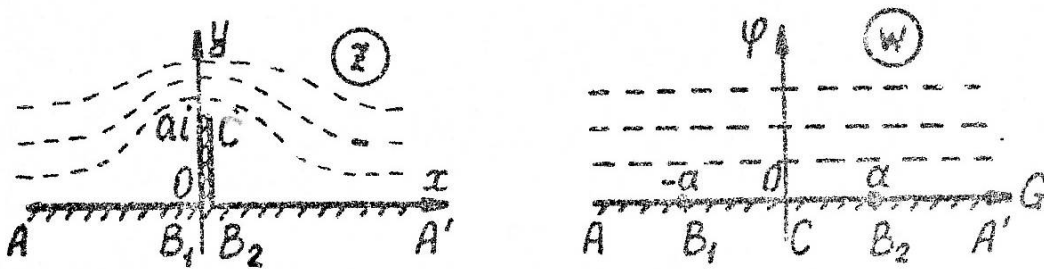


Рис. 8

Если в плоскости $z = x + iy$ требуется определить напряжённость электростатического поля \vec{E}_z , наведенного некоторой системой проводников (зарядов), и известны \vec{E}_w напряжённость поля в плоскости $W = G + i\varphi$ и аналитическая функция $W(z)$, которая конформно отображает картину поля в плоскости z на картину поля в плоскости W , то искомая напряжённость равна $\vec{E}_z = \vec{E}_w \cdot \overline{W'(z)}$. Обычно выбирают такую новую плоскость, на которой силовые $G(x, y) = C_1$ и эквипотенциальные $\varphi(x, y) = C_2$ линии образуют прямоугольную декартову сетку.

Легко показать, что функция $W(z) = \sqrt{z^2 + a^2}$ отображает полуплоскость $\text{Im } z > 0$ с разрезом $0 \leq y \leq a$ на верхнюю полуплоскость $\text{Im } w > 0$ (без разреза), где напряжённость поля известна $\vec{E}_w = -2\pi i \sigma$ (поле над равномерно заряженной плоскостью); здесь $\sigma = \text{const}$ поверхностная плотность зарядов. Очевидно, линии $G = C_1$ и $\varphi = C_2$ образуют декартову сетку на плоскости W . Если в соотношении

$W = G + i\varphi = \sqrt{z^2 + a^2}$ положить $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$ и исключить величину G , то уравнения эквипотенциальных линий в плоскости z получаются в виде $y(x) = \varphi_0 \left(1 + \frac{a^2}{x^2 + \varphi_0^2} \right)^{1/2}$. На рис. 8 эти эквипотенциали в плоскостях z и W изображены штриховыми линиями.

Искомая напряжённость поля равна $\vec{E}_z(z) = -2\pi i\sigma \cdot \left(1 + \frac{a^2}{z^2} \right)^{-1/2}$.

Вычислим её значения в некоторых характерных точках:

$\vec{E}_z(ia) = \infty$ напряжённость на конце острия, $\vec{E}_z(0) = 0$ нет зарядов внутри углов с вершинами B_1 и B_2 , $\vec{E}_z(\infty) = -2\pi i\sigma$ поле вдали от неоднородности B_1CB_2 совпадает с полем \vec{E}_W .

Тема 9

Основы асимптотических методов

Основные вопросы: Асимптотические последовательности и ряды. Асимптотические методы вычисления определенных интегралов: Лемма Ватсона, методы Лапласа и стационарной фазы. Основы метода перевала. Получение ВКБЙ (WKBJ) – приближения при решении линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Литература: 1, Прилож. 1; п. 1-3; 2, п. 76, 77; 3, § 41-46; 8, гл. 1, § 4.

Задание: 4, № 776, 777, 779, 780, 782, 783, 786.

Пример 39. Асимптотические оценки; асимптотические последовательности и ряды.

а) Пусть $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = A \neq \infty$ для $z \in D$ и $\psi(z) \neq 0$ при $|z - z_0| < \varepsilon$;

тогда, если $A \neq 0$ обозначают $\varphi(z) = O(\psi(z))$ при $z \rightarrow z_0$, а если $A = 0$ обозначают $\varphi(z) = o(\psi(z))$ при $z \rightarrow z_0$. Если $A = 1$, пишут $\varphi(z) \sim \psi(z)$ при $z \rightarrow z_0$ (асимптотическое равенство).

Проверим оценки:

$$3z^2 - 5z^3 = O(z^2) \quad [\text{или} = o(z)] \quad \text{при } z \rightarrow 0;$$

$$4z^2 - 2z^5 = O(z^5) \quad [\text{или} = o(z^6)] \quad \text{при } z \rightarrow \infty;$$

$$5z \cdot \sin^4 \sqrt{z} = O(z^3) \quad [\text{или} = o(z^2)] \quad \text{при } z \rightarrow 0;$$

$$(1-z)^\alpha = 1 - \alpha z + o(z) \quad \text{при } \alpha \in R \text{ и } z \rightarrow 0;$$

$$\ln z \sim z - 1 \quad \text{при } z \rightarrow 1;$$

$$e^{-z} = o(z^n) \quad \text{при } n \in N \text{ и } z \rightarrow +\infty.$$

б) Последовательность $\{\varphi_k(z)\}$ называется асимптотической при $z \rightarrow z_0$ в области D , если $\varphi_{k+1}(z) = o(\varphi_k(z))$ при $z \rightarrow z_0$ и $k \in N$; причем $\varphi_k(z) \neq 0$ при $z \neq z_0$.

Например, $\varphi_k(z) = (z - z_0)^k$ при $z \rightarrow z_0$ и $\varphi_k(z) = \frac{1}{z^k}$ при $z \rightarrow \infty$ образуют асимптотические последовательности.

в) Формальный ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(z)$ называется асимптотическим разложением функции $f(z)$ по асимптотической последовательности

$$\{\varphi_k(z)\} \text{ при } z \rightarrow z_0 \text{ в области } D \text{ и обозначается } f(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(z)$$

при $z \rightarrow z_0$, если разность $R_n(z) \equiv f(z) - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(z) \equiv$

$\equiv f(z) - S_n(z) = o(\varphi_n(z))$ при $z \rightarrow z_0$ и $n \in N$. Существует единственное асимптотическое разложение функции $f(z)$ при $z \rightarrow z_0$, коэффициенты которого определяются по формулам

$$c_k = \lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ (f(z) - S_{k-1}(z)) / \varphi_k(z) \right\}$$

Асимптотическое разложение при $n \rightarrow \infty$ могут расходиться в каждой фиксированной точке $z = z_0 \in D$, так как $|c_n| \geq 0$ при $n \rightarrow \infty$, но при фиксированном n и $z \rightarrow z_0$ частичная сумма $S_n(z)$ дает приближенное значение функции $f(z)$ с точностью $O(\varphi_{n+1}(z)) = o(\varphi_n(z))$ при $z \rightarrow z_0$ и $z \in D$.

Часто члены асимптотического ряда функции $f(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} u_k(z)$ при $z \rightarrow z_0$ сначала убывают до некоторого номера $k \equiv m(z_0)$, а потом начинают возрастать. Поэтому для вычисления значения функции $f(z_0)$ следует брать частичную сумму $S_m(z_0)$ и ошибка $o(\varphi_m(z_0))$ будет при этом наименьшей. Значение номера $k \equiv m(z_0)$ можно получить приближенно из соотношения

$$|u_{m+1}(z_0)/u_m(z_0)| \cong 1.$$

Над асимптотическими степенными рядами (когда $\varphi_k(z) = (z - z_0)^k$ и т.п.) можно производить алгебраические действия, такие ряды можно почленно дифференцировать и интегрировать, если полученный ряд тоже оказывается асимптотическим.

Легко проверить, что ряд Тейлора (или Лорана) функции $f(z)$ в окрестности точки $z = z_0$ является асимптотическим сходящимся рядом при $z \rightarrow z_0$.

Можно показать, что в асимптотическом разложении функции $f(z) = e^{-z}$ по последовательности $\varphi_k(z) = \frac{1}{z^k}$ при $z \rightarrow \infty$ в области $D = \{ \operatorname{Re} z > 0 \}$ все коэффициенты $c_k = 0$; т.е. $f(z) = e^{-z} \sim 0 + \frac{0}{z} + \dots + \frac{0}{z^k} \dots$ это асимптотический нуль при $z \rightarrow +\infty$.

Пример 40. Разложение в асимптотические ряды интегралов при большом значении параметра обычно производится методами интегрирования по частям или разложения в ряд подынтегральной функции, обобщением последнего метода является лемма Ватсона.

а) Найдем асимптотическое разложение интеграла

$$I(\lambda) = \int_{\lambda}^{\infty} e^{\lambda-x} \frac{dx}{x} \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Если этот интеграл проинтегрировать $n + 1$ раз по частям, получим

$$\begin{aligned}
I(\lambda) &= \frac{1}{\lambda} - \frac{1!}{\lambda^2} + \frac{2!}{\lambda^3} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{n!}{\lambda^{n+1}} - \\
&- (-1)^n \cdot (n+1)! \int_{\lambda}^{\infty} e^{\lambda-x} \frac{dx}{x^{n+2}} = - \sum_{k=0}^n \frac{k!}{(-\lambda)^{k+1}} + R_n(\lambda) \equiv \\
&\equiv S_n(\lambda) + R_n(\lambda).
\end{aligned}$$

Найденное разложение интеграла $I(\lambda)$ по асимптотической последовательности $\varphi_k(\lambda) = \frac{1}{\lambda^k}$ при $\lambda \rightarrow +\infty$ будет асимптотическим рядом только в том случае, если выполняются достаточные условия оценки остаточного члена $R_n(\lambda) = I(\lambda) - S_n(\lambda) = o(\varphi_n(\lambda))$ при $\lambda \rightarrow +\infty$ и $n \in \mathbb{N}$, т.е. для всех n должен существовать предел $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\lambda^n \cdot R_n(\lambda)) = 0$. Сделаем оценку остаточного члена

$$|R_n(\lambda)| = (n+1)! \int_{\lambda}^{\infty} e^{\lambda-x} \frac{dx}{x^{n+2}} \leq (n+1)! \int_{\lambda}^{\infty} e^{\lambda-x} \frac{dx}{\lambda^{n+2}} = \frac{(n+1)!}{\lambda^{n+2}},$$

поэтому $|\lambda^n \cdot R_n(\lambda)| = (n+1)!/\lambda^2 = O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$ при $\lambda \rightarrow +\infty$ и полученное разложение является асимптотическим рядом

$$I(\lambda) = \int_{\lambda}^{\infty} e^{\lambda-x} \frac{dx}{x} \sim - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(-\lambda)^{k+1}} \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Так как отношение членов ряда $|c_{k+1}/c_k| = \frac{k+1}{\lambda} \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow +\infty$, то полученный ряд расходится при всех значениях $\lambda > 0$. Чтобы обеспечить наибольшую точность при расчетах, ряд следует обрывать на члене с номером $m \cong E(\lambda)$, где $E(\lambda)$ целая часть числа $\lambda \in \mathbb{R}$.

б) Лемма Ватсона: Если интеграл $I(\lambda) = \int_0^a f(x) \cdot x^{\alpha-1} e^{-\lambda x^{\beta}} dx$ ($0 < a \leq \infty$, α и $\beta > 0$) абсолютно сходится при $\lambda \rightarrow +\infty$, функ-

ция $f(x)$ при $x > 0$ растет не быстрее экспоненты $|f(x)| \leq Me^{bx^\beta}$ ($M > 0$ и $b \geq 0$ постоянные) и ее разложение $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0) \cdot \frac{x^k}{k!}$ сходится в некотором интервале $|x| < R + \varepsilon$ ($\varepsilon \geq 0$, $R \leq a$), то возможно разложение интеграла $I(\lambda)$ в асимптотический ряд

$$I(\lambda) \sim \frac{1}{\beta} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot f^{(k)}(0) \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha + k}{\beta}\right) \cdot \lambda^{-\frac{k+\alpha}{\beta}} \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty.$$

в) Получим из леммы Ватсона при $a = \infty$ и $\alpha = \beta = 1$ асимптотическое разложение для интеграла Лапласа

$$I(\lambda) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-\lambda t} dt \sim \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0) \cdot \lambda^{-k-1} \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty.$$

г) Найдем асимптотическое разложение интеграла

$$I(\lambda) = \int_1^{\infty} \sqrt{\frac{\tau}{\tau-1}} e^{-\lambda \tau} d\tau = e^{-\lambda} \cdot \int_0^{\infty} (1+t)^{1/2} \cdot t^{-\frac{1}{2}} e^{-\lambda t} dt$$

при $\lambda \rightarrow +\infty$; здесь $\tau - 1 = t$. Воспользуемся леммой Ватсона, считая $a = \infty$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 1$ и

$$f(t) = (1+t)^{1/2} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k+2)!!} t^{k+1} \quad \text{при } |t| < 1.$$

После преобразований получим

$$\begin{aligned} I(\lambda) &\sim \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{-\lambda} \cdot \left\{ \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[(2k-1)!!]^2}{(2k+2)!! \cdot (-2\lambda)^k} \right\} = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{-\lambda} \cdot \left\{ \frac{3}{2} - \frac{(1!!)^2}{4!! \cdot 2\lambda} + \frac{(3!!)^2}{6!! \cdot (2\lambda)^2} - \frac{(5!!)^2}{8!! \cdot (2\lambda)^3} + \dots \right\} \end{aligned}$$

здесь главный член разложения $I(\lambda) \sim \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{-\lambda}$ при $\lambda \rightarrow +\infty$. Полученный ряд расходится при всех $\lambda > 0$ так как

$\left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right| = \frac{(2k+3)^2}{(2k+4) \cdot 2|\lambda|} \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Этот ряд следует обрывать на члене с номером $m \cong E(\lambda)$.

д) Найти асимптотическое разложение интеграла

$$I(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}}{t^2 + 1} dt \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Воспользуемся леммой Ватсона, считая $a = \infty$, $\alpha = \beta = 1$ и $f(t) = (1+t^2)^{-1} = \sum_{K=0}^{\infty} (-t^2)^K$ при $|t| < 1$. После преобразований получим

$$I(\lambda) \sim \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k)!}{\lambda^{2k+1}} = \frac{1}{\lambda} - \frac{2!}{\lambda^3} + \frac{4!}{\lambda^5} - \frac{6!}{\lambda^7} + \dots \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Этот ряд расходящийся при всех $\lambda > 0$, так как $\left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right| = \frac{(2k+1)(2k+2)}{\lambda^2} \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Поэтому ряд следует обрывать на члене с номером $m \cong E\left(\frac{1}{2}\lambda\right)$.

Пример 41. Асимптотическое разложение функций-оригиналов $f(t)$ при $t > 0$.

Часто оригиналы $f(t)$ получаются в виде неберущихся интегралов, для которых можно найти асимптотическое разложение по переменной t . Например, оригинал в примере № 28 может быть разложен в асимптотический ряд при $t \rightarrow 0+0$. Рассмотрим соответствие

$$F(p) = \frac{1}{p} e^{-a\sqrt{p}} \rightarrow f(t) = 1 - \Phi\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right) \quad \text{при } a > 0;$$

здесь $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^z e^{-\tau^2} d\tau$ интеграл вероятностей (см. пример №33).

Для функции $\Phi(z)$ найдем асимптотическое разложение при $z \rightarrow +\infty$

$$\left(z = \frac{a}{2\sqrt{t}} \rightarrow +\infty \text{ при } t \rightarrow 0+0\right).$$

Сначала запишем

$$\Phi(z) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_z^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \operatorname{Erfc}(z).$$

Сделаем в интеграле $\operatorname{Erfc}(z)$ замену переменной $\tau = z\sqrt{1+x} > 0$ и получим новый интеграл

$$\operatorname{Erfc}(z) = \frac{1}{2} z e^{-z^2} \cdot \int_0^{\infty} e^{-z^2 x^2} \cdot (1+x)^{-\frac{1}{2}} dx,$$

к которому легко применить лемму Ватсона. Действительно, теперь $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot (-x)^k$, $|x| < 1$; после преобразований получим

$$\begin{aligned} \Phi(z) &\sim 1 - \frac{1}{z\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(-2z^2)^k} \right) \approx \\ &\approx 1 - \frac{1}{z\sqrt{\pi}} \cdot e^{-z^2} \quad \text{при } z \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Этот ряд расходится при всех $z > 0$, так как отношение его членов $\left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right| = \frac{2k+1}{2|z|^2} \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. При расчетах ряд следует обрывать на члене с номером $m \cong E(|z|^2)$.

Главный член разложения для функции – оригинала $f(t)$ будет

$$f(t) = 1 - \Phi\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right) \sim \frac{2}{a} \sqrt{\frac{t}{\pi}} \cdot e^{-\frac{a^2}{4t}} \quad \text{при } t \rightarrow 0+0.$$

Разложения оригинала $f(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ непосредственно получается из тейлоровского разложения функции $\Phi(z)$ при $z = \frac{a}{2\sqrt{t}} \rightarrow 0$.

Пример 42. Асимптотическое вычисление интегралов от функции с острым максимумом по методу Лапласа.

а) Теорема: Имеет место асимптотическое представление интеграла

$$I(\lambda) = \int_a^b g(x) \cdot e^{\lambda f(x)} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |f''(x_0)|}} \cdot g(x_0) \cdot e^{\lambda f(x_0)} \cdot \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right\}$$

при $\lambda \rightarrow \infty$ (здесь $-\infty \leq a < b \leq \infty$ и $\text{Im } f(x) = 0$), если этот интеграл абсолютно сходится при $\lambda \gg 1$, функция $f(x)$ имеет острый максимум при $x = x_0 \in (a + \varepsilon, b - \varepsilon)$, где $0 < \varepsilon \ll b - a$ и может быть разложена в ряд Тейлора в окрестности $x = x_0$; функция $g(x)$ непрерывна и изменяется медленнее, чем $\exp(\lambda \cdot f(x))$.

б) Для гамма-функции $\Gamma(z + 1)$ при $z \gg 1$ получим асимптотическую формулу Стирлинга

$$\Gamma(z + 1) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^z dt = z^{z+1} \cdot \int_0^{\infty} e^{z(\ln x - x)} \cdot dx ;$$

Здесь $t = zx$, $g(x) = 1$ и $f(x) = \ln x - x$. Максимум функции $f(x)$ достигается при $x_0 = 1$, при этом $f(1) = f''(1) = 1$. Воспользовавшись формулой асимптотического представления интеграла, получим

$$\Gamma(z + 1) = \sqrt{2\pi z} \cdot \left(\frac{z}{e}\right)^z \cdot \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right\} \text{ при } z \gg 1.$$

Формула Стирлинга дает результаты с хорошей точностью уже при $z \geq 4$.

Например, $\Gamma(4 + 1) = \Gamma(5) = 4! = 24 \cong \sqrt{8\pi} \cdot \left(\frac{4}{e}\right)^4 \cong 23,50617$; здесь ошибка $2,05763\% \approx 2,06\%$.

в) Получить асимптотическое представление интеграла

$$I(\lambda) = \int_0^{\infty} x^{-\lambda x} dx = \int_0^{\infty} e^{-\lambda \cdot x \ln x} dx \text{ при } \lambda \gg 1 ;$$

здесь $g(x) = 1$ и $f(x) = -x \cdot \ln x$. Максимум функции $f(x)$ достигается при $x_0 = 1/e$, при этом $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}$ и $f''\left(\frac{1}{e}\right) = -e$. Асимптотическое представление интеграла будет

$$I(\lambda) = \sqrt{\frac{2\pi}{e\lambda}} \cdot e^{\frac{\lambda}{e}} \cdot \left\{1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\} \text{ при } \lambda \gg 1.$$

Пример 43. Асимптотическое вычисление интегралов от быстро осциллирующих функций по методу стационарной фазы (методу Стокса).

а). Теорема. Имеет место асимптотическое представление интеграла

$$I(\lambda) = \int_a^b g(x) \cdot e^{i\lambda f(x)} dx = \\ = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |f''(x_0)|}} \cdot g(x_0) \cdot e^{i(\lambda f(x_0) + \theta)} \cdot \left\{1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\},$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \cdot \text{sign } f''(x_0),$$

при $\lambda \rightarrow +\infty$ (здесь $-\infty \leq a < b \leq \infty$ и $\text{Im}f(x) = 0$), если этот интеграл сходится при $\lambda \gg 1$. Функция $f(x)$ имеет экстремум при $x = x_0 \in (a + \varepsilon, b - \varepsilon)$, где $0 < \varepsilon \ll b - a$, и может быть разложена в ряд Тейлора в окрестности $x = x_0$; функция $g(x)$ непрерывна и изменяется медленнее, чем $\exp(i\lambda \cdot f(x))$.

Если пределы интегрирования a и b конечны и около них крайние полуволны функции $\text{Re}(g(x) \cdot e^{iz \cdot f(t)})$ не погашаются, то иногда приходится учитывать значение интеграла $I(\lambda)$ вблизи этих концов.

б) Найти асимптотическое представление для функции Бесселя

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\pi \cos(z \cdot \sin t - nt) \cdot dt = \frac{1}{2\pi} \text{Re} \int_{-\pi}^\pi e^{i(z \cdot \sin t - nt)} \cdot dt$$

при $z \gg 1$ и $n \in Z$;

здесь $g(t) = e^{-int}$ и $f(t) = \sin t$. В интервале $|t| < \pi$ функция $f(t)$ имеет две стационарные точки $t_{\pm} = \pm \frac{\pi}{2}$; при этом

$$g\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = e^{\mp \frac{i}{2}\pi n}, \quad f\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = -f''\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm 1, \quad \theta\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \frac{\pi}{4}.$$

Сумма вкладов обеих стационарных точек дает асимптотическое представление функции Бесселя

$$J_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \cos\left(z - \frac{\pi}{4}(2n+1)\right) + O\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right) \quad \text{при } z \gg 1.$$

Далее, подставив в формулу для определения функции Неймана

$$\pi \cdot N_n(z) = \frac{\partial}{\partial n} J_n(z) - (-1)^n \frac{\partial}{\partial n} J_{-n}(z) \quad \text{при } n \in \mathbb{Z}$$

интегральные представления для $J_{\pm n}(z)$, получим асимптотику функции Неймана в виде

$$N_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \sin\left(z - \frac{\pi}{4}(2n+1)\right) + O\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right) \quad \text{при } z \gg 1.$$

Теперь легко находятся и асимптотики для функции Ханкеля, имеем

$$H_n^{(1,2)}(z) = J_n(z) \pm i \cdot N_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot e^{\pm i\left(z - \frac{\pi}{4}(2n+1)\right)} + O\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right)$$

при $z \gg 1$. Полученные выше асимптотические выражения верны и при комплексных значениях аргумента z или индекса n , если $|z| \gg 1$ ($|z| \gg |n|^2 > 0$).

в) Обобщением методов Лапласа и Стокса является метод перевала (седловой точки).

Рассмотрим контурный интеграл $I(\lambda) = \int_L f(z) \cdot e^{\lambda\varphi(z)} dz$, где параметр $\lambda > 0$, а контур интегрирования L проводится в области анали-

точности однозначных функций $\varphi(z)$ и $f(z)$ при $z = x + iy$. Величина $|f(z)|$ должна меняться медленнее экспоненты и не иметь особенностей на контуре L (иначе добавляются вычеты). Если при больших значениях $\lambda \gg 1$ величина подынтегрального выражения быстро растет с увеличением функции $u = \operatorname{Re} \varphi(z) > 0$ и значение $v = \operatorname{Im} \varphi(z) = \text{const}$, то это даст основной вклад в асимптотическое значение интеграла $I(\lambda)$.

Так как $\varphi(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$, где функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ являются гармоническими и не имеют абсолютных экстремумов, то значение $z = z_0 \equiv x_0 + iy_0$ – корень уравнения $\varphi'(z_0) = 0$ является точкой минимакса (седловой точкой перевала на поверхности $|\varphi(z)|$). Контур интегрирования L можно деформировать так, чтобы он проходил именно через точку перевала $z = z_0$ – частный экстремум функции $u(x, y)|_L$ и далее вдоль направления наискорейшего спуска; т.е. направления $v = \operatorname{Im} \varphi(z) = \text{const}$, так как $(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) = 0$. Вдоль такого контура окажется $\operatorname{Re} \varphi(z) \rightarrow -\infty$ при $z \rightarrow \infty$.

В окрестности седловой точки $z = z_0$ сделаем разложение в ряд Тейлора

$$\varphi(z) = \varphi(z_0) + \frac{1}{2} \varphi''(z_0) \cdot (z - z_0)^2 + \dots$$

Здесь производные $\varphi'(z_0) = 0$ и $\varphi''(z_0) < 0$, так как вдоль контура интегрирования L мнимая часть постоянна и мы движемся вниз от седловой точки. Сделаем замену переменной интегрирования

$$\varphi(z) - \varphi(z_0) \cong \frac{1}{2} \varphi''(z_0) \cdot (z - z_0)^2 = -t^2/2\lambda,$$

где $z - z_0 = \rho e^{i\alpha}$ и $\alpha = \text{const}$. Тогда

$$I(\lambda) \cong f(z_0) \cdot e^{\lambda \varphi(z_0)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} \cdot \frac{dz}{dt} dt,$$

где $\frac{dz}{dt} = 1 / \frac{dt}{dz} = e^{i\alpha} / \sqrt{\lambda \cdot |\varphi''(z_0)|}$.

Теперь окончательный результат примет вид

$$\begin{aligned}
 I(\lambda) &\cong f(z_0) \cdot e^{\lambda\varphi(z_0)} \cdot |\lambda \cdot \varphi''(z_0)|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt \cdot e^{i\alpha} = \\
 &= \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda \cdot |\varphi''(z_0)|}} \cdot f(z_0) e^{\lambda\varphi(z_0)} \cdot e^{i\alpha} \quad \text{при } \lambda \gg 1.
 \end{aligned}$$

Здесь интегрирование проводилось в бесконечных пределах, так как подынтегральная функция практически равна нулю при достаточно больших t и использован интеграл ошибок Гаусса. Угол α – аргумент контура, проходящего через седловую точку $z = z_0$. Это направление выбирается так, чтобы величина α была постоянной и значение $\operatorname{Re} \varphi(z)$ – наибольшим.

Важно отметить, что если экспоненциальный множитель подынтегральной функции записать в форме $\exp(\lambda \cdot \varphi(z))$, то в методе наискорейшего спуска Лапласа путь интегрирования следует проводить вдоль кривой $\operatorname{Im} \varphi(z) = \text{const}$, а в методе стационарной фазы Стокса – вдоль кривой $\operatorname{Re} \varphi(z) = \text{const}$. Очевидно, эти направления взаимно ортогональны; причем контур в методе Лапласа проводят через перевал вниз в долины поверхности $|\varphi(z)|$, а в методе Стокса – наоборот вверх вдоль вершин горной цепи этой поверхности.

Пример 44. Асимптотический метод решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка – метод ВКБЙ (Wentzel – Kramers – Brillouin – Jeffreys).

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка $\tilde{y}'' + p(x) \cdot \tilde{y}' + q(x) \cdot \tilde{y}(x) = 0$, где $p(x)$ и $q(x)$ – заданные непрерывные функции, с помощью замены искомой функции $\tilde{y}(x) = y(x) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \int p(x) dx\right)$ приводится к стандартному виду $y'' + I(x) \cdot y(x) = 0$, где инвариант уравнения

$$I(x) = q(x) - \frac{1}{4} p^2(x) - \frac{1}{2} p'(x)$$

присущ только рассматриваемому уравнению и отличает его от всех других.

Пусть некоторое линейное дифференциальное уравнение удалось привести к виду

$$y'' - \lambda^2 \cdot U(x) \cdot y(x) = 0 \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty.$$

С помощью замены искомой функции

$$y(x) = y'(x)/V(x) \quad (y' = yV, y'' = yV^2 + yV')$$

получим нелинейное уравнение первого порядка типа Риккати

$$V' + V^2(x) = \lambda^2 \cdot U(x) \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty,$$

решение которого будем искать методом разложения по малому параметру $\frac{1}{\lambda} \ll 1$ в виде ряда Лорана

$$V(x) = c_{-1} \cdot \lambda + c_0 + c_1 \cdot \frac{1}{\lambda} + c_2 \cdot \frac{1}{\lambda^2} + \dots, \quad \text{где } c_n = c_n(x).$$

Здесь разложение функции $V(x)$ начинается с первой отрицательной степени параметра λ , чтобы обе части уравнения Риккати были эквивалентны при $\lambda \rightarrow +\infty$. Легко находятся значения

$$\begin{aligned} V'(x) &= c'_{-1}(x) \cdot \lambda + c'_0(x) + c'_1(x) \cdot \frac{1}{\lambda} + c'_2(x) \cdot \frac{1}{\lambda^2} + \dots, \\ V^2(x) &= \left(c_{-1} \cdot \lambda + c_0 + c_1 \frac{1}{\lambda} + c_2 \cdot \frac{1}{\lambda^2} + \dots \right)^2 = \\ &= c_{-1}^2 \cdot \lambda^2 + c_0^2 + c_1^2 \frac{1}{\lambda^2} + c_2^2 \cdot \frac{1}{\lambda^4} + \dots + \\ &+ 2c_{-1}c_0 \cdot \lambda + 2c_{-1}c_1 + 2c_{-1}c_2 \frac{1}{\lambda} + 2c_{-1}c_3 \cdot \frac{1}{\lambda^2} + \dots + \\ &+ 2c_0c_1 \frac{1}{\lambda} + 2c_0c_2 \frac{1}{\lambda^2} + \dots + 2c_1c_2 \frac{1}{\lambda^3} + \dots \end{aligned}$$

Приравняв в уравнении Риккати коэффициенты при одинаковых степенях λ , получим

$$\begin{aligned}
\lambda^2 : \quad c_{-1}^2 &= U(x), & c_{-1} &= \pm\sqrt{U(x)} \\
\lambda^1 : \quad c'_{-1} + 2c_{-1}c_0 &= 0, & c_0 &= -c'_{-1}/2c_{-1} \\
\lambda^0 : \quad c'_0 + c_0^2 + 2c_{-1}c_1 &= 0, & c_1 &= -(c'_0 + c_0^2)/2c_{-1} \\
\lambda^{-1} : \quad c'_1 + 2c_{-1}c_2 + 2c_0c_1 &= 0, & c_2 &= -(c'_1 + 2c_0c_1)/2c_{-1} \\
\lambda^{-2} : \quad c'_2 + c_1^2 + 2c_0c_2 + & & c_3 &= -(c'_2 + c_1^2 + 2c_0c_2)/2c_{-1} \\
& + 2c_{-1}c_3 = 0, & & \\
\lambda^{-3} : & \text{ и т.д.} & &
\end{aligned}$$

В общем случае рекуррентная формула для коэффициентов $c_n(x)$ будет

$$c_{n+1}(x) = -\left(c'_n + \sum_{m=0}^n c_m \cdot c_{n-m}\right) / 2c_{-1} \quad \text{при } n = 0, 1, 2, \dots$$

По этой рекуррентной формуле находятся все значения коэффициентов разложения, например:

$$\begin{aligned}
c_{-1} &= \pm\sqrt{U(x)}, & c_0 &= -U'(x)/4U(x), \\
c_1 &= \pm(4UU'' - 5U'^2)/(32U^2\sqrt{U}) & & \text{ и т.д.}
\end{aligned}$$

В тех точках $x = x_0$, где $U(x_0) = 0$, все выражения для коэффициентов теряют смысл и асимптотическое разложение невозможно. В общем случае нельзя сказать сходитесь ли ряд функции $V(x)$ при $n \rightarrow \infty$; можно только утверждать, что это формальное разложение будет асимптотическим при $\lambda \rightarrow +\infty$.

Вернемся к функции $y(x)$; из $V = y'/y$ получим

$$\begin{aligned}
y^\pm(x) &= e^{\int V(x) dx} = \\
&= \exp\left\{\pm\lambda \cdot \int \sqrt{U} dx - \frac{1}{4} \ln U + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} \cdot \int c_n(x) dx\right\} = \\
&= U^{-\frac{1}{4}} \cdot e^{\pm\lambda \cdot \int \sqrt{U} dx} \cdot \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} \cdot \int c_n(x) dx\right\}. \quad (*)
\end{aligned}$$

Наличие множителя $\exp\left(\pm \lambda \cdot \int \sqrt{U(x)} \cdot dx\right)$ показывает, что в точках $x = x_0$, где функция $U(x)$ меняет знак, должен меняться и тип асимптотики – убывание, возрастание, колеблющееся поведение. При больших значениях λ последний в формуле (*) экспоненциальный множитель близок к единице и не оказывает большого влияния на поведение функции $y(x)$. Постоянные множители везде опущены. Если получается функция $U(x, \lambda)$, то решение тоже можно найти, используя разложение $U(x, \lambda) = U_0(x) + \frac{1}{\lambda} U_1(x) + \dots$. Решения $y(x)$ являются аналитическими функциями в некоторой области, их можно неоднократно дифференцировать. Наличие в решении радикалов показывает, что нули и полюсы функции $U(x)$ могут являться точками ветвления (точками поворота).

Проведем более подробную оценку последнего экспоненциального множителя функции $y(x)$. Для функции $V(x)$ имеем

$$V(x) = \pm \lambda \sqrt{U} - \frac{U'}{4U} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} c_n(x) = \pm \lambda \sqrt{U} - \frac{U'}{4U} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

при $\lambda \rightarrow +\infty$.

Последняя оценка равномерна по x , если $c_n(x)$ будут ограниченными функциями. Поэтому переходя к $y = \exp\left(\int U(x) dx\right)$, получим два линейно независимых решения, соответствующие двум разным знакам (+ и -) перед корнем \sqrt{U} ; т.е. найдем

$$y^{\pm}(x) = U^{-\frac{1}{4}} \cdot e^{\pm \int \sqrt{U} dx} \cdot \exp O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Экспонента с оценкой очевидно равна $\exp O\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ при $\lambda \rightarrow +\infty$, что позволяет записать главный член асимптотики решения уравнения в окончательном виде

$$y^{\pm}(x) = U^{-\frac{1}{4}} \cdot e^{\pm \lambda \cdot \int \sqrt{U} dx} \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Теперь подробно выпишем асимптотику решения $y^\pm(x)$ с точностью до $\frac{1}{\lambda^2}$; имеем

$$V(x) = \pm \lambda \sqrt{U} - \frac{U'}{4U} \pm (4UU'' - 5U'^2) / (32\lambda U^2 \sqrt{U}) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

при $\lambda \rightarrow +\infty$. После возвращения к функции $y^\pm(x)$ получим

$$\begin{aligned} y^\pm(x) &= U^{-\frac{1}{4}} \cdot \exp\left[\pm \lambda \cdot \int \left(\sqrt{U} + \frac{4UU'' - 5U'^2}{32\lambda^2 U^2 \sqrt{U}}\right) dx\right] \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right) = \\ &= U^{-\frac{1}{4}} \cdot e^{\pm \lambda \cdot \int \sqrt{U} dx} \cdot \left[1 \pm \frac{1}{\lambda} \cdot \int \frac{4UU'' - 5U'^2}{32U\sqrt{U}} dx + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right] \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Для детальной оценки порядков членов разложения удобно рассмотреть выражения с $U(x)$; например, неравенство $c_1 \ll \lambda \cdot c_0$ сведется к выражению $\frac{U''}{U'\sqrt{U}} - \frac{5}{4} \frac{U'}{U^{3/2}} \ll 2\lambda$, т.е. достаточны оценки $\left|\frac{U''}{U'\sqrt{U}}\right|$ и $\left|\frac{U'}{U^{3/2}}\right| \ll \lambda$. Аналогично находятся оценки для последующих членов разложения.

а) Применим полученные результаты к нахождению асимптотики решения уравнения Эйри

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - t \cdot y(t) = 0, \quad t > 0; \quad U(t) = t \quad \text{и} \quad t \rightarrow +\infty.$$

С помощью замены $t = x \cdot \lambda^{2/3} > 0$ получим стандартную форму уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \lambda^2 \cdot x y(x) = 0 \quad \text{при } x \quad \text{и} \quad \lambda > 0, \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

Запишем асимптотическое решение этого уравнения и вернемся к исходной переменной t , тогда

$$y^{\pm}(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \cdot \exp \left[\pm \frac{\lambda}{3} \left(2x^{3/2} + \frac{5}{16\lambda^2} x^{-3/2} \right) \right] \cdot \left(1 + O \left(\frac{1}{\lambda^2} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{t}} \cdot e^{\pm \frac{2}{3} t^{3/2} \cdot \left(1 + \frac{5}{32} t^{-3} \right)} \cdot \left(1 + O \left(\frac{1}{t^2} \right) \right) \quad \text{при } t \rightarrow +\infty.$$

Здесь опущены произвольные постоянные множители.

Если в уравнение Эйри принять $t \rightarrow -\infty$, получим

$$y^{\pm}(t) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt[4]{|t|}} \cdot e^{\pm \frac{2}{3} i |t|^{3/2} \cdot \left(1 - \frac{5}{32} |t|^{-3} \right)} \cdot \left(1 + O \left(\frac{1}{|t|^2} \right) \right) \quad \text{при } |t| \rightarrow +\infty.$$

Фазовый множитель $e^{-i\frac{\pi}{4}}$ здесь возникает за счет обхода точки ветвления $t = 0$; при этом изменяется и тип решения с монотонного на колеблющийся.

б) Легко проверить, что при $\lambda \rightarrow +\infty$ главный член асимптотического решения уравнения (типа уравнения Эрмита)

$$y'' + (a - \lambda^2 x^2) \cdot y(x) = 0, \quad a = \text{const} > 0,$$

если выполняется условие $(\lambda x)^2 > a$, будет равен

$$y^{\pm}(t) = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\pm \frac{1}{2} \lambda x^2} \cdot \left(1 + O \left(\frac{1}{\lambda} \right) \right) \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty.$$

в) Асимптотическое решение для уравнения вырожденной гипергеометрической функции

$$xy'' + (b - x)y' - ay(x) = 0, \quad a \text{ и } b = \text{const} > 0$$

может быть представлено для одного из решений в виде

$$y(x) \cong x^{a-b} \cdot e^x \quad \text{при } x \rightarrow +\infty;$$

$$y(x) \cong |x|^{-a} \quad \text{при } x \rightarrow -\infty.$$

Задания для самостоятельного решения

Задания содержат основные типы примеров по теории аналитических функций (по теории функций комплексного переменного) и операционного исчисления. Образцы решения всех примеров приведены в первых шести разделах пособия. Каждый студент должен представить решение всех 16 примеров; номера пунктов в каждом примере соответствуют номеру, под которым фамилия студента стоит в списке группы.

Пример 1. Вычислить все значения корня $\sqrt[n]{z}$, если

1. $z = 1, n = 3.$
2. $z = -1, n = 3.$
3. $z = i, n = 3.$
4. $z = -i, n = 3.$
5. $z = 1, n = 4.$
6. $z = -1, n = 4.$
7. $z = i, n = 4.$
8. $z = -i, n = 4.$
9. $z = i, n = 2.$
10. $z = -i, n = 2.$
11. $z = 1+i, n = 2.$
12. $z = -1+i, n = 2.$
13. $z = 1-i, n = 2.$
14. $z = -1-i, n = 2.$
15. $z = 1+i, n = 3.$
16. $z = -1+i, n = 3.$
17. $z = 1-i, n = 3.$
18. $z = -1-i, n = 3.$
19. $z = 1+i, n = 4.$
20. $z = -1+i, n = 4.$
21. $z = 1-i, n = 4.$
22. $z = -1-i, n = 4.$
23. $z = 1, n = 5.$
24. $z = -1, n = 5.$
25. $z = i, n = 5.$
26. $z = 1+i, n = 5.$
27. $z = 1-i, n = 5.$
28. $z = -1+i, n = 5.$
29. $z = -1-i, n = 5.$
30. $z = 1, n = 6.$

Пример 2. Выяснить геометрический смысл указанных соотношений.

1. $\operatorname{Re}(iz) \leq 0.$
2. $\operatorname{Im}(iz) < -1.$
3. $\operatorname{Re}(z-i) \geq 1/2.$
4. $\operatorname{Im}(z+i) < 2.$
5. $\operatorname{Re}(2z+3) \geq 1.$
6. $\operatorname{Im}(iz+3i) > 4.$

7. $\operatorname{Re}(iz + 3) \leq 0$.
8. $\operatorname{Im}(z - 2i) > -2$.
9. $\operatorname{Re}(3 - iz) \leq 1$.
10. $\operatorname{Im}(2 + iz) > 1$.
11. $|z - 3| = |iz|$.
12. $|z - i| = |z + 1|$.
13. $|z + i| = |1 - z|$.
14. $|z - i| = |z + i|$.
15. $|z + 2i| = |iz|$.
16. $|z| = \operatorname{Re} z + 1$.
17. $|z| = \operatorname{Im} z - 1$.
18. $|z| = \operatorname{Re}(z - i)$.
19. $|z| = \operatorname{Im}(z + i)$.
20. $\arg(z - i) = \pi / 3$.
21. $\arg(z + i) = \pi / 6$.
22. $\arg(z + 2i) = 0$.
23. $\arg(z - 1) = \pi$.
24. $\arg(z - 2i) = -\pi / 2$.
25. $\arg(z + 1) = \pi / 2$.
26. $0 \leq \arg(z - i) < \pi / 2$.
27. $0 < |iz - 2| \leq 1$
28. $1 \leq |z + 3i| < 2$.
29. $1 < |iz + 2| \leq 2$.
30. $|1 - i| < |z| \leq |z + i|$.

Пример 3. Первоначальное значение $\operatorname{Arg} f(z)$ при $z = a > 0$ принято равным нулю. Точка z делает один полный оборот против часовой стрелки по окружности $|z - z_0| = a$ и возвращается в точку $z = a$. Считая, что $\operatorname{Arg} f(z)$ изменяется непрерывно, найти значение $\operatorname{Arg} f(z)$ после такого оборота, если:

1. $f(z) = \sqrt[3]{z - 2}$, $a = 3$, $z_0 = 0$.
2. $f(z) = \sqrt{z - 2}$, $a = 1$, $z_0 = 0$.
3. $f(z) = \sqrt[3]{z - 2}$, $a = 3$, $z_0 = 2$.
4. $f(z) = \sqrt[4]{z - 2}$, $a = 1$, $z_0 = -2$.
5. $f(z) = \sqrt{z - 2}$, $a = 1$, $z_0 = -2$.
6. $f(z) = \sqrt[5]{z - 2}$, $a = 3$, $z_0 = -2i$.
7. $f(z) = \sqrt[4]{z - 2}$, $a = 3$, $z_0 = 2i$.

8. $f(z) = \sqrt[3]{z-2}$, $a = 3$, $z_0 = 2i$.
9. $f(z) = \sqrt{z^2 - 2}$, $a = 3$, $z_0 = 2i$.
10. $f(z) = \sqrt[3]{z^2 - 2}$, $a = 3$, $z_0 = 2i$.
11. $f(z) = \sqrt[3]{z^2 + 1}$, $a = 2$, $z_0 = 0$.
12. $f(z) = \sqrt{z^2 + 2z - 3}$, $a = 2$, $z_0 = 0$.
13. $f(z) = \sqrt[3]{z^2 + 2z - 3}$, $a = 2$, $z_0 = 0$.
14. $f(z) = \sqrt{z^2 - 2z - 3}$, $a = 2$, $z_0 = 0$.
15. $f(z) = \sqrt[3]{z^2 - 2z - 3}$, $a = 2$, $z_0 = 0$.
16. $f(z) = \sqrt{\frac{z-1}{z+2}}$, $a = 2$, $z_0 = 0$.
17. $f(z) = \sqrt{\frac{z+1}{z-1}}$, $a = 2$, $z_0 = 0$.
18. $f(z) = \sqrt[3]{\frac{z-1}{z+1}}$, $a = 2$, $z_0 = 0$.
19. $f(z) = \sqrt[3]{\frac{z+1}{z-1}}$, $a = 2$, $z_0 = 0$.
20. $f(z) = 2\text{Ln } z$, $a = 2$, $z_0 = 0$.
21. $f(z) = 3\text{Ln } (2i/z)$, $a = 2$, $z_0 = 0$.
22. $f(z) = \text{Ln } z - \text{Ln}(z+1)$, $a = 2$, $z_0 = 0$.
23. $f(z) = \text{Ln } z + \text{Ln}(z-1)$, $a = 2$, $z_0 = 0$.
24. $f(z) = \text{Ln } z - 3\text{Ln}(z-i)$, $a = 2$, $z_0 = 0$.
25. $f(z) = 2\text{Ln } (1-z)$, $a = 2$, $z_0 = 0$.
26. $f(z) = 4\text{Ln } (-iz)$, $a = 2$, $z_0 = 0$.

$$27. f(z) = 3Ln \frac{3i}{z+1}, \quad a = 2, \quad z_0 = 0.$$

$$28. f(z) = Ln(iz) + Ln(z+i), \quad a = 3, \quad z_0 = 0.$$

$$29. f(z) = 3Ln \frac{1-i}{z}, \quad a = 3, \quad z_0 = 0.$$

$$30. f(z) = 3Lnz - 2Ln(z-1), \quad a = 3, \quad z_0 = 0.$$

Пример 4. Найти все корни уравнения.

$$1. \sin z = 2.$$

$$2. \sin z = -2.$$

$$3. \sin z = 2i.$$

$$4. \sin z = -2i.$$

$$5. \cos z = i.$$

$$6. \sin z = i.$$

$$7. \sin z = -1/2.$$

$$8. \cos z = 1/2.$$

$$9. \operatorname{sh} z = -i.$$

$$10. \operatorname{sh} z = i/2.$$

$$11. \cos z = 2.$$

$$12. \cos z = -2i.$$

$$13. \sin z = -i.$$

$$14. \cos z = -i.$$

$$15. \operatorname{ch} z = -1.$$

16. Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.

$$17. \operatorname{ch} z = 1/2.$$

$$18. \operatorname{ch} z = i.$$

$$19. \operatorname{tg} z = 2i.$$

$$20. \operatorname{ch} z = -i.$$

$$21. \operatorname{ctg} z = 2i.$$

$$22. \operatorname{th} z = 2i.$$

$$23. \operatorname{cth} z = 2i.$$

$$24. \operatorname{th} z = 2.$$

$$25. \operatorname{cth} z = -1/2.$$

$$26. \operatorname{sec} z = 3i.$$

$$27. \operatorname{sch} z = 3i.$$

$$28. \operatorname{cosec} z = 3i.$$

$$29. \operatorname{csch} z = 3i.$$

$$30. \operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z = 2.$$

Пример 5. Найти все значения степени.

$$1. (-i)^{2i}.$$

$$2. i^{-2i}.$$

3. $(-1)^{3i}$.
4. $(-i)^{3i}$.
5. $(-i)^{-2i}$.
6. $(-1)^{-3i}$.
7. $(-1)^{-2i}$.
8. 1^{-2i} .
9. $(1-i)^{2-i}$.
10. $(1+i)^{2-i}$.
11. $(-1+i)^{2-i}$.
12. $(-1-i)^{2-i}$.
13. $1^{\sqrt{2}}$.
14. $1^{-\sqrt{2}}$.
15. $(-1)^{\sqrt{2}}$.
16. i^{3i} .
17. 1^{3i} .
18. $(1-i)^{2+i}$.
19. $(1+i)^{-2+i}$.
20. $(-1+i)^{-2+i}$.
21. $(-1-i)^{-2+i}$.
22. $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-i}$.
23. $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{-i}$.
24. $\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-i}$.
25. $\left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right)^{-i}$.
26. $i^{\sqrt{2}}$.
27. $i^{-\sqrt{2}}$.
28. $(-i)^{\sqrt{2}}$.
29. $(-i)^{-\sqrt{2}}$.
30. $i^{i\sqrt{2}}$.

Пример 6. Определить, существует ли область D , в которой функция $f(z)$ аналитическая (удовлетворяет условиям Коши-Римана); найти производную $f'(z)$ при $z \in D$, если:

1. $f(z) = e^z - 2z$.
2. $f(z) = e^{-z} - 2z$.
3. $f(z) = \sin z$.
4. $f(z) = \operatorname{sh} z$.
5. $f(z) = \cos z$.
6. $f(z) = \operatorname{ch} z$.
7. $f(z) = \sin^2 z$.

8. $f(z) = \operatorname{sh}^2 z.$

9. $f(z) = \cos^2 z.$

10. $f(z) = \operatorname{ch}^2 z.$

11. $f(z) = \sin z^2.$

12. $f(z) = \operatorname{sh} z^2.$

13. $f(z) = \cos z^2.$

14. $f(z) = \operatorname{ch} z^2.$

15. $f(z) = z + \frac{i}{z}.$

16. $f(z) = z^2 + \frac{i}{z}.$

17. $f(z) = z^3 + \frac{i}{z}.$

18. $f(z) = 3i - \frac{1}{z^2}.$

19. $f(z) = 2 \operatorname{Ln} z.$

20. $f(z) = 2 \operatorname{Ln} z + z.$

21. $f(z) = z^2 \cdot \operatorname{Re} z.$

22. $f(z) = z^2 \cdot \operatorname{Im} z.$

23. $f(z) = z + 3\bar{z}.$

24. $f(z) = z - i\bar{z}.$

25. $f(z) = \bar{z} / z.$

26. $f(z) = z^2 + 2iz.$

27. $f(z) = z^2 - 2iz.$

28. $f(z) = z^2 + 2\bar{z}.$

29. $f(z) = \bar{z}^2 - 2z.$

30. $f(z) = \sqrt{z\bar{z}}.$

Пример 7. Какая часть плоскости растягивается (сжимается) при конформном отображении, которое осуществляет функция $f(z)$. Найти также коэффициент растяжения k и угол поворота Θ в точке z_0 , если:

1. $f(z) = \frac{z-1}{z+i}, \quad z_0 = i.$

5. $f(z) = \frac{z-1}{z+1}, \quad z_0 = 0.$

2. $f(z) = \frac{z-1}{z+1}, \quad z_0 = -i.$

6. $f(z) = \frac{z-i}{z+i}, \quad z_0 = 0.$

3. $f(z) = \frac{z-i}{z+2i}, \quad z_0 = 1.$

7. $f(z) = z^2 + 2i, \quad z_0 = -1.$

4. $f(z) = \frac{z+i}{z-2i}, \quad z_0 = -1.$

8. $f(z) = z^2 - 2i, \quad z_0 = i.$

9. $f(z) = z^3 + 3i, \quad z_0 = -1.$

10. $f(z) = z^3 - 3i, \quad z_0 = i.$
11. $f(z) = 2/z, \quad z_0 = -1.$
12. $f(z) = 2i/z, \quad z_0 = i.$
13. $f(z) = \ln z, \quad z_0 = 2.$
14. $f(z) = \ln z, \quad z_0 = 2i.$
15. $f(z) = e^{-z}, \quad z_0 = i.$
16. $f(z) = e^{iz}, \quad z_0 = -i.$
17. $f(z) = e^{-2z}, \quad z_0 = 2i.$
18. $f(z) = e^{2z}, \quad z_0 = -2i.$
19. $f(z) = z^2 - 2z, \quad z_0 = i.$
20. $f(z) = z^2 + 2z, \quad z_0 = -i.$
21. $f(z) = \ln(z-1), \quad z_0 = i.$
22. $f(z) = \ln(z-i), \quad z_0 = 1.$
23. $f(z) = 2z^3, \quad z_0 = 1+i.$
24. $f(z) = 3z^3, \quad z_0 = 1-i.$
25. $f(z) = 2z^3, \quad z_0 = -1+i.$
26. $f(z) = 3z^3, \quad z_0 = -1-i.$
27. $f(z) = e^{iz}, \quad z_0 = i.$
28. $f(z) = e^{iz}, \quad z_0 = 2i.$
29. $f(z) = e^{-3iz}, \quad z_0 = i.$
30. $f(z) = e^{-3iz}, \quad z_0 = -i.$

Пример 8. Конформно отобразить на верхнюю полуплоскость $\text{Im } w > 0$ круговую лунку (двуугольник) вида:

1. $|z| < 1, \quad |z-1| < 1.$
2. $|z| < 1, \quad |z+1| < 1.$
3. $|z| < 1, \quad |z-i| < 1.$
4. $|z| < 1, \quad |z+i| < 1.$
5. $|z| < 1, \quad |z-1| > 1.$
6. $|z| < 1, \quad |z+1| > 1.$
7. $|z| < 1, \quad |z-i| > 1.$
8. $|z| < 1, \quad |z+i| > 1.$
9. $|z| > 1, \quad |z-1| < 1.$
10. $|z| > 1, \quad |z+1| < 1.$
11. $|z| > 1, \quad |z-i| < 1.$
12. $|z| > 1, \quad |z+i| < 1.$
13. $|z| > 1, \quad |z-1| > 1.$
14. $|z| > 1, \quad |z+1| > 1.$
15. $|z| > 1, \quad |z-i| > 1.$
16. $|z| > 1, \quad |z+i| > 1.$
17. $|z-1| < 1, \quad \text{Im } z > 0.$
18. $|z+1| < 1, \quad \text{Im } z > 0.$

$$19. |z - i| < 1, \quad \operatorname{Im} z < 0.$$

$$20. |z + i| < 1, \quad \operatorname{Im} z < 0.$$

$$21. |z| < 1, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

$$22. |z| < 1, \quad \operatorname{Re} z < 0.$$

$$23. |z| < 1, \quad \operatorname{Im} z > 0.$$

$$24. |z| < 1, \quad \operatorname{Im} z < 0.$$

$$25. |z| > 1, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

$$26. |z| > 1, \quad \operatorname{Im} z < 0.$$

$$27. |z| > 2, \quad |z - \sqrt{2}| < \sqrt{2}.$$

$$28. |z| > 2, \quad |z + \sqrt{2}| < \sqrt{2}.$$

$$29. |z| < 2, \quad |z + \sqrt{2}| < \sqrt{2}.$$

$$30. |z| < 2, \quad |z - \sqrt{2}| < \sqrt{2}.$$

Пример 9. Конформно отобразить на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ заданную односвязную область D с разрезом L , где:

$$1. D: \operatorname{Im} z > 0; \quad L = [0, 2i]$$

$$2. D: \operatorname{Im} z < 0; \quad L = [0, -3i].$$

$$3. D: \operatorname{Re} z > 0; \quad L = [2, +\infty).$$

$$4. D: \operatorname{Re} z < 0; \quad L = (-\infty, -2].$$

$$5. D = C; \quad L = [-1, +1].$$

$$6. D = C; \quad L = [-i, +i].$$

$$7. D = C; \quad L = [-1 - i, 1 + i].$$

$$8. D = C; \quad L = [-1 + i, 1 - i].$$

$$9. D: \operatorname{Im} z > 0; \\ L = \{z = e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \pi/2\}.$$

$$10. D: \operatorname{Im} z > 0; \\ L = \{z = e^{i\varphi}, \pi/2 \leq \varphi \leq \pi\}$$

$$11. D: |z| < 1; \quad L = [0.5, 1].$$

$$12. D: |z| < 1; \quad L = [-1, -0.5].$$

$$13. D: |z| < 1; \quad L = [0, 1].$$

$$16. D: |z| > 1; \quad L = [1, 2].$$

$$17. D: |z| > 1; \quad L = [1, +\infty).$$

$$18. D: |z| > 1; \quad L = [-2, -1].$$

$$19. D: |z| > 1; \quad L = [i, 2i].$$

$$20. D: |z| > 1; \quad L = [1, +\infty).$$

$$21. D: |z| > 1; \quad L = [i, +i\infty).$$

$$22. D: |z| < 1; \quad \operatorname{Im} z > 0; \\ L = [0, i/2].$$

$$23. D: |z| < 1; \quad \operatorname{Im} z > 0; L = [i/2, i].$$

$$24. D = \{0 < x < 1, -\infty < y < \infty\}.$$

$$25. D = \{-\infty < x < \infty, 0 < y < 1, \}.$$

$$26. D = \{-1 < x < 1, -\infty < y < \infty\}.$$

$$27. D = \{x > 0, 0 < y < 1\}.$$

$$28. D = \{x < 0, -1 < y < 0\}.$$

$$29. D = \{0 < x < 1, y > 0\}.$$

$$14. \quad D: |z| < 1; \quad L = [i/2, i].$$

$$30. \quad D: |z-1| > 1, \quad |z-2| < 2, \quad \text{Im}z > 0.$$

$$15. \quad D: |z| < 1; \quad L = [0, -i].$$

Пример 10. Используя интегральную формулу Коши и формулы для производных от нее, вычислить интегралы вида $\oint_{|z|=R} f(z) dz$, если:

$$1. \quad f(z) = \frac{e^z}{z^2 + 4}, \quad R = 3.$$

$$11. \quad f(z) = \frac{1}{z^2} \sin z, \quad R = 1.$$

$$2. \quad f(z) = \frac{e^z}{z^2 + 1}, \quad R = 2.$$

$$12. \quad f(z) = \frac{1}{z^3} \sin z, \quad R = 1.$$

$$3. \quad f(z) = \frac{e^z}{z(z-1)}, \quad R = 2.$$

$$13. \quad f(z) = \frac{1}{z} \sin^2 z, \quad R = 1.$$

$$4. \quad f(z) = \frac{e^z}{z^2(z-1)}, \quad R = 2.$$

$$14. \quad f(z) = \frac{\sin z}{z(z-1)}, \quad R = 2.$$

$$5. \quad f(z) = \frac{e^z}{z^3(z-1)}, \quad R = 2.$$

$$15. \quad f(z) = \frac{\sin z}{z(z+1)}, \quad R = 2.$$

$$6. \quad f(z) = \frac{e^z}{z(z-1)^2}, \quad R = 2.$$

$$16. \quad f(z) = \frac{\sin z}{z^2(z-1)}, \quad R = 2.$$

$$7. \quad f(z) = \frac{e^z}{z(z-1)^3}, \quad R = 2.$$

$$17. \quad f(z) = \frac{\sin z}{z(z+i)}, \quad R = 2.$$

$$8. \quad f(z) = \frac{e^z}{(z^2-1)^2}, \quad R = 2.$$

$$18. \quad f(z) = \frac{\sin z}{z(z-1)^2}, \quad R = 2.$$

$$9. \quad f(z) = \frac{e^z}{(z^2+1)^2}, \quad R = 2.$$

$$19. \quad f(z) = \frac{\sin z}{z^2(z-i)}, \quad R = 2.$$

$$20. \quad f(z) = \frac{\sin z}{z^2(z+i)}, \quad R = 2.$$

$$10. \quad f(z) = \frac{\sin z}{z}, \quad R = 1.$$

$$21. \quad f(z) = \frac{\text{ch } z}{z(z-1)}, \quad R = 2.$$

$$22. \quad f(z) = \frac{\operatorname{ch} z}{z^2(z+i)}, \quad R = 2.$$

$$27. \quad f(z) = \frac{z}{(z^2+1)^2}, \quad R = 2.$$

$$23. \quad f(z) = \frac{\operatorname{ch} z}{z(z-i)^2}, \quad R = 2.$$

$$28. \quad f(z) = \frac{z}{z^2-1}, \quad R = 2.$$

$$24. \quad f(z) = \frac{\operatorname{ch} z}{z^2}, \quad R = 2.$$

$$29. \quad f(z) = \frac{z}{z^2+1}, \quad R = 2.$$

$$25. \quad f(z) = \frac{\operatorname{sh} z}{z^2}, \quad R = 2.$$

$$30. \quad f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^3}, \quad R = 2.$$

$$26. \quad f(z) = \frac{z}{(z^2-1)^2}, \quad R = 2.$$

Пример 11. Определить нули и особые точки функции $f(z)$, если:

$$1. \quad f(z) = z \cdot \cos \sqrt{z}.$$

$$10. \quad f(z) = \frac{\sqrt{z}}{z^2+1}.$$

$$2. \quad f(z) = \frac{1}{z} \cdot \cos \sqrt{z}.$$

$$11. \quad f(z) = \frac{z}{1+\sqrt{z}}.$$

$$3. \quad f(z) = \frac{1}{z^2} \cdot \cos \sqrt{z}.$$

$$12. \quad f(z) = \frac{z}{\sqrt{z}-1}.$$

$$4. \quad f(z) = z \cdot \sin \sqrt{z}.$$

$$13. \quad f(z) = \frac{1}{2-\sin z}.$$

$$5. \quad f(z) = \frac{1}{z} \cdot \sin \sqrt{z}.$$

$$14. \quad f(z) = \frac{1}{z} \cdot \operatorname{tg}^2 z.$$

$$6. \quad f(z) = \frac{\sin \sqrt{z}}{z\sqrt{z}}.$$

$$15. \quad f(z) = \sqrt{\sin z}.$$

$$7. \quad f(z) = \frac{\sin \sqrt{z}}{z^2\sqrt{z}}.$$

$$16. \quad f(z) = \frac{1}{z^2} e^{-z}.$$

$$8. \quad f(z) = z\sqrt[3]{z}.$$

$$17. \quad f(z) = \sin \frac{1}{z+1}.$$

$$9. \quad f(z) = \frac{\sqrt[3]{z}}{z-1}.$$

$$18. \quad f(z) = z e^{-\frac{1}{z}}.$$

$$19. f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}.$$

$$20. f(z) = \frac{1}{1 - \sqrt{z-1}}.$$

$$21. f(z) = \frac{1}{1 + \sqrt{z-i}}.$$

$$22. f(z) = \operatorname{ctg} \frac{1}{z}.$$

$$23. f(z) = e^{\operatorname{tg} z}.$$

$$24. f(z) = \sqrt{z} \cdot \operatorname{cosec} \sqrt{z}.$$

$$25. f(z) = \operatorname{cosec} z - \frac{1}{z}.$$

$$26. f(z) = \left(z - i \frac{\pi}{2} \right) \cdot \operatorname{th} z.$$

$$27. f(z) = \left(z + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \operatorname{tg} z.$$

$$28. f(z) = z \cdot \operatorname{cth} z.$$

$$29. f(z) = z \cdot \operatorname{ctg} z.$$

$$30. f(z) = z \cdot \operatorname{ctg}^2 z.$$

Пример 12. Функцию $f(z)$ разложить в степенной ряд в окрестности точки z_0 (или внутри кольца), определить область сходимости полученного ряда, если:

$$1. f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}, \quad z_0 = \infty.$$

$$2. f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}, \quad z_0 = 0.$$

$$3. f(z) = \frac{1}{z(z-1)}, \quad z_0 = 0.$$

$$4. f(z) = \frac{1}{z(z-1)}, \quad z_0 = 1.$$

$$5. f(z) = \frac{1}{z(z-1)}, \quad z_0 = \infty.$$

$$6. f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}, \quad z_0 = 0.$$

$$7. f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}, \quad z_0 = i.$$

$$8. f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}, \quad z_0 = \infty.$$

$$9. f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2}, \quad z_0 = 0.$$

$$10. f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2}, \quad z_0 = i.$$

$$11. f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2}, \quad z_0 = \infty.$$

$$12. f(z) = \sqrt{z(z-1)}, \quad z_0 = \infty.$$

$$13. f(z) = \sqrt[3]{z^2(z-1)}, \quad z_0 = \infty.$$

$$14. f(z) = \sqrt[3]{z(z^2-1)}, \quad z_0 = \infty.$$

$$15. f(z) = \ln \frac{z-1}{z-i}, \quad z_0 = \infty.$$

$$16. f(z) = \frac{\sin \sqrt{z}}{z\sqrt{z}}, \quad z_0 = 0.$$

$$17. f(z) = \frac{\sin \sqrt{z}}{z\sqrt{z}}, \quad z_0 = \infty.$$

$$18. f(z) = \frac{\cos \sqrt{z}}{z}, \quad z_0 = \infty.$$

$$19. f(z) = \sqrt[3]{(z-1)(z-2)(z-3)}, \quad z_0 = \infty.$$

$$20. f(z) = z^4 e^{-1/z}, \quad z_0 = 0.$$

$$21. f(z) = z^3 e^{-1/z}, \quad z_0 = \infty.$$

$$22. f(z) = \frac{1}{z(1-z)}, \quad 0 < |z| < 1.$$

$$23. f(z) = \frac{1}{z(1-z^2)}, \quad 0 < |z| < 1.$$

$$24. f(z) = \sqrt{z}, \quad z_0 = 1.$$

$$25. f(z) = \sqrt[4]{z^3(z-1)}, \quad z_0 = \infty.$$

$$26. f(z) = \sqrt{\frac{z}{(z-1)(z-2)}}, \quad 0 < |z| < 2.$$

$$27. f(z) = \sqrt{\frac{z-1}{z(z-2)}}, \quad 0 < |z| < 2.$$

$$28. f(z) = \sqrt{\frac{z-2}{z(z-1)}}, \quad 0 < |z| < 2.$$

$$29. f(z) = \cos \frac{z^2 - 4z}{(z-2)^2}, \quad z_0 = 2.$$

$$30. f(z) = \sin \frac{z^2 + 4z}{(z+2)^2}, \quad z_0 = -2.$$

Пример 13. Вычислить с помощью вычетов контурный интеграл

$\oint_{|z|=R} f(z) dz$, где:

$$1. f(z) = z^3 e^{-1/z}, \quad R = 1.$$

$$2. f(z) = z e^{-1/z^2}, \quad R = 1.$$

$$3. f(z) = \operatorname{cosec} z, \quad R = \pi/2.$$

$$4. f(z) = \sec z, \quad R = \pi.$$

$$5. f(z) = \operatorname{tg} z, \quad R = \pi.$$

$$6. f(z) = \operatorname{ctg} z, \quad R = 1.$$

$$7. f(z) = \operatorname{cth} z, \quad R = 1.$$

$$8. f(z) = \sin \frac{1}{z}, \quad R = 1.$$

$$9. f(z) = z \cdot \cos \frac{1}{z}, \quad R = 1.$$

$$10. f(z) = \sin^2 \frac{1}{z}, \quad R = 1.$$

$$11. f(z) = \frac{z}{\sqrt{z^2 + 1}}, \quad R = 2.$$

$$12. f(z) = \frac{z}{(z-3)(z^5 - 1)}, \quad R = 2.$$

13. $f(z) = \frac{1}{z^6(z-2)}, R=1.$ 22. $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}, R=2.$
14. $f(z) = \frac{1}{z^5(z-2)^2}, R=1.$ 23. $f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2}, R=2.$
15. $f(z) = \frac{z}{z^6+1}, R=2.$ 24. $f(z) = \frac{\sin z}{(z+\pi)^2}, R=4.$
16. $f(z) = \cos\left(\cos\frac{1}{z}\right), R=1.$ 25. $f(z) = \frac{\cos z}{(z-\pi/2)^2}, R=3.$
17. $f(z) = z \cdot \sin\left(\sin\frac{1}{z}\right), R=1.$ 26. $f(z) = \frac{\operatorname{tg} z}{z^2}, R=1.$
18. $f(z) = \cos\left(z^3 \cos\frac{1}{z}\right), R=1.$ 27. $f(z) = \frac{\operatorname{th} z}{z^2}, R=1.$
19. $f(z) = \sin\left(z^3 \sin\frac{1}{z}\right), R=1.$ 28. $f(z) = \frac{\operatorname{ctg} z}{z}, R=1.$
20. $f(z) = \frac{1}{(z-z^3)}, R=2.$ 29. $f(z) = \frac{\operatorname{cth} z}{z}, R=1.$
21. $f(z) = \frac{1}{(z+z^4)}, R=2.$ 30. $f(z) = z \cdot \operatorname{tg}\frac{1}{z}, R=1.$

Пример 14. Вычислить с помощью вычетов определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где:

1. $f(x) = \frac{1}{2 + \cos x}; \quad a = 0, b = 2\pi.$
2. $f(x) = \frac{1}{2 + \sin x}; \quad a = 0, b = 2\pi.$
3. $f(x) = \frac{1}{2 - \cos x}; \quad a = 0, b = 2\pi.$

4. $f(x) = \frac{1}{2 - \sin x}; \quad a = 0, b = 2\pi.$
5. $f(z) = e^{\cos x} \cdot \cos(2x - \sin x); \quad a = 0, b = 2\pi.$
6. $f(x) = e^{\cos x} \cdot \cos(3x + \sin x); \quad a = 0, b = 2\pi.$
7. $f(x) = \operatorname{tg}(x - i\pi/3); \quad a = 0, b = 5\pi.$
8. $f(x) = \operatorname{ctg}(x + i\pi/3); \quad a = 0, b = 5\pi.$
9. $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 4)^2}; \quad a = 0, b = \infty.$
10. $f(x) = \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2}; \quad a = 0, b = \infty.$
11. $f(x) = \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10}; \quad -a = b = \infty.$
12. $f(x) = \frac{x \sin x}{x^2 + 4x + 20}; \quad -a = b = \infty.$
13. $f(x) = \frac{\sin x}{x^2 - 2x + 10}; \quad -a = b = \infty.$
14. $f(x) = \frac{x \cos x}{x^2 + 4x + 20}; \quad -a = b = \infty.$
15. $f(x) = \frac{\cos x}{x^2 - 5x + 6}; \quad -a = b = \infty.$
16. $f(x) = \frac{x \sin x}{x^2 + 1}; \quad a = 0, b = \infty.$
17. $f(x) = \frac{\cos x}{x^2 + 1}; \quad a = 0, b = \infty.$
18. $f(x) = \frac{\sin x}{x}; \quad a = 0, b = \infty.$
19. $f(x) = \frac{\sin 2x}{x - 3}; \quad -a = b = \infty.$

20. $f(x) = \frac{\cos 2x}{x-3}$; $-a = b = \infty$.
21. $f(x) = \frac{\sin x}{(x-1)(x^2+4)}$; $-a = b = \infty$.
22. $f(x) = \frac{\sin x}{x(x^2+4)}$; $a = 0, b = \infty$.
23. $f(x) = \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}$; $a = 0, b = \infty$.
24. $f(x) = \frac{1}{x^2} \cdot (\cos 2x - \cos 4x)$; $a = 0, b = \infty$.
25. $f(x) = \frac{\cos x}{x^2-1}$; $a = 0, b = \infty$.
26. $f(x) = \frac{x \sin x}{x^2-1}$; $a = 0, b = \infty$.
27. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} \cdot (x^2+1)}$; $a = 0, b = \infty$.
28. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x} \cdot (x^2+1)}$; $a = 0, b = \infty$.
29. $f(x) = \frac{\ln x}{x^2+1}$; $a = 0, b = \infty$.
30. $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x^2+1}$; $a = 0, b = \infty$.

Пример 15. Используя методы операционного исчисления, решить предложенные задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (для систем таких уравнений), или вычислить определенные интегралы, или решить интегральные уравнения. Все параметры $a, b > 0$.

1. $y'' + 2y' + 2y(x) = 1$; $y(0) = 1, y'(0) = 2$.
2. $y'' - 6y' + 9y(x) = 2$; $y(0) = 1, y'(0) = 3$.

$$3. \quad y'' - y' - 6y(x) = 2; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

$$4. \quad \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx \, dx.$$

$$5. \quad y'' - 9y(x) = 2 - x; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

$$6. \quad y'' - 4y(x) = 4x; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

$$7. \quad y'' + 4y(x) = 2 \cos 2x; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 4.$$

$$8. \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} \, dx.$$

$$9. \quad y'' + y(x) = x^3 + 6x; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

$$10. \quad y'' + y(x) = \cos x + \sin 2x; \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

$$11. \quad y'' - 4y(x) = 4e^{2x}; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

$$12. \quad \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin x \cdot \cos bx \, dx.$$

$$13. \quad y'' + 2y' + y(x) = x - 2; \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

$$14. \quad y'' + 9y(x) = e^x; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

$$15. \quad y'' + 4y' + 4y(x) = 2 \sin x; \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

$$16. \quad \int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin bx}{x} \, dx.$$

$$17. \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = 3z - y; \\ \frac{dz}{dx} = z + y + e^x, \end{cases} \quad y(0) = z(0) = 0.$$

$$18. \quad y'' + y(x) = \sin 2x; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

$$19. \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2y + 3z; \\ \frac{dz}{dx} = y + 1, \end{cases} \quad y(0) = z(0) = 0.$$

$$20. \int_0^{\infty} (\cos ax - \cos bx) \frac{dx}{x}.$$

$$21. y'' + y(x) = 2 + e^{-x}; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

$$22. y'' + 6y' + 5y(x) = 3x; \quad \vdots \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

$$23. y'' + 6y' + 13y(x) = 2x; \quad \vdots \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$$

$$24. \int_0^{\infty} \frac{x - \sin x}{x^3} dx.$$

$$25. \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos ax}{x^2} dx.$$

$$26. \int_0^{\infty} \frac{\sin ax - a \cdot \sin x}{x^2} dx.$$

$$27. \operatorname{sh} x = \int_0^x \cos(x - \xi) \cdot y(\xi) d\xi.$$

$$28. \sin^2 x = \int_0^x \sin(x - \xi) \cdot y(\xi) d\xi.$$

$$29. y(x) = \int_0^x e^{-(x-\xi)} \cdot y(\xi) d\xi + \cos 3x.$$

$$30. y(x) = \int_0^x \sin(x - \xi) \cdot y(\xi) d\xi + x^3.$$

Пример 16. Пользуясь теоремой Руше, найти количество лежащих внутри круга $|z| < 1$ корней заданных уравнений:

$$1. z^7 - 5z^4 + z^2 - 2 = 0.$$

$$2. 2z^5 - z^3 + 3z^2 - z + 8 = 0.$$

$$3. z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2 = 0.$$

$$4. z^4 - 7z + 1 = 0.$$

$$5. z^7 + 5z^4 - z^2 + 2 = 0.$$

$$6. z^4 - 8z + 10 = 0.$$

$$7. 2z^5 + z^3 - 3z^2 + z - 8 = 0.$$

$$8. z^6 + 6z - 1 = 0.$$

$$9. \quad z^5 + 8z - 11 = 0.$$

$$10. \quad z^9 + 2z^6 - z^2 + 8z + 2 = 0.$$

$$11. \quad z^4 - 7z^2 + z - 1 = 0.$$

$$12. \quad z^4 + 5z^2 + z + 1 = 0.$$

$$13. \quad z^8 - 4z^2 + 1 = 0.$$

$$14. \quad z^7 - 3z^2 - 1 = 0.$$

$$15. \quad z^7 + 5z^2 + 1 = 0.$$

$$16. \quad z^7 - 4z^2 + 2 = 0.$$

$$17. \quad z^5 - 5z^2 + z + 1 = 0.$$

$$18. \quad z^5 + 5z^2 - 2z - 1 = 0.$$

$$19. \quad z^5 - 4z^2 - 1 = 0.$$

$$20. \quad z^5 + 6z^2 - z + 1 = 0.$$

$$21. \quad z^4 + 8z^2 - z - 5 = 0.$$

$$22. \quad z^4 - 5z^2 - 3 = 0.$$

$$23. \quad z^3 - 5z^2 + 1 = 0.$$

$$24. \quad z^3 - 6z^2 + z - 1 = 0.$$

$$25. \quad z^3 - 7z^2 + 2z - 2 = 0.$$

$$26. \quad z^5 - 6z^2 + 12 = 0.$$

$$27. \quad z^5 + 7z^2 + z - 1 = 0.$$

$$28. \quad z^5 - 8z^2 + z - 4 = 0.$$

$$29. \quad z^5 + 4z + 1 = 0.$$

$$30. \quad z^5 - 5z^2 - 1 = 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. – М.: Наука, 1979. – 319 с.
2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
3. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1982. – 477 с.
4. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1975. – 320 с.
5. Шелковников Ф.А., Такайшвили К.Г. Сборник упражнений по операционному исчислению. – М.: Высш. школа, 1978. – 184 с.
6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 724 с.
7. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высш. школа, 1970. – 712 с.
8. Сборник задач по теории аналитических функций / Под ред. М.А. Евграфова. – М.: Наука, 1972. – 416 с.
9. Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики / Под ред. Г.И. Кручковича. – М.: Высш. школа, 1970. – 512 с.
10. Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э., Араманович И.Г. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Устойчивость движения. – М.: Наука, 1968. – 416 с.
11. Шахно К.У. Элементы теории функций комплексной переменной и операционного исчисления. – Минск: Вышейш. школа, 1975. – 400 с. с илл.
12. Грищенко А.Е., Нагнибида Н.И., Настасиев П.П. Теория функций комплексного переменного (Решение задач). – К.: Вища шк., 1986. – 336 с.

Навчальне видання

Кондратьєв Борис Володимирович

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до розв'язку задач з теорії функцій
комплексного змінного

для студентів радіофізичного
та фізичного факультетів

Коректор *Л. Є. Стешенко*
Комп'ютерна верстка *Н. Є. Пруднік*
Макет обкладинки *І. М. Дончик*

Формат 60x84/16. Умов. друк. арк. 3,98. Наклад 100 прим. Зам. № 23/11

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
61077, м. Харків, пл. Свободи, 4.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.2009

Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна
Тел. 705-24-32