Е. А. Каролинский

Теория алгебр Ли

Харьков – 2003

Литература:

1. J.E. Humphreys. Introduction to Lie algebras and representation theory.

2. Ж.-П. Серр. Алгебры Ли и группы Ли (части 1 и 3).

3. Э. Винберг, А. Онищик. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. (Наряду с алгебрами Ли рассматриваются тесно связанные с ними т.наз. группы Ли и алгебраические группы; изложение ведется в виде серии задач.)

4. М. Постников. Группы и алгебры Ли. (Упор на теорию групп Ли.)

5. Дж. Хамфри. Линейные алгебраические группы. (Книга по алгебраическим группам.)

Что такое алгебра Ли?

Пусть $\Bbbk$ — поле (в дальнейшем мы в основном будем рассматривать случай $\Bbbk = \mathbb{C}$, но пока пусть $\Bbbk$ — любое поле).

Определение 1. *Алгебра* над $\Bbbk$ — это линейное пространство A над $\Bbbk$, наделенное $\Bbbk$-билинейной операцией "умножения" $A \times A \to A$, $(x, y) \mapsto x * y$.

Мы часто будем говорить просто "алгебра" вместо "алгебра над $\Bbbk$", если ясно, о каком именно $\Bbbk$ идет речь.

Определение 2. *Алгебра Ли* — это алгебра $\mathfrak{g}$ с умножением, называемым коммутатором и обозначаемым $[\cdot, \cdot]$, таким, что

1) $[x, x] = 0$ ($\Rightarrow [x, y] = -[y, x]$, $\Leftarrow$ верно, если $\operatorname{char} \Bbbk \neq 2$),

2) $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ (*тождество Якоби*, сокращенно $[[x, y], z] + \mathrm{cycl} = 0$).

Определение 3. *Гомоморфизм* между алгебрами Ли $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ — это линейное отображение $f : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ такое, что $f([x, y]) = [f(x), f(y)]$. *Изоморфизм* — это обратимый (т.е. биективный) гомоморфизм. Алгебры Ли $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ *изоморфны* (обозначение: $\mathfrak{g}_1 \simeq \mathfrak{g}_2$), если между ними существует изоморфизм.

Как построить (естественные) примеры алгебр Ли, и почему операцию в алгебре Ли принято обозначать $[\cdot, \cdot]$ и называть коммутатором? Для ответа на эти вопросы напомним определение более привычного класса алгебр:

Определение 4. Алгебра A (с операцией $\cdot$) называется *ассоциативной,* если $\cdot$ ассоциативна.

Пусть A — ассоциативная алгебра. Введем в A другую операцию: $[x, y] := xy - yx$ (т.наз. *коммутатор* x и y). Пусть $A^{(-)}$ — это A с операцией $[\cdot, \cdot]$. Оказывается, $A^{(-)}$ — алгебра Ли. В самом деле, билинейность $[\cdot, \cdot]$ и тождество $[x, x] = 0$ очевидны. Проверим тождество Якоби. Имеем:

$$[[x, y], z] = [x, y]z - z[x, y] = xyz - yxz - zxy + zyx = (xyz - zxy) + (zyx - yxz).$$

Ясно, что, $(xyz - zxy) + \mathrm{cycl} = 0$, $(zyx - yxz) + \mathrm{cycl} = 0$, т.е. $[[x, y], z] + \mathrm{cycl} = 0$.

Важный частный случай: пусть V — линейное пространство над $\Bbbk$, $A = \operatorname{End} V$ — (ассоциативная) алгебра всех линейных операторов $V \to V$. Тогда алгебра Ли $A^{(-)}$ обозначается через $\mathfrak{gl}(V)$ и называется *полной линейной* (general linear) алгеброй Ли пространства V.

Если $\dim_{\Bbbk} V = n < \infty$, то выбор базиса в пространстве V задает изоморфизмы $V \simeq \Bbbk^n$ и $\operatorname{End} V \simeq \operatorname{Mat}(n, \Bbbk)$. Алгебра Ли $\operatorname{Mat}(n, \Bbbk)^{(-)}$ обозначается через $\mathfrak{gl}(n, \Bbbk)$; ясно, что $\mathfrak{gl}(n, \Bbbk) \simeq \mathfrak{gl}(V)$.

Не следует думать, что все алгебры Ли имеют вид $A^{(-)}$ для некоторой ассоциативной алгебры A. Чтобы привести другие примеры, нам понадобится

Определение 5. *Подалгебра Ли* в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ — это линейное подпространство $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, замкнутое относительно $[\cdot,\cdot]$ (т.е. если $x, y \in \mathfrak{h}$, то $[x, y] \in \mathfrak{h}$).

Очевидно, подалгебра Ли сама является алгеброй Ли (относительно "той же" операции).

Примеры подалгебр Ли (в полной линейной алгебре Ли)

1) Пусть $\dim_{\Bbbk} V < \infty$. *Специальная линейная алгебра Ли* — это

$$\mathfrak{sl}(V) := \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid \operatorname{Tr} x = 0\}.$$

Почему это подалгебра Ли в $\mathfrak{gl}(V)$? Это линейное подпространство, поскольку Tr — линейный функционал. Известно (Упр. для тех, кому это не известно...), что $\operatorname{Tr} xy = \operatorname{Tr} yx$. Поэтому $\operatorname{Tr}[x, y] = 0$ даже для любых $x, y \in \mathfrak{gl}(V)$.

Отметим, что $\mathfrak{sl}(V)$ не замкнуто относительно "обычного" умножения.

На "матричном" языке имеем $\mathfrak{sl}(n, \Bbbk) := \{X \in \mathfrak{gl}(n, \Bbbk) \mid \operatorname{Tr} X = 0\}$; если $\dim_{\Bbbk} V = n$, то $\mathfrak{sl}(n, \Bbbk) \simeq \mathfrak{sl}(V)$.

2) Пусть $\operatorname{char} \Bbbk \neq 2$. *Ортогональная алгебра Ли* — это

$$\mathfrak{o}(n, \Bbbk) := \{X \in \mathfrak{gl}(n, \Bbbk) \mid X + X^T = 0\}$$

(здесь X^T — матрица, транспонированная к X).

Упр. Проверьте, что $\mathfrak{o}(n, \Bbbk)$ — подалгебра Ли в $\mathfrak{gl}(n, \Bbbk)$.

Как задать $\mathfrak{o}(n, \Bbbk)$ на "операторном" языке? Пусть B — симметрическая невырожденная билинейная форма в конечномерном векторном пространстве V. Рассмотрим

$$\mathfrak{g} = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid B(xv, w) + B(v, xw) = 0 \ \forall v, w \in V\}.$$

Упр. Проверьте, что $\mathfrak{g}$ — подалгебра Ли в $\mathfrak{gl}(V)$ (ее тоже называют ортогональной алгеброй Ли (связанной с B), и часто обозначают через $\mathfrak{o}(V, B)$).

Если, скажем, $\Bbbk = \mathbb{C}$, то форма B приводится к сумме квадратов в подходящем базисе.

Упр. Выбор этого базиса индуцирует изоморфизм $\mathfrak{o}(V, B) \simeq \mathfrak{o}(n, \mathbb{C})$ (где $n = \dim_{\mathbb{C}} V$).

Если $\Bbbk = \mathbb{R}$, то существуют формы разной сигнатуры. Если сигнатура B содержит p плюсов и q минусов ($p + q = n$), то соответствующая алгебра Ли (точнее, ее матричная реализация в базисе диагонализации для B) обозначается через $\mathfrak{o}(p, q)$.

Упр. Проверьте, что $\mathfrak{o}(p, q)$ с точностью до изоморфизма зависит лишь от p q (но не от B).

Упр. а) $\mathfrak{o}(n, 0) = \mathfrak{o}(n, \mathbb{R})$, б) $\mathfrak{o}(p, q) = \mathfrak{o}(q, p)$.

Полезно рассматривать не только симметрические, но и кососимметрические билинейные формы.

Задача Пусть $\operatorname{char} \Bbbk \neq 2$, V — конечномерное линейное пространство над $\Bbbk$.

1) Докажите, что если в пространстве V существует кососимметрическая невырожденная билинейная форма, то $\dim V$ четна (и обратно...),

2) Пусть $\dim V$ четна. Докажите, что все невырожденные кососимметрические билинейные формы в V изоморфны (т.е. переводятся друг в друга линейными автоморфизмами V; иначе говоря, имеют одну и ту же матрицу, например

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & -1 & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

в подходящих базисах).

Таким образом, в некотором смысле невырожденные кососимметрические билинейные формы устроены проще, чем симметрические (строение "одинаковое" над любым полем).

Если B — невырожденная кососимметрическая билинейная форма в (четномерном) пространстве V, то аналогично определяется

$$\mathfrak{g} = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \,|\, B(xv, w) + B(v, xw) = 0 \;\forall\, v, w \in V\}$$

и проверяется, что это подалгебра Ли в $\mathfrak{gl}(V)$. Ее называют *симплектической алгеброй Ли* и обозначают через $\mathfrak{sp}(V)$ (или $\mathfrak{sp}(n, \Bbbk)$, где $n = \dim_{\Bbbk} V$).

Упр. Проверьте, что с точностью до изоморфизма $\mathfrak{sp}(V)$ не зависит от выбора B.

Оказывается, что подалгебры Ли в алгебрах Ли вида $A^{(-)}$ (где A — ассоциативная алгебра) — это "универсальный" пример:

Факт. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. Тогда

1) $\mathfrak{g}$ изоморфна подалгебре Ли в $A^{(-)}$ для некоторой ассоциативной алгебры A,

2) (теорема Адо-Ивасавы) если $\mathfrak{g}$ *конечномерна* (т.е. $\dim_{\Bbbk} \mathfrak{g} < \infty$), то $\mathfrak{g}$ изоморфна подалгебре Ли в $\mathfrak{gl}(N, \Bbbk)$ для подходящего N (т.е. в качестве A можно взять $\mathrm{Mat}(N, \Bbbk)$).

Еще примеры алгебр Ли (непохожие на предыдущие, что подчеркивает нетривиальность приведенного выше факта)

1) Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольное линейное пространство. Наделим $\mathfrak{g}$ операцией $[\cdot,\cdot]$, положив $[x, y] = 0 \;\forall\, x, y \in \mathfrak{g}$. Ясно, что получится алгебра Ли.

Алгебра Ли, в которой $[x, y] = 0 \;\forall\, x, y$, называется *абелевой* (или *коммутативной*). Разумеется, умножение в ассоциативной алгебре A коммутативно тогда и только тогда, когда алгебра Ли $A^{(-)}$ абелева.

Вот "живой" пример абелевой алгебры Ли: пусть

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \Bbbk) \,|\, X \text{ диагональна}\}.$$

Ясно, что $\mathfrak{h}$ — абелева подалгебра Ли в $\mathfrak{gl}(n, \Bbbk)$.

2) Пусть $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^3$ (со стандартной евклидовой структурой), $[\cdot,\cdot]$ — векторное произведение.

Упр. Проверьте, что $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над $\mathbb{R}$ (тождество Якоби нетрудно вывести из "бац минус цаб").

3) Пусть $\mathfrak{g} = C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. Обозначим координаты в $\mathbb{R}^{2n}$ через $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$. Если $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, то положим

$$\{f, g\} := \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} \right)$$

— это т.наз. скобка Пуассона f и g.

Упр. Проверьте, что $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли относительно $\{\cdot, \cdot\}$(эта алгебра Ли, в отличие от большинства предыдущих примеров, бесконечномерна; в этом курсе мы в основном будем заниматься конечномерными алгебрами Ли).

Замечание. Алгебры Ли над фиксированным полем $\Bbbk$ образуют категорию $\mathrm{Lie}_\Bbbk$. (Что такое категория? В категории $\mathrm{Lie}_\Bbbk$ объекты — это алгебры Ли, морфизмы — это гомоморфизмы алгебр Ли). Она содержит полную подкатегорию (что это?) конечномерных алгебр Ли.

Соглашение Всюду далее слова "алгебра Ли" означают "конечномерная алгебра Ли" (если не оговорено противное).

Алгебры Ли и группы Ли

Зачем нужны алгебры Ли? Оказывается, они тесно связаны с важным (для геометрии, физики и т. д.) класом групп — т.наз. группами Ли. Мы не будем заниматься теорией групп Ли систематически, но объясним, что это такое и в чем связь с алгебрами Ли, на пальцах. Мы ограничимся случаем вещественных групп Ли (хотя все, с минимальными модификациями, будет верно и для комплексных групп Ли).

Группа Ли — это группа, являющаяся в то же время гладким многообразием, причем умножение — гладкое отображение.

Гладкое многообразие — это, грубо говоря, топологическое пространство, гладко склеенное из кусков, гомеоморфных открытым подмножествам в $\mathbb{R}^n$. Поскольку локально гладкое многообразие устроено "как $\mathbb{R}^n$", то имеет смысл говорить о гладких функциях на нем и о гладких отображениях в другое гладкое многообразие. (Гладкость мы понимаем в смысле C^∞.)

Примеры гладких многообразий: $\mathbb{R}^n$ и его открытые подмножества, сферы $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, гладкие кривые и поверхности, и т. п.

Основной (для нас сейчас) пример группы Ли — это

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{g \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid \det g \neq 0\}$$

— т.наз. *полная линейная группа.* Это группа Ли, поскольку она — открытое подмножество в пространстве $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ (Упр. проверьте, что умножение гладко...).

Другие примеры будут подгруппами в $GL(n,\mathbb{R})$ (внимание: существуют и группы Ли, не вложимые в $GL(n,\mathbb{R})$). Именно:

1) $SL(n,\mathbb{R}) = \{g \in GL(n,\mathbb{R}) \mid \det g = 1\}$ — *специальная линейная группа*;

2) $O(n) = \{g \in GL(n,\mathbb{R}) \mid gg^T = E\}$ — *ортогональная группа*;

3) $SO(n) = O(n) \cap SL(n,\mathbb{R}) = \{g \in O(n) \mid \det g = 1\}$ — *специальная ортогональная группа* (Упр. Если $g \in O(n)$, то $\det g = \pm 1$);

4) группа всех невырожденных верхнетреугольных матриц;

5) группа всех невырожденных верхнетреугольных матриц с единицами на диагонали;

6) группа всех невырожденных диагональных матриц.

Можно проверить, что все это — действительно группы Ли (нетривиальный факт: любая замкнутая подгруппа в $GL(n,\mathbb{R})$ имеет естественную структуру группы Ли).

Мы хотим сопоставить каждой группе Ли алгебру Ли. Оказывается, что алгебра Ли полностью описывает (как минимум) локальное строение соответствующей группы Ли.

Итак, пусть G — группа Ли, $G \subset GL(n,\mathbb{R})$. (По существу, все дальнейшие конструкции верны и для "абстрактных" групп Ли; нужно только придать им смысл.) Определим $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ следующим образом: $A \in \mathfrak{g}$ тогда и только тогда, когда существует гладкая кривая $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ такая, что $\gamma(0) = E$, $\dot\gamma(0) = A$ (здесь и далее $\dot\gamma(0) = \frac{d}{dt}\gamma(t)|_{t=0}$).

Теорема 1. $\mathfrak{g}$ — *подалгебра Ли в* $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$.

Замечание. Ее-то и называют алгеброй Ли группы Ли G. Обычно это обозначают так: $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G$. По традиции, если группа Ли обозначена большими латинскими буквами, то ее алгебру Ли обозначают (теми же) маленькими готическими буквами.

Прежде чем доказывать теорему, посмотрим на примеры.

Примеры. 0) Пусть $G = GL(n,\mathbb{R})$. Так как G открыта в пространстве $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$, то $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ (более педантично, для любой матрицы A матрица $E + tA$ обратима для достаточно малых t).

1) Пусть $G = SL(n,\mathbb{R})$. Пусть γ — гладкая кривая такая, что $\gamma(0) = E$, $\dot\gamma(0) = A$. Упр. $\frac{d}{dt}\det\gamma(t)|_{t=0} = \mathrm{Tr}\, A$. Так как у нас дополнительно $\det\gamma(t) = 1$, то $\mathrm{Tr}\, A = 0$.

Обратно, пусть $\mathrm{Tr}\, A = 0$. Положим $\gamma(t) = \exp tA$. (Напоминание:

$$\exp A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!},$$

ряд сходится для всех матриц A.) Тогда $\gamma(0) = E$, $\dot\gamma(0) = A$. Упр. $\det\exp A = e^{\mathrm{Tr}\, A}$ (для любой матрицы A). Поэтому $\gamma(t) \in SL(n,\mathbb{R})$.

Итак, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$.

2) Пусть $G = O(n)$. Аналогично предыдущему примеру проверяется (Упр. проверьте), что $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(n) = \mathfrak{o}(n, \mathbb{R})$ (ключевое вычисление: если $\gamma(0) = E$, $\dot\gamma(0) = A$, то $\frac{d}{dt}\gamma(t)\gamma(t)^T|_{t=0} = A + A^T$).

3) Пусть $G = SO(n) = O(n) \cap SL(n, \mathbb{R})$. Аналогично предыдущему, легко проверить, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(n) \cap \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid A + A^T = 0, \operatorname{Tr} A = 0\}$. Но если $A + A^T = 0$, то автоматически $\operatorname{Tr} A = 0$. Итак, $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(n)$ (иначе говоря, $\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{o}(n)$). Объяснение: группа $O(n)$ несвязна, $O(n) = SO(n) \sqcup \{g \in O(n) \mid \det g = -1\}$. (Можно проверить, что $SO(n)$ уже связна.) Это согласуется с утверждением о том, что алгебра Ли "кодирует" группу Ли лишь локально в окрестности единицы.

Упр. Вычислите алгебры Ли для других групп Ли, упомянутых выше.

Доказательство теоремы 1. 1) Почему $\mathfrak{g}$ — линейное подпространство в $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$? В самом деле, если $A = \dot\gamma(0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, то $\lambda A = \frac{d}{dt}\gamma(\lambda t)|_{t=0}$. (Отметим, что ε из определения $\mathfrak{g}$ — свое для каждого γ.) Далее, пусть $A_1, A_2 \in \mathfrak{g}$, $A_i = \dot\gamma_i(0)$. Тогда $A_1 + A_2 = \frac{d}{dt}\gamma_1(t)\gamma_2(t)|_{t=0}$ (здесь, конечно, важно, что $\gamma_i(0) = E$).

2) Пусть $A_1, A_2 \in \mathfrak{g}$. Почему $[A_1, A_2] \in \mathfrak{g}$? Пусть $A_i = \dot\gamma_i(0)$, где $\gamma_i(0) = E$. Упр. Проверьте, что

$$[A_1, A_2] = \frac{\partial^2}{\partial s\, \partial t}\gamma_1(s)\gamma_2(t)\gamma_1(s)^{-1}\gamma_2(t)^{-1}|_{s=t=0}.$$

Отсюда все и вытекает, ибо

$$A(s) := \frac{\partial}{\partial t}\gamma_1(s)\gamma_2(t)\gamma_1(s)^{-1}\gamma_2(t)^{-1}|_{t=0} \in \mathfrak{g}$$

при всех s (почему?), а далее происходит дифференцирование кривой $A(s)$ в векторном пространстве $\mathfrak{g}$ (т.е. $[A_1, A_2] = \frac{d}{dt}A(s)|_{s=0}$). $\square$

Замечание. 1) Из доказательства теоремы следует, что сложение в алгебре Ли группы Ли "происходит" из умножения в группе, а коммутатор — из группового коммутатора.

2) Можно доказать, что $A \in \mathfrak{g} \Leftrightarrow \exp tA \in G$ для всех $t \in \mathbb{R}$. (Утверждение "$\Leftarrow$" очевидно, и мы им, по сути дела, пользовались при разборе примеров.) Кривая вида $\exp tA$ обладает замечательными дополнительными свойствами. Во-первых, она определена "глобально", т.е. при всех t. Во-вторых (и это главное), $\exp(s+t)A = \exp sA \exp tA$, т.е. мы получаем гладкий гомоморфизм групп $\mathbb{R} \to G$ (такие гомоморфизмы еще называют однопараметрическими подгруппами).

Всему этому (включая экспоненциальное отображение $\exp : \mathfrak{g} \to G$) можно придать смысл для произвольной (т.е. не вложенной в $GL(n, \mathbb{R})$) группы Ли. Ключевое наблюдение, позволяющее определить $\exp$ в общем случае: $g(t) = \exp tA$ — это решение задачи Коши $\dot g = Ag$, $g(0) = E$.

Итак, мы научились сопоставлять группе Ли алгебру Ли. Можно пойти дальше. Группы Ли образуют категорию, и соответствие $G \mapsto \mathfrak{g} = \operatorname{Lie} G$ можно достроить до функтора (что это?) из категории групп Ли в категорию алгебр Ли. Получится т.наз. *функтор Ли*. Этот функтор "почти" является эквивалентностью категорий (что это?); точнее, он будет эквивалентностью категорий, если ограничиться связными односвязными группами Ли и конечномерными (вещественными) алгебрами Ли.

Морфизмы в категории групп Ли — это, по определению, гомоморфизмы групп, являющиеся гладкими отображениями.

Примеры. 0) Тождественный морфизм; единичный морфизм (т.е. $G_1 \to G_2$, $g \mapsto E$ $\forall\, g \in G_1$);

1) $\det : GL(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*(= GL(1,\mathbb{R}))$;

2) $f : GL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R})$, $f(g) = (g^T)^{-1}$.

Пусть G_1 и G_2 — группы Ли, $G_1 \subset GL(m,\mathbb{R})$, $G_2 \subset GL(n,\mathbb{R})$. Пусть $\mathfrak{g}_1 = \mathrm{Lie}\, G_1$, $\mathfrak{g}_2 = \mathrm{Lie}\, G_2$. Пусть $f : G_1 \to G_2$ — морфизм групп Ли. Сопоставим ему отображение $\varphi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$, определенное следующим образом: если $A \in \mathfrak{g}_1$, $A = \dot\gamma(0)$ (где, как всегда, γ — гладкая кривая на группе G_1, $\gamma(0) = E$), то $\varphi(A) := \frac{d}{dt} f(\gamma(t))|_{t=0}$. Иными словами, φ — это дифференциал f в единице группы G_1 (отсюда сразу вытекает линейность φ). Легко видеть, что φ определено корректно и принимает значения в $\mathfrak{g}_2$.

Упр. φ — гомоморфизм алгебр Ли.

Примеры. 1) Пусть $f = \det : GL(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$. Пусть $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, $A = \dot\gamma(0)$, где $\gamma(0) = E$. Так как $\frac{d}{dt} \det \gamma(t)|_{t=0} = \mathrm{Tr}\, A$, то $\varphi(A) = \mathrm{Tr}\, A$, т.е. $\varphi = \mathrm{Tr}$.

2) Пусть $f : GL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R})$, $f(g) = (g^T)^{-1}$. Упр. Проверьте, что $\varphi(A) = -A^T$.

Положим $\varphi = \mathrm{Lie}\, f$.

Упр. $\mathrm{Lie}\,(f_1 \circ f_2) = \mathrm{Lie}\, f_1 \circ \mathrm{Lie}\, f_2$, $\mathrm{Lie}\,(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$.

Итак, Lie является функтором; это и есть функтор Ли.

Поверим в тот факт, что $\exp(\mathfrak{g}) \subset G$ для всякой группы Ли G (у нас, как обычно, $G \subset GL(n,\mathbb{R})$). Пусть $f : G_1 \to G_2$ — морфизм групп Ли, $\varphi = \mathrm{Lie}\, f$. Оказывается, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g}_1 \arrow[r, "\exp"] \arrow[d, "\varphi"] & G_1 \arrow[d, "f"] \\ \mathfrak{g}_2 \arrow[r, "\exp"] & G_2 \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Упр. Докажите это (указание: проверьте, что для любого $A \in \mathfrak{g}_1$ кривые $\exp(t\varphi(A))$ и $f(\exp(tA))$ на группе G_2 являются решениями одной и той же задачи Коши; см. замечание после доказательства теоремы 1).

Идеалы, факторалгебры, прямые суммы

Обсудим некоторые "общеалгебраические" понятия, связанные с алгебрами Ли.

Пусть $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ — алгебры Ли. Напомним, что гомоморфизм из $\mathfrak{g}_1$ в $\mathfrak{g}_2$ — это линейное отображение $f : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$, "уважающее" коммутатор. Как и для любого линейного отображения, можно рассмотреть *ядро* $\mathrm{Ker} f = \{x \in \mathfrak{g}_1 \,|\, f(x) = 0\}$ и *образ* $\mathrm{Im} f = f(\mathfrak{g}_1) \subset \mathfrak{g}_2$. Напомним, что f инъективен $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker} f = \{0\}$, f сюръективен $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im} f = \mathfrak{g}_2$.

Упр. $\mathrm{Im} f$ — подалгебра Ли в $\mathfrak{g}_2$.

Конечно, $\mathrm{Ker} f$ тоже является подалгеброй Ли (в $\mathfrak{g}_1$). Но верно даже большее. Именно, пусть $x \in \mathrm{Ker} f$, $y \in \mathfrak{g}_1$. Тогда $f([x, y]) = [f(x), f(y)] = [0, f(y)] = 0$, т.е. $[x, y] \in \mathrm{Ker} f$.

Определение 6. *Идеал* в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ — это линейное подпространство $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ такое, что $\forall x \in \mathfrak{a}\ \forall y \in \mathfrak{g} : [x, y] \in \mathfrak{a}$.

Итак, если $f : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ — гомоморфизм алгебр Ли, то $\mathrm{Ker} f$ — идеал в $\mathfrak{g}_1$. Конечно, всякий идеал — подалгебра Ли, но обратное, вообще говоря, неверно.

Замечание. В произвольных алгебрах различают левые, правые, двусторонние идеалы. В случае алгебр Ли между ними нет разницы, ибо $[x, y] = -[y, x]$.

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{a}$ — идеал в $\mathfrak{g}$. Рассмотрим факторпространство $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$. (Напомним, что элементы $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ — это смежные классы $\mathfrak{g}$ по $\mathfrak{a}$, т.е. множества вида $x + \mathfrak{a}$, где $x \in \mathfrak{g}$; структура линейного пространства в $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ определяется так: $(x + \mathfrak{a}) + (y + \mathfrak{a}) = (x + y) + \mathfrak{a}$, $\lambda(x + \mathfrak{a}) = \lambda x + \mathfrak{a}$; эти определения корректны, т.е. не зависят от выбора представителей смежных классов.) Это пространство естественно превращается в алгебру Ли: положим $[x + \mathfrak{a}, y + \mathfrak{a}] = [x, y] + \mathfrak{a}$.

Упр. Проверьте, что это определение корректно, и что $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ — действительно алгебра Ли.

Рассмотрим линейное отображение $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, $f(x) = x + \mathfrak{a}$.

Упр. Проверьте, что f — сюръективный гомоморфизм алгебр Ли, и $\mathrm{Ker} f = \mathfrak{a}$.

Мы будем называть этот гомоморфизм *естественным* гомоморфизмом из $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$.

Итак, мы видим, что идеалы и ядра гомоморфизмов — это одно и то же.

Теорема 2 (Теорема Э. Нетер о гомоморфизме). *Пусть $f : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ — гомоморфизм алгебр Ли. Тогда f индуцирует изоморфизм $\bar{f} : \mathfrak{g}_1/\mathrm{Ker} f \to \mathrm{Im} f$ (именно, $\bar{f}(x + \mathrm{Ker} f) = f(x)$).*

Упр. Докажите эту теорему (т.е. проверьте, что $\bar{f}$ корректно определен и является изоморфизмом алгебр Ли).

Упр. Пусть $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — идеалы в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Тогда линейные подпространства $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ также являются идеалами в $\mathfrak{g}$.

Замечание. Если $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — подалгебры Ли в $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ тоже будет подалгеброй Ли, а $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ — вообще говоря, нет (почему?).

Упр. Пусть $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — идеалы в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Докажите, что
1) $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{a} \simeq \mathfrak{b}/\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$;
2) если $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$, то $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ — идеал в $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$, причем $(\mathfrak{g}/\mathfrak{b})/(\mathfrak{a}/\mathfrak{b}) \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$.
(Указание: воспользуйтесь теоремой Э. Нетер.)

Какие имеются примеры идеалов? Конечно, $\{0\}$ и $\mathfrak{g}$ — идеалы в $\mathfrak{g}$ (т.наз. *тривиальные* идеалы).

Упр. Пусть $\mathfrak{b}$ — множество всех верхнетреугольных матриц из $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{k})$, $\mathfrak{n}\subset\mathfrak{b}$ — множество всех строговерхнетреугольных матриц. Проверьте, что $\mathfrak{b}$ — подалгебра Ли в $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{k})$, а $\mathfrak{n}$ — идеал в $\mathfrak{b}$. Вычислите $\mathfrak{b}/\mathfrak{n}$.

Вот пример более общей природы. Пусть — алгебра Ли. Рассмотрим

$$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] := \left\{ \sum_{i=1}^{n}[x_i,y_i] \;\middle|\; x_i,y_i\in\mathfrak{g},\ n \text{ не фиксировано} \right\}.$$

Иными словами, $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ — это линейная оболочка всех коммутаторов $[x,y]$, где $x,y\in\mathfrak{g}$.

Упр. $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ — идеал в $\mathfrak{g}$.

Этот идеал называется *коммутантом* или *производным идеалом* алгебры Ли $\mathfrak{g}$; его часто обозначают также символом $\mathfrak{g}'$.

Упр. Найдите коммутант $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{k})$ и $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{k})$.

Еще одна полезная конструкция — прямая сумма алгебр Ли. Пусть $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ — алгебры Ли. Рассмотрим линейное пространство $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2$ (это прямая сумма линейных пространств $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$, т.е. элементы $\mathfrak{g}$ — это пары (x_1,x_2), где $x_i\in\mathfrak{g}_i$). Превратим $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли, положив $[(x_1,x_2),(y_1,y_2)] := ([x_1,y_1],[x_2,y_2])$.

Упр. Это и в самом деле алгебра Ли.

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ содержит идеалы $\{(x_1,0)\,|\,x_1\in\mathfrak{g}_1\}\simeq\mathfrak{g}_1$ и $\{(0,x_2)\,|\,x_2\in\mathfrak{g}_2\}\simeq\mathfrak{g}_2$ (Упр. проверьте, что это и в самом деле идеалы). Отождествим $(x_1,0)$ с x_1, а $(0,x_2)$ с x_2. Тогда любой элемент из $\mathfrak{g}$ однозначно представим в виде x_1+x_2, где $x_i\in\mathfrak{g}_i$.

Обратно, если $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ — идеалы в некоторой алгебре Ли $\mathfrak{g}$, причем $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2$ (как линейное пространство), то $\mathfrak{g}$ — прямая сумма $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$. В самом деле, если $x,y\in\mathfrak{g}$, то $x=x_1+x_2$, $y=y_1+y_2$, где $x_i,y_i\in\mathfrak{g}_i$ (такие представления однозначны), и $[x,y]=[x_1+x_2,y_1+y_2]=[x_1,y_1]+[x_1,y_2]+[x_2,y_1]+[x_2,y_2]=[x_1,y_1]+[x_2,y_2]$ (ибо $[x_1,y_2]+[x_2,y_1]\in\mathfrak{g}_1\cap\mathfrak{g}_2=\{0\}$).

Замечание. 1) Иногда эти две конструкции различают: первую называют "внешней" прямой суммой, вторую — "внутренней" прямой суммой. Мы не будем их различать (мы только что убедились в том, что это законно; из контекста всегда будет ясно, о чем идет речь).

2) Конечно, эти конструкции очевидно распространяются на любое (конечное) число слагаемых.

Теперь выделим важный класс алгебр Ли, которому мы будем уделять наибольшее внимание в этом курсе.

Определение 7. Алгебра Ли называется *простой,* если она неабелева и не содержит нетривиальных идеалов.

Основная цель этого курса — описание строения простых алгебр Ли над полем $\mathbb{C}$. На самом деле мы будем рассматривать более общий класс алгебр Ли — т.наз. *полупростые* алгебры Ли (определение будет позже). Для этого класса алгебр Ли также можно получить исчерпывающее описание. Будет показано, что всякая полупростая алгебра Ли — прямая сумма простых, и наоборот.

Упр. 1) Пусть $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$. Докажите, что алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2,\Bbbk)$ проста.
2) Докажите, что алгебра Ли ($\mathbb{R}^3$, векторное произведение) проста.

Дифференцирования и автоморфизмы

Начнем с еще одного класса примеров алгебр Ли.

Пусть A — произвольная алгебра (с операцией $*$).

Определение 8. *Дифференцирование* алгебры A — это линейное отображение $D : A \to A$ такое, что $D(a*b) = Da*b + a*Db$ для всех $a, b \in A$.

Пример. Если $A = \Bbbk[x]$ — алгебра многочленов одной переменной, то $\frac{d}{dx}$ — ее дифференцирование.

Упр. Найдите все дифференцирования алгебры $\Bbbk[x]$. Обобщите Ваш результат на случай алгебры $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$.

Обозначим через $\operatorname{Der} A$ множество всех дифференцирований алгебры A.

Предложение 3. $\operatorname{Der} A$ *— подалгебра Ли в* $\mathfrak{gl}(A)$.

Доказательство. То, что $\operatorname{Der} A$ является линейным подпространством в $\mathfrak{gl}(A)$, очевидно. Далее, пусть $D_1, D_2 \in \operatorname{Der} A$. Почему $[D_1, D_2] \in \operatorname{Der} A$? В самом деле, $(D_1D_2)(a*b) = D_1(D_2a*b + a*D_2b) = (D_1D_2)a*b + D_2a*D_1b + D_1a*D_2b + a*(D_1D_2)b$. Аналогично, $(D_2D_1)(a*b) = (D_2D_1)a*b + D_1a*D_2b + D_2a*D_1b + a*(D_2D_1)b$. Поэтому $[D_1, D_2](a*b) = [D_1, D_2]a*b + a*[D_1, D_2]b$, ч.т.д. □

В частности, эту конструкцию можно применить к любой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ — получится (новая) алгебра Ли $\operatorname{Der}\mathfrak{g}$. Иными словами, если $D \in \operatorname{End}\mathfrak{g}$, то $D \in \operatorname{Der}\mathfrak{g} \Leftrightarrow D[x, y] = [Dx, y] + [x, Dy]$.

Оказывается, в алгебрах Ли можно выделить замечательный класс дифференцирований — т.наз. *внутренние дифференцирования.* Именно, пусть $x \in \mathfrak{g}$. Рассмотрим линейный оператор $\operatorname{ad}_x \in \operatorname{End}\mathfrak{g}$, заданный формулой $\operatorname{ad}_x y = [x, y]$ (здесь ad — от слова "adjoint" — "присоединенный").

Предложение 4. $\operatorname{ad}_x \in \operatorname{Der}\mathfrak{g}$.

Доказательство. $\operatorname{ad}_x[y, z] = [x, [y, z]] = -[y, [z, x]] - [z, [x, y]] = [y, [x, z]] + [[x, y], z] = [\operatorname{ad}_x y, z] + [y, \operatorname{ad}_x z]$. □

Замечание. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра с операцией $[\cdot,\cdot]$ такой, что $[x, x] = 0$. Рассмотрим, как и прежде, линейные операторы ad_x, где $x \in \mathfrak{g}$. Тогда предыдущая выкладка доказывает, что $[\cdot,\cdot]$ удовлетворяет тождеству Якоби (т.е. $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли) тогда и только тогда, когда $\operatorname{ad}_x \in \operatorname{Der}\mathfrak{g}$ для всех $x \in \mathfrak{g}$.

Терминология Дифференцирования вида ad_x называют *внутренними* (а все остальные дифференцирования часто называют *внешними*).

Рассмотрим (очевидно, линейное) отображение $\operatorname{ad} : \mathfrak{g} \to \operatorname{Der}\mathfrak{g}$, $x \mapsto \operatorname{ad}_x$.

Предложение 5. ad — *гомоморфизм алгебр Ли.*

Доказательство. Надо проверить, что $\mathrm{ad}_{[x,y]} = [\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y]$. В самом деле, $\mathrm{ad}_{[x,y]}z = [[x,y],z] = -[[y,z],x] - [[z,x],y] = [x,[y,z]] - [y,[x,z]] = \mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y z - \mathrm{ad}_y\mathrm{ad}_x z = [\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y]z$. $\square$

Замечание. Пусть снова $\mathfrak{g}$ — алгебра с операцией $[\cdot,\cdot]$ такой, что $[x,x]=0$. Рассмотрим линейное отображение $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, $x \mapsto \mathrm{ad}_x$ (a priori $\mathrm{ad}_x \notin \mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$!). По сути дела, мы проверили, что $[\cdot,\cdot]$ удовлетворяет тождеству Якоби (т.е. $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли) тогда и только тогда, когда ad — гомоморфизм алгебр Ли (и тогда автоматически $\mathrm{ad}_x \in \mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$, т.е. $\mathrm{Im}(\mathrm{ad}) \subset \mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$).

Итак, $\mathrm{ad}\mathfrak{g} = \mathrm{Im}(\mathrm{ad})$ — подалгебра Ли в $\mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$. На самом деле это даже идеал (Упр. проверьте, что если $D \in \mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$, $x \in \mathfrak{g}$, то $[D, \mathrm{ad}_x] = \mathrm{ad}_{Dx}$).

Вычислим идеал Ker(ad). Имеем:

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{ad}_x = 0\} = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x,y] = 0\ \forall y \in \mathfrak{g}\} =: \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$$

— это т.наз. *центр* алгебры Ли $\mathfrak{g}$. По теореме Нетер о гомоморфизме получаем, что $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \simeq \mathrm{ad}\mathfrak{g}$.

Пусть $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$. Тогда $\mathfrak{g} \simeq \mathrm{ad}\mathfrak{g} \subset \mathrm{Der}\,\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) = (\mathrm{End}\,\mathfrak{g})^{(-)}$. Если $\dim \mathfrak{g} = n < \infty$, то выбор базиса в $\mathfrak{g}$ устанавливает изоморфизм $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \simeq \mathfrak{gl}(n, \Bbbk)$, т.е. $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{gl}(n,\Bbbk)$. Итак, мы доказали теорему Адо-Ивасавы для случая, когда алгебра Ли имеет нулевой центр. Отметим, что если $\mathfrak{g}$ проста, то $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$ (почему?); то же верно и для полупростых алгебр Ли (Упр. если $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_n$, то $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_1) \oplus \ldots \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_n)$).

Упр. Пусть $\mathfrak{g} = (\mathbb{R}^3, \text{векторное произведение})$. Вычислите $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ и убедитесь, что $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{o}(3,\mathbb{R})$.

Упр. Найдите центр алгебр Ли $\mathfrak{gl}(n,\Bbbk)$ и $\mathfrak{sl}(n,\Bbbk)$. Проверьте, что $\mathfrak{gl}(n,\Bbbk) \simeq \mathfrak{sl}(n,\Bbbk) \oplus \Bbbk$ (здесь $\Bbbk$ — это одномерная алгебра Ли; она автоматически абелева).

Оказывается, с точки зрения функтора Ли дифференцирования "происходят" из автоморфизмов. Как это понимать?

Пусть снова A — произвольная алгебра (с операцией $*$). Напомним, что *автоморфизм* алгебры A — это ее изоморфизм на себя, т.е. биективное линейное отображение $f : A \to A$ такое, что $f(a * b) = f(a) * f(b)$ для всех $a, b \in A$. Обозначим через $\mathrm{Aut}\,A$ множество всех автоморфизмов алгебры A. Очевидно, $\mathrm{Aut}\,A$ — подгруппа в группе $GL(A)$.

Пусть теперь A — алгебра над $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$...), $\dim A = n < \infty$, т.е. $\mathrm{Aut}\,A \subset GL(A) \simeq GL(n,\mathbb{R})$. Можно проверить, что $\mathrm{Aut}\,A$ — подгруппа Ли в $GL(n,\mathbb{R})$. (По меньшей мере, очевидно, что $\mathrm{Aut}\,A$ замкнута в $GL(n,\mathbb{R})$). Вычислим алгебру Ли группы Ли $\mathrm{Aut}\,A$.

Предложение 6. $\mathrm{Lie}\,\mathrm{Aut}\,A = \mathrm{Der}\,A$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathfrak{gl}(A)$. Если $\varphi \in \operatorname{Lie}\operatorname{Aut} A$, то $\varphi = \frac{d}{dt}\gamma_t|_{t=0}$, где $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \operatorname{Aut} A$, $t \mapsto \gamma_t$ — гладкая кривая, $\gamma_0 = \mathrm{id}$. Тогда

$$\varphi(a * b) = \frac{d}{dt}\gamma_t(a * b)|_{t=0} = \frac{d}{dt}\gamma_t(a) * \gamma_t(b)|_{t=0} =$$
$$= \gamma_0(a) * \frac{d}{dt}\gamma_t(b)|_{t=0} + \frac{d}{dt}\gamma_t(a)|_{t=0} * \gamma_0(b) = a * \varphi(b) + \varphi(a) * b,$$

т.е. $\varphi \in \operatorname{Der} A$.

Обратно, пусть $\varphi \in \operatorname{Der} A$. Упр. $\exp\varphi \in \operatorname{Aut} A$. Таким образом, если $\gamma_t = \exp t\varphi$, то γ_t — гладкая кривая на группе $\operatorname{Aut} A$, $\gamma_0 = \mathrm{id}$, и $\frac{d}{dt}\gamma_t|_{t=0} = \varphi$. □

В частности, если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, то $\operatorname{Der}\mathfrak{g} = \operatorname{Lie}\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$. Оказывается, что гомоморфизм $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \operatorname{Der}\mathfrak{g}$ тоже можно “объяснить” с точки зрения функтора Ли.

Именно, пусть G — группа Ли (у нас, как обычно, $G \subset GL(V) \simeq GL(n, \mathbb{R})$). С каждым элементом $g \in G$ можно связать отображение $\mathrm{Int}_g : G \to G$, $\mathrm{Int}_g(h) = ghg^{-1}$. Очевидно, что Int_g — автоморфизм G как группы Ли. (Автоморфизмы вида Int_g называют *внутренними*.) Применим к нему функтор Ли. Пусть $\mathfrak{g} = \operatorname{Lie} G$. Положим $\mathrm{Ad}_g := \operatorname{Lie}\mathrm{Int}_g$. По функториальности Ad_g — автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Предложение 7. $\mathrm{Ad}_g(X) = gXg^{-1}$.

Доказательство. Пусть $X \in \mathfrak{g}$. Тогда $X = \frac{d}{dt}\gamma(t)|_{t=0}$. Поэтому

$$\mathrm{Ad}_g(X) = \frac{d}{dt}g\gamma(t)g^{-1}|_{t=0} = gXg^{-1}.$$

□

Замечание. То, что отображение Ad_g — автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$, легко проверить и непосредственным вычислением.

Рассмотрим теперь отображение $\mathrm{Ad} : G \to \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$, $g \mapsto \mathrm{Ad}_g$. Очевидно, $\mathrm{Ad}_{gh} = \mathrm{Ad}_g \circ \mathrm{Ad}_h$, т.е. Ad является гомоморфизмом групп. Легко видеть (Упр. проверьте это), что Ad_g гладко зависит от g, т.е. Ad — гомоморфизм групп Ли. Вычислим $\operatorname{Lie}\mathrm{Ad}$. По определению, $\operatorname{Lie}\mathrm{Ad} : \mathfrak{g} \to \operatorname{Der}\mathfrak{g}$ (ибо $\operatorname{Lie}\operatorname{Aut}\mathfrak{g} = \operatorname{Der}\mathfrak{g}$), причем это — гомоморфизм алгебр Ли.

Предложение 8. $\operatorname{Lie}\mathrm{Ad} = \mathrm{ad}$.

Доказательство. Положим $\varphi = \operatorname{Lie}\mathrm{Ad}$, т.е. $X \mapsto \varphi_X$. Если $X \in \mathfrak{g}$, то $X = \dot\gamma(0)$, где $\gamma(0) = E$. При этом $\varphi_X = \frac{d}{dt}\mathrm{Ad}_{\gamma(t)}|_{t=0}$. Пусть еще $Y \in \mathfrak{g}$. Тогда

$$\varphi_X(Y) = \frac{d}{dt}\mathrm{Ad}_{\gamma(t)}(Y)|_{t=0} = \frac{d}{dt}\gamma(t)Y\gamma(t)^{-1}|_{t=0} =$$
$$= \frac{d}{dt}\gamma(t)|_{t=0} \cdot Y\gamma(0)^{-1} + \gamma(0)Y \cdot \frac{d}{dt}\gamma(t)^{-1}|_{t=0} = XY - YX$$

(Упр. $\frac{d}{dt}\gamma(t)^{-1}|_{t=0} = -X$). Итак, $\varphi_X(Y) = [X, Y]$, т.е. $\varphi_X = \mathrm{ad}_X$. □

Замечание. Если G — связная группа Ли, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G$, то автоморфизмы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ вида Ad_g, где $g \in G$, называют *внутренними*. Можно показать, что это определение не зависит от выбора G (но связность G существенна). Очевидно, что внутренние автоморфизмы образуют подгруппу в $\mathrm{Aut}\, \mathfrak{g}$ (можно показать, что эта подгруппа нормальна). Имеется и эквивалентное "внутреннее" (т.е не апеллирующее к группам Ли) определение внутреннего автоморфизма алгебры Ли; мы не будем приводить его сейчас.

Представления алгебр Ли

Как обычно, мы фиксируем основное поле $\Bbbk$. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над $\Bbbk$ (она будет фиксированной до конца раздела). Все линейные пространства будут над тем же полем $\Bbbk$.

Определение 9. *Представление* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в линейном пространстве V — это гомоморфизм $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$.

Терминология: V — *пространство представления*; $\rho(x)$ (где $x \in \mathfrak{g}$) — *операторы представления*. Представление ρ *конечномерно*, если $\dim V < \infty$; представление ρ *точно*, если ρ инъективно.

Замечание. Например, теорему Адо-Ивасавы в этих терминах можно переформулировать так: любая конечномерная алгебра Ли обладает точным конечномерным представлением.

Если $V = \Bbbk^n$ (т.е. если $\dim V = n < \infty$, и в V зафиксирован базис), то представление $\mathfrak{g}$ в пространстве V — это гомоморфизм $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(n, \Bbbk)$.

В теории представлений весьма распространен несколько другой язык — язык $\mathfrak{g}$-модулей. Что это?

Определение 10. $\mathfrak{g}$-*модуль* — это линейное пространство V, снабженное билинейным отображением $\mathfrak{g} \times V \to V$, $(x, v) \mapsto xv$ таким, что $[x, y]v = x(yv) - y(xv)$ для всех $x, y \in \mathfrak{g}$, $v \in V$.

Предложение 9. $\mathfrak{g}$-*модули = представления* $\mathfrak{g}$.

Доказательство. 1) Пусть V — это $\mathfrak{g}$-модуль. Определим отображение $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ формулой $\rho(x)v := xv$. Так как отображение $(x, v) \mapsto xv$ билинейно, то $\rho(x) \in \mathfrak{gl}(V)$ (т.е. $\rho(x)$ — линейный оператор в пространстве V), и ρ линейно по x. Далее, $\rho([x, y])v = [x, y]v = x(yv) - y(xv) = \rho(x)\rho(y)v - \rho(y)\rho(x)v = [\rho(x), \rho(y)]v$. Итак, ρ — представление.

2) Пусть $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ — представление. Определим в V структуру $\mathfrak{g}$-модуля формулой $xv := \rho(x)v$. Упр. Проверьте, что это действительно $\mathfrak{g}$-модуль. □

Выбор языка ($\mathfrak{g}$-модулей или представлений) определяется соображениями удобства.

Определение 11. *Морфизм* $\mathfrak{g}$-модулей V_1 и V_2 — это линейное отображение $f : V_1 \to V_2$ такое, что $f(xv) = xf(v)$ для всех $x \in \mathfrak{g}$, $v \in V_1$.

На языке представлений морфизмы $\mathfrak{g}$-модулей обычно называют сплетающими операторами. Именно, если $\rho_1 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V_1)$ и $\rho_2 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V_2)$ — представления, то линейное отображение $f : V_1 \to V_2$ — *сплетающий оператор*, если для всех $x \in \mathfrak{g}$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\rho_1(x)"] \arrow[d, "f"] & V_1 \arrow[d, "f"] \\ V_2 \arrow[r, "\rho_2(x)"] & V_2 \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Обозначим через $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_1, V_2)$ множество всех морфизмов $\mathfrak{g}$-модулей V_1 и V_2. Отметим, что $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_1, V_2)$ — это линейное подпространство в $\mathrm{Hom}(V_1, V_2) = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V_1, V_2)$, т.е. в пространстве всех линейных отображений из V_1 в V_2.

Очевидно, что $\mathfrak{g}$-модули (разумеется, для фиксированной алгебры Ли $\mathfrak{g}$) образуют категорию. Конечномерные $\mathfrak{g}$-модули (которые нас в основном и будут интересовать) образуют в ней полную подкатегорию.

<u>Замечание</u>. Отметим связь представлений алгебр Ли с представлениями групп Ли. Пусть вначале G — произвольная группа. Представление группы G в линейном пространстве V — это гомоморфизм $r : G \to GL(V)$. Если G — группа Ли, V — конечномерное линейное пространство над $\mathbb{R}$ (тогда и $GL(V)$ — группа Ли!), а гомоморфизм r гладок, то говорят, что задано представление группы Ли G. Можно ввести и язык G-модулей (<u>Упр</u>. сформулируйте определение G-модуля). Если $r : G \to GL(V)$ — представление группы Ли G, то его дифференциал $\rho = \mathrm{Lie}\, r : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ — представление алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G$.

<u>Прмеры представлений (и $\mathfrak{g}$-модулей)</u>

В этих примерах алгебра Ли $\mathfrak{g}$ считается произвольной, если не оговорено противное.

1) Пусть V — линейное пространство. Зададим в нем структуру $\mathfrak{g}$-модуля формулой $xv = 0$, где $x \in \mathfrak{g}$, $v \in V$. Такие $\mathfrak{g}$-модули называют *тривиальными.*

2) Алгебра Ли $\mathfrak{gl}(V)$ обладает "тавтологическим" представлением в пространстве V (т.е. $\mathrm{id} : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(V)$ — представление). Аналогичная ситуация с $\mathfrak{sl}(V)$ и с другими подалгебрами в $\mathfrak{gl}(V)$. Более общо, если $\mathfrak{h}$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$, и $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ — представление $\mathfrak{g}$, то $\rho|_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(V)$ — представление $\mathfrak{h}$.

3) $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}\, \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ — представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$; его называют *присоединенным.* Итак, пространство присоединенного представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$ — это сама $\mathfrak{g}$, операторы представления — это ad_x, где $x \in \mathfrak{g}$. Присоединенное представление точно тогда и только тогда, когда $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$.

4) Пусть $\mathfrak{g} = \Bbbk$ — одномерная (автоматически абелева) алгебра Ли. Зафиксируем в $\mathfrak{g}$ базисный элемент (по сути дела, запись $\mathfrak{g} = \Bbbk$ уже подразумевает, что он

зафиксирован). Задать представление $\mathfrak{g}$ в пространстве V = задать в V один линейный оператор — образ базисного элемента $\mathfrak{g}$; остальные операторы представления ему пропорциональны.

Обобщим это замечание. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли с базисом $x_1, \ldots, x_n$, причем $[x_i, x_j] = \sum_k c_{ij}^k x_k$ (скаляры c_{ij}^k называют *структурными константами* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в данном базисе). Задать представление $\mathfrak{g}$ в пространстве V = задать $X_i \in \mathfrak{gl}(V)$ такие, что $[X_i, X_j] = \sum_k c_{ij}^k X_k$.

5) Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \Bbbk)$. Выберем в $\mathfrak{g}$ такой базис:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить (Упр. проверьте!), что $[X, Y] = H$, $[H, X] = 2X$, $[H, Y] = -2Y$.

Пусть теперь $V = \Bbbk[x, y]$ — пространство многочленов от двух переменных. Рассмотрим в пространстве V линейные операторы (и даже дифференцирования!)

$$\widetilde{X} = -y\frac{\partial}{\partial x},\ \widetilde{Y} = -x\frac{\partial}{\partial y},\ \widetilde{H} = -x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Нетрудно проверить (Упр. проверьте!), что $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] = \widetilde{H}$, $[\widetilde{H}, \widetilde{X}] = 2\widetilde{X}$, $[\widetilde{H}, \widetilde{Y}] = -2\widetilde{Y}$. Таким образом, соответствие $X \mapsto \widetilde{X}$, $Y \mapsto \widetilde{Y}$, $H \mapsto \widetilde{H}$ задает представление $\mathfrak{g}$ в пространстве V.

Формулы для операторов представления кажутся искусственно подобранными. На самом деле этот пример легко "объяснить" с точки зрения групп Ли. Именно, пусть $\Bbbk = \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$). Рассмотрим группу Ли $G = GL(2, \Bbbk)$. Эта группа естественно действует на множестве $\Bbbk^2$ (посредством умножения матриц на векторы-столбцы). Многочлены из $\Bbbk[x, y]$ можно интерпретировать как функции на множестве $\Bbbk^2$. Рассмотрим представление G в пространстве $\Bbbk[x, y]$, заданное формулой $(g\varphi)(u) = \varphi(g^{-1}u)$, где $g \in G$, $\varphi \in \Bbbk[x, y]$, $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Bbbk^2$ (т.е. имеется отображение $r : G \to GL(\Bbbk[x, y])$, $(r_g\varphi)(u) = \varphi(g^{-1}u)$; Упр. проверьте, что r корректно определено и является представлением). Если $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $ad - bc = 1$, то $g^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, т.е. $(g\varphi)(x, y) = \varphi(dx - by, -cx + ay)$.

Вычислим теперь дифференциал представления r, т.е. найдем соответствующее представление алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \Bbbk)$ в пространстве $\Bbbk[x, y]$. Начнем с оператора представления, соответствующего $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Рассмотрим

$$\exp tX = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E + tX \in G.$$

Так как $((E + tX)\varphi)(x, y) = \varphi(x - ty, y)$, то

$$\frac{d}{dt}(E + tX)\varphi|_{t=0} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \cdot \frac{d(x - ty)}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}\right)\Bigg|_{t=0} = -y\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

— это наша формула для $\widetilde{X}$. Упр. проделайте аналогичные вычисления для Y и H.

Имеет ли смысл наша деятельность? Ведь наше пространство $V = \Bbbk[x,y]$ бесконечномерно, т.е. представление $G = GL(2,\Bbbk)$ в пространстве V не может называться представлением в смысле теории групп Ли. Не беда: рассмотрим подпространство $V_n \subset V$ однородных многочленов степени n. Легко видеть, что все V_n конечномерны ($\dim V_n = n+1$), $V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_n$, и если $\varphi \in V_n$, то $g\varphi \in V_n$ для всех $g \in G$. Таким образом, наше представление группы G в пространстве V "распадается" на представления в (конечномерных!) пространствах V_n.

Упр. Проверьте, что представление группы G в каждом из V_n — представление в смысле теории групп Ли, и все наши вычисления тем самым имеют смысл (т.е. их можно проделать отдельно в каждом из V_n).

6) Определим представление алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\Bbbk)$ в пространстве $V = \Bbbk[x]$ формулами

$$X \mapsto x^2 \frac{d}{dx},\ Y \mapsto -\frac{d}{dx},\ H \mapsto 2x\frac{d}{dx}$$

(Упр. проверьте, что это действительно представление). Это представление "по-настоящему" бесконечномерно; оно не происходит из представления соответствующей группы $G = GL(2,\Bbbk)$.

Вернемся к общей теории представлений.

Определение 12. $\mathfrak{g}$-*подмодуль* $\mathfrak{g}$-модуля V — это линейное подпространство $L \subset V$ такое, что $xL \subset L$ (т.е. $xv \in L$, если $v \in L$) для всех $x \in \mathfrak{g}$.

Часто $\mathfrak{g}$-подмодули называют просто подмодулями. Ясно, что $\mathfrak{g}$-подмодуль сам имеет естественную структуру $\mathfrak{g}$-модуля.

На языке представлений $\mathfrak{g}$-подмодули называют *подпредставлениями*. Итак, пространство подпредставления (представления ρ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в пространстве V) — это подпространство $L \subset V$, инвариантное относительно всех операторов представления. Пусть V конечномерно. Если выбрать в L базис $\widetilde{\Delta}$ и дополнить его до базиса Δ в V, то в полученном базисе матрицы всех операторов представления ρ будут блочно-треугольными, т.е.

$$\rho(x)_\Delta = \begin{pmatrix} \widetilde{\rho}(x)_{\widetilde{\Delta}} & * \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

Здесь $\widetilde{\rho}(x)_{\widetilde{\Delta}}$ — матрицы операторов подпредставления.

Примеры. 1) *Тривиальные* $\mathfrak{g}$-подмодули $\mathfrak{g}$-модуля V — это, по определению, V и 0.

2) В примере 5 из цикла примеров представлений все V_n — это $\mathfrak{sl}(2,\Bbbk)$-подмодули $\mathfrak{sl}(2,\Bbbk)$-модуля $V = \Bbbk[x,y]$.

3) Пространства подпредставлений присоединенного представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$ — это в точности идеалы в $\mathfrak{g}$.

Упр. Пусть V — $\mathfrak{g}$-модуль, L_1, L_2 — $\mathfrak{g}$-подмодули в V. Тогда $L_1 + L_2$ и $L_1 \cap L_2$ — $\mathfrak{g}$-подмодули в V.

Упр. Если V_1, V_2 — $\mathfrak{g}$-модули, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_1, V_2)$, то $\mathrm{Ker} f$ — $\mathfrak{g}$-подмодуль в V_1, $\mathrm{Im} f$ — $\mathfrak{g}$-подмодуль в V_2.

Пусть V — $\mathfrak{g}$-модуль, L — $\mathfrak{g}$-подмодуль в V. Тогда на факторпространстве V/L имеется естественная структура $\mathfrak{g}$-модуля, заданная формулой $x(v+L) = xv + L$. (Упр. Проверьте корректность этого определения и то, что V/L действительно становится $\mathfrak{g}$-модулем.) Этот $\mathfrak{g}$-модуль называется *фактормодулем* V по L (или *факторпредставлением*, если используется язык теории представлений).

Пусть V конечномерно. Если выбрать в L базис $\widetilde{\Delta}$, дополнить его до базиса Δ в V и рассмотреть соответствующий базис $\overline{\Delta}$ в V/L, то

$$\rho(x)_\Delta = \begin{pmatrix} \widetilde{\rho}(x)_{\widetilde{\Delta}} & * \\ 0 & \overline{\rho}(x)_{\overline{\Delta}} \end{pmatrix}.$$

Здесь $\overline{\rho}(x)_{\overline{\Delta}}$ — матрицы операторов факторпредставления (а $\widetilde{\rho}(x)_{\widetilde{\Delta}}$ — матрицы операторов подпредставления).

Упр. Сформулируйте и докажите для $\mathfrak{g}$-модулей теорему Э.Нетер о гомоморфизме.

Пусть V_1 и V_2 — $\mathfrak{g}$-модули. Тогда в пространстве $V = V_1 \oplus V_2$ имеется естественная структура $\mathfrak{g}$-модуля, заданная формулой $x(v_1 + v_2) = xv_1 + xv_2$. Полученный $\mathfrak{g}$-модуль называется *прямой суммой* $\mathfrak{g}$-модулей V_1 и V_2. Разумеется, V_1 и V_2 — $\mathfrak{g}$-подмодули в V. Эта конструкция очевидно обобщается на случай любого (конечного) числа слагаемых.

Пусть V_1 и V_2 конечномерны. Выберем в V_i базис Δ_i и объединим их в базис Δ в пространстве V. Если ρ_i — представления $\mathfrak{g}$ в пространстве V_i, ρ — прямая сумма представлений ρ_1 и ρ_2, то

$$\rho(x)_\Delta = \begin{pmatrix} \rho_1(x)_{\Delta_1} & 0 \\ 0 & \rho_2(x)_{\Delta_2} \end{pmatrix}.$$

Упр. Пусть V_1 и V_2 — $\mathfrak{g}$-модули, $V = V_1 \oplus V_2$. Проверьте, что проекция V на V_1 вдоль V_2 — морфизм $\mathfrak{g}$-модулей.

Определение 13. $\mathfrak{g}$-модуль V *прост (=неприводим),* если $V \neq 0$, и в V нет нетривиальных подмодулей.

Термин “неприводимый”, как правило, используется для представлений (а “простой” — для модулей). На языке представлений неприводимость означает, что пространство представления ненулевое, и в нем нет нетривиальных подпространств, инвариантных относительно всех операторов представления. На матричном языке неприводимость означает, что ни в каком базисе все операторы представления не будут блочно-(верхне)треугольными.

Пример. Присоединенное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ неприводимо тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}$ проста или одномерна.

Задача Если $\mathrm{char}\, \Bbbk = 0$, то $\mathfrak{sl}(2, \Bbbk)$-модули V_n (определенные в примере 5 из цикла примеров представлений) просты.

Предложение 10 (Лемма Шура). *Пусть V_1 и V_2 — простые $\mathfrak{g}$-модули, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_1, V_2)$, $f \neq 0$. Тогда f — изоморфизм.*

Доказательство. $\mathrm{Ker} f$ — подмодуль в V_1, $\mathrm{Ker} f \neq V_1$ (ибо $f \neq 0$), поэтому $\mathrm{Ker} f = 0$ ввиду простоты V_1. Далее, $\mathrm{Im} f$ — подмодуль в V_2, $\mathrm{Im} f \neq 0$ (ибо $f \neq 0$), поэтому $\mathrm{Im} f = V_2$ ввиду простоты V_2. Итак, f инъективно и сюръективно, что и требовалось доказать. □

Следствие 11. *Пусть V — простой $\mathfrak{g}$-модуль. Тогда $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}} V := \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V)$ — алгебра с делением (т.е. ассоциативная алгебра с 1, в которой каждый ненулевой элемент обратим).* □

При дополнительных ограничениях на $\Bbbk$ и V лемму Шура можно существенно уточнить.

Следствие 12. *Пусть основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, V — конечномерный простой $\mathfrak{g}$-модуль. Тогда $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}} V = \{\lambda \cdot \mathrm{id} \,|\, \lambda \in \Bbbk\}$ (в частности, $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}} V \simeq \Bbbk$ как $\Bbbk$-алгебра).*

Доказательство. Пусть $f \in \mathrm{End}_{\mathfrak{g}} V$. Так как $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, и $\dim V < \infty$, то f имеет собственное значение $\lambda \in \Bbbk$, т.е. оператор $f - \lambda \cdot \mathrm{id}$ необратим. Но, очевидно, $f - \lambda \cdot \mathrm{id} \in \mathrm{End}_{\mathfrak{g}} V$. По лемме Шура $f - \lambda \cdot \mathrm{id} = 0$, т.е. $f = \lambda \cdot \mathrm{id}$. □

Замечание. Оба следствия из леммы Шура тоже часто называют леммой Шура. Мы в основном будем применять второе следствие. На языке представлений оно гласит, что если $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, а $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ — конечномерное неприводимое представление, то линейный оператор f в пространстве V, перестановочный со всеми операторами представления ρ, скалярен.

Второе следствие из леммы Шура (частично) объясняется следующим общим фактом.

Упр. Пусть поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, A — конечномерная $\Bbbk$-алгебра с делением. Тогда $A = \Bbbk$.

Есть и другие поля $\Bbbk$, для которых строение конечномерных $\Bbbk$-алгебр с делением (их еще называют *телами над* $\Bbbk$) легко описать (это не значит, что легко доказать эти результаты!).

Факт. **1 (Теорема Фробениуса).** Все (с точностью до изоморфизма) конечномерные алгебры с делением над полем $\mathbb{R}$ — это $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ и $\mathbb{H}$ (здесь $\mathbb{H}$ — тело кватернионов).

2 (Теорема Веддерберна). Если поле $\Bbbk$ конечно, то единственная конечномерная центральная $\Bbbk$-алгебра с делением — это само $\Bbbk$. (Говорят, что ассоциативная алгебра с единицей *центральна над* $\Bbbk$, если $\Bbbk$ совпадает с центром этой алгебры; рассмотрение лишь центральных тел позволяет отделить вопросы теории полей от нашего вопроса о телах (как?). Иначе говоря, теорема Веддерберна гласит, что любое конечное тело коммутативно, т.е. является полем.)

3 (Теорема Тзена). Пусть $\Bbbk = F(x)$, где поле F алгебраически замкнуто. Тогда единственная конечномерная центральная $\Bbbk$-алгебра с делением — это само $\Bbbk$.

Определение 14. $\mathfrak{g}$-модуль V *полупрост (=вполне приводим),* если любой подмодуль $L \subset V$ *дополняем* (т.е. существует подмодуль $M \subset V$ такой, что $V = L \oplus M$).

Термин “вполне приводимый”, как правило, используется для представлений (а “полупростой” — для модулей). Простой модуль является полупростым (ибо V и 0, очевидно, дополняемы в V). Нулевой модуль тоже полупрост.

Предложение 13. *Пусть V — это $\mathfrak{g}$-модуль, $V \neq 0$. Тогда V полупрост тогда и только тогда, когда V является прямой суммой простых $\mathfrak{g}$-модулей.*

Доказательство. Будем предполагать (для простоты), что $\dim V < \infty$. Результат верен и без этого предположения (но возможно появление прямой суммы бесконечного числа слагаемых — что это?).

Упр. Всякий ненулевой $\mathfrak{g}$-модуль содержит простой подмодуль. (Решение: годится ненулевой подмодуль наименьшей размерности.)

1) Предположим, что V не представим в виде прямой суммы простых $\mathfrak{g}$-модулей. Отметим, что множество подмодулей в V, представимых в виде прямой суммы простых $\mathfrak{g}$-модулей, непусто (почему?). Выберем в этом множестве подмодуль L наибольшей размерности. Итак, $L \subsetneq V$, и $L = L_1 \oplus \ldots \oplus L_n$, где все L_i просты.

Если V полупрост, то подмодуль L дополняем в V, т.е. $V = L \oplus M$, где M — подходящий подмодуль в V. Выберем в M простой подмодуль M'. Очевидно, сумма L и M' прямая, и $L \oplus M' = L_1 \oplus \ldots \oplus L_n \oplus M'$. Кроме того, $\dim L \oplus M' > \dim L$, что противоречит выбору L.

2) Пусть $V = L_1 \oplus \ldots \oplus L_n$, где все L_i просты. Пусть V не является полупростым, т.е. в V существуют недополняемые подмодули. Пусть $L \subset V$ — недополняемый подмодуль наибольшей размерности. Очевидно, $L \neq V$, т.е. $L_i \not\subset L$ для некоторого i. Отсюда $L \cap L_i = 0$ (ибо $L \cap L_i$ — подмодуль простого $\mathfrak{g}$-модуля L_i, и $L \cap L_i \neq L_i$). Итак, сумма L и L_i прямая, и $\dim L \oplus L_i > \dim L$. Следовательно, подмодуль $L \cap L_i$ дополняем в V, т.е. $V = L \oplus L_i \oplus M$ для подходящего подмодуля $M \subset V$. Но тогда подмодуль L также дополняем в V ($L_i \oplus M$ — его “дополнение”) — противоречие. $\square$

Замечание. Наше доказательство предложения почти дословно проходит и в общем случае (надо только пользоваться леммой Цорна и заменить слова “наибольшей размерности” на “максимальный” и воспользоваться в нужных местах леммой Цорна). Само предложение носит, конечно, весьма общий (категорный) характер (в доказательстве нам не приходилось вспоминать об алгебрах Ли).

Замечание. Итак, на языке представлений полная приводимость означает, что в подходящем базисе матрицы всех операторов представления будут блочно-диагональными, и все блоки являются неприводимыми представлениями.

Примеры. 1) Пусть $\mathfrak{g} = 0$. Тогда $\mathfrak{g}$-модули — это просто линейные пространства (без всякой дополнительной структуры). Итак, $\mathfrak{g}$-модули изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности равны; простые $\mathfrak{g}$-модули — это в точности одномерные (т.е. простой $\mathfrak{g}$-модуль единствен с точностью до изоморфизма); все $\mathfrak{g}$-модули полупросты.

2) Пусть $\mathfrak{g} = \Bbbk$ (т.е. $\mathfrak{g}$ одномерна). Напомним, что $\mathfrak{g}$-модули — это пары (V, x), где V — линейное пространство, $x \in \operatorname{End} V$. Пусть основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто. Простые $\mathfrak{g}$-модули — это снова в точности одномерные (почему?). Но теперь классы изоморфизма простых $\mathfrak{g}$-модулей нумеруются элементами поля $\Bbbk$ (именно, они соответствуют парам $(\Bbbk, \text{умножение на}\,\lambda)$). Далее, $\mathfrak{g}$-модуль, отвечающий паре (V, x), полупрост тогда и только тогда, когда оператор $x \in \operatorname{End} V$ *полупрост* (т.е. диагонализуем), что бывает отнюдь не всегда.

3) Факт (Теорема Г.Вейля) Всякое конечномерное представление комплексной (полу)простой алгебры Ли вполне приводимо. (Доказательство будет позже.)

Упр. Подмодули и фактормодули полупростого $\mathfrak{g}$-модуля полупросты.

Однозначно ли разложение полупростого $\mathfrak{g}$-модуля в прямую сумму простых? Почти да.

Предложение 14. *Разложение полупростого $\mathfrak{g}$-модуля в прямую сумму простых однозначно с точностью до изоморфизмов и перестановок слагаемых.*

Для доказательства понадобятся некоторые дополнительные (и полезные не только для этого доказательства) факты.

Упр. Пусть V, V_1, V_2 — линейные пространства. Тогда $\operatorname{Hom}(V, V_1 \oplus V_2) = \operatorname{Hom}(V, V_1) \oplus \operatorname{Hom}(V, V_2)$, $\operatorname{Hom}(V_1 \oplus V_2, V) = \operatorname{Hom}(V_1, V) \oplus \operatorname{Hom}(V_2, V)$.

Здесь равенства — это канонические (т.е. "естественные", не зависящие от выбора базисов и т. п.) изоморфизмы. На самом деле лучше писать $\operatorname{Hom}(V, V_1 \times V_2) = \operatorname{Hom}(V, V_1) \oplus \operatorname{Hom}(V, V_2)$ и $\operatorname{Hom}(V_1 \oplus V_2, V) = \operatorname{Hom}(V_1, V) \times \operatorname{Hom}(V_2, V)$; для линейных пространств, конечно, $V_1 \times V_2 = V_1 \oplus V_2$, но разница между прямой суммой и прямым произведением проявляется при переходе к бесконечным наборам; в других категориях прямая сумма даже двух объектов может не совпадать с прямым произведением (не говоря уже о том, что ни то, ни другое не обязаны существовать).

Упр. Пусть V, V_1, V_2 — $\mathfrak{g}$-модули. Тогда $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V_1 \oplus V_2) = \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V_1) \oplus \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V_2)$, $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_1 \oplus V_2, V) = \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_1, V) \oplus \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_2, V)$.

Пусть V_1, V_2 — $\mathfrak{g}$-модули. Положим $c(V_1, V_2) := \dim \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_1, V_2)$. Число $c(V_1, V_2)$ называют *числом сплетения* V_1 и V_2. Последнее упражнение показывает, что

$$c(V, V_1 \oplus V_2) = c(V, V_1) + c(V, V_2),\ \ c(V_1 \oplus V_2, V) = c(V_1, V) + c(V_2, V)$$

для любых $\mathfrak{g}$-модулей V, V_1, V_2. Далее, если V_1 и V_2 просты, и $V_1 \not\simeq V_2$, то $c(V_1, V_2) = 0$ согласно лемме Шура. Если основное поле алгебраически замкнуто, а V_1 и V_2 просты, то

$$c(V_1, V_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } V_1 \simeq V_2, \\ 0, & \text{если } V_1 \not\simeq V_2 \end{cases}$$

(это снова лемма Шура). Кроме того, очевидно, что если V, V_1, V_2 — $\mathfrak{g}$-модули, и $V_1 \simeq V_2$, то $c(V, V_1) = c(V, V_2)$.

Доказательство предложения 14 (для конечномерных $\mathfrak{g}$-модулей). Пусть $\mathfrak{g}$-модуль V полупрост. Тогда $V = L_1 \oplus \ldots \oplus L_n$, где все L_i просты. Пусть L — простой $\mathfrak{g}$-модуль. Перенумеруем подмодули L_i так, чтобы $L_1 \simeq \ldots \simeq L_k \simeq L$, $L_j \not\simeq L$ при $j > k$ (конечно, не исключен и случай, когда $k = 0$). Нам надо доказать, что число k зависит только от V и L, но не от способа разложения V на простые подмодули (это и есть "однозначность разложения с точностью до изоморфизма"). Действительно, $c(L, V) = c(L, L_1) + \ldots + c(L, L_k) + c(L, L_{k+1}) + \ldots = k \cdot c(L, L)$ ($c(L, L_j) = 0$ при $j > k$ по лемме Шура), т.е. $k = c(L, V)/c(L, L)$, что и требовалось доказать. □

Замечание. Пусть основное поле алгебраически замкнуто. Тогда $c(L, L) = 1$, т.е. $k = c(L, V)$ (мы сохраняем обозначения из предыдущего доказательства). Итак, $c(L, V)$ — это "число вхождений L в V".

Результат об однозначности разложения верен и в более общей ситуации.

Факт. **(Теорема Крулля-Шмидта.)** Пусть V — (конечномерный) $\mathfrak{g}$-модуль. Тогда разложение V в прямую сумму неразложимых $\mathfrak{g}$-модулей однозначно с точностью до изоморфизмов и перестановок слагаемых. (Неразложимый $\mathfrak{g}$-модуль — это ненулевой $\mathfrak{g}$-модуль, который нельзя представить в виде прямой суммы двух ненулевых $\mathfrak{g}$-модулей. Конечно, из простоты следует неразложимость, но обратное неверно. Существование разложения $\mathfrak{g}$-модуля в прямую сумму неразложимых $\mathfrak{g}$-модулей очевидно (по меньшей мере, в конечномерном случае), а вот единственность a priori не очевидна.)

Упр. Опишите неразложимые $\mathfrak{g}$-модули и проверьте теорему Крулля-Шмидта в случае, когда $\dim \mathfrak{g} = 1$ и основное поле алгебраически замкнуто. (По существу, в этом случае теорема вытекает из единственности жордановой формы линейного оператора.)

Пусть V — полупростой (конечномерный) $\mathfrak{g}$-модуль, $V = L_1 \oplus \ldots \oplus L_n$, где все L_i просты. Набор $\{L_i\}$ определен однозначно, вообще говоря, лишь с точностью до изоморфизма. Сами L_i (как подмодули в V) могут быть определены неоднозначно (это хорошо видно уже в тривиальном случае $\mathfrak{g} = 0$). Тем не менее кое-что можно уточнить.

Пусть L — простой $\mathfrak{g}$-модуль. Как и прежде, занумеруем L_i так, чтобы $L_1 \simeq \ldots \simeq L_k \simeq L$, $L_j \not\simeq L$ при $j > k$. Положим $V_L = L_1 \oplus \ldots \oplus L_k \simeq \underbrace{L \oplus \ldots \oplus L}_{k}$.

Предложение 15. *Подмодуль V_L зависит только от V и L, но не от способа разложения V на простые подмодули.*

Говорят, что подмодуль V_L — это *изотипическая компонента* V, соответствующая L. Очевидно, что если $L_1 \simeq L_2$, то $V_{L_1} = V_{L_2}$. Предложение означает, что разложение полупростого $\mathfrak{g}$-модуля V в прямую сумму изотипических компонент однозначно в буквальном смысле. Другими словами, для всякого простого $\mathfrak{g}$-модуля L существует ровно один подмодуль $V_L \subset V$ такой, что $V_L \simeq L \oplus \ldots \oplus L$ (возможно, что $V_L =$

0) и $V = \bigoplus_L V_L$ (где суммирование ведется по множеству представителей классов изоморфизма простых $\mathfrak{g}$-модулей).

Пример. Пусть $\dim V < \infty$, и $x \in \operatorname{End} V$ полупрост (=диагонализуем), т.е. пара (V, x) задает полупростой модуль над одномерной алгеброй Ли. Тогда разложение V на изотипические компоненты — это разложение V в прямую сумму собственных подпространств оператора x.

Доказательство предложения 15. Переопределим V_L так, что определение не будет зависеть от способа разложения на простые подмодули. Именно, положим $V'_L :=$ сумма всех подмодулей в V, изоморфных L. Очевидно, что V'_L — подмодуль в V. Проверим, что $V'_L = V_L$.

По определению, $V'_L \supset V_L$. Для проверки обратного включения достаточно доказать, что если L' — подмодуль в V такой, что $L' \simeq L$, то $L' \subset V_L$. Пусть f — это проектор V на $L_{k+1} \oplus \ldots \oplus L_n$ параллельно $L_1 \oplus \ldots \oplus L_k = V_L$. Ограничим f на L'. Тогда $f|_{L'} \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(L', L_{k+1} \oplus \ldots \oplus L_n) = \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(L', L_{k+1}) \oplus \ldots \oplus \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(L', L_n) = 0$ (по лемме Шура), т.е. $f(L') = 0$. Это и означает, что $L' \subset V_L$. $\square$

Как по заданным $\mathfrak{g}$-модулям строить новые? Мы уже встречались с такими конструкциями (подмодули и фактормодули, прямые суммы). Вот пример несколько другой природы. Рассмотрим $\mathfrak{g}$-модуль V. Превратим в $\mathfrak{g}$-модуль сопряженное пространство V^*. Именно, если $f \in V^*$, $x \in \mathfrak{g}$, то положим $(xf)(v) := -f(xv)$, где $v \in V$. Проверим, что так действительно получается $\mathfrak{g}$-модуль. В самом деле, отображение $(x, f, v) \mapsto -f(xv)$ линейно как по v (т.е. $xf \in V^*$), так и по x и f. Далее, если $x, y \in \mathfrak{g}$, то $([x,y]f)(v) = -f([x,y]v) = -f(x(yv)) + f(y(xv)) = (xf)(yv) - (yf)(xv) = -(y(xf))(v) + (x(yf))(v)$.

Как "объяснить" появление минуса в определении xf (конечно, без минуса последняя выкладка не получится...)?

Пусть $r : G \to GL(V)$ — представление группы G в линейном пространстве V. Мы будем писать gv вместо $r(g)v$, где $g \in G$, $v \in V$ (т.е. будем пользоваться "языком G-модулей"). Тогда возникает представление G в пространстве V^*, заданное формулой $(gf)(v) := f(g^{-1}v)$. Вот ключевая проверка: $((g_1g_2)f)(v) = f((g_1g_2)^{-1}v) = f(g_2^{-1}g_1^{-1}v) = (g_2f)(g_1v) = (g_1(g_2f))(v)$. (Упр. Выполните остальные необходимые проверки.) Другими словами, представления группы G в пространствах V и V^* согласованы так, что естественное спаривание $(f, v) \mapsto \langle f, v\rangle := f(v)$ между V^* и V "G-инвариантно", т.е. $\langle gf, gv\rangle = \langle f, v\rangle$. (Более общо, если группа G действует на множестве A, то возникает представление G в пространстве функций на A, заданное формулой $(gf)(a) := f(g^{-1}a)$.)

Пусть теперь G — группа Ли с заданным представлением в (конечномерном вещественном) пространстве V. Рассмотрим соответствующее представление G в пространстве V^*. (Упр. Проверьте, что это — тоже представление в смысле теории групп Ли.) Тогда его дифференциал будет представлением алгебры Ли $\mathfrak{g} = \operatorname{Lie} G$ в том же пространстве V^*. Что это за представление? Пусть $x \in \mathfrak{g}$, т.е. $x = \frac{d}{dt}\gamma(t)|_{t=0}$, где

$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ — гладкая кривая, $\gamma(0) = e$. Пусть $f \in V^*$, $v \in V$. Тогда

$$(xf)(v) = \frac{d}{dt}\left(\gamma(t)f\right)(v)|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(\gamma(t)^{-1}v)|_{t=0} = f\left(\left(\frac{d}{dt}\gamma(t)^{-1}|_{t=0}\right)v\right) = -f(xv).$$

Чтобы двигаться дальше (например, как наделить структурой $\mathfrak{g}$-модуля пространство $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$, где V_1 и V_2 — $\mathfrak{g}$-модули?), нам понадобится важное понятие линейной алгебры (позволяющее унифицировать многие ее конструкции):

Тензорное произведение (линейных пространств)

Пусть V_1 и V_2 — линейные пространства.

Определение 15. *Тензорное произведение* V_1 и V_2 — это пара $(V_1 \otimes V_2, \otimes)$, где $V_1 \otimes V_2$ — линейное пространство, $\otimes : V_1 \times V_2 \to V_1 \otimes V_2$, $(v_1, v_2) \mapsto v_1 \otimes v_2$ — билинейное отображение, причем выполнено следующее свойство (“свойство универсальности тензорного произведения”): для всякого билинейного отображения $V_1 \times V_2 \to W$ существует единственное линейное отображение $V_1 \otimes V_2 \to W$ такое, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & V_1 \times V_2 \arrow[dl, "\otimes"'] \arrow[dr] & \\ V_1 \otimes V_2 \arrow[rr] & & W \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Замечания. 1. Если по контексту не ясно, над каким именно полем $\Bbbk$ рассматриваются векторные пространства V_1 и V_2, то пишут $V_1 \otimes_{\Bbbk} V_2$.

2. Выражаясь неформально, тензорное произведение позволяет “превращать” билинейные отображения в линейные.

3. Согласно определению, тензорное произведение V_1 и V_2 — это универсальный отталкивающий объект (что это?) в следующей категории $\underline{\mathrm{Bilin}}_{V_1,V_2}$: объекты — это билинейные отображения $V_1 \times V_2 \to W$ (V_1 и V_2 зафиксированы!); морфизм между $V_1 \times V_2 \to W$ и $V_1 \times V_2 \to W'$ — это линейное отображение $W \to W'$ такое, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & V_1 \times V_2 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ W \arrow[rr] & & W' \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Предложение 16. *Тензорное произведение V_1 и V_2 единственно с точностью до однозначно определенного изоморфизма. Точнее, если $V_1 \times V_2 \to W$ и $V_1 \times V_2 \to W'$ —*

два тензорных произведения, то существует единственный линейный изоморфизм $W \to W'$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & V_1 \times V_2 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ W \arrow[rr, "\sim"] & & W' \end{tikzcd}$$

коммутативна.

<u>Доказательство</u>. Так как $V_1 \times V_2 \to W$ — тензорное произведение, то существует единственное линейное отображение $f : W \to W'$ такое, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & V_1 \times V_2 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ W \arrow[rr, "f"] & & W' \end{tikzcd}$$

коммутативна. С другой стороны, так как $V_1 \times V_2 \to W$ — тензорное произведение, то существует единственное линейное отображение $g : W' \to W$ такое, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & V_1 \times V_2 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ W & & W' \arrow[ll, "g"'] \end{tikzcd}$$

коммутативна. Покажем, что f и g взаимно обратны. Рассмотрим две коммутативные диаграммы:

$$\begin{tikzcd} & V_1 \times V_2 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ W \arrow[rr, "\mathrm{id}"] & & W \end{tikzcd} \qquad \text{и} \qquad \begin{tikzcd} & V_1 \times V_2 \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ W \arrow[r, "f"] & W' \arrow[r, "g"] & W \end{tikzcd} .$$

Так как $V_1 \times V_2 \to W$ — тензорное произведение, то $g \circ f = \mathrm{id}$. Аналогично проверяется, что $f \circ g = \mathrm{id}$. □

<u>Замечание</u>. Конечно, это доказательство — частный случай доказательства того, что в любой категории универсальный (отталкивающий) объект единствен (если существует!).

Теорема 17. *Тензорное произведение существует.*

<u>Доказательство</u>. Пусть V_1 и V_2 — линейные пространства. Пусть $\{e_i\}$ — базис в V_1, $\{u_j\}$ — базис в V_2. Рассмотрим линейное пространство $V_1 \otimes V_2$ с базисом $\{e_i \otimes u_j\}$ (пока что $e_i \otimes u_j$ — это просто символ, обозначающий упорядоченную пару, составленную из e_i и u_j). Определим теперь отображение $\otimes : V_1 \times V_2 \to V_1 \otimes V_2$ на парах базисных

векторов формулой $(e_i, u_j) \mapsto e_i \otimes u_j$ и продолжим его на все $V_1 \times V_2$ по билинейности, т.е.

$$\left(\sum_i \alpha_i e_i, \sum_j \beta_j u_j\right) \mapsto \left(\sum_i \alpha_i e_i\right) \otimes \left(\sum_j \beta_j u_j\right) := \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \cdot e_i \otimes u_j.$$

Докажем, что $\otimes : V_1 \times V_2 \to V_1 \otimes V_2$ — тензорное произведение V_1 и V_2.

Пусть $f : V_1 \times V_2 \to W$ — билинейное отображение. Определим линейное отображение $\widetilde{f} : V_1 \times V_2 \to W$ так, чтобы диаграмма

$$\begin{tikzcd}
& V_1 \times V_2 \arrow[dl, "\otimes"'] \arrow[dr, "f"] & \\
V_1 \otimes V_2 \arrow[rr, "\widetilde{f}"] & & W
\end{tikzcd}$$

была коммутативной. Коммутативность этой диаграммы означает, в частности, что $\widetilde{f}(e_i \otimes u_j) = f(e_i, u_j)$. Это доказывает единственность $\widetilde{f}$ (ибо всякое линейное отображение однозначно восстанавливается по образам базисных векторов). Теперь определим $\widetilde{f}$ на базисных векторах $e_i \otimes u_j$ пространства $V_1 \otimes V_2$ формулой $\widetilde{f}(e_i \otimes u_j) := f(e_i, u_j)$ и продолжим $\widetilde{f}$ на все $V_1 \otimes V_2$ по линейности. Легко проверить, что это $\widetilde{f}$ — искомое. Вот проверка: $\left(\widetilde{f} \circ \otimes\right)\left(\sum_i \alpha_i e_i, \sum_j \beta_j u_j\right) = \widetilde{f}\left(\sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \cdot e_i \otimes u_j\right) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \cdot \widetilde{f}(e_i \otimes u_j) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \cdot f(e_i, u_j) = f\left(\sum_i \alpha_i e_i, \sum_j \beta_j u_j\right)$. $\square$

Замечание. Наше определение тензорного произведения использует выбор базиса в рассматриваемых линейных пространствах. В силу единственности тензорного произведения, на самом деле от базиса, по существу, ничего не зависит (с точностью до однозначно определенного изоморфизма). “Инвариантную” конструкцию тензорного произведения (и, вообще, больше подробностей) см. Кострикин, Манин “Линейная алгебра и геометрия” или Ленг “Алгебра”.

Следствие 18 (из конструкции $V_1 \otimes V_2$). $\dim V_1 \otimes V_2 = \dim V_1 \cdot \dim V_2$ $\square$

Замечание. Не следует думать, что любой элемент из $V_1 \otimes V_2$ имеет вид $v_1 \otimes v_2$, где $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$. Общий вид элемента из $V_1 \otimes V_2$ таков: $\sum_{i=1}^N v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)}$, где $v_1^{(i)} \in V_1$, $v_2^{(i)} \in V_2$, N не фиксировано.

Замечание. Определение тензорного произведения обобщается на случай любого конечного набора линейных пространств. Именно, если $V_1, \ldots, V_n$ — линейные пространства, то их тензорное произведение — это пара $(V_1 \otimes \ldots \otimes V_n, \otimes)$, где $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ — линейное пространство, $\otimes : V_1 \times \ldots \times V_n \to V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$, $(v_1, \ldots, v_n) \mapsto v_1 \otimes \ldots \otimes v_2$ — n-линейное (т.е. линейное по каждой переменной) отображение, причем выполнено следующее свойство: для всякого n-линейного отображения $V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ существует единственное линейное отображение $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \to W$ такое, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
& V_1 \times \ldots \times V_n \arrow[dl, "\otimes"'] \arrow[dr] & \\
V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \arrow[rr] & & W
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Упр. Сформулируйте и докажите теоремы существования и единственности для $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$.

Предложение 19 (канонические изоморфизмы).
(1) $\mathrm{Bilin}(V_1 \times V_2, W) = \mathrm{Hom}(V_1 \otimes V_2, W)$ *(здесь* $\mathrm{Bilin}(V_1 \times V_2, W)$ *— это пространство всех билинейных отображений* $V_1 \times V_2 \to W$*));*
(2) $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 = (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 = V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$*;*
(3) $V_1 \otimes V_2 \simeq V_2 \otimes V_1$*;*
(4) *если* $\dim V_1 < \infty$, $\dim V_2 < \infty$*, то* $(V_1 \otimes V_2)^* = V_1^* \otimes V_2^*$*;*
(5) *если* $\dim V < \infty$*, то* $\mathrm{Hom}(V, W) = V^* \otimes W$ *(в частности, если* $\dim V < \infty$*, то* $\mathrm{End}\, V = V^* \otimes V$*);*
(6) $\mathrm{Hom}(V_1, \mathrm{Hom}(V_2, W)) = \mathrm{Hom}(V_1 \otimes V_2, W)$.

Доказательство. (1) непосредственно следует из определения тензорного произведения. Все остальные свойства доказываются по одной и той же схеме, поэтому докажем только (2) и (5). (Упр. Докажите остальные свойства.)

(2) Построим "естественный" изоморфизм между $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ и $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ (вторая часть доказывается аналогично). По определению, имеются билинейные отображения $\otimes : V_1 \times V_2 \to V_1 \otimes V_2$ и $\otimes : (V_1 \otimes V_2) \times V_3 \to (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$. Поэтому имеется и отображение

$$V_1 \times V_2 \times V_3 \to (V_1 \otimes V_2) \times V_3 \to (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3,$$

$$(v_1, v_2, v_3) \mapsto (v_1 \otimes v_2, v_3) \mapsto (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3.$$

Упр. Это отображение трилинейно. По определению тензорного произведения, существует единственное линейное отображение $f : V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \to (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ такое, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times V_2 \times V_3 \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d] & V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \arrow[d, "f"] \\
(V_1 \otimes V_2) \times V_3 \arrow[r] & (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Проверим, что f — изоморфизм линейных пространств. Для этого достаточно доказать, что f переводит некоторый (и тогда любой) базис пространства $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ в базис пространства $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$. Пусть $\{e_i\}$ — базис в V_1, $\{u_j\}$ — базис в V_2, $\{w_k\}$ — базис в V_3. Тогда $\{e_i \otimes u_j \otimes w_k\}$ — базис в $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ (почему?). По определению,

$f(e_i \otimes u_j \otimes w_k) = (e_i \otimes u_j) \otimes w_k$. Но $\{e_i \otimes u_j\}$ — базис в $V_1 \otimes V_2$, и $\{(e_i \otimes u_j) \otimes w_k\}$ — базис в $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$.

(5) Чтобы использовать ту же схему рассуждений, нам нужно построить "естественное" билинейное отображение $V^* \times W \to \mathrm{Hom}(V, W)$. Именно, пусть $f \in V^*$, $w \in W$. Сопоставим паре $(f, w) \in V^* \times W$ отображение $\varphi : V \to W$, заданное формулой $\varphi(v) = f(v)w$, где $v \in V$. Упр. $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$, и отображение $(f, v) \mapsto \varphi$ билинейно. По определению тензорного произведения, существует единственное линейное отображение $\Phi : V^* \otimes W \to \mathrm{Hom}(V, W)$ такое, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & V^* \times W \arrow[dl, "\otimes"'] \arrow[dr] & \\ V^* \otimes W \arrow[rr, "\Phi"] & & \mathrm{Hom}(V, W) \end{tikzcd}$$

коммутативна. Проверим, что Φ — изоморфизм.

Пусть $\{e_i\}$ — (конечный!) базис в V, $\{f_i\}$ — двойственный ему базис в V^* (т.е. $f_i(e_j) = \delta_{ij}$). (Внимание: именно здесь используется условие $\dim V < \infty$; без этого условия система $\{f_i\}$, двойственная $\{e_i\}$, не будет полна в V^*.) Пусть $\{w_j\}$ — базис в W. Тогда $\{f_i \otimes w_j\}$ — базис в $V^* \otimes W$. По построению, $\Phi(f_i \otimes w_j) = \varphi_{ij}$, где $\varphi_{ij}(e_k) = f_i(e_k)w_j = \delta_{ik}w_j$. Упр. Проверьте, что $\{\varphi_{ij}\}$ — базис в $\mathrm{Hom}(V, W)$. $\square$

Упр. Если $\dim V = \infty$, то отображение $\Phi : V^* \otimes W \to \mathrm{Hom}(V, W)$, определенное в доказательстве (5) — вложение (но не изоморфизм).

Упр. Пусть V — конечномерное линейное пространство, так что имеется естественный изоморфизм между $\mathrm{End}\, V$ и $V^* \otimes V$.

1) $\mathrm{End}\, V$ — это (ассоциативная) алгебра. Опишите явно соответствующую структуру алгебры в пространстве $V^* \otimes V$.

2) $\mathrm{End}\, V$ — это алгебра с единицей (единица — это id). Что соответствует id при построенном изоморфизме между $\mathrm{End}\, V$ и $V^* \otimes V$?

Замечания. 1) Мы не пользовались базисами при построении канонических изоморфизмов. Базисы использовались лишь в доказательствах того, что они и в самом деле изоморфизмы. Итак, канонические изоморфизмы действительно "каноничны".

Конечно, мы на самом деле построили не просто изоморфизм между, скажем, $V^* \otimes W$ и $\mathrm{Hom}(V, W)$. Мы построили (единственный!) изоморфизм между объектами $V^* \times W \to V^* \otimes W$ и $V^* \times W \to \mathrm{Hom}(V, W)$ категории $\underline{\mathrm{Bilin}}_{V^*, W}$. Если не выбирать "выделенного" тензорного произведения V^* и W (а мы его и не выбирали), то можно считать, что $\mathrm{Hom}(V, W)$ и есть тензорное произведение V^* и W.

2) Канонические изоморфизмы, как правило, позволяют безболезненно отождествлять изоморфные объекты. Есть одно чуть более тонкое место: случай (3). В самом деле, нетрудно видеть, что изоморфизм $V_1 \otimes V_2 \to V_2 \otimes V_1$ устроен так: $v_1 \otimes v_2 \mapsto v_2 \otimes v_1$. Если $V_1 = V_2 =: V$, то просто $V_1 \otimes V_2 = V_2 \otimes V_1 = V \otimes V$, а наша конструкция дает нетождественный автоморфизм $V \otimes V$. Мы сейчас подробнее обсудим этот эффект.

Пусть $\operatorname{char}\Bbbk = 0$. Введем обозначение $V^{\otimes n} := \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{n}$ (т.е. $V^{\otimes n}$ — это n-я тензорная степень V). Пусть $\sigma \in S_n$.

Упр. Имеется "естественный" автоморфизм $\sigma : V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}$, который действует на "разложимые" тензоры по формуле $\sigma(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(n)}$.

Пусть $w \in V^{\otimes n}$ (w не обязательно разложим!). Говорят, что w *симметричен*, если $\sigma(w) = w$ для всех $\sigma \in S_n$; w *кососимметричен*, если $\sigma(w) = \operatorname{sgn}(\sigma)w$ для всех $\sigma \in S_n$. Пусть

$$S^nV = \{w \in V^{\otimes n} \mid w \text{ симметричен}\},\ \wedge^nV = \{w \in V^{\otimes n} \mid w \text{ кососимметричен}\}.$$

S^nV — это *n-я симметрическая степень* V, $\wedge^nV$ — это *n-я внешняя степень* V. Очевидно, что S^nV и $\wedge^nV$ — линейные подпространства в $V^{\otimes n}$. По определению, $S^1V = \wedge^1V = V$. Удобно считать, что $V^{\otimes 0} = S^0V = \wedge^0V = \Bbbk$.

Упр. Проверьте, что $V \otimes V = S^2V \oplus \wedge^2V$. (Для $V^{\otimes n}$ с $n > 2$ это, как правило, неверно — почему?)

Упр. Рассмотрим линейные операторы $\mathrm{Sym} \in \operatorname{End} V^{\otimes n}$ и $\mathrm{Alt} \in \operatorname{End} V^{\otimes n}$, заданные формулами

$$\mathrm{Sym} = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in S_n} \sigma, \quad \mathrm{Alt} = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma$$

(это т.наз. *операторы симметризации* и *кососимметризации* (или *альтернирования*) соответственно). Проверьте, что $\mathrm{Im}\mathrm{Sym} = S^nV$, $\mathrm{Im}\mathrm{Alt} = \wedge^nV$, $\mathrm{Sym}|_{S^nV} = \mathrm{id}$, $\mathrm{Alt}|_{\wedge^nV} = \mathrm{id}$ (т.е. Sym — это проектор на S^nV, а Alt — проектор на $\wedge^nV$).

Упр. Пусть $\dim V = m < \infty$. Вычислите $\dim S^nV$ и $\dim \wedge^nV$. (Проверьте, в частности, что $\wedge^nV = 0$ при $n > m$.)

Замечание. Если $\operatorname{char}\Bbbk = p > 0$, то симметрические и внешние степени надо определять по-другому (это другое определение годится и в случае $\operatorname{char}\Bbbk = 0$); см. об этом у Кострикина и Манина.

Упр. Пусть $f_1 \in \operatorname{Hom}(V_1, W_1)$, $f_2 \in \operatorname{Hom}(V_2, W_2)$. Тогда существует и единственно линейное отображение $f_1 \otimes f_2 : V_1 \otimes V_2 \to W_1 \otimes W_2$, для которого $(f_1 \otimes f_2)(v_1 \otimes v_2) = f_1(v_1) \otimes f_2(v_2)$. ($f_1 \otimes f_2$ называется тензорным произведением f_1 и f_2.)

Вернемся к представлениям алгебр Ли. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, V_1 и V_2 — $\mathfrak{g}$-модули. Превратим пространство $V_1 \otimes V_2$ в $\mathfrak{g}$-модуль, положив $x(v_1 \otimes v_2) = xv_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes xv_2$, где $x \in \mathfrak{g}$, $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$ (на языке представлений $\rho_{V_1 \otimes V_2}(x) = \rho_{V_1}(x) \otimes \mathrm{id}_{V_2} + \mathrm{id}_{V_1} \otimes \rho_{V_2}(x)$).

Упр. Проверьте, что $V_1 \otimes V_2$ действительно становится $\mathfrak{g}$-модулем.

Если G — группа (Ли), и заданы ее представления в пространствах V_1 и V_2, то возникает представление G в пространстве $V_1 \otimes V_2$, заданное формулой $g(v_1 \otimes v_2) = gv_1 \otimes gv_2$ (Упр. Выполните необходимые проверки.) Применим к нему функтор Ли.

Именно, пусть $\mathfrak{g} = \operatorname{Lie} G$, $x \in \mathfrak{g}$, т.е. $x = \frac{d}{dt}\gamma(t)|_{t=0}$, где $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ — гладкая кривая, $\gamma(0) = e$. Тогда

$$x(v_1 \otimes v_2) = \frac{d}{dt}\gamma(t)\,(v_1 \otimes v_2)\,|_{t=0} = \frac{d}{dt}\,(\gamma(t)v_1 \otimes \gamma(t)v_2)\,|_{t=0} =$$
$$= \left(\frac{d}{dt}\gamma(t)|_{t=0}\right) v_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes \left(\frac{d}{dt}\gamma(t)|_{t=0}\right) v_2 = xv_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes xv_2.$$

Последняя выкладка опирается на такое

Упр. Пусть $B : V_1 \times V_2$ — билинейное отображение, $v_1(t) \in V_1$ и $v_2(t) \in V_2$ — гладкие кривые. Тогда $\frac{d}{dt}B(v_1(t), v_2(t))|_{t=t_0} = B(\frac{d}{dt}v_1(t)|_{t=t_0}, v_2(t_0)) + B(v_1(t_0), \frac{d}{dt}v_2(t)|_{t=t_0})$.

Итак, взятие тензорного произведения представлений коммутирует с функтором Ли (строго говоря, мы проверили это лишь на объектах).

Пусть V и W — $\mathfrak{g}$-модули ($\dim V < \infty$). Воспользуемся каноническим изоморфизмом $\operatorname{Hom}(V, W) = V^* \otimes W$ для введения структуры $\mathfrak{g}$-модуля в пространство $\operatorname{Hom}(V, W)$. Вспомним, что если $f \in V^*$, $w \in W$, то $f \otimes w \mapsto \varphi$, где $\varphi(v) = f(v)w$, $v \in V$. Если $x \in \mathfrak{g}$, то $x\varphi$ должен соответствовать тензору $x(f \otimes w) = xf \otimes w + f \otimes xw$, т.е. $(x\varphi)(v) = (xf)(v)w + f(v)xw = -f(xv)w + x(f(v)w) = x\varphi(v) - \varphi(xv)$. Пусть теперь $\varphi \in \operatorname{Hom}(V, W)$ произволен (и не обязательно $\dim V < \infty$!), $x \in \mathfrak{g}$. Положим по определению $(x\varphi)(v) := x\varphi(v) - \varphi(xv)$. Разумеется, эта формула задает в пространстве $\operatorname{Hom}(V, W)$ структуру $\mathfrak{g}$-модуля (при $\dim V < \infty$ она происходит из $V^* \otimes W$ “перенесением структуры”). Упр. Выполните необходимые проверки.

Пусть V — $\mathfrak{g}$-модуль, $v \in V$. Говорят, что v — $\mathfrak{g}$-*инвариант*, если $xv = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}$. Мотивировка этого определения такова. Если V — пространство представления группы (Ли) G, то G-инвариант — это элемент $v \in V$ такой, что $gv = v$ для всех $g \in G$. Применим функтор Ли. Пусть $\mathfrak{g} = \operatorname{Lie} G$, $x \in \mathfrak{g}$, т.е. $x = \frac{d}{dt}\gamma(t)|_{t=0}$, где $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ — гладкая кривая, $\gamma(0) = e$. Если $\gamma(t)v = v$, то $\frac{d}{dt}\gamma(t)v|_{t=0} = 0$, т.е. $xv = 0$. Итак, применение функтора Ли не меняет множество инвариантов. Обозначим через $V^{\mathfrak{g}}$ множество всех $\mathfrak{g}$-инвариантов в V. Очевидно, что $V^{\mathfrak{g}}$ — подмодуль в V, являющийся тривиальным $\mathfrak{g}$-модулем.

Упр. Пусть V и W — $\mathfrak{g}$-модули. Проверьте, что $\operatorname{Hom}(V, W)^{\mathfrak{g}} = \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)$.

Если V — $\mathfrak{g}$-модуль, $n \in \mathbb{Z}_+$, то $V^{\otimes n}$ — тоже $\mathfrak{g}$-модуль.

Упр. Пусть $\operatorname{char} \Bbbk = 0$. Проверьте, что $\operatorname{Sym}, \operatorname{Alt} \in \operatorname{End}_{\mathfrak{g}} V^{\otimes n}$. В частности, $S^n V$ и $\wedge^n V$ — подмодули в $V^{\otimes n}$.

Разрешимые и нильпотентные алгебры Ли

Соглашение: Начиная с этого места, предполагается (если явно не оговорено противное), что основное поле — это $\mathbb{C}$. (И по-прежнему все алгебры Ли предполагаются конечномерными.) Все результаты (но не все доказательства!) будут, по существу, верны и в случае, когда основное поле алгебраически замкнуто и характеристики 0.

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. Если $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — линейные подпространства в $\mathfrak{g}$, то положим

$$[\mathfrak{a},\mathfrak{b}] := \left\{ \sum_{i=1}^{n} [x_i, y_i] \;\middle|\; x_i \in \mathfrak{a},\ y_i \in \mathfrak{b},\ n \text{ не фиксировано} \right\}.$$

Очевидно, что $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$ — линейное подпространство в $\mathfrak{g}$. Отметим, что $\mathfrak{a}$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$ тогда и только тогда, когда $[\mathfrak{a},\mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$; $\mathfrak{a}$ — идеал в $\mathfrak{g}$ тогда и только тогда, когда $[\mathfrak{g},\mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$.

Напомним, что *производный идеал* (или *коммутант*) алгебры Ли $\mathfrak{g}$ — это $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. Будем итерировать эту конструкцию, т.е. рассмотрим "старшие производные": $\mathfrak{g}'' := [\mathfrak{g}',\mathfrak{g}'], \ldots, \mathfrak{g}^{(n+1)} := [\mathfrak{g}^{(n)},\mathfrak{g}^{(n)}]$, и т. д. Тогда

$$\mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}' \supset \mathfrak{g}'' \supset \ldots \supset \mathfrak{g}^{(n)} \supset \mathfrak{g}^{(n+1)} \ldots,$$

причем $\mathfrak{g}^{(n+1)}$ — идеал в $\mathfrak{g}^{(n)}$.

Упр. Проверьте, что на самом деле все $\mathfrak{g}^{(n)}$ — идеалы в $\mathfrak{g}$.

Определение 16. $\mathfrak{g}$ *разрешима,* если $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$ для некоторого n.

Примеры. 1) Если $\mathfrak{g}$ абелева, то $\mathfrak{g}$ разрешима (ибо $\mathfrak{g}' = 0$).

2) Пусть $\mathfrak{b}$ — подалгебра в $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, состоящая из всех верхнетреугольных матриц. Оказывается, $\mathfrak{b}$ разрешима. В самом деле, несложно проверить (Упр. проверьте!), что

$$\mathfrak{b}' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & * & \ldots & * \\ & 0 & * & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & * \\ & & & \ddots & * \\ 0 & & \ldots & & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathfrak{b}'' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & * & \ldots & * \\ & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & * \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & \ldots & & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathfrak{b}''' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & * & \ldots & * \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ & & 0 & 0 & 0 & \ddots & * \\ \vdots & & & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ & & & & 0 & \ddots & 0 \\ & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ldots & & & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

и т. п. (т.е. элементы $\mathfrak{b}^{(k)}$ — это матрицы с $\min(2^{k-1}, n)$ нулевыми диагоналями). Поэтому $\mathfrak{b}^{(k)} = 0$, если $2^{k-1} \geq n$.

Имеется эквивалентное определение разрешимости (его часто удобнее проверять). Вот оно.

Упр. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли.

1) Проверьте, что $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$ абелева;

2) Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал в $\mathfrak{g}$. Проверьте, что $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ абелева тогда и только тогда, когда $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{g}'$ (т.е. $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$ — наибольшая абелева факторалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$);

3) Докажите, что $\mathfrak{g}$ разрешима тогда и только тогда, когда существует цепочка

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_0 \supset \mathfrak{a}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{a}_{n-1} \supset \mathfrak{a}_n = 0,$$

где $\mathfrak{a}_j$ — идеал в $\mathfrak{a}_{j-1}$, и все факторы $\mathfrak{a}_{j-1}/\mathfrak{a}_j$ абелевы.

Замечание. Если $\mathfrak{g}$ проста, то $\mathfrak{g}$ неразрешима. В самом деле, так как $\mathfrak{g}$ неабелева, то $\mathfrak{g}' \neq 0$; так как $\mathfrak{g}'$ — идеал в $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$ (ибо $\mathfrak{g}$ проста). Значит, $\mathfrak{g}^{(n)} = \mathfrak{g}$ для всех n.

Теперь рассмотрим т.наз. *степени* алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Именно, $\mathfrak{g}^1 := \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^2 := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}', \mathfrak{g}^3 := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^2], \ldots, \mathfrak{g}^{n+1} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^n]$ и т. д.

Заметим, что

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 \supset \mathfrak{g}^2 \supset \mathfrak{g}^3 \supset \ldots \supset \mathfrak{g}^n \supset \mathfrak{g}^{n+1} \ldots.$$

В самом деле, если $\mathfrak{g}^{n-1} \supset \mathfrak{g}^n$, то $\mathfrak{g}^n = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{n-1}] \supset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^n] = \mathfrak{g}^{n+1}$ (база индукции очевидна). Кроме того, все $\mathfrak{g}^n$ — идеалы в $\mathfrak{g}$ (ибо $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^n] = \mathfrak{g}^{n+1} \subset \mathfrak{g}^n$).

Определение 17. $\mathfrak{g}$ *нильпотентна,* если $\mathfrak{g}^n = 0$ для некоторого n.

Примеры. 1) Если $\mathfrak{g}$ абелева, то $\mathfrak{g}$ нильпотентна (ибо $\mathfrak{g}^2 = 0$).

2) Пусть $\mathfrak{n}$ — подалгебра в $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, состоящая из всех строговерхнетреугольных матриц. Оказывается, $\mathfrak{n}$ нильпотентна. В самом деле, несложно проверить (Упр. проверьте!), что

$$\mathfrak{n}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & * & \ldots & * \\ & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & * \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & \ldots & & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathfrak{n}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & * & \ldots & * \\ & 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ & & 0 & 0 & \ddots & * \\ \vdots & & & 0 & \ddots & 0 \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ldots & & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

и т. п. (т.е. элементы $\mathfrak{n}^k$ — это матрицы с $\min(k, n)$ нулевыми диагоналями). Поэтому $\mathfrak{n}^k = 0$, если $k \geq n$.

Замечание. Как связаны разрешимость и нильпотентность? Прежде всего, заметим, что $\mathfrak{g}^{(n)} \subset \mathfrak{g}^{n+1}$. В самом деле, если $\mathfrak{g}^{(n-1)} \subset \mathfrak{g}^n$, то $\mathfrak{g}^{(n)} = [\mathfrak{g}^{(n-1)}, \mathfrak{g}^{(n-1)}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(n-1)}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^n] = \mathfrak{g}^{n+1}$ (база индукции очевидна). Таким образом, ряд производных убывает не медленнее, чем ряд степеней. Итак, если $\mathfrak{g}$ нильпотентна, то $\mathfrak{g}$ разрешима.

Обратное неверно: если $\mathfrak{b}$ — подалгебра верхнетреугольных матриц, то $\mathfrak{b}^2 = \mathfrak{b}^3 = \mathfrak{b}^4 = \ldots = \mathfrak{n}$ — алгебра Ли строговерхнетреугольных матриц (Упр. проверьте это!). Итак, $\mathfrak{b}$ разрешима, но не нильпотентна.

Вот несколько простых свойств разрешимых и нильпотентных алгебр Ли. (Эти свойства, в частности, позволяют расширить список примеров.)

Предложение 20. (1) *Подалгебры и факторалгебры разрешимой (соотв. нильпотентной) алгебры Ли разрешимы (соотв. нильпотентны).*

(2) *Пусть* $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ *— разрешимый идеал, причем факторалгебра* $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ *также разрешима. Тогда* $\mathfrak{g}$ *разрешима.*

(3) *Пусть* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ *— разрешимые идеалы. Тогда идеал* $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ *также разрешим.*

(4) *Если* $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ *нильпотентна, то* $\mathfrak{g}$ *нильпотентна.*

Доказательство. (1) Если $\mathfrak{h}$ — подалгебра в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{h}^{(n)} \subset \mathfrak{g}^{(n)}$, $\mathfrak{h}^n \subset \mathfrak{g}^n$ (Упр. проверьте это). Отсюда вытекает утверждение о подалгебрах. Далее, факторалгебры алгебры Ли $\mathfrak{g}$ — это все равно что ее гомоморфные образы. Но если $f : \mathfrak{g} \to \widetilde{\mathfrak{g}}$ — гомоморфизм алгебр Ли, то $f(\mathfrak{g}^{(n)}) = f(\mathfrak{g})^{(n)}$, $f(\mathfrak{g}^n) = f(\mathfrak{g})^n$ (Упр. проверьте это), откуда все и следует.

(2) Так как идеал $\mathfrak{a}$ разрешим, то $\mathfrak{a}^{(n)} = 0$ для некоторого n. Так как алгебра Ли $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ разрешима, то $(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})^{(m)} = 0$ для некоторого m. Пусть $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ — естественный гомоморфизм. Тогда $0 = (\mathfrak{g}/\mathfrak{a})^{(m)} = \pi(\mathfrak{g})^{(m)} = \pi(\mathfrak{g}^{(m)})$, т.е. $\mathfrak{g}^{(m)} \subset \mathfrak{a}$. Теперь заметим, что $(\mathfrak{g}^{(m)})^{(n)} = \mathfrak{g}^{(m+n)}$ (Упр. проверьте!). Поэтому $\mathfrak{g}^{(m+n)} \subset \mathfrak{a}^{(n)} = 0$.

(3) Так как $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ — разрешимый идеал, и факторалгебра $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{a} = \mathfrak{b}/\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ также разрешима (согласно (1)), то $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ разрешима согласно (2).

(4) Нам дано, что $(\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g}))^n = 0$ для некоторого n, т.е. $\mathfrak{g}^n \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Но тогда $\mathfrak{g}^{n+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^n] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{z}(\mathfrak{g})] = 0$. □

Замечание. Аналог свойства (2) для нильпотентных алгебр Ли отсутствует: $\mathfrak{n}$ (строго-верхнетреугольные матрицы) — это нильпотентный идеал в $\mathfrak{b}$ (верхнетреугольные матрицы), $\mathfrak{b}/\mathfrak{n}$ нильпотентна (даже абелева), но $\mathfrak{b}$ не нильпотентна. Свойство (3), однако, выполнено и для нильпотентных идеалов: сумма нильпотентных идеалов нильпотентна (попробуйте это доказать).

Упр. Пусть $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ разрешимы (соотв. нильпотентны). Тогда $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ разрешима (соотв. нильпотентна). (Для разрешимых алгебр это уже доказано. Почему?)

Упр. Если $\mathfrak{g}$ нильпотентна и $\mathfrak{g} \neq 0$, то $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq 0$.

Теорема Энгеля

Обсудим подробнее понятие нильпотентной алгебры Ли.

Если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, то $\mathfrak{g}^{n+1}$ — это линейная оболочка элементов вида $(\mathrm{ad}_{x_1} \circ \ldots \circ \mathrm{ad}_{x_n})(x)$, где $x, x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}$. Поэтому $\mathfrak{g}$ нильпотентна тогда и только тогда, когда найдется n такое, что $\mathrm{ad}_{x_1} \circ \ldots \circ \mathrm{ad}_{x_n} = 0$ для всех $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}$. В частности, если $\mathfrak{g}$ нильпотентна, то найдется n такое, что $(\mathrm{ad}_x)^n = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}$, т.е. все операторы ad_x нильпотентны. Оказывается, верно и обратное! Это нетривиальный факт, но он легко выводится из следующей теоремы.

Теорема 21 (Энгель). *Пусть* $\mathfrak{g}$ *— алгебра Ли,* V *— линейное пространство,* $\dim V < \infty$*,* $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ *— представление такое, что операторы* $\rho(x)$ *нильпотентны для всех* $x \in \mathfrak{g}$*. Тогда в пространстве* V *существует базис* Δ *такой, что*

$$\rho(x)_\Delta \in \mathfrak{n} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

для всех $x \in \mathfrak{g}$*; в частности,* $\rho(\mathfrak{g})$ *— нильпотентная подалгебра в* $\mathfrak{gl}(V)$*.*

Следствие 22. *Алгебра Ли* $\mathfrak{g}$ *нильпотентна тогда и только тогда, когда операторы* ad_x *нильпотентны для всех* $x \in \mathfrak{g}$

Доказательство. ($\Rightarrow$) Мы уже проверили, что это следует из определения нильпотентности.

($\Leftarrow$) Из теоремы Энгеля, примененной к присоединенному представлению алгебры Ли $\mathfrak{g}$, следует, что алгебра Ли $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ нильпотентна. Но $\mathrm{ad}\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, следовательно, $\mathfrak{g}$ также нильпотентна (см. предложение 20, часть (4)). □

Замечания. 1) Что означает теорема Энгеля в случае, когда $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ (т.е. ρ — тождественное вложение)? Известно, что если оператор $x \in \mathfrak{gl}(V)$ нильпотентен, то матрица x_Δ строговерхнетреугольна для подходящего базиса Δ в пространстве V. Теорема Энгеля утверждает, что если набор нильпотентных операторов образует подалгебру Ли в $\mathfrak{gl}(V)$, то матрицы всего набора будут строговерхнетреугольными в одном и том же (для всего набора) базисе в V.

2) Итак, мы видим, что в $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ имеются нильпотентные подалгебры "разных типов": алгебра строговерхнетреугольных матриц и, скажем, алгебра диагональных матриц (последняя даже абелева). Первая подалгебра состоит из нильпотентных матриц, а вторая — нет (но в обоих случаях все операторы ad_x нильпотентны). Мораль: даже если алгебра Ли нильпотентна, то не всякое ее представление удовлетворяет условиям теоремы Энгеля (т.е. операторы представления не всегда нильпотентны). Тем не менее можно доказать, что любая нильпотентная алгебра Ли изоморфна подалгебре в алгебре Ли строговерхнетреугольных матриц подходящего размера (об этом можно прочесть у Бурбаки "Группы и алгебры Ли", главы I–III).

Займемся доказательством теоремы Энгеля. Прежде всего, покажем, что теорема Энгеля легко выводится из следующего утверждения.

Предложение 23 ("основная лемма к теореме Энгеля"). *Пусть* $\mathfrak{g}$ *— алгебра Ли,* V *— линейное пространство,* $V \neq 0$*,* $\dim V < \infty$*,* $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ *— представление такое, что операторы* $\rho(x)$ *нильпотентны для всех* $x \in \mathfrak{g}$*. Тогда существует* $v \in V$*,* $v \neq 0$ *такой. что* $\rho(x)v = 0$ *для всех* $x \in \mathfrak{g}$*.*

Вывод теоремы Энгеля из основной леммы. Можно считать, что $V \neq 0$ (иначе доказывать в теореме Энгеля нечего). Зафиксируем алгебру Ли $\mathfrak{g}$ и проведем индукцию по $\dim V$ (с очевидной базой при $\dim V = 1$).

Итак, пусть для всех линейных пространств размерности n теорема Энгеля доказана. Пусть $\dim V = n+1$. Согласно основной лемме, найдется $v \in V$, $v \neq 0$ такой. что $\rho(x)v = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}$. Пусть $L = \mathbb{C}v$, тогда. разумеется, $\rho(x)L \subset L$. Поэтому можно рассмотреть факторпредставление $\overline{\rho} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V/L)$. Конечно, все операторы $\overline{\rho}(x)$ тоже нильпотентны. Так как $\dim V/L = \dim V - \dim L = n$, то к представлению $\overline{\rho}$ применимо индуктивное предположение, т.е. найдется базис $\overline{\Delta} : v_1 + L, \ldots, v_n + L$ пространства V/L такой, что все матрицы $\overline{\rho}(x)_{\overline{\Delta}}$ строговерхнетреугольны. Но тогда $\Delta : v, v_1, \ldots, v_n$ — базис в V, и поскольку

$$\rho(x)_\Delta = \begin{pmatrix} 0 & * & \ldots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & \overline{\rho}(x)_{\overline{\Delta}} & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

то все матрицы $\rho(x)_\Delta$ также строговерхнетреугольны. □

Прежде чем доказывать основную лемму, мы обсудим несколько понятий и утверждений, которые понадобятся в этом доказательстве (однако они имеют и самостоятельный интерес).

Лемма 24. *Пусть $x \in \mathfrak{gl}(V)$, x нильпотентен. Тогда ad_x нильпотентен.*

Доказательство. Нам дано, что $x^n = 0$ для некоторого n. Напомним, что $\mathrm{ad}_x(y) = [x, y] = xy - yx$, т.е. $\mathrm{ad}_x = l_x - r_x$, где $l_x, r_x \in \mathrm{End}\, V$, $l_x(y) = xy$, $r_x(y) = yx$. Отметим, что $l_x r_x = r_x l_x$. Кроме того, $l_x^n(y) = x^n y = 0$, т.е. $l_x^n = 0$; аналогично $r_x^n = 0$. Пусть N велико. Тогда

$$\mathrm{ad}_x^N = (l_x - r_x)^N = \sum_{k=0}^{N} C_N^k (-1)^{N-k} l_x^k r_x^{N-k} = 0$$

(если $N \geq 2n-1$, то или $k \geq n$, или $N - k \geq n$; использование формулы бинома Ньютона оправдано тем, что l_x и r_x коммутируют!) □

Замечание. Следует понимать, что обозначение ad_x несколько двусмысленно; оно зависит от того, внутри какой алгебры Ли рассматривается x. Именно, если $\mathfrak{h}$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$, и $x \in \mathfrak{h}$, то имеются операторы $\mathrm{ad}_{x,\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ и $\mathrm{ad}_{x,\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$; конечно, $\mathrm{ad}_{x,\mathfrak{h}} = \mathrm{ad}_{x,\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{h}}$. В каждом конкретном случае смысл обозначения ad_x определяется контекстом.

Вот еще одна полезная конструкция. Пусть $\mathfrak{a}$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Положим

$$\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{ad}_x(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}\} = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, y] \in \mathfrak{a}\ \forall y \in \mathfrak{a}\}$$

— это т.наз. *нормализатор* $\mathfrak{a}$ *в* $\mathfrak{g}$.

Лемма 25. (1) $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ *— подалгебра в* $\mathfrak{g}$.
(2) $\mathfrak{a}$ *— идеал в* $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$.
(3) $\mathfrak{a}$ *— идеал в* $\mathfrak{g}$ *тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{g}$.

Доказательство. (1) Очевидно, что $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ — линейное подпространство в $\mathfrak{g}$. Далее, пусть $x, y \in \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$, т.е. $\mathrm{ad}_x(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}$, $\mathrm{ad}_y(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}$. Так как $\mathrm{ad}_{[x,y]} = [\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y]$, то $\mathrm{ad}_{[x,y]}(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}$, т.е. $[x, y] \in \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$.

(2) и (3) следуют непосредственно из определений. □

Доказательство предложения 23. Проведем индукцию по размерности $\mathfrak{g}$ (база индукции очевидна — при $\mathfrak{g} = 0$ доказывать нечего). Итак, предположим, что основная лемма доказана для всех алгебр Ли размерности меньше $\dim \mathfrak{g}$, и будем доказывать лемму для (ненулевой) алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Заметим, что посылка и заключение основной леммы относятся к подалгебре $\rho(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(V)$. Поэтому $\mathfrak{g}$ можно заменить на $\rho(\mathfrak{g})$. Мы получим следующее: пусть $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ (где $0 < \dim V < \infty$) — подалгебра Ли такая, что все операторы $x \in \mathfrak{g}$ нильпотентны; нужно доказать, что найдется $v \in V$, $v \neq 0$ такой, что $xv = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}$.

Этап 1. Докажем, что $\mathfrak{g}$ содержит идеал коразмерности 1 (т.е. идеал $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ такой, что $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{a} = 1$).

Пусть вначале $\mathfrak{a}$ — любая подалгебра в $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{g}$ (т.е. $\dim \mathfrak{a} < \dim \mathfrak{g}$). Рассмотрим присоединенное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$, т.е. гомоморфизм $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Ограничив его на подалгебру $\mathfrak{a}$, мы получим представление $\mathrm{ad} : \mathfrak{a} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Поскольку $\mathfrak{a}$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$, то $\mathrm{ad}_x(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}$ для всех $x \in \mathfrak{a}$, т.е. возникает факторпредставление $\mathrm{ad} : \mathfrak{a} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})$ (здесь $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ — это всего лишь векторное пространство). Поскольку все операторы $x \in \mathfrak{a}$ по условию нильпотентны, то операторы ad_x (и тем более их фактороператоры) также нильпотентны. Таким образом, к представлению $\mathrm{ad} : \mathfrak{a} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})$ применимо индуктивное предположение: найдется $u \in \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, $u \neq 0$ такой, что $\mathrm{ad}_x(u) = 0$ для всех $x \in \mathfrak{a}$. Что это значит? Во-первых, $u = y + \mathfrak{a}$, где $y \in \mathfrak{g}$. Во-вторых, $u \neq 0$ тогда и только тогда, когда $y \notin \mathfrak{a}$. В третьих,

$$\mathrm{ad}_x(u) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{ad}_x(y) \in \mathfrak{a} \Leftrightarrow [x, y] \in \mathfrak{a} \Leftrightarrow [y, x] \in \mathfrak{a} \Leftrightarrow \mathrm{ad}_y(x) \in \mathfrak{a}.$$

Но $\mathrm{ad}_y(x) \in \mathfrak{a}$ для всех $x \in \mathfrak{a}$ тогда и только тогда, когда $y \in \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$. Итак, найдется $y \in \mathfrak{g}$ такой, что $y \notin \mathfrak{a}$, но $y \in \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$. Иными словами, $\mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$.

Теперь возьмем в качестве $\mathfrak{a}$ максимальную (по включению) собственную подалгебру в $\mathfrak{g}$. Оказывается, $\mathfrak{a}$ будет искомым идеалом коразмерности 1. В самом деле, $\mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{g}$, и так как $\mathfrak{a}$ максимальна, то $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{g}$, т.е. $\mathfrak{a}$ — идеал в $\mathfrak{g}$.

Осталось проверить, что $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{a} = 1$. Предположим, что $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{a} > 1$. Пусть L — какое-нибудь одномерное подпространство в $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$. Тогда L — подалгебра в алгебре Ли $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ (почему?). По предположению, $0 \subsetneq L \subsetneq \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$. Пусть $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ — естественный гомоморфизм. Тогда $\mathfrak{a} = \pi^{-1}(0) \subsetneq \pi^{-1}(L) \subsetneq \pi^{-1}(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) = \mathfrak{g}$. Так как $\pi^{-1}(L)$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$, то наше предположение противоречит максимальности $\mathfrak{a}$.

Этап 2. Пусть теперь $\mathfrak{a}$ — идеал в $\mathfrak{g}$ коразмерности 1. Зафиксируем любой $z \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{a}$; тогда $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathbb{C}z$ как линейное пространство.

Снова применим к $\mathfrak{a}$ индуктивное предположение (но теперь — к исходному представлению): найдется $w \in V$, $w \neq 0$ такой, что $yw = 0$ для всех $y \in \mathfrak{a}$. Иными словами, подпространство

$$W := \{w \in V \mid yw = 0 \ \forall y \in \mathfrak{a}\}$$

отлично от нуля.

Проверим, что $zW \subset W$. В самом деле, пусть $w \in W$, т.е. $yw = 0$ для всех $y \in \mathfrak{a}$. Тогда $y(zw) = [y, z]w + z(yw) = 0$ при $y \in \mathfrak{a}$, т.е. $zw \in W$.

Итак, мы получаем нильпотентный оператор $z|_W$. Поэтому найдется $v \in W$, $v \neq 0$ такой, что $zv = 0$. Проверим, что вектор v — искомый. В самом деле, так как $v \in W$, то $yv = 0$ для всех $y \in \mathfrak{a}$. Но все элементы $\mathfrak{g}$ имеют вид $x = y + \lambda z$ (где $y \in \mathfrak{a}$, $\lambda \in \mathbb{C}$), т.е. $xv = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}$. □

Теорема Ли

Эта теорема, по существу, гласит, что алгебра Ли верхнетреугольных матриц — "основной пример" разрешимой алгебры Ли.

Теорема 26 (Ли). *Пусть $\mathfrak{g}$ — разрешимая алгебра Ли, V — линейное пространство, $\dim V < \infty$, $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ — представление. Тогда в пространстве V существует базис Δ такой, что*

$$\rho(x)_\Delta \in \mathfrak{b} = \left\{ \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \right\}$$

для всех $x \in \mathfrak{g}$.

Замечания. 1) В посылке теоремы Ли достаточно предполагать, что $\rho(\mathfrak{g})$ разрешима (ибо в заключении теоремы говорится именно о $\rho(\mathfrak{g})$).

2) Ограничения на основное поле в теореме Ли существенны! (Попробуйте придумать контрпример для алгебраически незамкнутого основного поля и для случая положительной характеристики.)

3) Теорема Ли в сочетании с теоремой Адо означает, что любая (конечномерная комплексная) разрешимая алгебра Ли изоморфна подалгебре алгебры Ли верхнетреугольных матриц подходящего размера.

4) Из теоремы Ли вытекает, что всякое неприводимое представление разрешимой алгебры Ли одномерно. С другой стороны, нетрудно проверить, что всякая ненулевая разрешимая алгебра Ли имеет бесконечно много не вполне приводимых представлений. (Упр. проверьте это; указание: сведите дело к случаю одномерной алгебры Ли, строение представлений которой обсуждалось выше.)

5) Что означает теорема Ли в случае, когда $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ (т.е. ρ — тождественное вложение)? Хорошо известно, что если $x \in \mathfrak{gl}(V)$, то матрица x_Δ верхнетреугольна для подходящего базиса Δ в пространстве V. Теорема Ли утверждает, что если набор операторов образует разрешимую подалгебру Ли в $\mathfrak{gl}(V)$, то матрицы всего набора будут верхнетреугольными в одном и том же (для всего набора) базисе в V.

Приступим к доказательству теоремы Ли.

Предложение 27 ("основная лемма к теореме Ли"). *Пусть $\mathfrak{g}$ — разрешимая алгебра Ли, V — линейное пространство, $V \neq 0$, $\dim V < \infty$, $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ — представление. Тогда существует $v \in V$, $v \neq 0$ такой. что $\rho(x)v = \lambda(x)v$ для всех $x \in \mathfrak{g}$, где $\lambda(x) \in \mathbb{C}$.*

Упр. Выведите теорему Ли из основной леммы (это делается совершенно аналогично доказательству теоремы Энгеля).

Доказательство предложения 27. Попробуем действовать так же, как при доказательстве теоремы Энгеля. Будем вести индукцию по размерности $\mathfrak{g}$ (с очевидной базой при $\mathfrak{g} = 0$). Кроме того, если $\mathfrak{g}$ разрешима, то $\rho(\mathfrak{g})$ и подавно, т.е. мы можем заменить $\mathfrak{g}$ на $\rho(\mathfrak{g})$. Мы получим следующее: пусть $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ (где $0 < \dim V < \infty$) — разрешимая подалгебра Ли; нужно доказать, что найдется $v \in V$, $v \neq 0$ такой, что $xv = \lambda(x)v$ для всех $x \in \mathfrak{g}$ (где $\lambda(x) \in \mathbb{C}$).

Этап 1. Построим в $\mathfrak{g}$ идеал коразмерности 1. Это просто: так как $\mathfrak{g}$ разрешима, то $g' \subsetneq \mathfrak{g}$ (т.е. $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{g}' \geq 1$). Пусть L — подпространство коразмерности 1 в $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$. Так как алгебра Ли $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$ абелева, то L — идеал в $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$, поэтому $\pi^{-1}(L)$ (где $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$ — канонический гомоморфизм) будет идеалом в $\mathfrak{g}$ коразмерности 1. Иными словами, любое подпространство (в том числе и коразмерности 1) в $\mathfrak{g}$, содержащее $\mathfrak{g}'$, будет идеалом.

Этап 2. Пусть теперь $\mathfrak{a}$ — идеал в $\mathfrak{g}$ коразмерности 1. Зафиксируем любой $z \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{a}$; тогда $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathbb{C}z$ как линейное пространство.

Применим к $\mathfrak{a}$ индуктивное предположение (это можно сделать, ибо $\mathfrak{a}$ наследует разрешимость $\mathfrak{g}$): найдется $w \in V$, $w \neq 0$ такой, что $yw = \lambda(y)w$ для всех $y \in \mathfrak{a}$. Отметим, что функция $\lambda : \mathfrak{a} \to \mathbb{C}$, $y \mapsto \lambda(y)$ линейна, т.е. $\lambda \in \mathfrak{a}^*$. Зафиксируем это λ и рассмотрим подпространство

$$W := \{w \in V \mid yw = \lambda(y)w \ \forall y \in \mathfrak{a}\}.$$

По предположению индукции, оно отлично от нуля.

Попробуем доказать, что $zW \subset W$. Пусть $w \in W$, т.е. $yw = \lambda(y)w$ для всех $y \in \mathfrak{a}$. Тогда $y(zw) = [y, z]w + z(yw) = \lambda([y, z])w + \lambda(y)zw$ при $y \in \mathfrak{a}$. Итак, мы должны доказать вот что:

Лемма 28. $\lambda([y, z]) = 0$ *для всех* $y \in \mathfrak{a}$.

Из леммы сразу следует, что $zW \subset W$. Поэтому z имеет в пространстве W собственный вектор (здесь существенна алгебраическая замкнутость основного поля!), т.е. найдется $v \in W$, $v \neq 0$ такой, что $zv = \mu v$, где $\mu \in \mathbb{C}$. Очевидно, что вектор v — искомый: он является общим собственным вектором всех операторов из $\mathfrak{g}$ (ибо все они имеют вид $y + \lambda z$, где $y \in \mathfrak{a}$, $\lambda \in \mathbb{C}$).

Доказательство леммы 28. Зафиксируем произвольный вектор $w \in W$, $w \neq 0$. Рассмотрим последовательность $w, zw, z^2w, \ldots, z^nw, \ldots$ (a priori это векторы из V). Они

линейно зависимы, ибо $\dim V < \infty$. Поэтому найдется натуральное число n такое, что векторы
$$w, zw, z^2w, \dots, z^{n-1}w$$
линейно независимы, а
$$w, zw, z^2w, \dots, , z^{n-1}w, z^n w$$
уже линейно зависимы. Пусть V_k — это линейная оболочка векторов
$$w, zw, z^2w, \dots, z^{k-1}w;$$
$V_0 := 0$. Тогда
$$0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \dots \subsetneq V_n = V_{n+1} = \dots,$$
$zV_k \subset V_{k+1}$, и $\dim V_k = k$ при $k = 0, 1, \dots, n$.

Проверим, что $yz^jw \equiv \lambda(y)z^jw \mod V_j$ для всех $y \in \mathfrak{a}$ (это сравнение по определению означает, что $yz^jw - \lambda(y)z^jw \in V_j$, т.е. $yz^jw = \lambda(y)z^jw+$ линейная комбинация векторов $w, zw, z^2w, \dots, z^{j-1}w$). Проведем индукцию по j. При $j = 0$ имеем $yw = \lambda(y)w$, ибо $w \in W$. Сделаем индуктивный переход от j к $j+1$: $yz^{j+1}w = yzz^jw = [y,z]z^jw + zyz^jw$. К $[y,z]z^jw$ и yz^jw применимо индуктивное предположение (напомним, что $\mathfrak{a}$ — идеал в $\mathfrak{g}$, поэтому $[y,z] \in \mathfrak{a}$): $[y,z]z^jw = \lambda([y,z])z^jw + v'$, $yz^jw = \lambda(y)z^jw + v''$, где $v', v'' \in V_j$. Теперь $yz^{j+1}w - \lambda(y)z^{j+1}w = \lambda([y,z])z^jw + v' + zv''$. Но $z^jw \in V_{j+1}$, $v' \in V_j \subset V_{j+1}$, $zv'' \in zV_j \subset V_{j+1}$. Итак, наши сравнения доказаны.

Воспользуемся доказанным сравнением при $j = n$. Именно, пусть $y \in \mathfrak{a}$. Тогда $yV_n \subset V_n$, и матрица линейного оператора $y|_{V_n}$ в базисе $w, zw, z^2w, \dots, z^{n-1}w$ имеет вид
$$\begin{pmatrix} \lambda(y) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda(y) \end{pmatrix}.$$
Поэтому $\operatorname{Tr} y|_{V_n} = n\lambda(y)$. Так как $[y,z] \in \mathfrak{a}$, то и $\operatorname{Tr}[y,z]|_{V_n} = n\lambda([y,z])$. С другой стороны, $zV_n \subset V_{n+1} = V_n$, поэтому $\operatorname{Tr}[y,z]|_{V_n} = \operatorname{Tr} y|_{V_n}z|_{V_n} - \operatorname{Tr} z|_{V_n}y|_{V_n} = 0$. Итак, $n\lambda([y,z]) = 0$, т.е. $\lambda([y,z]) = 0$ (здесь важно, что характеристика основного поля равна 0!). □

Итак, теорема Ли полностью доказана. □

Обсудим несколько следствий из теорем Энгеля и Ли.

Упр. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ нильпотентна (соотв. разрешима) тогда и только тогда, когда в $\mathfrak{g}$ существует базис $e_1, \dots, e_n$ такой, что если $j < k$, то $[e_j, e_k]$ — линейная комбинация $e_{k+1}, \dots, e_n$ (соотв. $e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$).

Напомним, что всякая нильпотентная алгебра Ли разрешима (но, вообще говоря, не наоборот). Вот еще один результат в том же духе.

Предложение 29. *Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ разрешима тогда и только тогда, когда $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ нильпотентна.*

Доказательство. ($\Leftarrow$) Если $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ нильпотентна, то она разрешима, а тогда $\mathfrak{g}$ и подавно разрешима (ибо $\mathfrak{g}^{(n)} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]^{(n-1)}$).

($\Rightarrow$) Пусть $\mathfrak{g}$ разрешима. Для доказательства нильпотентности алгебры Ли $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ достаточно проверить нильпотентность всех операторов ad_x, где $x \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ (это — следствие из теоремы Энгеля). Применив теорему Ли к присоединенному представлению алгебры Ли $\mathfrak{g}$, заключаем, что в $\mathfrak{g}$ найдется базис, в котором матрицы всех операторов ad_x, где $x \in \mathfrak{g}$, верхнетреугольны. Так как $\mathrm{ad}_{[x,y]} = [\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y]$, то матрицы всех операторов ad_x, где $x \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, строговерхнетреугольны. Поэтому все эти операторы нильпотентны. (NB: Нам нужно было доказать, что если $x \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, то оператор $\mathrm{ad}_{x,[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}$ нильпотентен. На самом деле мы доказали больше: оператор $\mathrm{ad}_{x,\mathfrak{g}}$ нильпотентен.) $\square$

Инвариантные билинейные формы

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, V — $\mathfrak{g}$-модуль. Рассмотрим пространство $\mathrm{Bilin}(V \times V, \mathbb{C})$ билинейных форм на V. Имеется канонический изоморфизм $\mathrm{Bilin}(V\times V,\mathbb{C}) = \mathrm{Hom}(V\otimes V,\mathbb{C}) = (V \otimes V)^*$, устроенный так: $B \mapsto f$, где $f(v_1 \otimes v_2) = B(v_1, v_2)$. На $(V \otimes V)^*$ имеется структура $\mathfrak{g}$-модуля: $(xf)(v_1\otimes v_2) = -f(x(v_1\otimes v_2)) = -f(xv_1\otimes v_2) - f(v_1\otimes xv_2)$. Перенесем ее на $\mathrm{Bilin}(V\times V,\mathbb{C})$: $(xB)(v_1,v_2) = (xf)(v_1\otimes v_2) = -f(xv_1\otimes v_2) - f(v_1\otimes xv_2) = -B(xv_1,v_2) - B(v_1,xv_2)$. Итак, формула $(xB)(v_1,v_2) = -B(xv_1,v_2) - B(v_1,xv_2)$ (где $B \in \mathrm{Bilin}(V\times V,\mathbb{C})$, $x \in \mathfrak{g}$, $v_1, v_2 \in V$) задает на пространстве $\mathrm{Bilin}(V\times V,\mathbb{C})$ структуру $\mathfrak{g}$-модуля, причем канонический изоморфизм $\mathrm{Bilin}(V \times V,\mathbb{C}) = (V \otimes V)^*$ является изоморфизмом $\mathfrak{g}$-модулей.

Определение 18. $\mathfrak{g}$-*инвариантная билинейная форма на* V — это элемент из $\mathrm{Bilin}(V \times V,\mathbb{C})^{\mathfrak{g}}$.

Итак, билинейная форма $B : V \times V \to \mathbb{C}$ является $\mathfrak{g}$-инвариантной тогда и только тогда, когда $B(xv_1, v_2) + B(v_1, xv_2) = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}$ и $v_1, v_2 \in V$. Если из контекста ясно, о какой именно алгебре Ли $\mathfrak{g}$ идет речь, то обычно говорят просто “инвариантная билинейная форма”.

Напомним, что всякая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ сама является $\mathfrak{g}$-модулем (соответствующее представление — это присоединенное представление ad).

Определение 19. *Инвариантная билинейная форма на* $\mathfrak{g}$ — это билинейная форма $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$, инвариантная относительно ad.

Расшифруем последнее определение. Пусть $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ — билинейная форма, $x, y, z \in \mathfrak{g}$. Тогда $B(\mathrm{ad}_y x, z) + B(x, \mathrm{ad}_y z) = B([y,x],z) + B(x,[y,z]) = -B([x,y],z) + B(x,[y,z])$. Итак, B инвариантна тогда и только тогда, когда $B([x,y],z) = B(x,[y,z])$ для всех $x, y, z \in \mathfrak{g}$.

Нас в основном будут интересовать симметрические инвариантные билинейные формы.

Примеры инвариантных симметрических билинейных форм.

(1) Пусть $\mathfrak{g}$ — это евклидово пространство $\mathbb{R}^3$. Тогда $\mathfrak{g}$ — это алгебра Ли (над $\mathbb{R}$) относительно векторного произведения $[\cdot,\cdot]$. Пусть $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$. Как известно, $([x,y],z) = (x,[y,z])$ для всех $x,y,z \in \mathbb{R}^3$ ("инвариантность смешанного произведения"). Итак, $(\cdot,\cdot)$ — инвариантная симметрическая билинейная форма на алгебре Ли $\mathfrak{g} = (\mathbb{R}^3, [\cdot,\cdot])$.

(2) Пусть V — конечномерное линейное пространство, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V)$. Пусть $B(x,y) = \mathrm{Tr}\, xy$. Очевидно, B — симметрическая билинейная форма на $\mathfrak{g}$. Проверим, что она инвариантна. В самом деле, $B([x,y],z) = \mathrm{Tr}\,[x,y]z = \mathrm{Tr}\, xyz - \mathrm{Tr}\, yxz = \mathrm{Tr}\, xyz - \mathrm{Tr}\, xzy = \mathrm{Tr}\, x[y,z] = B(x,[y,z])$.

(3) (этот пример — обобщение примера (2)) Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ произвольна, и $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ — конечномерное представление. Тогда симметрическая билинейная форма B_ρ на $\mathfrak{g}$, заданная формулой $B_\rho(x,y) = \mathrm{Tr}\,\rho(x)\rho(y)$, инвариантна (Упр. проверьте!).

Очень важный частный случай примера (3) получится, если в качестве ρ взять присоединенное представление.

Определение 20. *Форма Киллинга* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ — это (инвариантная симметрическая) билинейная форма $\mathrm{K}_\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{g}$, заданная формулой $\mathrm{K}_\mathfrak{g}(x,y) = B_{\mathrm{ad}}(x,y) = \mathrm{Tr}\,\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y$.

Упр. Вычислите форму Киллинга алгебр Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ и $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ (хотя бы при $n = 2$).

Вот еще несколько упражнений, связанных с инвариантными билинейными формами.

Упр. Пусть V — $\mathfrak{g}$-модуль, B — инвариантная билинейная форма на V. Пусть L — подмодуль в V. Рассмотрим подпространства $L_l^\perp := \{x \in V \mid \forall y \in L : B(x,y) = 0\}$ и $L_r^\perp := \{x \in V \mid \forall y \in L : B(y,x) = 0\}$ (конечно, если форма B симметрична, то $L_l^\perp = L_r^\perp$; в любом случае $\dim L_l^\perp = \dim L_r^\perp$ — почему?). Проверьте, что $L_l^\perp$ и $L_r^\perp$ — подмодули в V.

Упр. Пусть V — простой $\mathfrak{g}$-модуль.

1) Проверьте, что всякая инвариантная билинейная форма на V либо невырождена, либо равна 0.

2) Пусть V вдобавок конечномерен, и B_1, B_2 — инвариантные билинейные формы на V, причем B_1 невырождена. Тогда $B_2 = \lambda B_1$ для подходящего $\lambda \in \mathbb{C}$. (Указание: форма B_i определяет морфизм $\mathfrak{g}$-модулей $b_i : V \to V^*$ (как?), причем b_1 — изоморфизм. Примените лемму Шура к $b_1^{-1}b_2$.)

Критерий Картана

Это — критерий разрешимости алгебры Ли в терминах ее формы Киллинга.

Теорема 30 (критерий Картана). *Пусть V — конечномерное линейное пространство. Подалгебра Ли $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ разрешима тогда и только тогда, когда $Tr\, xy = 0$ для всех $x \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, $y \in \mathfrak{g}$ (т.е. $Tr[x,y]z = 0$ для всех $x,y,z \in \mathfrak{g}$).*

Доказательство необходимости. Пусть $\mathfrak{g}$ разрешима. По теореме Ли, примененной к ее тождественному представлению в пространстве V, найдется базис Δ в пространстве V такой, что матрица x_Δ верхнетреугольна для всех $x \in \mathfrak{g}$. Если $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $y \in \mathfrak{g}$, то матрица x_Δ строговерхнетреугольна, а y_Δ верхнетреугольна, поэтому $x_\Delta y_\Delta$ строговерхнетреугольна, и $\operatorname{Tr} xy = \operatorname{Tr} x_\Delta y_\Delta = 0$. $\square$

Доказательство достаточности на некоторое время отложим.

Следствие 31. *Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ разрешима тогда и только тогда, когда $\mathrm{K}_\mathfrak{g}(x, y) = 0$ для всех $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $y \in \mathfrak{g}$ (т.е. $\mathrm{K}_\mathfrak{g}([x, y], z) = 0$ для всех $x, y, z \in \mathfrak{g}$).*

Это следствие обычно тоже называют критерием Картана.

Вывод следствия из теоремы 30. Согласно теореме (и определению формы Киллинга), алгебра Ли $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ разрешима тогда и только тогда, когда $\mathrm{K}_\mathfrak{g}(x, y) = 0$ для всех $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $y \in \mathfrak{g}$. Остается заметить, что $\mathfrak{g}$ разрешима тогда и только тогда, когда $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ разрешима (ибо $\operatorname{ad}\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, и $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ — абелев (и следовательно, тем более разрешимый) идеал). $\square$

Можно ли в том же духе дать критерий нильпотентности? Оказывается, нет.

Упр. 1) Проверьте, что если $\mathfrak{g}$ нильпотентна, то $\mathrm{K}_\mathfrak{g} = 0$.
2) Придумайте пример алгебры Ли $\mathfrak{g}$ такой, что $\mathrm{K}_\mathfrak{g} = 0$, но $\mathfrak{g}$ не нильпотентна (но, конечно, разрешима по критерию Картана).

В некоторых учебниках (например, в книге Кириллова "Основы теории представлений") ошибочно утверждается (конечно, без доказательства!), что из условия $\mathrm{K}_\mathfrak{g} = 0$ следует нильпотентность $\mathfrak{g}$.

Упр. Выведите из критерия Картана, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ разрешима тогда и только тогда, когда $\mathrm{K}_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]} = 0$. (Это не противоречит результату предыдущего упражнения, ибо не каждая алгебра Ли имеет вид $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.)

Чтобы доказать достаточность критерия Картана, нам понадобятся некоторые сведения из линейной алгебры. (Эти сведения будут весьма полезны и в дальнейшем.)

Пусть V — конечномерное линейное пространство, $x \in \mathfrak{gl}(V)$.

Определение 21. Оператор x *полупрост,* если x диагонализуем ($\Leftrightarrow$ в некотором базисе в V матрица оператора x диагональна $\Leftrightarrow$ в V существует базис, состоящий из собственных векторов оператора $x \Leftrightarrow V$ — прямая сумма одномерных инвариантных подпространств оператора $x \Leftrightarrow V$ — прямая сумма собственных подпространств оператора x).

Замечание. Почему используется термин "полупростой оператор"? Вспомним, что каждый оператор $x \in \mathfrak{gl}(V)$ задает в пространстве V структуру $\mathfrak{g}$-модуля, где $\mathfrak{g}$ — одномерная алгебра Ли (с выделенным базисным элементом). Этот модуль полупрост тогда и только тогда, когда оператор x полупрост.

Напомним, что оператор x *нильпотентен*, если $x^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$ ($\Leftrightarrow$ единственное собственное значение оператора x — это 0). Ясно, что оператор x полупрост и нильпотентен тогда и только тогда, когда $x = 0$.

Упр. Пусть $x, y \in \mathfrak{gl}(V)$, $[x, y] = 0$. Докажите, что:
(1) Если x и y полупросты, то $x \pm y$ полупрост;
(2) Если x и y нильпотентны, то $x \pm y$ нильпотентен.

В этом упражнении условие $[x, y] = 0$ существенно! (1) — это стандартный факт из линейной алгебры (если два диагонализуемых линейных оператора перестановочны, то они диагонализуются в едином базисе); (2) мы, по существу, уже доказывали.

Теорема 32 (разложение Жордана линейного оператора). *Пусть V — конечномерное линейное пространство, $x \in \mathfrak{gl}(V)$. Тогда существуют единственные $x_s, x_n \in \mathfrak{gl}(V)$ такие, что $x = x_s + x_n$, x_s полупрост, x_n нильпотентен, и $[x_s, x_n] = 0$. Кроме того, существуют многочлены $p, q \in \mathbb{C}[t]$ такие, что $p(0) = q(0) = 0$, $x_s = p(x)$, $x_n = q(x)$.*

Замечание. Разложение $x = x_s + x_n$ называется *разложением Жордана* оператора x, а x_s (соотв. x_n) называется *полупростой* (соотв. *нильпотентной*) *компонентой* оператора x.

Доказательство. 1) *Существование x_s и x_n.* Оно следует, например, из теории жордановой формы. Но на самом деле для доказательства не нужна эта теория в полном объеме. Напомним необходимые факты. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — собственные значения оператора x, $n_1, \ldots, n_m$ — их кратности (как корней характеристического многочлена оператора x; в частности, $n_1 + \ldots + n_m = \dim V$). Пусть $V_j := \operatorname{Ker}(x - \lambda_j)^{n_j}$ — это т.наз. корневые подпространства оператора x. Легко проверить, что $xV_j \subset V_j$. Кроме того, $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_m$ (доказательство см., например, в книге Кострикина и Манина "Линейная алгебра и геометрия").

Определим оператор x_s следующим образом: $x_s|_{V_j}$:= оператор умножения на λ_j. Тогда x_s полупрост по построению. Далее, положим $x_n := x - x_s$. Если $v \in V_j$, то $x_n v = (x - x_s)v = (x - \lambda_j)v$. Поэтому $x_n^N = 0$ при $N \geq \max(n_1, \ldots, n_m)$. Наконец, $[x_s, x_n] = 0$ (так как $x_s V_j \subset V_j$, $x_n V_j \subset V_j$, то это достаточно проверить на каждом V_j, но оператор $x_s|_{V_j}$ скалярен, поэтому это верно).

2) *Существование p и q.* Достаточно построить p (тогда $q(t) := t - p(t)$). Выберем многочлен $p \in \mathbb{C}[t]$ такой, что $p(t) \equiv \lambda_j \bmod (t - \lambda_j)^{n_j}$ для всех j, а также $p(t) \equiv 0 \bmod t$ (последнее условие означает, что $p(0) = 0$; если среди λ_j есть 0, то оно уже содержится среди предыдущих). Тогда $p(x) = x_s$. В самом деле, если $v \in V_j$, то $p(x)v = (\lambda_j + r(x)(x - \lambda_j)^{n_j})v = \lambda_j v = x_s v$ (ибо $V_j = \operatorname{Ker}(x - \lambda_j)^{n_j}$).

Почему многочлен с нашими условиями существует? Это следует, например, из китайской теоремы об остатках.

Китайская теорема об остатках. *Пусть A — кольцо главных идеалов, $a_1, \ldots, a_m \in A$,* НОД$(a_i, a_j) = 1$ *при $i \neq j$. Тогда отображение*

$$A/(a_1 a_2 \ldots a_m) \to A/(a_1) \times A/(a_2) \times \ldots \times A/(a_m),$$

$$u \bmod a_1 a_2 \dots a_m \mapsto (u \bmod a_1, u \bmod a_2, \dots, u \bmod a_m)$$

определено корректно и является изоморфизмом колец.

Вот "китайская" формулировка: пусть $b_1, b_2, \dots, b_m \in A$ произвольны; в условиях теоремы система сравнений $u \equiv b_1 \bmod a_1$, $u \equiv b_2 \bmod a_2, \dots, u \equiv b_m \bmod a_m$ разрешима (относительно u) однозначно по модулю $a_1 a_2 \dots a_m$.

Мы применяем это, когда $A = \mathbb{C}[t]$, $a_j = (t - \lambda_j)^{n_j}$ (и, при необходимости, $a_{m+1} = t$). Доказательство китайской теоремы об остатках см., например, Ленг, Алгебра, гл. 2, §2 (там даже более общая формулировка).

3) *Единственность* x_s *и* x_n. Пусть $x = x_s' + x_n'$ — другое разложение Жордана. Тогда $x_s + x_n = x_s' + x_n'$, т.е. $x_s - x_s' = x_n' - x_n$. Так как $[x_s', x_n'] = 0$, то $[x_s', x] = [x_s', x_s' + x_n'] = 0$. Но тогда $[x_s', x_s] = 0$, ибо x_s — многочлен от x. Поэтому $x_s - x_s'$ полупрост. Аналогично проверяется, что $x_n' - x_n$ нильпотентен. Поэтому $x_s - x_s' = x_n' - x_n = 0$, т.е. $x_s' = x_s$, $x_n' = x_n$. $\square$

Как связаны разложения Жордана операторов $x \in \mathfrak{gl}(V)$ и $\mathrm{ad}_x \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(V))$?

Ранее мы доказывали, что если $x \in \mathfrak{gl}(V)$ нильпотентен, то ad_x нильпотентен. В случае полупростого оператора ситуация аналогичная.

Лемма 33. *Пусть* $x \in \mathfrak{gl}(V)$ *полупрост. Тогда* ad_x *полупрост.*

Доказательство. Так как оператор x полупрост, то найдется базис $e_1, \dots, e_n$ в пространстве V такой, что $xe_j = \lambda_j e_j$ для всех j. Отождествим $\mathfrak{gl}(V)$ и $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ с помощью этого базиса; при этом

$$x = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Базис в $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ образуют, например, матрицы

$$E_{ij} := \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \dots & 1 & \dots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

(1 стоит в i-й строке и j-м столбце). Упр. Проверьте, что $\mathrm{ad}_x E_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j) E_{ij}$. Итак, в пространстве $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ имеется базис из собственных векторов оператора ad_x, поэтому ad_x полупрост. $\square$

Предложение 34. *Пусть* $x \in \mathfrak{gl}(V)$. *Тогда* $(\mathrm{ad}_x)_s = \mathrm{ad}_{x_s}$, $(\mathrm{ad}_x)_n = \mathrm{ad}_{x_n}$ *(т.е.* $\mathrm{ad}_x = \mathrm{ad}_{x_s} + \mathrm{ad}_{x_n}$ *— разложение Жордана оператора* ad_x*).*

Доказательство. Так как $x = x_s + x_n$, то $\mathrm{ad}_x = \mathrm{ad}_{x_s} + \mathrm{ad}_{x_n}$. Так как x_s полупрост, то ad_{x_s} полупрост. Так как x_n нильпотентен, то ad_{x_n} нильпотентен. Наконец, $[\mathrm{ad}_{x_s}, \mathrm{ad}_{x_n}] = \mathrm{ad}_{[x_s, x_n]} = 0$. $\square$

Доказательство достаточности критерия Картана. Пусть подалгебра Ли $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ такова, что $\operatorname{Tr} xy = 0$ для всех $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ и $y \in \mathfrak{g}$. Надо доказать, что $\mathfrak{g}$ разрешима.

Напомним, что из теорем Энгеля и Ли следует, что $\mathfrak{g}$ разрешима $\Leftrightarrow$ $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ нильпотентна $\Leftrightarrow$ операторы ad_x нильпотентны для всех $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Для того, чтобы оператор ad_x был нильпотентным, достаточно, чтобы сам x был нильпотентным. Итак, будем доказывать, что все $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ нильпотентны.

Пусть $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — его собственные значения (с учетом кратности). Нильпотентность x означает, что $\lambda_j = 0$ для всех j. Идея: "придумать" операторы $y_j \in \mathfrak{g}$ такие, что $\operatorname{Tr} xy_j = \lambda_j$; тогда $\lambda_j = 0$ согласно посылке теоремы. Мы постараемся даже "придумать" $y \in \mathfrak{g}$ такой, что $\operatorname{Tr} xy = |\lambda_1|^2 + \ldots + |\lambda_n|^2$ (тогда $|\lambda_1|^2 + \ldots + |\lambda_n|^2 = 0$ согласно посылке теоремы, т.е. $\lambda_j = 0$ для всех j).

Пусть $x = x_s + x_n$ — разложение Жордана (в конечном счете будет доказано, что $x = x_n$, т.е. что $x_s = 0$, но пока это не известно). Вспомним, что λ_j — это в точности собственные значения оператора x_s (это видно, например, из явного описания разложения Жордана), т.е. найдется базис $e_1, \ldots, e_n$ в пространстве V, для которого $x_s e_j = \lambda_j e_j$. Определим теперь оператор $\overline{x}_s \in \mathfrak{gl}(V)$ формулами $\overline{x}_s e_j = \overline{\lambda}_j e_j$. Иначе говоря, $\overline{x}_s$ — это полупростой оператор, чьи собственные подпространства совпадают с собственными подпространствами оператора x_s, а соответствующие собственные значения комплексно сопряжены собственным значениям x_s. В частности, оператор $\overline{x}_s$ не зависит от произвола в выборе базиса. (Аналогично можно определить оператор $\overline{A}$ для любого полупростого динейного оператора A.)

Отметим, что $x_s \overline{x}_s e_j = \lambda_j \overline{\lambda}_j e_j = |\lambda_j|^2 e_j$, поэтому $\operatorname{Tr} x_s \overline{x}_s = |\lambda_1|^2 + \ldots + |\lambda_n|^2$. Далее, $\operatorname{Tr} x\overline{x}_s = \operatorname{Tr} x_s \overline{x}_s + \operatorname{Tr} x_n \overline{x}_s$. Проверим, что $\operatorname{Tr} x_n \overline{x}_s = 0$. Это немедленно выводится из следующих утверждений: 1) $[x_n, \overline{x}_s] = 0$, 2) оператор $x_n \overline{x}_s$ нильпотентен. (Упр. Докажите эти утверждения!) Итак, $\operatorname{Tr} x\overline{x}_s = |\lambda_1|^2 + \ldots + |\lambda_n|^2$. Проблема: ниоткуда не следует, что $\overline{x}_s \in \mathfrak{g}$. Попытаемся преодолеть эту трудность.

Так как $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, то $x = \sum_{i=1}^N [y_i, z_i]$, где $y_i, z_i \in \mathfrak{g}$. Тогда

$$\operatorname{Tr} x\overline{x}_s = \sum_{i=1}^N \operatorname{Tr}\,[y_i, z_i]\overline{x}_s = \sum_{i=1}^N \operatorname{Tr} y_i[z_i, \overline{x}_s] = -\sum_{i=1}^N \operatorname{Tr} y_i[\overline{x}_s, z_i] = -\sum_{i=1}^N \operatorname{Tr}\,(y_i \mathrm{ad}_{\overline{x}_s} z_i).$$

Поэтому достаточно доказать, что $\mathrm{ad}_{\overline{x}_s} z \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ для любых $z \in \mathfrak{g}$ (т.е. что $\mathrm{ad}_{\overline{x}_s}(\mathfrak{g}) \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$). Действительно, если это будет доказано, то тогда $\operatorname{Tr}\,(y_i \mathrm{ad}_{\overline{x}_s} z_i)$ согласно посылке теоремы, т.е. $\operatorname{Tr} x\overline{x}_s = 0$, к чему мы и стремимся.

Выясним, как устроен оператор $\mathrm{ad}_{\overline{x}_s}$. Во-первых, $\mathrm{ad}_{\overline{x}_s} = \overline{\mathrm{ad}_{x_s}}$ (Упр. Проверьте это!). Во-вторых, по свойствам разложения Жордана найдется многочлен $p \in \mathbb{C}[t]$, $p(0) = 0$ такой, что $\mathrm{ad}_{x_s} = (\mathrm{ad}_x)_s = p(\mathrm{ad}_x)$. Проверим, что аналогичный факт верен и для оператора $\mathrm{ad}_{\overline{x}_s} = \overline{\mathrm{ad}_{x_s}} = \overline{(\mathrm{ad}_x)_s}$.

Лемма 35. *Пусть A — полупростой линейный оператор. Тогда найдется многочлен $q \in \mathbb{C}[t]$, $q(0) = 0$ такой, что $\overline{A} = q(A)$.*

Доказательство. Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_k$ — собственные значения оператора A (с учетом кратности), $e_1, \ldots, e_k$ — базис из соответствующих собственных векторов, т.е. $Ae_j = \mu_j e_j$.

По определению, $\overline{A}e_j = \overline{\mu}_j e_j$. Выберем многочлен $q \in \mathbb{C}[t]$ так, чтобы $q(0) = 0$ и $q(\mu_j) = \overline{\mu}_j$ для всех j. Очевидно, что $\overline{A} = q(A)$. $\square$

Применяя лемму к ad_{x_s}, мы видим, что найдется многочлен $q \in \mathbb{C}[t]$, $q(0) = 0$ такой, что $\mathrm{ad}_{\overline{x}_s} = q(\mathrm{ad}_{x_s})$. Поэтому $\mathrm{ad}_{\overline{x}_s} = r(\mathrm{ad}_x)$, где $r(t) = q(p(t))$. Разумеется, $r(0) = 0$.

Теперь заметим, что поскольку $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$, то $\mathrm{ad}_x z = [x, z] \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ для всех $z \in \mathfrak{g}$, т.е. $\mathrm{ad}_x(\mathfrak{g}) \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Далее, $(\mathrm{ad}_x)^2(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{ad}_x([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) \subset \mathrm{ad}_x(\mathfrak{g}) \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Продолжая по индукции, мы видим, что $(\mathrm{ad}_x)^k(\mathfrak{g}) \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ для всех $k \geq 1$. Поскольку r — многочлен с нулевым свободным членом, то $\mathrm{ad}_{\overline{x}_s}(\mathfrak{g}) = r(\mathrm{ad}_x)(\mathfrak{g}) \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, что и требовалось доказать. $\square$

Полупростые алгебры Ли

Полупростые алгебры Ли — это основной объект изучения в этом курсе. Они являются обобщением простых алгебр Ли. Дадим их определение.

Лемма 36. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. Тогда в $\mathfrak{g}$ существует наибольший (по включению) разрешимый идеал.*

Доказательство. Прежде всего, отметим, что $\mathfrak{g}$ содержит разрешимые идеалы (например, 0). Пусть $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}$ — разрешимый идеал наибольшей размерности. Проверим, что он искомый. В самом деле, пусть $\mathfrak{a}$ — другой разрешимый идеал в $\mathfrak{g}$. Тогда идеал $\mathfrak{r} + \mathfrak{a}$ также разрешим, причем $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{r} + \mathfrak{a}$. С другой стороны, $\dim(\mathfrak{r} + \mathfrak{a}) \leq \dim \mathfrak{r}$ по выбору $\mathfrak{r}$. Поэтому $\mathfrak{r} = \mathfrak{r} + \mathfrak{a}$, т.е. $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{r}$. $\square$

Определение 22. *Радикал* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ — это ее наибольший разрешимый идеал. Он обозначается через $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ (или просто $\mathfrak{r}$).

Замечание. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ разрешима тогда и только тогда, когда $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$.

Определение 23. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ *полупроста,* если $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = 0$.

Замечания. 1) Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста и разрешима тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g} = 0$. (Т.е. в некотором смысле полупростые алгебры Ли "прямо противоположны" разрешимым.)

2) Алгебра Ли полупроста тогда и только тогда, когда она не содержит ненулевых разрешимых идеалов (ибо всякий такой идеал содержится в радикале).

3) Простая алгебра Ли полупроста. В самом деле, если $\mathfrak{g}$ проста, то либо $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$, либо $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = 0$. Но простая алгебра Ли неразрешима, поэтому $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = 0$.

4) Нулевая алгебра Ли полупроста согласно нашему определению (однако в некоторых учебниках нулевую алгебру не считают полупростой).

5) Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста, то $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$ (ибо $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ — абелев, т.е. тем более разрешимый, идеал). В частности, ad является точным представлением, и $\mathfrak{g} \simeq \mathrm{ad}\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

Упр. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. Докажите, что $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ полупроста. Более того, если $\mathfrak{a}$ — идеал в $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ полупроста тогда и только тогда, когда $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ (т.е. $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ — это наибольший полупростой фактор алгебры Ли $\mathfrak{g}$).

Конкретные примеры полупростых алгебр Ли будут приведены несколько позже, когда у нас появится эффективный критерий полупростоты (проверять полупростоту по определению не очень-то удобно).

Предложение 37. *Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}$ не содержит ненулевых абелевых идеалов.*

Доказательство. В одну сторону это тривиально следует из определения. Обратно, пусть $\mathfrak{g}$ не полупроста, т.е. $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(\mathfrak{g}) \neq 0$. Так как при этом $\mathfrak{r}$ разрешим, то найдется $n \geq 1$ такое, что $\mathfrak{r}^{(n-1)} \neq 0$, $\mathfrak{r}^{(n)} = 0$. Таким образом, $\mathfrak{r}^{(n-1)}$ — абелева алгебра Ли (ибо $[\mathfrak{r}^{(n-1)}, \mathfrak{r}^{(n-1)}] = \mathfrak{r}^{(n)} = 0$). Для завершения доказательства осталось показать, что $\mathfrak{r}^{(n-1)}$ — идеал в $\mathfrak{g}$. Это следует (по индукции) из такого общего результата:

Лемма 38. *Если $\mathfrak{a}$ — идеал в $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{a}' = [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$ — также идеал в $\mathfrak{g}$.*

Доказательство. $[\mathfrak{g}, [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]] \subset [\mathfrak{a}, [\mathfrak{a}, \mathfrak{g}]] + [\mathfrak{a}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{a}]] \subset [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$. □

□

Предложение 39. *Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{a}_n$, где $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ — простые идеалы в $\mathfrak{g}$. Тогда $\mathfrak{g}$ полупроста.*

Доказательство. Пусть $\pi_i : \mathfrak{g} \to \mathfrak{a}_i$ — проекция на $\mathfrak{a}_i$ (вдоль суммы всех остальных прямых слагаемых). Упр. π_i — сюръективный гомоморфизм алгебр Ли. Если $\mathfrak{a}$ — идеал в $\mathfrak{g}$, то $\pi_i(\mathfrak{a})$ — идеал в $\mathfrak{a}_i$ (Упр. Прверьте это!); ввиду простоты $\mathfrak{a}_i$ либо $\pi_i(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}_i$, либо $\pi_i(\mathfrak{a}) = 0$. Если $\mathfrak{a}$ абелев, то $\pi_i(\mathfrak{a})$ тоже абелевы (для всех i), т.е. $\pi_i(\mathfrak{a}) = 0$ для всех i. Это и означает, что $\mathfrak{a} = 0$, что и требовалось доказать. □

Упр. Проверьте, что если $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{a}_n$, где $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ — *полу*простые идеалы, то $\mathfrak{g}$ полупроста. (Указание: модифицируйте предыдущее доказательство.)

Немеого позже мы докажем, что все полупростые алгебры Ли — это прямые суммы простых идеалов. Но сначала получим эффективно проверяемый критерий полупростоты в терминах формы Киллинга.

Теорема 40. *Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста тогда и только тогда, когда $\mathrm{K}_\mathfrak{g}$ невырождена.*

Прежде чем доказывать теорему, введем некоторые обозначения. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{a}$ — подпространство в $\mathfrak{g}$. Положим $\mathfrak{a}^\perp := \{x \in \mathfrak{g} \,|\, \forall y \in \mathfrak{a} : \mathrm{K}_\mathfrak{g}(x, y) = 0\}$. Отметим, что если $\mathrm{K}_\mathfrak{g}$ невырождена, то $\dim \mathfrak{a} + \dim \mathfrak{a}^\perp = \dim \mathfrak{g}$. Но, даже если $\mathrm{K}_\mathfrak{g}$ невырождена, то вовсе не обязательно, что $\mathfrak{a} + \mathfrak{a}^\perp = \mathfrak{g}$ (т.е. может случиться, что $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp \neq 0$ — почему?).

Лемма 41. *Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал в $\mathfrak{g}$. Тогда $\mathfrak{a}^\perp$ — также идеал в $\mathfrak{g}$.*

Доказательство. Пусть $x \in \mathfrak{a}^\perp$ (т.е. $\mathrm{K}_\mathfrak{g}(x,y) = 0$ для всех $y \in \mathfrak{a}$), $z \in \mathfrak{g}$. Почему $[x,z] \in \mathfrak{a}^\perp$? В самом деле, если $y \in \mathfrak{a}$, то $\mathrm{K}_\mathfrak{g}([x,z],y) = \mathrm{K}_\mathfrak{g}(x,[z,y]) = 0$ (ибо $[z,y] \in \mathfrak{a}$), что и требовалось проверить. $\square$

В последнем рассуждении можно, разумеется, заменить форму Киллинга на произвольную инвариантную (симетрическую) билинейную форму на $\mathfrak{g}$.

Доказательство теоремы 40. Прежде всего, положим $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}^\perp$.

Пусть $\mathfrak{g}$ полупроста. Докажем, что $\mathfrak{n} = 0$ (это и означает невырожденность $\mathrm{K}_\mathfrak{g}$). В самом деле, $\mathfrak{n}$ — идеал в $\mathfrak{g}$. Далее, $\mathrm{K}_\mathfrak{g}(\mathfrak{n},\mathfrak{g}) = 0$, тем более $\mathrm{K}_\mathfrak{g}(\mathfrak{n},[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]) = 0$, т.е. $\mathrm{Tr}\,\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y = 0$ для всех $x \in \mathfrak{n}$, $y \in [\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$ (внимание: здесь существенно, что ad понимается "в смысле $\mathfrak{g}$"). Поэтому алгебра Ли $\mathrm{ad}\mathfrak{n}$ разрешима по критерию Картана. Но, ввиду полупростоты $\mathfrak{g}$, гомоморфизм ad инъективен, т.е. $\mathfrak{n} \simeq \mathrm{ad}\mathfrak{n}$. Итак, $\mathfrak{n}$ — разрешимый идеал в $\mathfrak{g}$. Поэтому $\mathfrak{n} = 0$ в силу полупростоты $\mathfrak{g}$.

Обратно, пусть $\mathrm{K}_\mathfrak{g}$ невырождена (т.е. $\mathfrak{n} = 0$). Докажем, что $\mathfrak{g}$ полупроста. Пусть $\mathfrak{a}$ — абелев идеал в $\mathfrak{g}$. Мы докажем, что $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{n}$ (и тогда $\mathfrak{a} = 0$, что и требуется). В самом деле, пусть $x \in \mathfrak{g}$, $y \in \mathfrak{a}$. Почему $\mathrm{K}_\mathfrak{g}(x,y) = 0$? Положим $u = \mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y$, тогда $\mathrm{K}_\mathfrak{g}(x,y) = \mathrm{Tr}\,u$. Заметим, что $u(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{a}$ (ибо $\mathfrak{a}$ — идеал в $\mathfrak{g}$), и $u(\mathfrak{a}) = 0$ (ибо $\mathfrak{a}$ абелев). Поэтому $u^2 = 0$, и $\mathrm{Tr}\,u = 0$. $\square$

Теперь будем доказывать, что всякая (ненулевая) полупростая алгебра Ли является прямой суммой простых.

Предложение 42. *Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста, $\mathfrak{a}$ — идеал в $\mathfrak{g}$. Тогда $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$ (прямая сумма идеалов; "$\perp$", как и прежде, берется относительно формы Киллинга).*

Доказательство. Мы уже проверили, что $\mathfrak{a}^\perp$ — идеал в $\mathfrak{g}$ (полупростота $\mathfrak{g}$ здесь не при чем). Далее, так как $\mathfrak{g}$ полупроста, то $\mathrm{K}_\mathfrak{g}$ невырождена, и поэтому $\dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{a} + \dim \mathfrak{a}^\perp$. Осалось доказать, что $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp = 0$. В самом деле, рассмотрим идеал $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp \subset \mathfrak{g}$. Очевидно, что $\mathrm{K}_\mathfrak{g}(\mathfrak{b},\mathfrak{a}) = 0$. Но тогда $\mathrm{K}_\mathfrak{g}(\mathfrak{b},[\mathfrak{b},\mathfrak{b}]) = 0$ (ибо $[\mathfrak{b},\mathfrak{b}] \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$). Поэтому алгебра Ли $\mathrm{ad}\mathfrak{b} \simeq \mathfrak{b}$ разрешима по критерию Картана (здесь ad понимается в смысле $\mathfrak{g}$). Так как $\mathfrak{g}$ полупроста, то $\mathfrak{b} = 0$. $\square$

Предложение 43. *Идеалы и факторалгебры полупростой алгебры Ли полупросты.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{g}$ полупроста, $\mathfrak{a}$ — идеал в $\mathfrak{g}$. Тогда $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$. Если $\mathfrak{b}$ — идеал в $\mathfrak{a}$, то $\mathfrak{b}$ является идеалом и в $\mathfrak{g}$ (Упр. Проверьте!). Если $\mathfrak{b}$ разрешим, то $\mathfrak{b} = 0$ в силу полупростоты $\mathfrak{g}$; поэтому идеал $\mathfrak{a}$ полупрост. Далее, $\mathfrak{g}/\mathfrak{a} \simeq \mathfrak{a}^\perp$ тоже полупроста. $\square$

Теорема 44. *Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста, $\mathfrak{g} \neq 0$. Тогда найдутся простые идеалы $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n \subset \mathfrak{g}$ такие, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{a}_n$.*

Доказательство. Проведем индукцию по $\dim \mathfrak{g}$. База индукции: если $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли наименьшей размерности (Упр. эта размерность равна 3), то $\mathfrak{g}$ проста (ибо идеалы полупростой алгебры Ли полупросты).

Индуктивный переход: если $\mathfrak{g}$ проста, то доказывать нечего; если $\mathfrak{g}$ не проста, то $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$, где $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}^\perp$ — (полупростые) идеалы в $\mathfrak{g}$, $\dim \mathfrak{a} < \dim \mathfrak{g}$, $\dim \mathfrak{a}^\perp < \dim \mathfrak{g}$.

Применяя к ним индуктивное предположение и замечая, что любой идеал в $\mathfrak{a}$ или $\mathfrak{a}^\perp$ будет идеалом в $\mathfrak{g}$, мы получаем требуемое утверждение. $\square$

Замечание. Теорема означает, что если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста, то ее присоединенное представление вполне приводимо (т.е. $\mathfrak{g}$-модуль $\mathfrak{g}$ полупрост). Действительно, простые идеалы в $\mathfrak{g}$— это пространства неприводимых подпредставлений присоединенного представления. Обратное, вообще говоря, неверно (простейший пример: одномерная алгебра Ли).

Следствие 45. *Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста, то $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\mathfrak{g}$.*

Доказательство. Если $\mathfrak{g}=0$, то доказывать нечего. Если $\mathfrak{g}\neq 0$, то $\mathfrak{g}=\mathfrak{a}_1\oplus\ldots\oplus\mathfrak{a}_n$, где $\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_n$ — простые идеалы в $\mathfrak{g}$. Заметим, что $[\mathfrak{a}_i,\mathfrak{a}_i]=\mathfrak{a}_i$ ввиду простоты $\mathfrak{a}_i$. Далее, $[\mathfrak{a}_i,\mathfrak{a}_j]\subset\mathfrak{a}_i\cap\mathfrak{a}_j=0$ при $i\neq j$. Поэтому $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\sum_{i,j}[\mathfrak{a}_i,\mathfrak{a}_j]=\sum_i[\mathfrak{a}_i,\mathfrak{a}_i]=\sum_i\mathfrak{a}_i=\mathfrak{g}$. $\square$

Замечание. Если $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{g}$ не обязательно полупроста (Упр. Придумайте пример.)

Оказывается, что разложение полупростой алгебры Ли в прямую сумму простых идеалов однозначно в буквальном смысле (единственная неоднозначность — это порядок следования слагаемых).

Предложение 46. *Пусть $\mathfrak{g}=\mathfrak{a}_1\oplus\ldots\oplus\mathfrak{a}_n$, где $\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_n$ — простые идеалы в $\mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{a}$ — простой идеал в $\mathfrak{g}$. Тогда $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_i$ для некоторого (единственного!) i.*

Доказательство. Покажем вначале, что $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}_i\neq 0$ для некоторого i. Пусть, наоборот, $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}_i=0$ для всех i. Тогда $[\mathfrak{a},\mathfrak{a}_i]\subset\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}_i=0$ для всех i. Но тогда $[\mathfrak{a},\mathfrak{g}]=0$, т.е. $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{z}(\mathfrak{g})=0$, что невозможно.

Возьмем то i, для которого $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}_i\neq 0$. Тогда $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}_i=\mathfrak{a}_i$ (ибо $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}_i$ — идеал в $\mathfrak{a}_i$, и $\mathfrak{a}_i$ прост). Аналогично, $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}_i=\mathfrak{a}$, т.е. $\mathfrak{a}_i=\mathfrak{a}$. $\square$

Упр. В условиях последнего предложения всякий идеал в $\mathfrak{g}$ — это сумма нескольких $\mathfrak{a}_i$.

Упр. 1) Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ проста, B — инвариантная билинейная форма на $\mathfrak{g}$. Тогда $B=\lambda\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}$ для некоторого $\lambda\in\mathbb{C}$ (в частности, B симметрична).

2) Опишите все инвариантные билинейные формы на полупростой алгебре Ли (в частности, проверьте, что все они симметричны).

Примеры. Теперь мы можем привести примеры полупростых алгебр Ли, проверяя невырожденность их формы Киллинга.

1) Начнем с алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n)=\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. Она, конечно, не полупроста, ибо $\mathfrak{z}(\mathfrak{gl}(n))=\mathbb{C}E\neq 0$. Тем не менее вычислим ее форму Киллинга.

Базис в $\mathfrak{gl}(n)$ образуют, например, матрицы

$$E_{ij}:=\begin{pmatrix}0&\vdots&0\\ \ldots&1&\ldots\\ 0&\vdots&0\end{pmatrix}$$

(1 стоит в i-й строке и j-м столбце). Так как $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$, то $\mathrm{ad}_{E_{ij}}E_{kl} = [E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk}E_{il} - \delta_{li}E_{kj}$. Если $Y \in \mathfrak{gl}(n)$, $Y = (y_{ij})$, то $Y = \sum_{i,j} y_{ij}E_{ij}$, поэтому

$$\mathrm{ad}_Y E_{kl} = \sum_{i,j} y_{ij}\mathrm{ad}_{E_{ij}}E_{kl} = \sum_i y_{ik}E_{il} - \sum_j y_{lj}E_{kj} = \sum_i (y_{ik}E_{il} - y_{li}E_{ki}).$$

Если, кроме того, $X \in \mathfrak{gl}(n)$, $X = (x_{ij})$, то

$$\mathrm{ad}_X\mathrm{ad}_Y E_{kl} = \sum_{i,j} x_{ij}y_{jk}E_{il} + \sum_{i,j} x_{ij}y_{li}E_{kj} - \sum_{i,j}(x_{lj}y_{ik} + x_{ik}y_{lj})E_{ij}$$

(Упр. Проверьте!). Теперь

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}_{\mathfrak{gl}(n)}(X,Y) = \mathrm{Tr}\,\mathrm{ad}_X\mathrm{ad}_Y &= \sum_{k,l}\left(\sum_j x_{kj}y_{jk} + \sum_i x_{il}y_{li} - x_{ll}y_{kk} - x_{kk}y_{ll}\right) \\
&= n\sum_{k,j} x_{kj}y_{jk} + n\sum_{i,l} x_{il}y_{li} - 2\sum_{k,l} x_{kk}y_{ll} \\
&= 2n\sum_{i,j} x_{ij}y_{ji} - 2\sum_{k,l} x_{kk}y_{ll}.
\end{aligned}$$

Заметим, наконец, что

$$\mathrm{Tr}\,XY = \sum_{i,j} x_{ij}y_{ji};$$

кроме того,

$$\sum_{k,l} x_{kk}y_{ll} = \sum_k x_{kk}\cdot\sum_l y_{ll} = \mathrm{Tr}\,X\cdot\mathrm{Tr}\,Y.$$

Итак,

$$\mathrm{K}_{\mathfrak{gl}(n)}(X,Y) = 2n\mathrm{Tr}\,XY - 2\mathrm{Tr}\,X\cdot\mathrm{Tr}\,Y.$$

2) Теперь рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{sl}(n) = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$. Отметим, что $\mathfrak{sl}(n)$ — идеал в $\mathfrak{gl}(n)$ (почему?). Как вычислить форму Киллинга идеала, зная форму Киллинга исходной алгебры?

Лемма 47. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{a}$ — идеал в $\mathfrak{g}$. Тогда* $\mathrm{K}_{\mathfrak{a}} = \mathrm{K}_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}}$.

Доказательство. Пусть $x,y \in \mathfrak{a}$. Тогда $\mathrm{ad}_{x,\mathfrak{g}}\mathrm{ad}_{y,\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{a}$, и $\mathrm{ad}_{x,\mathfrak{g}}\mathrm{ad}_{y,\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{a}} = \mathrm{ad}_{x,\mathfrak{a}}\mathrm{ad}_{y,\mathfrak{a}}$ (здесь $\mathrm{ad}_{x,\mathfrak{g}}$ — это ad_x "в смысле" $\mathfrak{g}$, т.е. $\mathrm{ad}_{x,\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$; аналогично $\mathrm{ad}_{x,\mathfrak{a}}$ — это ad_x "в смысле" $\mathfrak{a}$). Выберем теперь какой-нибудь базис $\widetilde{\Delta}$ в $\mathfrak{a}$ и дополним его до базиса Δ в $\mathfrak{g}$. Тогда

$$(\mathrm{ad}_{x,\mathfrak{g}}\mathrm{ad}_{y,\mathfrak{g}})_\Delta = \begin{pmatrix} (\mathrm{ad}_{x,\mathfrak{a}}\mathrm{ad}_{y,\mathfrak{a}})_{\widetilde{\Delta}} & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}(x,y) = \mathrm{Tr}\,\mathrm{ad}_{x,\mathfrak{g}}\mathrm{ad}_{y,\mathfrak{g}} = \mathrm{Tr}\,\mathrm{ad}_{x,\mathfrak{a}}\mathrm{ad}_{y,\mathfrak{a}} = \mathrm{K}_{\mathfrak{a}}(x,y)$, что и требовалось доказать. □

Применяя лемму к случаю $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{sl}(n)$, получаем, что $\mathrm{K}_{\mathfrak{sl}(n)}(X, Y) = 2n\mathrm{Tr}\, XY$ (ибо $\mathrm{Tr}\, X = 0$ для всех $X \in \mathfrak{sl}(n)$).

Проверим, что форма $\mathrm{K}_{\mathfrak{sl}(n)}$ невырождена. Прежде всего, заметим, что если $X = (x_{ij}) \in \mathfrak{gl}(n)$, то $x_{ij} = \mathrm{Tr}\, XE_{ji}$ (Упр. Проверьте). Пусть теперь матрица $X \in \mathfrak{sl}(n)$ такова, что $\mathrm{K}_{\mathfrak{sl}(n)}(X, Y) = 0$ для всех $Y \in \mathfrak{sl}(n)$ (т.е. $\mathrm{Tr}\, XY = 0$ для всех $Y \in \mathfrak{sl}(n)$). Если $i \neq j$, то $E_{ji} \in \mathfrak{sl}(n)$, поэтому $x_{ij} = \mathrm{Tr}\, XE_{ji} = 0$. Далее, $x_{ii} - x_{nn} = \mathrm{Tr}\, X(E_{ii} - E_{nn}) = 0$ ($E_{ii} - E_{nn} \in \mathfrak{sl}(n)$), т.е. $x_{ii} = x_{nn}$ для всех i. Но $\sum_i x_{ii} = \mathrm{Tr}\, X = 0$, поэтому $x_{ii} = 0$ для всех i. Итак, $X = 0$, что и требовалось доказать.

Таким образом, доказано, что алгебра Ли $\mathfrak{sl}(n)$ полупроста. На самом деле при $n \geq 2$ она даже проста ($\mathfrak{sl}(1) = 0$, конечно, не проста). Это легко следует из структурной теории полупростых алгебр Ли, которую мы будем развивать далее.

Задача Докажите непосредственно, что $\mathfrak{sl}(n)$ проста при $n \geq 2$.

Задача Вычислите форму Киллинга алгебр Ли $\mathfrak{o}(n)$ и $\mathfrak{sp}(n)$ и докажите, что $\mathfrak{o}(n)$ полупроста при $n \geq 3$, $\mathfrak{sp}(n)$ полупроста при $n \geq 2$ (напомним, что $\mathfrak{sp}(n)$ определена лишь при четных n).

На самом деле $\mathfrak{o}(n)$ даже проста при $n = 3$ и $n \geq 5$; $\mathfrak{sp}(n)$ проста при $n \geq 2$.

Упр. Проверьте, что $\dim \mathfrak{o}(2) = 1$, поэтому $\mathfrak{o}(2)$ не полупроста.

Упр. Проверьте, что $\mathfrak{o}(4) \simeq \mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$, поэтому $\mathfrak{o}(4)$ полупроста, но не проста.

Оказывается, что алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n)$, $\mathfrak{o}(n)$ и $\mathfrak{sp}(n)$ — это почти все конечномерные комплексные простые алгебры Ли; есть еще ровно 5 т.наз. “исключительных” простых алгебр Ли. Приняты следующие обозначения простых алгебр Ли:

- алгебра Ли типа A_n — это $\mathfrak{sl}(n+1)$ $(n = 1, 2, \ldots)$
- алгебра Ли типа B_n — это $\mathfrak{o}(2n+1)$ $(n = 1, 2, \ldots)$
- алгебра Ли типа C_n — это $\mathfrak{sp}(2n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$
- алгебра Ли типа D_n — это $\mathfrak{o}(2n)$ $(n = 3, 4, \ldots)$

Смысл этих обозначений и причины того, что $o(n)$ естественно делить на две “серии”, прояснятся позже. Исключительные алгебры Ли обозначаются так: E_6, E_7, E_8, F_4, G_2.

Некоторые из классических простых алгебр Ли изоморфны (при небольщих n). Именно, $A_1 = B_1 = C_1$ (т.е. $sl(2) \simeq \mathfrak{o}(3) \simeq \mathfrak{sp}(2)$), $B_2 = C_2$ (т.е. $\mathfrak{o}(5) \simeq \mathfrak{sp}(4)$), $A_3 = D_3$ (т.е. $\mathfrak{sl}(4) \simeq \mathfrak{o}(6)$). Других изоморфных пар таких алгебр нет.

Вот некоторая информация об исключительных простых алгебрах Ли.

$\mathfrak{g}$	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2
$\dim \mathfrak{g}$	78	133	248	52	14
$n_{\mathfrak{g}}$	27	56	248	26	7

Здесь $n_{\mathfrak{g}}$ — это наименьшее n такое, что $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{gl}(n)$.

Теорема Г.Вейля о полной приводимости

В этом разделе будет доказано, что любое конечномерное представление полупростой алгебры Ли вполне приводимо. (Тем самым для описания всех конечномерных представлений достаточно описать неприводимые.) Нам понадобится одна вспомогательная конструкция.

Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ — ее точное конечномерное представление. Напомним, что $B_\rho(x, y) = \operatorname{Tr} \rho(x)\rho(y)$ является инвариантной симметрической билинейной формой на $\mathfrak{g}$.

Упр. Докажите, что форма B_ρ невырождена. (Указание: скопируйте доказательство невырожденности формы Киллинга полупростой алгебры Ли; точночть представления ρ здесь существенна!)

Пусть $e_1, \dots, e_n$ — произвольный базис в $\mathfrak{g}$. Поскольку форма B_ρ невырождена, то найдется (другой) базис $f_1, \dots, f_n$ такой, что $B_\rho(e_i, f_j) = \delta_{ij}$ для всех i, j; базис $f_1, \dots, f_n$ называется *двойственным* к $e_1, \dots, e_n$ относительно формы B_ρ.

Положим $C_\rho := \sum_i \rho(e_i)\rho(f_i) \in \operatorname{End} V$.

Упр. Проверьте, что оператор C_ρ не зависит от произвола в выборе исходного базиса $e_1, \dots, e_n$. (Указание: C_ρ — это образ B_ρ при естественном отображении

$$\operatorname{Bilin}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \mathbb{C}) = (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})^* = \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \xrightarrow{\rho\otimes\rho} \operatorname{End} V \otimes \operatorname{End} V \xrightarrow{m} \operatorname{End} V\ ;$$

здесь изоморфизм $\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ индуцировн формой B_ρ, а $m : \operatorname{End} V \otimes \operatorname{End} V \to \operatorname{End} V$ — это умножение в (ассоциативной) алгебре $\operatorname{End} V$.)

Оператор C_ρ называется *оператором Казимира* представления $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ (или $\mathfrak{g}$-модуля V).

Предложение 48. *$C_\rho \in \operatorname{End}_{\mathfrak{g}} V$.*

Доказательство. Положим для краткости $C := C_\rho$. Пусть $x \in \mathfrak{g}$. Нужно доказать, что $C\rho(x) = \rho(x)C$. В самом деле,

$$C\rho(x) = \sum_i \rho(e_i)\rho(f_i)\rho(x) = \sum_i \rho(e_i)\rho(x)\rho(f_i) + \sum_i \rho(e_i)\rho([f_i, x]),$$

$$\rho(x)C = \sum_i \rho(x)\rho(e_i)\rho(f_i) = \sum_i \rho(e_i)\rho(x)\rho(f_i) + \sum_i \rho([x, e_i])\rho(f_i).$$

Так как $e_1, \dots, e_n$ и $f_1, \dots, f_n$ — базисы в $\mathfrak{g}$, то $[x, e_i] = \sum_j \alpha_{ij} e_j$, $[f_i, x] = \sum_j \beta_{ij} f_j$ (где числа $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{C}$, разумеется, зависят от x). Тогда

$$\sum_i \rho(e_i)\rho([f_i, x]) = \sum_{ij} \beta_{ij}\rho(e_i)\rho(f_j),$$

$$\sum_j \rho([x,e_j])\rho(f_j) = \sum_{ij} \alpha_{ji}\rho(e_i)\rho(f_j).$$

Наконец,

$$\beta_{ij} = \sum_k \beta_{ik} B_\rho(f_k, e_j) = B_\rho([f_i, x], e_j) = B_\rho(f_i, [x, e_j]) = \sum_k \alpha_{jk} B_\rho(f_i, e_k) = \alpha_{ji},$$

что и требовалось доказать. $\square$

Замечания. 1. Пусть W — это подмодуль в V. Тогда $C_\rho(W) \subset W$. В самом деле, $\rho(e_i)W \subset W$, $\rho(f_i)W \subset W$ для всех i, а значит, и $C_\rho(W) \subset W$.

Следовательно, возникает факторопператор $\widetilde{C}_\rho \in \mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(V/W)$; очевидно, что $\widetilde{C}_\rho = \sum_i \widetilde{\rho}(e_i)\widetilde{\rho}(f_i)$, где $\widetilde{\rho} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V/W)$ — факторпредставление. Следовательно, если $\mathfrak{g}$-модуль V/W тривиален (т.е. $\widetilde{\rho}(x) = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}$), то $\widetilde{C}_\rho = 0$.

2. $\mathrm{Tr}\, C_\rho = \sum_i \mathrm{Tr}\, \rho(e_i)\rho(f_i) = \sum_i B_\rho(e_i, f_i) = \sum_i 1 = \dim \mathfrak{g}$. В частности, $C_\rho \neq 0$.

3. Если точное представление ρ вдобавок неприводимо, то, согласно лемме Шура, оператор C_ρ — это оператор умножения на скаляр. Из предыдущего замечания следует, что этот скаляр равен $\frac{\dim \mathfrak{g}}{\dim V}$.

Лемма 49. *Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста, V — $\mathfrak{g}$-модуль,* $\dim V = 1$. *Тогда V тривиален (т.е. $xv = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}$ и $v \in V$).*

Доказательство. Так как $\dim V = 1$, то $xv = \lambda(x)v$, где $\lambda(x) \in \mathbb{C}$. Так как $\mathfrak{g}$ полупроста, то $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. Далее, $[x,y]v = x(yv) - y(xv) = \lambda(x)\lambda(y)v - \lambda(y)\lambda(x)v = 0$, что и требовалось доказать. $\square$

Теорема 50 (Герман Вейль). *Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста. Тогда все конечномерные $\mathfrak{g}$-модули полупросты.*

Доказательство. Пусть V — $\mathfrak{g}$-модуль, $\dim V < \infty$, $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ — соответствующее представление. Если W — подмодуль в V, то нам нужно доказать, что найдется подмодуль $L \subset V$ такой, что $V = W \oplus L$. Мы можем считать, что $0 \subsetneq W \subsetneq V$ (иначе доказывать нечего).

Шаг 1. Сведем все к случаю, когда ρ — точное представление. Действительно, пусть $\mathfrak{a} = \mathrm{Ker}\rho$. Тогда $\mathfrak{a}$ — идеал в $\mathfrak{g}$. Поскольку $\mathfrak{g}$ полупроста, то $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$, где $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^\perp$ — идеал в $\mathfrak{g}$; он тоже полупрост. Ограничение ρ на $\mathfrak{b}$ будет точным. Далее, каждый $\mathfrak{b}$-подмодуль в V будет и $\mathfrak{g}$-подмодулем (ибо элементы из $\mathfrak{a}$ переводят в 0 любой вектор из V). Поэтому мы можем заменить $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{b}$, т.е. считать, что ρ точно. Так и будем считать в дальнейшем.

Шаг 2. Докажем теорему в случае, когда W имеет в V коразмерность 1 (т.е. $\dim V/W = 1$).

2a) Пусть вначале W прост. Рассмотрим оператор Казимира C_ρ. Тогда $C_\rho(W) \subset W$, и возникает факторопператор $\widetilde{C}_\rho \in \mathrm{End}_{\mathfrak{g}} V/W$. Так как $\dim V/W = 1$, то V/W

тривиален, и поэтому $\widetilde{C}_\rho = 0$ (см. замечания об операторе Казимира). Кроме того, $C_\rho|_W \in \mathrm{End}_{\mathfrak{g}} W$, поэтому $C_\rho|_W = \lambda \cdot \mathrm{id}$, где $\lambda \in \mathbb{C}$ (мы применяем к W лемму Шура).

Выберем какой-нибудь базис в W и дополним его (одним вектором!) до базиса в V. В полученном базисе матрица оператора имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & * \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \lambda & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\mathrm{Tr}\, C_\rho \neq 0$, то $\lambda \neq 0$.

Теперь положим $L = \mathrm{Ker} C_\rho$. Тогда $\dim L = 1$, и $W \cap L = 0$ (все это очевидно, если посмотреть на матрицу оператора C_ρ), т.е. $V = W \oplus L$. Поскольку $C_\rho \in \mathrm{End}_{\mathfrak{g}} V$, то L является подмодулем в V. Именно такой подмодуль нам и нужно было найти.

2б) Пусть теперь W не обязательно прост (но по-прежнему $\dim V/W = 1$). Проведем индукцию по размерности W. База индукции: если $\dim W = 1$, то W прост — см. шаг 2а. Индуктивный переход: если W прост, то см. шаг 2а; в противном же случае найдется подмодуль $W' \subset W$ такой, что $0 \subsetneq W' \subsetneq W$. Рассмотрим подмодуль $W/W' \subset V/W'$. Поскольку фактор $(V/W')/(W/W') \simeq V/W$ одномерен, то к паре $(V/W', W/W')$ применимо индуктивное предположение (ибо $\dim W/W' < \dim W$): $V/W' = W/W' \oplus \widetilde{L}$ для некоторого подмодуля $\widetilde{L} \subset V/W'$, $\dim \widetilde{L} = 1$. Отметим, что $\widetilde{L} = L/W'$ (где L — это прообраз $\widetilde{L}$ при факторотображении $V \to V/W'$). Таким образом, к паре (L, W') тоже применимо индуктивное предположение (ибо $\dim W' < \dim W$): $L = W' \oplus M$ для некоторого подмодуля $M \subset L$ ($\dim M = 1$). Упр. Проверьте, что $V = W \oplus M$ (т.е. M — искомый дополняющий подмодуль).

Шаг 3. Рассмотрим, наконец, общий случай. Итак, пусть $W \subset V$ — (собственный) подмодуль. Нужно построить подмодуль $L \subset V$ такой, что $V = W \oplus L$. Мы сейчас сведем это к ситуации из шага 2.

Рассмотрим $\mathfrak{g}$-модуль $\mathrm{Hom}(V, W)$ (напомним, что если $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $x \in \mathfrak{g}$, то $(x\varphi)(v) = x\varphi(v) - \varphi(xv)$). Определим подпространства $\widetilde{W} \subset \widetilde{V} \subset \mathrm{Hom}(V, W)$ равенствами

$$\widetilde{V} := \{\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W) \,|\, \varphi|_W = \lambda \cdot \mathrm{id}_W \text{ для некоторого } \lambda \in \mathbb{C}\},$$

$$\widetilde{W} := \{\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W) \,|\, \varphi|_W = 0\}.$$

Проверим, что $\widetilde{V}$ и $\widetilde{W}$ — это подмодули в $\mathrm{Hom}(V, W)$. В самом деле, если $\varphi \in \widetilde{V}$, т.е. $\varphi(w) = \lambda w$ для всех $w \in W$, то $(x\varphi)(w) = x\varphi(w) - \varphi(xw) = x(\lambda w) - \lambda xw = 0$, т.е. $x\varphi \in \widetilde{W} \subset \widetilde{V}$.

Заметим теперь, что $\dim \widetilde{V}/\widetilde{W} = 1$ (почему?). Поэтому пара $(\widetilde{V}, \widetilde{W})$ удовлетворяет условиям шага 2, т.е. найдется одномерный подмодуль $M \subset \widetilde{V}$ такой, что $\widetilde{V} = \widetilde{W} \oplus M$. Выберем $\varphi \in M$, $\varphi \neq 0$ (т.е. $M = \mathbb{C}\varphi$). Поскольку $\dim M = 1$, то M — тривиальный $\mathfrak{g}$-модуль, т.е. $x\varphi = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}$. Следовательно, $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)$. Поскольку $\varphi \in \widetilde{V} \setminus \widetilde{W}$, то $\varphi(w) = \lambda w$ для всех $w \in W$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$.

Пусть $L = \mathrm{Ker}\varphi$. Тогда L является подмодулем в V, причем $\dim L = \dim V - \dim \mathrm{Im}\varphi = \dim V - \dim W$, и $L \cap W = 0$. Поэтому $V = W \oplus L$, т.е. L — искомый подмодуль. $\square$

Упр. ("Обращение" теоремы Вейля.) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли такая, что все ее конечномерные представления вполне приводимы. Докажите, что $\mathfrak{g}$ полупроста. (Указание: примените посылку к присоединенному представлению $\mathfrak{g}$.)

Задача Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

(1) $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$;

(2) $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ полупроста;

(3) присоединенное представление $\mathfrak{g}$ вполне приводимо;

(4) $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, где $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ — идеалы в $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_1$ полупрост, $\mathfrak{g}_2$ абелев;

(5) $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ полупроста.

(Схема проверок: (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1); (4) $\Leftrightarrow$ (5).)

Если $\mathfrak{g}$ удовлетворяет условиям (1)–(5), то говорят, что $\mathfrak{g}$ — *редуктивная* алгебра Ли. Примеры редуктивных алгебр Ли: полупростые; абелевы; $\mathfrak{gl}(n)$.

Алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2)$ и ее представления

Мы полностью опишем строение конечномерных представлений алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$. Во-первых, это доставляет простой пример к общей теории представлений полупростых алгебр Ли; во-вторых, это описание нам понадобится (и сыграет одну из ключевых ролей) при развитии структурной теории полупростых алгебр Ли.

Напомним, что

$$\mathfrak{sl}(2) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}) \mid \mathrm{Tr}\, A = 0\}.$$

"Стандартный" базис в $\mathfrak{sl}(2)$ образуют матрицы

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

легко сосчитать (Упр. сделайте это), что

$$[X, Y] = H,\ [H, X] = 2X,\ [H, Y] = -2Y. \tag{1}$$

Предложение 51. *Алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2)$ проста.*

Доказательство. Во-первых, $\mathfrak{sl}(2)$ неабелева. Во-вторых, пусть $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{sl}(2)$ — ненулевой идеал. Надо показать, что $\mathfrak{a} = \mathfrak{sl}(2)$.

Для этого рассмотрим оператор $\mathrm{ad}_H : \mathfrak{sl}(2) \to \mathfrak{sl}(2)$. Поскольку $\mathfrak{a}$ — идеал, то $\mathrm{ad}_H(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}$. Поэтому $\mathfrak{a}$ содержит собственный вектор оператора ad_H. Но все (с точностью до скалярного множителя) собственные векторы оператора ad_H — это X, Y и H

(соответствующие собственные значения равны 2, -2 и 0). Поэтому или $X \in \mathfrak{a}$, или $Y \in \mathfrak{a}$, или $H \in \mathfrak{a}$.

Если, скажем, $X \in \mathfrak{a}$, то $H = [X, Y] \in \mathfrak{a}$ и $Y = -\frac{1}{2}[H, Y] \in \mathfrak{a}$, т.е. $\mathfrak{a} = \mathfrak{sl}(2)$. Упр. Рассмотрите оставшиеся случаи. $\square$

Замечание. Алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2)$ — это простая алгебра Ли наименьшей размерности (Упр. Если $\dim \mathfrak{g} \leq 2$, то $\mathfrak{g}$ разрешима).

Пусть V — линейное пространство, $0 < \dim V < \infty$. Напомним, что задание в пространстве V структуры $\mathfrak{sl}(2)$-модуля равносильно заданию линейных операторов $X, Y, H \in \mathfrak{gl}(V)$ таких, что выполнены условия (1). Пусть такие операторы заданы, т.е. V является $\mathfrak{sl}(2)$-модулем. Рассмотрим собственные векторы и собственные значения оператора H. Именно, если $\lambda \in \mathbb{C}$, то положим

$$V_\lambda = \{v \in V \mid Hv = \lambda v\}.$$

Рассмотрим также спектр оператора H, т.е. множество

$$S = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid V_\lambda \neq 0\}.$$

Поскольку $\dim V < \infty$, то $|S| < \infty$ (а так как вдобавок $V \neq 0$, то $S \neq \varnothing$).

Принято говорить, что если $v \in V_\lambda$, $v \neq 0$, то v — вектор *веса* λ; S — это множество *весов* $\mathfrak{sl}(2)$-модуля V.

Хорошо известно, что сумма всех V_λ — прямая сумма. Совсем неочевидно, однако, что $V = \bigoplus_\lambda V_\lambda$ (т.е. что оператор H полупрост). Но в дальнейшем будет доказано, что это так.

Лемма 52. $X(V_\lambda) \subset V_{\lambda+2}$, $Y(V_\lambda) \subset V_{\lambda-2}$.

Доказательство. Пусть $v \in V_\lambda$, т.е. $Hv = \lambda v$. Тогда $HXv = XHv + [H, X]v = \lambda Xv + 2Xv = (\lambda + 2)Xv$, т.е. $Xv \in V_{\lambda+2}$. Случай оператора Y рассматривается аналогично. $\square$

Принято говорить, что X — это *повышающий оператор* (как мы видим, он действительно увеличивает вес вектора на 2), Y — это *понижающий оператор*.

Следствие 53. *Существуют $v_0 \in V$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ такие, что $v_0 \neq 0$, $Hv_0 = \lambda v_0$, $Xv_0 = 0$.*

Доказательство. Поскольку $|S| < \infty$ и $S \neq \varnothing$, то найдется $\lambda \in S$ такое, что $\lambda + 2 \notin S$, т.е. $V_\lambda \neq 0$, $V_{\lambda+2} = 0$. Тогда нам подойдет это λ и ненулевой вектор $v_0 \in V_\lambda$. В самом деле, $Hv_0 = \lambda v_0$ и $Xv_0 \in V_{\lambda+2} = 0$. $\square$

Выберем и зафиксируем вектор v_0 из следствия 53. Положим $v_k = Y^k v_0$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Из леммы 52 по индукции выводится, что $v_k \in V_{\lambda-2k}$, т.е. $Hv_k = (\lambda - 2k)v_k$. По определению, $Yv_k = v_{k+1}$.

Лемма 54. $Xv_k = a_k v_{k-1}$, *где* $a_k = k(\lambda - k + 1)$.

Доказательство. Проведем индукцию по k. При $k = 0$ нам дано, что $Xv_0 = 0$, т.е. можно считать, что $a_0 = 0$. Индуктивный переход: пусть $Xv_k = a_k v_{k-1}$, тогда $Xv_{k+1} = XYv_k = YXv_k + [X,Y]v_k = a_k Y v_{k-1} + Hv_k = (a_k + \lambda - 2k)v_k$. Итак, $a_{k+1} = a_k + \lambda - 2k$, поэтому (с учетом того, что $a_0 = 0$)

$$a_k = \sum_{j=0}^{k-1}(\lambda - 2j) = k\lambda - 2\frac{k(k-1)}{2} = k(\lambda - k + 1).$$

□

Так как $|S| < \infty$, то найдется k такое, что $\lambda - 2k \notin S$, т.е. $v_k = 0$. Пусть

$$m = \min\{k \in \mathbb{Z}_+ \mid v_k = 0\};$$

так как $v_0 \neq 0$, то $m \in \mathbb{N}$. Так как $v_m = 0$, то тем более $Xv_m = 0$. С другой стороны, из леммы 54 следует, что $Xv_m = m(\lambda - m + 1)v_{m-1}$. Так как $v_{m-1} \neq 0$ по выбору m, то $\lambda - m + 1 = 0$, т.е. $\lambda = m - 1$. Итак, $\lambda \in \mathbb{Z}_+$ (совершенно неожиданный результат!).

Итак, мы построили в V ненулевые векторы $v_0, v_1, \ldots, v_\lambda$, причем

$$Hv_k = (\lambda - 2k)v_k,\ Yv_k = v_{k+1},\ Xv_k = k(\lambda - k + 1)v_{k-1} \tag{2}$$

(здесь $v_{-1} = v_{\lambda+1} = 0$).

Лемма 55. *Если V прост, то $v_0, v_1, \ldots, v_\lambda$ — базис в V.*

Доказательство. Векторы $v_0, v_1, \ldots, v_\lambda$ линейно независимы, так как они являются собственными векторами оператора H, отвечающими попарно различным собственным значениям.

Далее, пусть V' — линейная оболочка векторов $v_0, v_1, \ldots, v_\lambda$. Очевидно, $V' \neq 0$. Из формул (2) следует, что V' является подмодулем в V. Поскольку V прост, то $V' = V$. □

Обратно, пусть $\lambda \in \mathbb{Z}_+$. Рассмотрим линейное пространство $L(\lambda)$ размерности $\lambda+1$ с выделенным базисом $v_0, v_1, \ldots, v_\lambda$. Наделим $L(\lambda)$ структурой $\mathfrak{sl}(2)$-модуля с помощью формул (2).

Упр. Проверьте, что так действительно получается $\mathfrak{sl}(2)$-модуль (т.е. что $Hv_k = X(Yv_k) - Y(Xv_k)$ и т. п.).

Лемма 56. *$L(\lambda)$ — простой $\mathfrak{sl}(2)$-модуль.*

Доказательство. Пусть U — ненулевой подмодуль в $L(\lambda)$. Поскольку $H(U) \subset U$, то U содержит собственный вектор оператора H. Поскольку все собственные значения оператора H по построению имеют кратность 1, то $v_k \in U$ для подходящего k. Действуя оператором Y, заключаем, что $v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots \in U$. Действуя оператором X, заключаем, что $v_{k-1}, v_{k-2}, \ldots \in U$ (здесь существенно, что $k(\lambda - k + 1) \neq 0$ при $k = 1, 2, \ldots, \lambda$). Итак, $U = L(\lambda)$. □

Принято говорить, что $L(\lambda)$ — простой $\mathfrak{sl}(2)$-модуль *со старшим весом* λ; v_0 — старший вектор в $L(\lambda)$.

Замечание. Пусть S — множество всех весов $L(\lambda)$. По построению, $S = \{\lambda, \lambda-2, \lambda-4, \ldots, \lambda-2\lambda = -\lambda\}$; в частности, $S \subset \mathbb{Z}$ и $-S = S$. Итак, λ — действительно наибольший из весов $L(\lambda)$. Очевидно, что $L(\lambda)_{\lambda-2k} = \mathbb{C}v_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, \lambda$, т.е. кратности всех весов $L(\lambda)$ равны 1. В частности, старший вектор v_0 определен однозначно с точностью до умножения на ненулевой скаляр (в качестве v_0 годится любой ненулевой вектор из $L(\lambda)_\lambda$).

Подведем промежуточные итоги. Итак, нами доказана

Теорема 57. *Конечномерные простые $\mathfrak{sl}(2)$-модули — это модули $L(\lambda)$, где $\lambda \in \mathbb{Z}_+$, и только они. Модули $L(\lambda)$ попарно неизоморфны.* □

Замечание. Если V — простой $\mathfrak{sl}(2)$-модуль, причем $\dim V = \lambda + 1$, то $V \simeq L(\lambda)$ (почему?).

Примеры. 0) Тривиальное представление: $V = \mathbb{C}$, действие $\mathfrak{sl}(2)$ нулевое. Очевидно, что это представление неприводимо. Поскольку $\dim V = 1$, то $V = L(0)$. (По-другому: спектр оператора H состоит только из 0.)

1) "Тавтологическое" представление: $V = \mathbb{C}^2$, действие $\mathfrak{sl}(2)$ — это умножение матрицы на столбец. Упр. Проверьте, что V — простой $\mathfrak{sl}(2)$-модуль. Поскольку $\dim V = 2$, то $V = L(1)$. (По-другому: спектр оператора H — это $\{1, -1\}$.) Старший вектор — это (например) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2) Присоединенное представление: $V = \mathfrak{sl}(2)$. Это представление неприводимо (почему?). Так как $\dim V = 3$, то $V = L(2)$. Спектр оператора ad_H — это $\{2, 0, -2\}$, старший вектор — это (например) X.

Опишем теперь все конечномерные $\mathfrak{sl}(2)$-модули (не обязательно простые).

Теорема 58. *Пусть V — $\mathfrak{sl}(2)$-модуль, $0 < \dim V < \infty$. Пусть S — множество весов V. Тогда:*

(1) *Существуют и единственны $k \in \mathbb{N}$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{Z}_+$ такие, что*

$$V \simeq L(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus L(\lambda_k);$$

(2) *$V = \bigoplus_{\lambda \in S} V_\lambda$;*

(3) *$S \subset \mathbb{Z}$; $-S = S$; если $\lambda \in S \cap \mathbb{Z}_+$, то $\lambda - 2, \lambda - 4, \ldots, \lambda - 2\lambda = -\lambda \in S$.*

(4) *Если $\lambda \in S \cap \mathbb{Z}_+$, то $X^\lambda : V_{-\lambda} \to V_\lambda$ и $Y^\lambda : V_\lambda \to V_{-\lambda}$ — изоморфизмы (линейных пространств).*

Доказательство. (1) Это следует из теоремы Г.Вейля о полной приводимости (ибо алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2)$ проста) и теоремы 57. Утверждение о единственности следует из общего факта об однозначности разложения полупростого модуля на простые.

(2) Если $V = L(\mu)$, то наш результат верен по построению модуля $L(\mu)$. Остается заметить, что если $V = L(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus L(\lambda_k)$, то $V_\lambda = L(\lambda_1)_\lambda \oplus \ldots \oplus L(\lambda_k)_\lambda$.

(3) Мы можем считать, что $V = L(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus L(\lambda_k)$. Пусть S_j — множество весов $L(\lambda_j)$. Тогда $S = S_1 \cup \ldots \cup S_k$. Остается вспомнить свойства весов простых $\mathfrak{sl}(2)$-модулей.

(4) Прежде всего, отметим, что $X^\lambda(V_{-\lambda}) \subset V_{-\lambda+2\lambda} = V_\lambda$ (см. лемму 52), для оператора Y ситуация аналогична.

Если $V = L(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus L(\lambda_k)$, то $X^\lambda : L(\lambda_j)_{-\lambda} \to L(\lambda_j)_\lambda$, $Y^\lambda : L(\lambda_j)_\lambda \to L(\lambda_j)_{-\lambda}$ для всех j. Наконец, либо $\dim L(\lambda_j)_\lambda = \dim L(\lambda_j)_{-\lambda} = 1$, либо $\dim L(\lambda_j)_\lambda = \dim L(\lambda_j)_{-\lambda} = 0$ (это следует из того, что множество весов симметрично относительно 0 и того, что веса всех $L(\lambda_j)$ имеют кратность 1).

Таким образом, мы можем считать, что V прост. А тогда наш результат очевиден (если, скажем, $V = L(\mu)$, и $\lambda = \mu - 2k$, где $0 \le k \le \frac{\mu}{2}$, то $V_\lambda = \mathbb{C}v_k$, $-\lambda = 2k - \mu = \mu - 2(\mu - k)$, $V_{-\lambda} = \mathbb{C}v_{\mu-k}$, и $Y^\lambda v_k = v_{k+\lambda} = v_{\mu-k}$; для оператора X ситуация аналогична). $\square$

Пример. Пусть $V = L(3) \oplus L(2) \oplus L(2) \oplus L(1) \oplus L(1)$. Этот $\mathfrak{sl}(2)$-модуль можно схематически изобразить так:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & \bullet & & \longrightarrow & & \bullet & & & & & & \\
 & & & & \bullet & & \longrightarrow & & \bullet & & & & & & \\
 & & \bullet & \longrightarrow & & & \bullet & \longrightarrow & & & \bullet & & & & \\
 & & \bullet & \longrightarrow & & & \bullet & \longrightarrow & & & \bullet & & & & \\
\bullet & \longrightarrow & & & \bullet & & \longrightarrow & & \bullet & & \longrightarrow & & \bullet & & \\
\hline
-3 & & -2 & & -1 & & 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & \text{“ось весов”}
\end{array}$$

Здесь точки — это весовые векторы (каждый изображен над своим весом); $\longrightarrow$ — действие оператора X (с точностью до ненулевого скалярного множителя), причем “правый край” переходит в 0 под действием X; оператор Y действует “в другую сторону”. Из этой картинки легко извлечь всю информацию о V (например, $\dim V_1 = 3$ и т. п.).

Аналогичными соображениями можно пользоваться и при решении “обратной” задачи: как разложить заданный конечномерный $\mathfrak{sl}(2)$-модуль на простые? Достаточно найти веса с учетом кратности и нарисовать “весовую диаграмму”. Сейчас мы сформулируем этот принцип более точно.

Пусть V — конечномерный $\mathfrak{sl}(2)$-модуль. Положим $m(\lambda) = \dim V_\lambda$. Так как $\dim V_\lambda = 0$ при $\lambda \notin \mathbb{Z}$, то на m удобно смотреть как на функцию $m = m_V : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_+$. Принято говорить, что m — это *весовая функция* $\mathfrak{sl}(2)$-модуля V.

Упр. Докажите, что
(1) $m(\lambda) = m(-\lambda)$; $m(\lambda + 2) \le m(\lambda)$ при $\lambda \in \mathbb{Z}_+$; $m(\lambda) = 0$ при $\lambda >> 0$.

(2) Если функция $m : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_+$ удовлетворяет условиям из (1), то она является весовой функцией одного и только одного (с точностью до изоморфизма) конечномерного $\mathfrak{sl}(2)$-модуля.

(3) Число простых слагаемых, входящих в V, равно $m(0) + m(1)$.

(4) Оператор $X : V_\lambda \to V_{\lambda+2}$ инъективен при $\lambda \leq -1$ и сюръективен при $\lambda \geq -1$; оператор $Y : V_\lambda \to V_{\lambda-2}$ инъективен при $\lambda \geq 1$ и сюръективен при $\lambda \leq 1$.

Более общим образом, если $k \in \mathbb{N}$, то оператор $X^k : V_\lambda \to V_{\lambda+2k}$ инъективен при $\lambda \leq -k$ и сюръективен при $\lambda \geq -k$; оператор $Y^k : V_\lambda \to V_{\lambda-2k}$ инъективен при $\lambda \geq k$ и сюръективен при $\lambda \leq k$.

Рассмотрим еще
$$\mathrm{ch}_V := \sum_\lambda m(\lambda) t^\lambda \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$$
(на самом деле сумма конечна). Принято говорить, что ch_V — это *характер* $\mathfrak{sl}(2)$-модуля V.

Упр. Докажите, что

(1) $V_1 \simeq V_2$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{ch}_{V_1} = \mathrm{ch}_{V_2}$ (на самом деле это просто переформулировка части утверждения (2) из предыдущего упражнения;

(2) $\mathrm{ch}_{V_1 \oplus V_2} = \mathrm{ch}_{V_1} + \mathrm{ch}_{V_2}$;

(3) $\mathrm{ch}_{V_1 \otimes V_2} = \mathrm{ch}_{V_1} \mathrm{ch}_{V_2}$;

(4) Если $\lambda \in \mathbb{Z}_+$, то
$$\mathrm{ch}_{L(\lambda)} = \frac{t^{\lambda+1} - t^{-(\lambda+1)}}{t - t^{-1}}.$$

Упр. Пусть V — конечномерный $\mathfrak{sl}(2)$-модуль. Рассмотрим оператор $C = C_V := XY + YX + \frac{1}{2}H^2 \in \mathrm{End}\, V$ (этот оператор является близким родственником операторов Казимира, которые мы рассматривали при доказательстве теоремы Вейля о полной приводимости). Проверьте, что

(1) Оператор C коммутирует со всеми операторами представления, соответствующего $\mathfrak{sl}(2)$-модулю V.

(2) Если $V = L(\lambda)$, то оператор C скалярен, причем $C = \frac{\lambda(\lambda+2)}{2}\mathrm{id}$.

(3) Если V таков, что оператор C скалярен, то $V \simeq L(\lambda) \oplus \ldots \oplus L(\lambda)$ для подходящего $\lambda \in \mathbb{Z}_+$.

Задача Пусть $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}_+$. Разложите $\mathfrak{sl}(2)$-модуль $L(\lambda) \otimes L(\mu)$ в прямую сумму простых (указание: вычислите характер $L(\lambda) \otimes L(\mu)$).

Задача Пусть $\lambda \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$. Разложите $\mathfrak{sl}(2)$-модули $S^n L(\lambda)$ и $\bigwedge^n L(\lambda)$ в прямую сумму простых.

Задача Пусть $\lambda \in \mathbb{Z}_+$. Докажите, что $L(\lambda) \simeq S^\lambda L(1)$. (Поскольку $L(1) \simeq \mathbb{C}^2$ с "естественным" действием $\mathfrak{sl}(2)$, то результат этой задачи можно рассматривать как "естественное" определение $L(\lambda)$.)

Дифференцирования полупростых алгебр Ли

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. Напомним, что через $\operatorname{Der}\mathfrak{g}$ обозначается алгебра Ли дифференцирований $\mathfrak{g}$.

Лемма 59. *Если* $\delta \in \operatorname{Der}\mathfrak{g}$, $x \in \mathfrak{g}$, *то* $\operatorname{ad}_{\delta x} = [\delta, \operatorname{ad}_x]$.

Доказательство. Нам дано, что $\delta[x,y] = [\delta x, y] + [x, \delta y]$. Поэтому $\operatorname{ad}_{\delta x}(y) = [\delta x, y] = \delta[x,y] - [x,\delta y] = [\delta, \operatorname{ad}_x](y)$. □

Следствие 60. $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ — *идеал в* $\operatorname{Der}\mathfrak{g}$. □

Теорема 61. *Пусть* $\mathfrak{g}$ *полупроста. Тогда* $\operatorname{ad}\mathfrak{g} = \operatorname{Der}\mathfrak{g}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{a} = (\operatorname{ad}\mathfrak{g})^{\perp}$, где $\perp$ берется относительно формы Киллинга в $\operatorname{Der}\mathfrak{g}$. Поскольку $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ — идеал в $\operatorname{Der}\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{a}$ — тоже идеал в $\operatorname{Der}\mathfrak{g}$. Нам достаточно доказать, что $\mathfrak{a} = 0$ (почему?).

Докажем сначала, что $\mathfrak{a} \cap \operatorname{ad}\mathfrak{g} = 0$. В самом деле, пусть $u = \operatorname{ad}_x \in \mathfrak{a} \cap \operatorname{ad}\mathfrak{g}$. Тогда $\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}(u,v) = 0$ для всех $v = \operatorname{ad}_y \in \operatorname{ad}\mathfrak{g}$. Так как $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ — идеал в $\operatorname{Der}\mathfrak{g}$, то $\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}} = \mathrm{K}_{\mathfrak{g}}$. Поскольку $\operatorname{ad} : \mathfrak{g} \to \operatorname{ad}\mathfrak{g}$ — изоморфизм, то $\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}(u,v) = \mathrm{K}_{\mathfrak{g}}(\operatorname{ad}_x, \operatorname{ad}_y) = \mathrm{K}_{\mathfrak{g}}(x,y)$. (Упр. Если $f : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ — изоморфизм алгебр Ли, то $\mathrm{K}_{\mathfrak{g}_1}(x,y) = \mathrm{K}_{\mathfrak{g}_2}(f(x), f(y))$.) Итак, $\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}(x,y) = 0$ для всех $y \in \mathfrak{g}$. Но в силу полупростоты $\mathfrak{g}$ форма Киллинга $\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}$ невырождена, т.е. $x = 0$, а тогда и $u = \operatorname{ad}_x = 0$.

Далее, так как $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{a}$ — идеалы в $\operatorname{Der}\mathfrak{g}$, то $[\mathfrak{a}, \operatorname{ad}\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{a} \cap \operatorname{ad}\mathfrak{g} = 0$. Т.е. если $\delta \in \mathfrak{a}$, $x \in \mathfrak{g}$, то $0 = [\delta, \operatorname{ad}_x] = \operatorname{ad}_{\delta x}$. Поскольку $\operatorname{ad} : \mathfrak{g} \to \operatorname{ad}\mathfrak{g}$ — изоморфизм, то $\delta x = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}$, т.е. $\delta = 0$, что и требовалось доказать. □

Разложение Жордана в полупростой алгебре Ли

Пусть $x \in \mathfrak{gl}(V)$ — линейный оператор в конечномерном линейном пространстве V. Мы доказывали, что существуют единственные $x_s, x_n \in \mathfrak{gl}(V)$ такие, что $x = x_s + x_n$, x_s полупрост, x_n нильпотентен, и $[x_s, x_n] = 0$. Разложение $x = x_s + x_n$ называется разложением Жордана линейного оператора x. Наша ближайшая цель — получить аналог этого результата в случае, когда x — элемент "абстрактной" полупростой алгебры Ли.

Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли.

Определение 24. Элемент $x \in \mathfrak{g}$ *полупрост* (соотв. *нильпотентен*), если оператор $\operatorname{ad}_x \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ полупрост (соотв. нильпотентен).

Замечание. Пусть V — конечномерное линейное пространство, $\mathfrak{g}$ — подалгебра Ли в $\mathfrak{gl}(V)$ (вообще говоря, не полупростая). Мы проверяли, что если $x \in \mathfrak{g}$ полупрост (соотв. нильпотентен) как линейный оператор в V, то ad_x тоже полупрост (соотв. нильпотентен). Но обратное, вообще говоря, неверно (например, если $\mathfrak{g}$ одномерна, то всегда $\operatorname{ad}_x = 0$, но x не обязан быть ни полупростым, ни нильпотентным линейным оператором). В дальнейшем, однако, мы увидим, что в случае, когда $\mathfrak{g}$ полупроста, верно и обратное.

Упр. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(V)$. Докажите непосредственно, что $x \in \mathfrak{g}$ полупрост (соотв. нильпотентен) как линейный оператор в V тогда и только тогда, когда ad_x полупрост (соотв. нильпотентен) (т.е. x полупрост (соотв. нильпотентен) в "абстрактном" смысле).

Теорема 62 (разложение Жордана в полупростой алгебре Ли). *Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, $x \in \mathfrak{g}$. Тогда существуют единственные $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$ такие, что $x = x_s + x_n$, x_s полупрост, x_n нильпотентен, и $[x_s, x_n] = 0$.*

Замечание. Разложение $x = x_s + x_n$ называется *разложением Жордана* элемента $x \in \mathfrak{g}$, а x_s (соотв. x_n) называется *полупростой* (соотв. *нильпотентной*) *компонентой* элемента x.

В случае, когда $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$, мы иногда будем называть это разложение Жордана "абстрактным", чтобы отличать его от разложения Жордана элементов $\mathfrak{g}$ как линейных операторов в V. Позднее мы, однако, докажем, что на самом деле эти разложения совпадают.

Доказательство. Рассмотрим разложение Жордана оператора $\mathrm{ad}_x \in \mathrm{ad}\mathfrak{g} \subset \mathrm{Der}\,\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Именно, $\mathrm{ad}_x = \delta_s + \delta_n$, где $\delta_s, \delta_n \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, δ_s полупрост, δ_n нильпотентен, и $[\delta_s, \delta_n] = 0$; такие δ_s и δ_n определены однозначно. Будет доказано, что если $\delta \in \mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$, $\delta = \delta_s + \delta_n$ — его разложение Жордана, то $\delta_s, \delta_n \in \mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$ (a priori $\delta_s, \delta_n \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$). Пока поверим в этот факт. Так как $\mathfrak{g}$ полупроста, то $\mathrm{Der}\,\mathfrak{g} = \mathrm{ad}\mathfrak{g}$, т.е. $\delta_s = \mathrm{ad}_{x_s}$, $\delta_n = \mathrm{ad}_{x_n}$, где $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$. Отметим, что элементы x_s и x_n определены однозначно (ибо $\mathrm{Ker}\,\mathrm{ad} = 0$ в случае полупростой алгебры Ли). По определению, x_s полупрост, а x_n нильпотентен. Далее, $\mathrm{ad}_x = \mathrm{ad}_{x_s} + \mathrm{ad}_{x_n} = \mathrm{ad}_{x_s + x_n}$, поэтому $x = x_s + x_n$. Наконец, $\mathrm{ad}_{[x_s, x_n]} = [\mathrm{ad}_{x_s}, \mathrm{ad}_{x_n}] = 0$, поэтому $[x_s, x_n] = 0$. □

Нам осталось доказать, что если $\delta \in \mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$, то $\delta_s, \delta_n \in \mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$. Оказывается, что это — факт весьма общей природы.

Пусть A — произвольная конечномерная алгебра (т.е. она не обязана быть алгеброй Ли или ассоциативной...). Обозначим через $*$ операцию умножения в A. Пусть $\delta \in \mathrm{Der}\,A$, т.е. δ — линейный оператор в A такой, что $\delta(a * b) = \delta a * b + a * \delta b$. Рассмотрим разложение Жордана $\delta = \delta_s + \delta_n$. A priori δ_s и δ_n — просто линейные операторы в A.

Предложение 63. $\delta_s, \delta_n \in \mathrm{Der}\,A$.

Доказательство. Достаточно доказать, что $\delta_s \in \mathrm{Der}\,A$. Как строится δ_s по δ? Пусть

$$A_\lambda = \{a \in A \,|\, \exists\, n \in \mathbb{N} : (\delta - \lambda \cdot \mathrm{id})^n a = 0\}$$

— корневое подпространство оператора δ, отвечающее $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда $A = A_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus A_{\lambda_k}$ (где $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — собственные значения оператора δ), и $\delta_s|_{A_{\lambda_j}}$ — оператор умножения на λ_j.

Лемма 64. $A_\lambda * A_\mu \subset A_{\lambda+\mu}$.

Выведем из леммы 64 наше предложение. Нам надо доказать, что

$$\delta_s(a*b) = \delta_s a * b + a * \delta_s b.$$

Поскольку $A = \bigoplus_\lambda A_\lambda$, то мы можем считать, что $a \in A_\lambda$, $b \in A_\mu$. Тогда, согласно лемме 64, $a*b \in A_{\lambda+\mu}$, т.е. $\delta_s(a*b) = (\lambda+\mu)a*b$. С другой стороны, $\delta_s a * b + a * \delta_s b = \lambda a * b + \mu a * b$.

Как доказывать лемму 64?

Упр. Докажите (индукцией по n), что

$$(\delta - (\lambda+\mu)\mathrm{id})^n(a*b) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\delta - \lambda \cdot \mathrm{id})^k a * (\delta - \mu \cdot \mathrm{id})^{n-k} b$$

(если $\lambda = \mu = 0$, то это в точности “формула Лейбница для производной n-го порядка”), и выведите лемму 64 из этой формулы. $\square$

Итак, если $\mathfrak{g}$ — полупростая подалгебра в $\mathfrak{gl}(V)$ (где V — конечномерное линейное пространство), то мы можем понимать термин “разложение Жордана в $\mathfrak{g}$” в двух смыслах: в “обычном” (как линейных операторов в V) и в “абстрактном”. К счастью, оказывается, что это одно и то же.

Теорема 65. *Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая подалгебра в $\mathfrak{gl}(V)$ (где V — конечномерное линейное пространство). Пусть $x \in \mathfrak{g}$, $x = x_s + x_n$ — его “обычное” разложение Жордана (т.е. разложение Жордана как линейного оператора в пространстве V). Тогда $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$.*

Доказательство теоремы немного отложим.

Следствие 66. *В условиях теоремы 65 “абстрактное” разложение Жордана совпадает с “обычным”. В частности, полупростота (соотв. нильпотентность) в “абстрактном” смысле — это то же самое, что полупростота (соотв. нильпотентность) в “обычном” смысле.*

Доказательство. Согласно теореме 65 (и в ее обозначениях), $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$, т.е. $\mathrm{ad}_{x_s}, \mathrm{ad}_{x_n} \in \mathrm{ad}\mathfrak{g}$. Так как линейный оператор x_s полупрост, то ad_{x_s} тоже полупрост, т.е. x_s полупрост в “абстрактном” смысле. Аналогично, x_n нильпотентен в “абстрактном” смысле. Поэтому $x = x_s + x_n$ является также и “абстрактным” разложением Жордана элемента x. $\square$

Следствие 67. *Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста, $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ — ее конечномерное представление. Пусть $x \in \mathfrak{g}$, $x = x_s + x_n$ — его (“абстрактное”) разложение Жордана. Тогда $\rho(x) = \rho(x_s) + \rho(x_n)$ — (“обычное”) разложение Жордана в $\mathfrak{gl}(V)$. В частности, если элемент x полупрост (соотв. нильпотентен), то оператор $\rho(x)$ также полупрост (соотв. нильпотентен).*

Доказательство. Напомним, что гомоморфный образ полупростой алгебры Ли полупрост (почему?), т.е. $\rho(\mathfrak{g})$ — полупростая подалгебра в $\mathfrak{gl}(V)$. В силу следствия 66 нам достаточно доказать, что $\rho(x) = \rho(x_s) + \rho(x_n)$ — "абстрактное" разложение Жордана элемента $\rho(x)$.

Лемма 68. *Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста, $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_1$ — сюръективный гомоморфизм (т.е. $\mathfrak{g}_1$ тоже полупроста). Если $x \in \mathfrak{g}$ полупрост (соотв. нильпотентен), то $f(x)$ также полупрост (соотв. нильпотентен).*

Доказательство. Пусть x полупрост. Это значит, что имеется базис $e_1, \dots, e_n$ в $\mathfrak{g}$ такой, что $\mathrm{ad}_x(e_i) = \lambda_i e_i$. Но тогда $\mathrm{ad}_{f(x)}(f(e_i)) = \lambda_i f(e_i)$. Система $f(e_1), \dots, f(e_n)$ полна в $\mathfrak{g}_1$ ввиду сюръективности f; если она линейно зависима, то просто выбросим лишнее.

Пусть x нильпотентен, т.е. $(\mathrm{ad}_x)^n y = 0$ для всех $y \in \mathfrak{g}$. Применяя f, получим, что $(\mathrm{ad}_{f(x)})^n f(y) = 0$ для всех $y \in \mathfrak{g}$. Так как f сюръективен, то $(\mathrm{ad}_{f(x)})^n = 0$. □

Применяя только что доказанную лемму в случае $f = \rho$, $\mathfrak{g}_1 = \rho(\mathfrak{g})$, заключаем, что $\rho(x_s)$ полупрост, а $\rho(x_n)$ нильпотентен (в "абстрактном" смысле), и $[\rho(x_s), \rho(x_n)] = \rho([x_s, x_n]) = 0$, т.е. $\rho(x) = \rho(x_s) + \rho(x_n)$ — "абстрактное" разложение Жордана. □

Пример. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$. Из того, что элемент $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ полупрост, следует, что для любого конечномерного представления $\rho : \mathfrak{sl}(2) \to \mathfrak{gl}(V)$ оператор $\rho(H)$ полупрост. Мы знали этот факт из явного описания всех конечномерных представлений алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$; теперь он следует из "общей" теории.

Доказательство теоремы 65. Идея доказательства: надо попытаться "охарактеризовать" $\mathfrak{g}$ (как подалгебру в $\mathfrak{gl}(V)$) такими условиями, которые можно будет проверить для x_s и x_n. Будем двигаться к этой цели.

Шаг 1. Если $x \in \mathfrak{g}$, то, очевидно, $\mathrm{ad}_x(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$. Это означает, что

$$\mathfrak{g} \subset \mathfrak{n} := \{y \in \mathfrak{gl}(V) \,|\, \mathrm{ad}_y(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}\}$$

(т.е. $\mathfrak{n}$ — это нормализатор $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{gl}(V)$). Вспомним, что $\mathrm{ad}_x = \mathrm{ad}_{x_s} + \mathrm{ad}_{x_n}$ является разложением Жордана оператора ad_x, т.е., в частности, $\mathrm{ad}_{x_s} = p(\mathrm{ad}_x)$, где p — многочлен без свободного члена. Поэтому $\mathrm{ad}_{x_s}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$, т.е. $x_s \in \mathfrak{n}$. Аналогично, $x_n \in \mathfrak{n}$.

К сожалению, нельзя утверждать, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}$: например, если $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(V)$, то $\mathfrak{n} = \mathfrak{gl}(V)$.

Шаг 2. Поскольку $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$, то V имеет структуру $\mathfrak{g}$-модуля. Пусть $W \subset V$ — подмодуль. Положим

$$\mathfrak{g}_W := \{y \in \mathfrak{gl}(V) \,|\, y(W) \subset W, \mathrm{Tr}\,(y|_W) = 0\}.$$

Отметим, что $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_W$ (в самом деле, если $x \in \mathfrak{g}$, то $x(W) \subset W$ по определению подмодуля; $\mathrm{Tr}\,(x|_W) = 0$ из-за того, что $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$). Упр. $\mathfrak{g}_W$ — подалгебра в $\mathfrak{gl}(V)$. Так как $x_n = q(x)$, где q — многочлен без свободного члена, то $x_n(W) \subset W$. Так как x_n нильпотентен, то $\mathrm{Tr}\,(x_n|_W) = 0$. Итак, $x_n \in \mathfrak{g}_W$. Значит, и $x_s = x - x_n \in \mathfrak{g}_W$.

Шаг 3. По теореме Г.Вейля о полной приводимости, $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$, где W_i — простые подмодули в V. Положим $\widetilde{\mathfrak{g}} := \mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}_{W_1} \cap \ldots \cap \mathfrak{g}_{W_k}$. Мы уже проверили, что $\mathfrak{g} \subset \widetilde{\mathfrak{g}}$, и что $x_s, x_n \in \widetilde{\mathfrak{g}}$. Докажем, что $\mathfrak{g} = \widetilde{\mathfrak{g}}$ (тем самым теорема будет доказана).

Отметим, что $\widetilde{\mathfrak{g}}$ является алгеброй Ли, содержащей $\mathfrak{g}$ в качестве подалгебры. Поэтому $\widetilde{\mathfrak{g}}$ является $\mathfrak{g}$-модулем (соответствующее представление — это присоединенное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в пространстве $\widetilde{\mathfrak{g}}$). Разумеется, $\mathfrak{g}$ является подмодулем $\mathfrak{g}$-модуля $\widetilde{\mathfrak{g}}$. По теореме Г.Вейля, $\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus M$, где M — подмодуль в $\widetilde{\mathfrak{g}}$. Достаточно доказать, что $M = 0$.

Поскольку $[\mathfrak{n}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$, то тем более $[\widetilde{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$ (т.е. $\mathfrak{g}$ — идеал в $\widetilde{\mathfrak{g}}$). В частности, $[\mathfrak{g}, M] \subset \mathfrak{g}$. С другой стороны, $[\mathfrak{g}, M] \subset M$, ибо M является подмодулем в $\widetilde{\mathfrak{g}}$. Итак, $[\mathfrak{g}, M] \subset \mathfrak{g} \cap M = 0$.

Пусть $y \in M$. Мы доказали, что $[x, y] = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}$, т.е. $x(yv) = y(xv)$ для всех $x \in \mathfrak{g}$ и $v \in V$. Это означает, что $y \in \mathrm{End}_{\mathfrak{g}} V$. Так как $y \in M \subset \widetilde{\mathfrak{g}}$, то $y \in \mathfrak{g}_{W_i}$ для всех i, в частности, $y(W_i) \subset W_i$ для всех i. Объединяя эти условия, мы видим, что $y|_{W_i} \in \mathrm{End}_{\mathfrak{g}} W_i$ для всех i. Так как W_i просты, то, по лемме Шура, $y|_{W_i} = \lambda_i \cdot \mathrm{id}_{W_i}$ для подходящих $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Так как $y \in \mathfrak{g}_{W_i}$, то вдобавок $\mathrm{Tr}\,(y|_{W_i}) = 0$, т.е. $\lambda_i = 0$. Итак, $y|_{W_i} = 0$ для всех i. Но $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$, поэтому $y = 0$.

Итак, $M = 0$, а значит, $\mathfrak{g} = \widetilde{\mathfrak{g}}$, что и оставалось доказать. □

Картановские подалгебры

Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли.

Определение 25. *Картановская подалгебра* в $\mathfrak{g}$ — это абелева подалгебра, состоящая из полупростых элементов, и максимальная (по включению) среди таких подалгебр.

Замечания. 1) Абелевость можно не включать в определение картановской подалгебры: можно доказать, что подалгебра, все элементы которой полупросты, автоматически абелева (см. Humphreys, §8.1).

2) В книге Humphreys картановская подалгебра = “maximal toral subalgebra”. Термин “Cartan subalgebra” там используется в более широком смысле — для случая алгебр Ли, которые не обязательно полупросты. Но в случае полупростой алгебры Ли все определения картановских подалгебр эквивалентны.

3) Общепринято обозначать картановскую подалгебру в полупростой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ буквой $\mathfrak{h}$ (хотя иногда ее обозначают и буквой $\mathfrak{t}$). Начиная с этого места, мы будем обозначать буквой $\mathfrak{h}$ картановскую подалгебру, если только явно не оговорено противное.

Пример. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$. Тогда подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{sl}(n)$, состоящая из всех диагональных матриц в $\mathfrak{sl}(n)$ — картановская подалгебра (почему?).

Замечание. Картановская подалгебра имеется во всякой полупростой алгебре Ли: очевидно, что 0 — абелева подалгебра, состоящая из полупростых элементов, поэтому она содержится в некоторой картановской подалгебре (согласно определению последней).

Упр. Проверьте, что если $\mathfrak{g} \neq 0$, то $\mathfrak{h} \neq 0$. (Решение. Пусть $\mathfrak{h} = 0$. Тогда все элементы $x \in \mathfrak{g}$ нильпотентны (почему?), т.е. все операторы ad_x, где $x \in \mathfrak{g}$, нильпотентны. Но тогда, согласно следствию из теоремы Энгеля (см. следствие 22), $\mathfrak{g}$ нильпотентна — противоречие.)

Факт. (см. Humphreys, §15; Серр, часть 3, гл. 3, §4.) Если $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$ — картановские подалгебры в $\mathfrak{g}$, то существует $\varphi \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ такой, что $\varphi(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$; более того, можно выбрать внутренний автоморфизм φ с таким свойством. В частности, $\dim \mathfrak{h}_1 = \dim \mathfrak{h}_2$.

Упр. Проверьте это утверждение в случае, когда $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$.

Итак, картановская подалгебра в данной полупростой алгебре Ли “по существу” единственна.

Определение 26. *Ранг* $\mathrm{rank}\,\mathfrak{g}$ полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ — это размерность ее картановской подалгебры.

Это определение корректно в силу последнего факта. Последнее упражнение гласит, что $\mathrm{rank}\,\mathfrak{g} = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g} = 0$. Мы проверили, что $\mathrm{rank}\,\mathfrak{sl}(n) = n - 1$.

Весовые и корневые разложения

Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли. Зафиксируем картановскую подалгебру $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$.

Пусть V — $\mathfrak{g}$-модуль. Рассмотрим в V общие собственные векторы операторов представления, соответствующих элементам $h \in \mathfrak{h}$. Если v — такой вектор, то $hv = \lambda(h)v$, где $h \in \mathfrak{h}$, $\lambda(h) \in \mathbb{C}$ (и $v \neq 0$). Ясно, что $h \mapsto \lambda(h)$ является линейным функционалом на $\mathfrak{h}$, т.е. $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.

Удобнее начать с другого конца: если $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, то положим

$$V_\lambda := \{v \in V \mid \forall\, h \in \mathfrak{h} : hv = \lambda(h)v\}.$$

Принято говорить, что если $v \in V_\lambda$, $v \neq 0$, то v — *весовой вектор веса* λ; V_λ — *весовое подпространство веса* λ; те $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, для которых $V_\lambda \neq 0$ — это *веса* $\mathfrak{g}$-модуля V (относительно $\mathfrak{h}$).

Пример. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$, $\mathfrak{h} = \mathbb{C}H$, где $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Задание линейного функционала $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ равносильно заданию числа $\Lambda = \lambda(H) \in \mathbb{C}$. При этом

$$V_\lambda = \{v \in V \mid \forall\, h \in \mathfrak{h} : hv = \lambda(h)v\} = \{v \in V \mid Hv = \Lambda v\} = V_\Lambda$$

— это в точности наше “старое” определение весового подпространства для $\mathfrak{sl}(2)$-модуля V.

Предложение 69. *Пусть V — конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль. Тогда $V = \bigoplus_\lambda V_\lambda$.*

Доказательство. Если $h \in \mathfrak{h}$, то h полупрост, а тогда и отвечающий ему оператор представления полупрост. Итак, операторы представления, отвечающие элементам $h \in \mathfrak{h}$ — это семейство попарно коммутирующих (почему?) полупростых линейных операторов в пространстве V. Но тогда в пространстве V имеется базис из общих собственных векторов всех этих операторов. Это и означает, что $V = \bigoplus_\lambda V_\lambda$. □

Принято говорить, что $V = \bigoplus_\lambda V_\lambda$ — это *весовое разложение* $\mathfrak{g}$-модуля V (относительно $\mathfrak{h}$).

Замечание. В частном случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$ мы уже доказывали наличие весового разложения, но совсем по-другому: исходя из явного описания простых $\mathfrak{sl}(2)$-модулей и теоремы Г.Вейля о полной приводимости.

Очень важный частный случай этой конструкции получится, если положить $V = \mathfrak{g}$ (соответствующее представление — присоединенное). Весовое разложение тогда выглядит так: $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\alpha$, где

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \,|\, \forall\, h \in \mathfrak{h} : \mathrm{ad}_h x = \alpha(h)x\} = \{x \in \mathfrak{g} \,|\, \forall\, h \in \mathfrak{h} : [h, x] = \alpha(h)x\}.$$

Положим

$$R = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \,|\, \alpha \neq 0, \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}.$$

Принято говорить, что R — это множество *корней* $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$ (часто пишут $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, если из контекста не ясно, о каких именно $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ идет речь). Итак, корни — это, по определению, ненулевые веса присоединенного представления. Очевидно, что $|R| < \infty$.

Таким образом, мы можем написать, что

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha \right)$$

— это т.наз. *корневое разложение* полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (относительно картановской подалгебры $\mathfrak{h}$).

Примеры. 1) Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$, $\mathfrak{h} = \mathbb{C}H$. Так как $[H, H] = 0$, $[H, X] = 2X$, $[H, Y] = -2Y$, то $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{-2}$, где $\mathfrak{g}_2 = \mathbb{C}X$, $\mathfrak{g}_0 = \mathbb{C}H = \mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}_{-2} = \mathbb{C}Y$ (напомним, что мы отождествляем $\mathfrak{h}^*$ и $\mathbb{C}$ посредством отображения $\alpha \mapsto \alpha(H)$). Итак, корней всего два, и они отличаются знаками.

2) Обобщим предыдущий пример: пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ — подалгебра всех диагональных матриц. Пусть

$$h = \begin{pmatrix} h_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & h_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}$$

(в частности, $h_1 + \ldots + h_n = 0$). Определим $\varepsilon_i \in \mathfrak{h}^*$ формулами $\varepsilon_i(h) = h_i$ (тогда $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n = 0$). Пусть, как и прежде,

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \ldots & 1 & \ldots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix};$$

отметим, что $E_{ij} \in \mathfrak{g}$ при $i \neq j$.

Упр. Проверьте, что $[h, E_{ij}] = (h_i - h_j)E_{ij} = (\varepsilon_i(h) - \varepsilon_j(h))E_{ij}$.

Итак, $\alpha_{ij} := \varepsilon_i - \varepsilon_j$ (где $i \neq j$) являются корнями $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$. Других корней нет, ибо, очевидно,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{i \neq j} \mathbb{C} E_{ij} \right).$$

В частности, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ и $\mathfrak{g}_{\alpha_{ij}} = \mathbb{C}E_{ij}$ для всех $i \neq j$.

Задача Найдите корни других классических (полу)простых алгебр Ли, а именно $\mathfrak{o}(2n+1)$ — "алгебры Ли типа B_n", $\mathfrak{sp}(2n)$ — "алгебры Ли типа C_n", $\mathfrak{o}(2n)$ — "алгебры Ли типа D_n" (напомним, что $\mathfrak{sl}(n+1)$ — "алгебра Ли типа A_n").

Указания к задаче. Напомним, что $\mathfrak{o}(n)$ (соотв. $\mathfrak{sp}(n)$) состоит из элементов алгебры Ли $\mathfrak{gl}(\mathbb{C}^n)$, кососимметрических относительно некоторой (фиксированной) симметрической (соотв. кососимметрической) невырожденной билинейной формы в $\mathbb{C}^n$ (n непременно четно в случае $\mathfrak{sp}(n)$). Каждая из этих алгебр Ли с точностью до изоморфизма не зависит от выбора класса изоморфизма формы в $\mathbb{C}^n$. Кроме того, каждая из этих алгебр Ли на матричном языке имеет вид

$$\{X \in \mathfrak{gl}(n) \mid JX + X^T J = 0\},$$

где J — это матрица соответствующей формы (Упр. проверьте это). Для решения задачи удобно выбрать форму (иными словами, базис в $\mathbb{C}^n$) следующим образом:

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{o}(2n)$	$\mathfrak{o}(2n+1)$	$\mathfrak{sp}(2n)$
J	$\begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & -2 & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & & 1 & \\ & -1 & & \\ -1 & & & 0 \end{pmatrix}$

При таком выборе оказывается, что диагональные матрицы, лежащие в $\mathfrak{g}$, образуют картановскую подалгебру в $\mathfrak{g}$ (а, скажем, в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(n)$ при "стандартном" выборе $J = E$ легко видеть, что единственная диагональная матрица в $\mathfrak{g}$ — это

0). После этого нетрудно угадать общие собственные векторы операторов ad_h, где h принадлежит построенной картановской подалгебре.

Ответы к задаче можно найти у Бурбаки, Группы и алгебры Ли, гл. VIII, §13.

Обсудим некоторые свойства корневого разложения (доказаны будут только простейшие из них, более сложные доказательства пока отложим).

Во-первых, отметим, что

$$\mathfrak{g}_0 = \{x \in \mathfrak{g} \mid \forall\, h \in \mathfrak{h} : [h, x] = 0\},$$

т.е. $\mathfrak{g}_0$ — это т.наз. *централизатор* $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$. Так как $\mathfrak{h}$ абелева, то $\mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{h}$.

Факт. (1) $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$; (2) Если $\alpha \in R$, то $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$.

Мы видели, что в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$ факт верен. В общем случае это будет доказано позже.

Во-вторых, пусть V — $\mathfrak{g}$-модуль, пусть $\alpha, \lambda \in \mathfrak{h}^*$.

Лемма 70. $\mathfrak{g}_\alpha \cdot V_\lambda \subset V_{\lambda+\alpha}$ *(т.е. если $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $v \in V_\lambda$, то $xv \in V_{\lambda+\alpha}$).*

Доказательство. Пусть $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $v \in V_\lambda$, т.е. $[h, x] = \alpha(h)x$, $hv = \lambda(h)v$ для всех $h \in \mathfrak{h}$. Тогда $h(xv) = x(hv) + [h, x]v = \lambda(h)xv + \alpha(h)xv$, что и требовалось доказать. $\square$

Применяя это к случаю $V = \mathfrak{g}$, получаем

Следствие 71. $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$*; в частности, $\mathfrak{g}_0$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$, и $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{g}_0$.* $\square$

Факт. Если $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in R$, то $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ (т.е., с учетом того, что $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ при всех $\alpha \in R$, здесь утверждается, что если $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in R$, то $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \neq 0$).

Это легко проверить в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$; в общем случае доказательство будет позже.

Лемма 72. *Пусть $\alpha \in R$, $x \in \mathfrak{g}_\alpha$. Тогда x нильпотентен.*

Доказательство. Так как $\mathrm{ad}_x(\mathfrak{g}_\beta) \subset \mathfrak{g}_{\beta+\alpha}$, то $(\mathrm{ad}_x)^n(\mathfrak{g}_\beta) \subset \mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Так как $|R \cup \{0\}| < \infty$, то для каждого $\beta \in R \cup \{0\}$ найдется $n(\beta) \in \mathbb{N}$ такое, что $\beta + n(\beta)\alpha \notin R \cup \{0\}$ (т.е. $\mathfrak{g}_{\beta+n(\beta)\alpha} = 0$). Иначе говоря, для каждого $\beta \in R \cup \{0\}$ найдется $n(\beta)$ такое, что $(\mathrm{ad}_x)^{n(\beta)}(\mathfrak{g}_\beta) = 0$. Пусть n — наибольшее из чисел $n(\beta)$, где $\beta \in R \cup \{0\}$ (их конечное число). С учетом корневого разложения получаем, что $(\mathrm{ad}_x)^n = 0$. $\square$

"Свойства ортогональности" корневого разложения

Пусть, как и прежде, $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ — картановская подалгебра в $\mathfrak{g}$. Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — невырожденная инвариантная симметрическая билинейная форма в $\mathfrak{g}$. Такая форма всегда существует: например, подходит форма Киллинга (она всегда инвариантна и симметрична, а ее невырожденность равносильна полупростоте $\mathfrak{g}$).

Принято говорить, что $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — это *инвариантное скалярное произведение* в $\mathfrak{g}$.

Задача Опишите все инвариантные скалярные произведения в $\mathfrak{g}$. (Ответ. Если $\mathfrak{g}$ проста, то инвариантные скалярные произведения в $\mathfrak{g}$ — это в точности $c\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}$, где $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$. Если $\mathfrak{g} = 0$, то ответ тривиален. В общем случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{a}_n$, где $\mathfrak{a}_i$ — простые идеалы в $\mathfrak{g}$; оказывается, инвариантные скалярные произведения в $\mathfrak{g}$ — это в точности билинейные формы вида $\langle x_1 + \ldots + x_n, y_1 + \ldots + y_n \rangle = c_1 \mathrm{K}_{\mathfrak{a}_1}(x_1, y_1) + \ldots + c_n \mathrm{K}_{\mathfrak{a}_n}(x_n, y_n)$, где $c_i \in \mathbb{C}$, $c_i \neq 0$.)

В дальнейшем мы всегда будем обозначать через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ некоторое инвариантное скалярное произведение в $\mathfrak{g}$. "Свойства ортогональности" названы так потому, что $\langle \cdot, \cdot \rangle$ играет в них ключевую роль (если не в формулировке, то в доказательстве); на самом деле это название довольно условно.

Предложение 73. *Пусть $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$, $\alpha + \beta \neq 0$. Тогда $\mathfrak{g}_\alpha$ и $\mathfrak{g}_\beta$ ортогональны относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$.*

Доказательство. Пусть $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_\beta$. Почему $\langle x, y \rangle = 0$? Пусть $h \in \mathfrak{h}$, тогда $\langle [h, x], y \rangle + \langle x, [h, y] \rangle = 0$ ввиду инвариантности $\langle \cdot, \cdot \rangle$. С другой стороны, $[h, x] = \alpha(h)x$, $[h, y] = \beta(h)y$, поэтому $\langle [h, x], y \rangle + \langle x, [h, y] \rangle = (\alpha + \beta)(h) \langle x, y \rangle$. Если $\alpha + \beta \neq 0$, то найдется $h \in \mathfrak{h}$ такое, что $(\alpha + \beta)(h) \neq 0$. Поэтому $\langle x, y \rangle = 0$. □

Следствие 74. (1) *Ограничение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathfrak{g}_0$ невырождено;*

(2) *$-R = R$ (т.е. $\alpha \in R$ тогда и только тогда, когда $-\alpha \in R$);*

(3) *Если $\alpha \in R$, то ограничение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$ невырождено;*

(4) *Если $\alpha \in R$, то $\mathfrak{g}_\alpha$ и $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ находятся в двойственности относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (т.е. $\mathfrak{g}_{-\alpha} \to \mathfrak{g}_\alpha^*$, $y \mapsto \langle \cdot, y \rangle$ — изоморфизм линейных пространств).*

Доказательство. (1) Рассмотрим корневое разложение

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha \right).$$

Если $x \in \mathfrak{g}_0$ ортогонален всему $\mathfrak{g}_0$, то он ортогонален и всему $\mathfrak{g}$ (ибо $\mathfrak{g}_0$ ортогонально $\mathfrak{g}_\alpha$ при любом $\alpha \neq 0$). Так как $\langle \cdot, \cdot \rangle$ невырождено, то $x = 0$, что и требовалось доказать.

(2) Пусть $\alpha \in R$, но $-\alpha \notin R$. Тогда $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$, и $\mathfrak{g}_\alpha$ ортогонально $\mathfrak{g}_0$ и всем $\mathfrak{g}_\beta$, где $\beta \in R$ (ибо $\alpha + \beta \neq 0$ для всех $\beta \in R$), что невозможно ввиду невырожденности $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

(3) Это проверяется аналогично (1).

(4) Пусть $\varphi : \mathfrak{g}_{-\alpha} \to \mathfrak{g}_\alpha^*$, $\varphi : y \mapsto \langle \cdot, y \rangle$. Линейность φ очевидна; надо доказать, что φ биективно. Пусть $y \in \mathrm{Ker}\varphi$, т.е. $\langle x, y \rangle = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}_\alpha$. Отметим, что $\langle x, y \rangle = 0$ также для всех $x \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ (ибо $-\alpha + (-\alpha) = -2\alpha \neq 0$), т.е. y ортогонален всему $\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Согласно (3), $y = 0$. Итак, φ инъективно; в частности, $\dim \mathfrak{g}_{-\alpha} \leq \dim \mathfrak{g}_\alpha^* = \dim \mathfrak{g}_\alpha$. Согласно (2), мы можем заменить α на $-\alpha$, т.е. $\dim \mathfrak{g}_\alpha \leq \dim \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Итак, $\dim \mathfrak{g}_{-\alpha} = \dim \mathfrak{g}_\alpha$, поэтому из инъективности φ следует его биективность. □

Предложение 75. $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$.

Доказательство. Согласно определению, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0$. Таким образом, надо доказывать, что $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{h}$. Доказательство будет длинным, поэтому разобъем его на ряд шагов-лемм.

Лемма 76. *Пусть $x \in \mathfrak{g}_0$, $x = x_s + x_n$ — разложение Жордана. Тогда $x_s, x_n \in \mathfrak{g}_0$.*

Доказательство. Согласно определению, $x \in \mathfrak{g}_0$ тогда и только тогда, когда $[h, x] = 0$ для всех $h \in \mathfrak{h}$, т.е. $\mathrm{ad}_x(\mathfrak{h}) = 0$. Напомним, что $\mathrm{ad}_{x_s} = p(\mathrm{ad}_x)$, где p — многочлен без свободного члена. Поэтому из $\mathrm{ad}_x(\mathfrak{h}) = 0$ следует $\mathrm{ad}_{x_s}(\mathfrak{h}) = 0$, т.е. $x_s \in \mathfrak{g}_0$. Аналогично, $x_n \in \mathfrak{g}_0$. □

Лемма 77. *Пусть $x \in \mathfrak{g}_0$, x полупрост. Тогда $x \in \mathfrak{h}$.*

Доказательство. Пусть, напротив, $x \notin \mathfrak{h}$. Тогда, разумеется, $x \neq 0$. Рассмотрим $\mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}x$. Это абелева (ибо $[x, \mathfrak{h}] = 0$) подалгебра в $\mathfrak{g}$, состоящая из полупростых элементов (ибо сумма перестановочных полупростых элементов полупроста). Это противоречит тому, что $\mathfrak{h}$ — картановская подалгебра (ибо $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}x$). □

Лемма 78. *Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — форма Киллинга в $\mathfrak{g}$. Тогда ограничение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathfrak{h}$ невырождено.*

Доказательство. Пусть $h \in \mathfrak{h}$ таков, что $\langle h, y \rangle = 0$ для всех $y \in \mathfrak{h}$. Надо доказать, что $h = 0$. Поскольку уже доказано, что ограничение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathfrak{g}_0$ невырождено, и $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0$, то достаточно проверить, что $\langle h, x \rangle = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}_0$. Это мы и будем доказывать.

Пусть $x \in \mathfrak{g}_0$. Тогда $[h, x] = 0$, т.е. $[\mathrm{ad}_h, \mathrm{ad}_x] = \mathrm{ad}_{[h,x]} = 0$. Предположим, что x нильпотентен, т.е. оператор ad_x нильпотентен. Тогда оператор $\mathrm{ad}_h \mathrm{ad}_x$ также нильпотентен (почему?), т.е. $\langle h, x \rangle = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}_h \mathrm{ad}_x) = 0$.

Пусть теперь $x \in \mathfrak{g}_0$ произволен, $x = x_s + x_n$ — его разложение Жордана. Тогда $x_s, x_n \in \mathfrak{g}_0$ (лемма 76), и $x_s \in \mathfrak{h}$ (лемма 77), т.е. $\langle h, x \rangle = \langle h, x_s \rangle + \langle h, x_n \rangle = 0$, что и требовалось доказать. □

Лемма 79. $\mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] = 0$.

Доказательство. Пусть $h \in \mathfrak{h}$, $x, y \in \mathfrak{g}_0$. Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — форма Киллинга в $\mathfrak{g}$. Тогда $[h, x] = 0$, т.е. $\langle h, [x, y] \rangle = \langle [h, x], y \rangle = 0$. Итак, $\langle \mathfrak{h}, [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \rangle = 0$, а значит, $\mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] = 0$ (лемма 78). □

Лемма 80. *Подалгебра $\mathfrak{g}_0$ нильпотентна.*

Доказательство. Напомним, что нильпотентность $\mathfrak{g}_0$ равносильна нильпотентности операторов $\mathrm{ad}_{x,\mathfrak{g}_0} = \mathrm{ad}_x|_{\mathfrak{g}_0}$ для всех $x \in \mathfrak{g}_0$. Это мы сейчас и проверим.

Если $x \in \mathfrak{g}_0$ полупрост, то $x \in \mathfrak{h}$ (лемма 77), и тогда $[x, \mathfrak{g}_0] = 0$, т.е. $\mathrm{ad}_{x,\mathfrak{g}_0} = 0$. Если $x \in \mathfrak{g}_0$ нильпотентен, то оператор ad_x, и тем более $\mathrm{ad}_{x,\mathfrak{g}_0}$, нильпотентен. Если же $x \in \mathfrak{g}_0$ произволен, и $x = x_s + x_n$ — его разложение Жордана, то оператор $\mathrm{ad}_{x,\mathfrak{g}_0} = \mathrm{ad}_{x_s,\mathfrak{g}_0} + \mathrm{ad}_{x_n,\mathfrak{g}_0} = \mathrm{ad}_{x_n,\mathfrak{g}_0}$ нильпотентен □

Лемма 81. *Подалгебра $\mathfrak{g}_0$ абелева.*

Доказательство. Пусть, наоборот, $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \neq 0$. Покажем вначале, что тогда $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0) \cap [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \neq 0$. В самом деле, так как $\mathfrak{g}_0$ нильпотентна (лемма 80), то найдется n такое, что $\mathfrak{g}_0^n \neq 0$, $\mathfrak{g}_0^{n+1} = 0$ (напомним, что "степени" $\mathfrak{g}_0^j$ определяются индуктивно формулами $g_0^1 = \mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}_0^{j+1} = [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0^j]$). Отметим, что $n \geq 2$ (ибо $\mathfrak{g}_0^2 = [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \neq 0$). Так как $0 = \mathfrak{g}_0^{n+1} = [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0^n]$, то $\mathfrak{g}_0^n \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0)$; кроме того, $\mathfrak{g}_0^n = [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0^{n-1}] \subset [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$.

Выберем $z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0) \cap [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$, $z \neq 0$. Отметим, что z не полупрост (ибо если z полупрост, то $z \in \mathfrak{h}$ по лемме 77, но $\mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] = 0$ по лемме 79). Поэтому $z_n \neq 0$. Согласно лемме 76, $z_n \in \mathfrak{g}_0$. Покажем, что $z_n \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0)$. В самом деле, так как $z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0)$, то $\mathrm{ad}_z(\mathfrak{g}_0) = 0$. Так как $\mathrm{ad}_{z_n} = q(\mathrm{ad}_z)$, где q — многочлен без свободного члена, то $\mathrm{ad}_{z_n}(\mathfrak{g}_0) = 0$, а значит, $z_n \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0)$. Но тогда оператор $\mathrm{ad}_{z_n}\mathrm{ad}_x$ нильпотентен для любого $x \in \mathfrak{g}_0$ (ибо оператор ad_{z_n} нильпотентен, и $[\mathrm{ad}_{z_n}, \mathrm{ad}_x] = \mathrm{ad}_{[z_n,x]} = 0$). Поэтому $\langle z_n, x\rangle = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}_{z_n}\mathrm{ad}_x) = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}_0$ (здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — форма Киллинга в $\mathfrak{g}$). Это противоречит невырожденности $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $\mathfrak{g}_0$. □

Лемма 82. $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{g}_0$.

Доказательство. Пусть это не так. Тогда, согласно леммам 76 и 77, найдется ненулевой нильпотентный элемент $x \in \mathfrak{g}_0$ (в самом деле, возьмем любой $y \in \mathfrak{g}_0$, $y \notin \mathfrak{h}$, и положим $x = y_n$, тогда $x \in \mathfrak{g}_0$ по лемме 76 и $x \neq 0$ по лемме 77). Пусть $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — форма Киллинга в $\mathfrak{g}$. Покажем, что $\langle x, y\rangle = 0$ для всех $y \in \mathfrak{g}_0$ (это будет противоречить невырожденности $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $\mathfrak{g}_0$). В самом деле, если $y \in \mathfrak{g}_0$, то $[\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y] = \mathrm{ad}_{[x,y]} = 0$ (лемма 81), т.е. оператор $\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y$ нильпотентен, а значит, $\langle x, y\rangle = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y) = 0$. □

□

Замечания. 1) Итак, мы доказали, что корневое разложение $\mathfrak{g}$ имеет вид

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha\right).$$

2) Пусть $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — инвариантное скалярное произведение в $\mathfrak{g}$ (не обязательно форма Киллинга). Тогда ограничение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $\mathfrak{h}$ невырождено (в самом деле, мы проверяли, что ограничение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $\mathfrak{g}_0$ невырождено, а теперь мы знаем, что $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$). Таким образом, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ устанавливает изоморфизм (линейных пространств) $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}^*$. Именно, если $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, то существует единственный элемент $t_\alpha \in \mathfrak{h}$ такой, что $\alpha(h) = \langle t_\alpha, h\rangle$ для всех $h \in \mathfrak{h}$; при этом $\alpha \mapsto t_\alpha$ — изоморфизм $\mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h}$. (Часто отождествляют $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}^*$ с помощью этого изоморфизма; конечно, это отождествление зависит от выбора $\langle\cdot,\cdot\rangle$). В дальнейшем мы будем ичспользовать обозначение t_α, определенное здесь.

Продолжим обсуждение "свойств ортогональности" корневого разложения.

Предложение 83. *R порождает $\mathfrak{h}^*$ как линейное пространство (т.е. $\mathfrak{h}^*$ — это линейная оболочка R).*

Доказательство. Предположим, что это не так. Тогда найдется ненулевой элемент $h \in \mathfrak{h}$ такой, что $\alpha(h) = 0$ для всех $\alpha \in R$. Это означает, что если $\alpha \in R$, $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, то $[h,x]=\alpha(h)x=0$. Кроме того, $[h,x]=0$ для всех $x\in\mathfrak{h}$. В силу корневого разложения, $[h,x]=0$ для всех $x\in\mathfrak{g}$, т.е. $h\in\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Но $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})=0$ ввиду полупростоты $\mathfrak{g}$ — противоречие. (NB: На самом деле здесь можно и не пользоваться тем, что $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{h}$: $[h,x]=0$ для всех $x\in\mathfrak{g}_0$ по определению $\mathfrak{g}_0$). $\square$

Пусть, как обычно, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — инвариантное скалярное произведение в $\mathfrak{g}$.

Предложение 84. *Пусть $\alpha\in R$, $x\in\mathfrak{g}_\alpha$, $y\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$. Тогда $[x,y]=\langle x,y\rangle t_\alpha$.*

Доказательство. Отметим, что $[x,y]\in[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}]\subset\mathfrak{g}_0=\mathfrak{h}$. Поскольку $\langle\cdot,\cdot\rangle$ невырождено на $\mathfrak{h}$, нам достаточно доказать, что $\langle h,[x,y]-\langle x,y\rangle t_\alpha\rangle=0$ для всех $h\in\mathfrak{h}$. Действительно, $\langle h,[x,y]\rangle=\langle[h,x],y\rangle=\alpha(h)\langle x,y\rangle=\langle h,t_\alpha\rangle\langle x,y\rangle=\langle h,\langle x,y\rangle t_\alpha\rangle$. $\square$

Пусть $\alpha\in R$. Положим $\mathfrak{h}_\alpha=[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}]\subset\mathfrak{h}$.

Следствие 85. $\mathfrak{h}_\alpha=\mathbb{C}t_\alpha$ *(в частности,* $\dim\mathfrak{h}_\alpha=1$*).*

Доказательство. Из предыдущего предложения следует, что $\mathfrak{h}_\alpha\subset\mathbb{C}t_\alpha$. Остается заметить, что $\langle\cdot,\cdot\rangle$ устанавливает двойстенность между $\mathfrak{g}_\alpha$ и $\mathfrak{g}_{-\alpha}$, т.е. найдутся $x\in\mathfrak{g}_\alpha$, $y\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$ такие, что $\langle x,y\rangle\neq0$, а значит, $[x,y]=\langle x,y\rangle t_\alpha\neq0$. $\square$

Предложение 86. *Пусть $\alpha\in R$. Тогда $\alpha(t_\alpha)=\langle t_\alpha,t_\alpha\rangle\neq0$ (в частности, $\alpha|_{\mathfrak{h}_\alpha}\neq0$).*

Доказательство. Пусть, напротив, $\alpha(t_\alpha)=0$. Тогда $[t_\alpha,x]=\alpha(t_\alpha)x=0$ для всех $x\in\mathfrak{g}_\alpha$; аналогично, $[t_\alpha,y]=0$ для всех $y\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$. Выберем $x\in\mathfrak{g}_\alpha$ и $y\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$ так, чтобы $\langle x,y\rangle=1$ (почему это возможно?). Тогда $[x,y]=t_\alpha$ (предложение 84).

Положим $\mathfrak{u}=\mathbb{C}x\oplus\mathbb{C}y\oplus\mathbb{C}t_\alpha$. В предыдущем абзаце проверено, что $\mathfrak{u}$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$. Отметим, что она разрешима (ибо $\mathfrak{u}'=[\mathfrak{u},\mathfrak{u}]=\mathbb{C}t_\alpha$, $\mathfrak{u}''=0$). Рассмотрим подалгебру $\mathrm{ad}\mathfrak{u}\subset\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ (здесь ad понимается "в смысле $\mathfrak{g}$", т.е. $\mathrm{ad}:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$). Она, конечно, тоже разрешима. По теореме Ли, в некотором базисе матрицы всех операторов ad_z, где $z\in\mathfrak{u}$, будут верхнетреугольными. Если же $z\in[\mathfrak{u},\mathfrak{u}]$, то матрица оператора ad_z в этом базисе будет строговерхнетреугольной, т.е. оператор ad_z нильпотентен. В частности, оператор ad_{t_α} нильпотентен (ибо $t_\alpha\in[\mathfrak{u},\mathfrak{u}]$), т.е. t_α нильпотентен. С другой стороны, $t_\alpha\in\mathfrak{h}$, т.е. t_α полупрост. Поэтому $t_\alpha=0$, что абсурдно. $\square$

Следствие 87. *Пусть $\alpha\in R$. Тогда существует единственный элемент $H_\alpha\in\mathfrak{h}_\alpha$ такой, что $\alpha(H_\alpha)=2$; он задается формулой $H_\alpha=\frac{2t_\alpha}{\langle t_\alpha,t_\alpha\rangle}$.*

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{h}_\alpha=\mathbb{C}t_\alpha$, то $H_\alpha=ct_\alpha$. Из требования $\alpha(H_\alpha)=2$ находим $c=\frac{2}{\alpha(t_\alpha)}=\frac{2}{\langle t_\alpha,t_\alpha\rangle}$. $\square$

Следствие 88. *Пусть $\alpha\in R$, $X_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha$, $X_\alpha\neq0$. Тогда найдется $Y_\alpha\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$ такой, что $[X_\alpha,Y_\alpha]=H_\alpha$.*

Доказательство. Выберем $Y_\alpha\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$ так, чтобы $\langle X_\alpha,Y_\alpha\rangle=\frac{2}{\langle t_\alpha,t_\alpha\rangle}$ (почему это возможно?). Тогда $[X_\alpha,Y_\alpha]=\langle X_\alpha,Y_\alpha\rangle t_\alpha=\frac{2t_\alpha}{\langle t_\alpha,t_\alpha\rangle}=H_\alpha$. $\square$

Важное замечание. В обозначениях предыдущего следствия $[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha$, $[H_\alpha, X_\alpha] = \alpha(H_\alpha)X_\alpha = 2X_\alpha$, $[H_\alpha, Y_\alpha] = -\alpha(H_\alpha)Y_\alpha = -2Y_\alpha$. Это означает, что $\mathbb{C}X_\alpha \oplus \mathbb{C}Y_\alpha \oplus \mathbb{C}H_\alpha$ — это подалгебра в $\mathfrak{g}$, изоморфная $\mathfrak{sl}(2)$. (Вообще, упорядоченную тройку элементов x, y, h произвольной алгебры Ли таких, что $[x, y] = h$, $[h, x] = 2x$, $[h, y] = -2y$, принято называть $\mathfrak{sl}(2)$-тройкой. Итак, наши X_α, Y_α, H_α образуют $\mathfrak{sl}(2)$-тройку.) Конечно, в выборе X_α и Y_α есть произвол, но мы увидим, что он невелик: будет доказано, что $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ для всех $\alpha \in R$, т.е. X_α определен с точностью до ненулевого скалярного меожителя, а Y_α однозначно строится по X_α; в частности, подалгебра $\mathbb{C}X_\alpha \oplus \mathbb{C}Y_\alpha \oplus \mathbb{C}H_\alpha$ определяется по $\alpha \in R$ однозначно и равна $\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{h}_\alpha$.

“Свойства целочисленности” корневого разложения

В этих свойствах важнейшую роль будут играть построенные на предыдущем этапе подалгебры в $\mathfrak{g}$, изоморфные $\mathfrak{sl}(2)$. Мы будем пользоваться свойствами конечномерных $\mathfrak{sl}(2)$-модулей, в частности, целочисленностью их весов (отсюда и условное название — “свойства целочисленности”).

Предложение 89. *Пусть* $\alpha \in R$. *Тогда* $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$.

Доказательство. Зафиксируем $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $X_\alpha \neq 0$ и выберем $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ так, как в следствии 88. Итак, $\mathbb{C}X_\alpha \oplus \mathbb{C}Y_\alpha \oplus \mathbb{C}H_\alpha \simeq \mathfrak{sl}(2)$. Превратим $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{sl}(2)$-модуль с помощью присоединенного действия подалгебры $\mathbb{C}X_\alpha \oplus \mathbb{C}Y_\alpha \oplus \mathbb{C}H_\alpha$ (т.е. операторы представления, соответствующие элементам стандартного базиса $X, Y, H \in \mathfrak{sl}(2)$ — это операторы $\mathrm{ad}_{X_\alpha}, \mathrm{ad}_{Y_\alpha}, \mathrm{ad}_{H_\alpha} \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$). Напомним, применительно к данной ситуации, следующее важное свойство конечномерных $\mathfrak{sl}(2)$-модулей: если $v \in \mathfrak{g}$, $v \neq 0$ таков, что $\mathrm{ad}_{X_\alpha} v = 0$, $\mathrm{ad}_{H_\alpha} v = \lambda v$, то $\lambda \in \mathbb{Z}_+$ (т.е. “старший вектор” может иметь лишь целый неотрицательный вес).

Теперь предположим противное: пусть $\dim \mathfrak{g}_\alpha > 1$. Тогда, в силу того, что $\langle\cdot,\cdot\rangle$ приводит в двойственность $\mathfrak{g}_\alpha$ и $\mathfrak{g}_{-\alpha}$, найдется ненулевой элемент $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ такой, что $\langle X_\alpha, y\rangle = 0$. Это означает, что $\mathrm{ad}_{X_\alpha} y = [X_\alpha, y] = \langle X_\alpha, y\rangle t_\alpha = 0$. Кроме того, $\mathrm{ad}_{H_\alpha} y = [H_\alpha, y] = -\alpha(H_\alpha)y = -2y$. Таким образом, y — это “старший вектор” веса -2, что невозможно. $\square$

Следствие 90. *Пусть* $\alpha \in R$, $\mathfrak{sl}(2)_\alpha := \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{h}_\alpha$. *Тогда* $\mathfrak{sl}(2)_\alpha \simeq \mathfrak{sl}(2)$. $\square$

Замечание. Элементы $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, $H_\alpha \in \mathfrak{h}_\alpha$, образующие $\mathfrak{sl}(2)$-тройку, определены с точностью до замен вида $(X_\alpha, Y_\alpha, H_\alpha) \mapsto (cX_\alpha, \frac{1}{c}Y_\alpha, H_\alpha)$, где $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$. В дальнейшем под X_α, Y_α и H_α понимаются именно такие элементы (подразумевается, что сделан каой-то выбор X_α).

Предложение 91. *Пусть* $\alpha, \beta \in R$. *Тогда*

(1) $\beta(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$;
(2) $\beta - \beta(H_\alpha)\alpha \in R$.

Доказательство. Как и в доказательстве предложения 89, превратим $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{sl}(2)$-модуль с помощью вложения $\mathfrak{sl}(2) \simeq \mathfrak{sl}(2)_\alpha \subset \mathfrak{g}$. Положим $p = \beta(H_\alpha)$. Пусть $y \in \mathfrak{g}_\beta$, $y \neq 0$. Тогда $\mathrm{ad}_{H_\alpha} y = \beta(H_\alpha)y = py$. Итак, y имеет вес p в $\mathfrak{sl}(2)$-модуле $\mathfrak{g}$, поэтому $p \in \mathbb{Z}$, т.е. (1) доказано.

Докажем (2). Для этого надо проверить, что $\mathfrak{g}_{\beta - p\alpha} \neq 0$. Предположим, что $p \geq 0$. Пусть $z = (\mathrm{ad}_{Y_\alpha})^p y$. Тогда $z \neq 0$ (ибо, согласно теореме 58, пункт 4, оператор $(\mathrm{ad}_{Y_\alpha})^p$ изоморфно отображает подпространство элементов веса p на подпространство элементов веса $-p$). Кроме того, $z \in \mathfrak{g}_{\beta - p\alpha}$ (в самом деле, так как $y \in \mathfrak{g}_\beta$, а $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, то $\mathrm{ad}_{Y_\alpha} y \in \mathfrak{g}_{\beta-\alpha}$, $(\mathrm{ad}_{Y_\alpha})^2 y \in \mathfrak{g}_{\beta - 2\alpha}$, и т. п.). Итак, $\mathfrak{g}_{\beta - p\alpha} \neq 0$. (Если $p < 0$, то надо брать $z = (\mathrm{ad}_{X_\alpha})^{-p} y$. Упр. Рассмотрите аккуратно этот случай.) $\square$

Важное замечание. Пусть $\alpha \in R$. Определим отображение $s_\alpha : \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h}^*$ формулой $s_\alpha(\beta) = \beta - \beta(H_\alpha)\alpha$. Очевидно, что $s_\alpha \in \operatorname{End} \mathfrak{h}^*$. Предложение 91, пункт 2, утверждает, что $s_\alpha(R) \subset R$ для всех $\alpha \in R$.

Перенесем $\langle \cdot, \cdot \rangle$ с $\mathfrak{h}$ на $\mathfrak{h}^*$ по формуле $\langle \lambda, \mu \rangle = \langle t_\lambda, t_\mu \rangle$. Отметим, что если $\alpha \in R$, то $\langle \alpha, \alpha \rangle = \langle t_\alpha, t_\alpha \rangle \neq 0$. Поэтому $\beta(H_\alpha) = \beta\left(\frac{2t_\alpha}{\langle t_\alpha, t_\alpha\rangle}\right) = \frac{2\beta(t_\alpha)}{\langle t_\alpha, t_\alpha \rangle} = \frac{2\langle \beta, \alpha\rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$. Таким образом,

$$s_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\alpha.$$

(Такое определение s_α имеет смысл и для всех $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ таких, что $\langle \alpha, \alpha \rangle \neq 0$.)

Каков "геометрический смысл" отображения s_α? Заметим, что $s_\alpha(\alpha) = \alpha - \frac{2\langle\alpha,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\alpha = -\alpha$; если же $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ таков, что $\langle \lambda, \alpha \rangle = 0$, то $s_\alpha(\lambda) = 0$. Итак, s_α — это отражение относительно гиперплоскости в $\mathfrak{h}^*$, ортогональной α. (Конечно, дело происходит не в евклидовом пространстве, а в комплексном с невырожденной симметрической билинейной формой, но элемент α не является изотропным, поэтому ничего страшного в "не евклидовости" нет.)

В пункте 1 предложения 91 мы доказали, что если $\alpha, \beta \in R$, то $\frac{\beta - s_\alpha(\beta)}{\alpha} = \frac{2\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} = \beta(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$ (отметим, что элемент $\beta - s_\alpha(\beta)$ пропроционален α для всех α, β, поэтому отношение имеет смысл).

Предложение 92. *Пусть $\alpha \in R$. Если $c \in \mathbb{C}$ таково, что $c\alpha \in R$, то $c = \pm 1$. (Т.е. $-\alpha$ — это единственный корень, пропорциональный данному корню α.)*

Доказательство. Положим $\beta = c\alpha$. Во-первых, докажем, что $c \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. В самом деле, $\beta(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$ согласно предложению 91; с другой стороны, $\beta(H_\alpha) = c\alpha(H_\alpha) = 2c$.

Во-вторых, проверим, что $c = \pm 2$, ± 1 или $\pm\frac{1}{2}$. В самом деле, мы уже доказали, что $c \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Но $\alpha = \frac{1}{c}\beta$, поэтому $\frac{1}{c} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, откуда и следует требуемое (ибо ± 2, ± 1 и $\pm\frac{1}{2}$ — это все обратимые элементы кольца $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$).

Наконец, докажем, что $c \neq 2$ (этого будет достаточно: $c \neq -2$, ибо $-2\alpha = 2(-\alpha)$ и $-\alpha \in R$; $c \neq \pm\frac{1}{2}$, ибо $2\left(\pm\frac{1}{2}\alpha\right) = \pm\alpha \in R$). В самом деле, пусть $z \in \mathfrak{g}_{2\alpha}$. Надо доказать, что $z = 0$. Рассмотрим элемент $[H_\alpha, z]$ и вычислим его двумя способами. С одной стороны, $[H_\alpha, z] = 2\alpha(H_\alpha)z = 4z$. С другой стороны, $H_\alpha = [X_\alpha, Y_\alpha]$, т.е. $[H_\alpha, z] =$

$\mathrm{ad}_{H_\alpha} z = \mathrm{ad}_{X_\alpha}\mathrm{ad}_{Y_\alpha} z - \mathrm{ad}_{Y_\alpha}\mathrm{ad}_{X_\alpha} z$. Теперь заметим, что $\mathrm{ad}_{X_\alpha} z = [X_\alpha, z] \in \mathfrak{g}_{\alpha+2\alpha} = \mathfrak{g}_{3\alpha} = 0$, т.е. $\mathrm{ad}_{Y_\alpha}\mathrm{ad}_{X_\alpha} z = 0$; далее, $\mathrm{ad}_{Y_\alpha} z = [Y_\alpha, z] \in \mathfrak{g}_{-\alpha+2\alpha} = \mathfrak{g}_\alpha$, т.е. $\mathrm{ad}_{Y_\alpha} z = \lambda X_\alpha$, где $\lambda \in \mathbb{C}$ (ибо $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$), но тогда $\mathrm{ad}_{X_\alpha}\mathrm{ad}_{Y_\alpha} z = 0$. Итак, $[H_\alpha, z] = 0$. Сравнивая результаты наших вычислений, заключаем, что $z = 0$. $\square$

Задача Пусть $\alpha, \beta \in R$, $\beta \neq \pm\alpha$. Пусть $p \in \mathbb{Z}_+$ (соотв. $q \in \mathbb{Z}_+$) — наибольшее число со свойством $\beta - p\alpha \in R$ (соотв. $\beta + q\alpha \in R$); такие числа определены ввиду конечности множества R. Положим

$$E = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha} = \bigoplus_{k=-p}^{q} \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha}.$$

1) Проверьте, что E — это $\mathfrak{sl}(2)_\alpha$-подмодуль в $\mathfrak{g}$.

2) Найдите веса E (относительно H_α) и их кратности; докажите, что E прост и $\dim E = p + q + 1$.

3) Докажите, что $\beta(H_\alpha) = p - q$.

4) Докажите, что $\mathrm{ad}_{X_\alpha} : \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha} \to \mathfrak{g}_{\beta+(k+1)\alpha}$ является изоморфизмом (линейных пространств) при всех k таких, что $-p \le k \le q-1$; в частности, $\beta + k\alpha \in R$ при всех k таких, что $-p \le k \le q$.

Задача Пусть $\alpha, \beta \in R$ таковы, что $\alpha + \beta \in R$. Докажите, что $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$. (Указание: используйте результаты предыдущей задачи.)

“Свойства рациональности” корневого разложения

Напомним, что множество корней R — это подмножество в $\mathfrak{h}^*$; на $\mathfrak{h}^*$ имеется невырожденная симметрическая билинейная форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (мы перенесли с $\mathfrak{h}$ ограничение инвариантного скалярного произведения на $\mathfrak{g}$); при этом если $\alpha \in R$, то $\langle\alpha,\alpha\rangle \neq 0$; если $\alpha, \beta \in R$, то $\frac{2\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} \in \mathbb{Z}$.

Поскольку множество R порождает $\mathfrak{h}^*$ как линейное пространство, то найдутся $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in R$, образующие базис в $\mathfrak{h}^*$ (позже мы увидим, что удобно выбирать такой базис весьма специальным образом, но пока нам будет достаточно любого базиса в $\mathfrak{h}^*$, состоящего из корней). Итак, если $\beta \in R$, то $\beta = \sum_{j=1}^r c_j\alpha_j$ для однозначно определенных $c_j \in \mathbb{C}$.

Предложение 93. *$c_j \in \mathbb{Q}$.*

Доказательство. Так как $\beta = \sum_{j=1}^r c_j\alpha_j$, то $\langle\beta,\alpha_k\rangle = \sum_{j=1}^r c_j\langle\alpha_j,\alpha_k\rangle$, и

$$\frac{2\langle\beta,\alpha_k\rangle}{\langle\alpha_k,\alpha_k\rangle} = \sum_{j=1}^r c_j \frac{2\langle\alpha_j,\alpha_k\rangle}{\langle\alpha_k,\alpha_k\rangle}$$

при $k = 1, \ldots, r$. Это — система линейных уравнений на числа c_j; система однозначно разрешима, ибо матрица $(\langle\alpha_j,\alpha_k\rangle)_{j,k=1}^r$ невырождена (это матрица невырожденной билинейной формы $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $\mathfrak{h}^*$), а тогда матрица $\left(\frac{2\langle\alpha_j,\alpha_k\rangle}{\langle\alpha_k,\alpha_k\rangle}\right)_{j,k=1}^r$ тоже невырождена. Но коэффициенты и правые части всех уравнений системы — целые числа, поэтому ее (единственное) решение рационально. $\square$

Замечание. Обозначим через $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}$ (соотв. $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$) линейную оболочку множества R над полем $\mathbb{Q}$ (соотв. $\mathbb{R}$). Предложение 93 означает, что $\dim_{\mathbb{Q}} \mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}} = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}^*$ (и тем более $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}} = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}^*$). В самом деле, a priori $\dim_{\mathbb{Q}} \mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}} \geq \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}} \geq \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}^*$; но предложение 93 означает, что $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ образуют базис $\mathbb{Q}$-линейного пространства $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}$ (и тем более $\mathbb{R}$-линейного пространства $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$). В частности, $\mathfrak{h}^*$ — это комплексификация пространства $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$.

Теперь наложим дополнительные ограничения на инвариантное скалярное произведение в $\mathfrak{g}$. Именно, положим $\langle\cdot,\cdot\rangle = c\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}$, где $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$.

Предложение 94. *Форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$ положительно определена на $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ (в частности, $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ — евклидово пространство относительно $\langle\cdot,\cdot\rangle$).*

Доказательство. Так как форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$ невырождена на $\mathfrak{h}^*$ и, тем более, на $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ (почему?), то достаточно доказать, что $\langle\lambda,\lambda\rangle \geq 0$ для всех $\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$. Можно считать, не ограничивая общности, что $c = 1$.

Пусть $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$. Тогда $\langle\lambda,\mu\rangle = \langle t_\lambda, t_\mu\rangle = \mathrm{K}_{\mathfrak{g}}(t_\lambda, t_\mu) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}_{t_\lambda}\mathrm{ad}_{t_\mu})$. Вычислим $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}_{t_\lambda}\mathrm{ad}_{t_\mu})$. Для этого для каждого $\alpha \in R$ выберем ненулевой элемент $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$. Отметим, что в силу корневого разложения все элементы x_α вместе с (любым) базисом в $\mathfrak{h}$ образуют базис в $\mathfrak{g}$. Так как $(\mathrm{ad}_{t_\lambda}\mathrm{ad}_{t_\mu})x_\alpha = \alpha(t_\lambda)\alpha(t_\mu)x_\alpha$, и $\mathrm{ad}_{t_\lambda}\mathrm{ad}_{t_\mu}|_{\mathfrak{h}} = 0$, то

$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}_{t_\lambda}\mathrm{ad}_{t_\mu}) = \sum_{\alpha\in R}\alpha(t_\lambda)\alpha(t_\mu) = \sum_{\alpha\in R}\langle\alpha,\lambda\rangle\langle\alpha,\mu\rangle.$$

Итак,

$$\langle\lambda,\mu\rangle = \sum_{\alpha\in R}\langle\alpha,\lambda\rangle\langle\alpha,\mu\rangle.$$

В частности,

$$\langle\lambda,\lambda\rangle = \sum_{\alpha\in R}\langle\alpha,\lambda\rangle^2.$$

Теперь заметим, что достаточно доказать, что если $\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$, $\alpha \in R$, то $\langle\alpha,\lambda\rangle \in \mathbb{R}$, ибо тогда

$$\langle\lambda,\lambda\rangle = \sum_{\alpha\in R}\langle\alpha,\lambda\rangle^2 \geq 0.$$

Достаточно даже проверить, что если $\lambda, \alpha \in R$, то $\langle\alpha,\lambda\rangle \in \mathbb{R}$ (почему?).

Итак, пусть $\lambda, \mu \in R$. Положим для сокращения записей $A_{\lambda\mu} := \frac{2\langle\lambda,\mu\rangle}{\langle\lambda,\lambda\rangle}$; напомним, что $A_{\lambda\mu} \in \mathbb{Z}$. Имеем

$$\langle\lambda,\mu\rangle = \sum_{\alpha\in R}\langle\lambda,\alpha\rangle\langle\mu,\alpha\rangle = \frac{\langle\lambda,\lambda\rangle\langle\mu,\mu\rangle}{4}\sum_{\alpha\in R}A_{\lambda\alpha}A_{\mu\alpha}.$$

В частности,
$$\langle\lambda,\lambda\rangle = \frac{\langle\lambda,\lambda\rangle^2}{4}\sum_{\alpha\in R} A_{\lambda\alpha}^2.$$
Поэтому
$$\langle\lambda,\lambda\rangle = \frac{4}{\sum_{\alpha\in R} A_{\lambda\alpha}^2}$$
(напомним, что так как $\lambda \in R$, то $\langle\lambda,\lambda\rangle \neq 0$). Окончательно
$$\langle\lambda,\mu\rangle = 4\frac{\sum_{\alpha\in R} A_{\lambda\alpha}A_{\mu\alpha}}{\sum_{\alpha\in R} A_{\lambda\alpha}^2 \cdot \sum_{\alpha\in R} A_{\mu\alpha}^2} \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R},$$
что и требовалось установить. $\square$

Замечание. Рассмотрим вещественное линейное пространство $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} :=$ $\mathbb{R}$-линейная оболочка множества $\{H_\alpha \,|\, \alpha \in R\}$ = $\mathbb{R}$-линейная оболочка множества $\{t_\alpha \,|\, \alpha \in R\}$. Форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$ устанавливает изоморфизм между $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ и $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$.

Системы корней

Напомним результаты о строении полупростых алгебр Ли, полученные к настоящему моменту.

Пусть $\mathfrak{g}$ — (ненулевая) полупростая алгебра Ли (как всегда, комплексная и конечномерная), $\mathfrak{h}$ — картановская подалгебра в $\mathfrak{g}$. Тогда
$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha\in R} \mathfrak{g}_\alpha\right),$$
где $R \subset \mathfrak{h}^*$, и
$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \,|\, \forall\, h \in \mathfrak{h} : [h,x] = \alpha(h)x\};$$
$\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ при $\alpha \in R$; $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ (здесь $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$); если $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in R$, то $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

Далее, пусть $\langle\cdot,\cdot\rangle = c\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}$, где $c > 0$. Тогда ограничение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $\mathfrak{h}$ невырождено; подпространства $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$, $\alpha \in R$, попарно ортогональны относительно $\langle\cdot,\cdot\rangle$. В силу невырожденности $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $\mathfrak{h}$ мы можем перенести $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в пространство $\mathfrak{h}^*$, причем вещественное линейное пространство $V := \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ (= $\mathbb{R}$-линейная оболочка множества R) является евклидовым относительно $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (т.е. форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$ положительно определена на V).

Мы установили следующие свойства множества корней R:

(1) $|R| < \infty$, $0 \notin R$, R порождает V.

(2) Если $\alpha \in R$, то $s_\alpha(R) = R$, где s_α — это отражение относительно гиперплоскости в пространстве V, ортогональной α, т.е.
$$s_\alpha(x) = x - \frac{2\langle\alpha,x\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\alpha.$$

(Отметим, что из свойства (2) следует, что $-R = R$, ибо $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$.)

(3) Если $\alpha, \beta \in R$, то $\frac{2\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} \in \mathbb{Z}$ (т.е., грубо говоря, $\frac{\beta - s_\alpha(\beta)}{\alpha} \in \mathbb{Z}$).

(4) Если $\alpha \in R$, то $c\alpha \in R \Leftrightarrow c = \pm 1$.

Пусть теперь V — произвольное евклидово пространство.

Определение 27. *Система корней* в пространстве V — это подмножество $R \subset V$, удовлетворяющее условиям (1)–(3). Система корней называется *приведенной,* если вдобавок выполнено условие (4).

Рангом системы корней $R \subset V$ принято называть число $\operatorname{rank} R := \dim V$.

Упр. Пусть R — система корней (не обязательно приведенная), $\alpha \in R$, $c\alpha \in R$. Тогда $c \in \{\pm 2, \pm 1, \pm\frac{1}{2}\}$.

Определение 28. *Изоморфизм* систем корней $R_1 \subset V_1$ и $R_2 \subset V_2$ — это изоморфизм линейных пространств $\varphi : V_1 \to V_2$ такой, что $\varphi(R_1) = R_2$ (т.е. φ не обязательно сохраняет скалярное произведение!)

Упр. Пусть φ — изоморфизм систем корней $R_1 \subset V_1$ и $R_2 \subset V_2$. Тогда

$$\frac{2\langle\varphi(\alpha), \varphi(\beta)\rangle}{\langle\varphi(\alpha), \varphi(\alpha)\rangle} = \frac{2\langle\alpha, \beta\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle}$$

для всех $\alpha, \beta \in R_1$. (Указание: докажите, что если $\alpha \in R_1$, то $\varphi s_\alpha \varphi^{-1} = s_{\varphi(\alpha)}$.)

Итак, мы сопоставили каждой тройке $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ (где $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, и т. п.) приведенную систему корней R.

Упр. Проверьте, что с точностью до изоморфизма система корней R не зависит от выбора $\mathfrak{h}$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle$, а также от замены $\mathfrak{g}$ на изоморфную ей алгебру Ли. (Указание: воспользуйтесь сопряженностью картановских подалгебр, т.е. тем, что если $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$ — две картановские подалгебры в $\mathfrak{g}$, то найдется автоморфизм $\varphi \in \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ такой, что $\varphi(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$.)

Таким образом, мы построили отображение

$$\frac{\{\text{полупротые алгебры Ли}\}}{\text{изоморфизм}} \longrightarrow \frac{\{\text{приведенные системы корней}\}}{\text{изоморфизм}}.$$

Факт. Это отображение — биекция.

Почему в это можно верить? Пусть R — приведенная система корней в евклидовом пространстве V (со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$). Как построить $\mathfrak{g}$ по R? Очевидно, что

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha\in R} \mathfrak{g}_\alpha\right),$$

где $\mathfrak{h}$ — это комплексификация V^* (тогда $\mathfrak{h}^*$ — комплексификация V), и все $\mathfrak{g}_\alpha$ одномерны, т.е. $\mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{C}x_\alpha$. Надо ввести в $\mathfrak{g}$ структуру алгебры Ли (и, конечно, проверить после этого, что она полупроста, $\mathfrak{h}$ — ее картановская подалгебра, и т. п.). Ясно, что $[h_1, h_2] = 0$ при $h_1, h_2 \in \mathfrak{h}$, а также $[h, x_\alpha] = \alpha(h)x_\alpha$ при $h \in \mathfrak{h}$. Далее, можно считать, что $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = H_\alpha := \frac{2t_\alpha}{\langle\alpha,\alpha\rangle}$ (где элемент $t_\alpha \in \mathfrak{h}$ соответствует $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ при изоморфизме между $\mathfrak{h}^*$ и $\mathfrak{h}$, индуцированном $\langle\cdot,\cdot\rangle$). Наконец, если $\alpha, \beta \in R$, $\alpha + \beta \neq 0$, то

$$[x_\alpha, x_\beta] = \begin{cases} c_{\alpha\beta}x_{\alpha+\beta}, & \text{если } \alpha+\beta \in R, \\ 0, & \text{если } \alpha+\beta \notin R. \end{cases}$$

(где $c_{\alpha\beta} \neq 0$). Остается определить числа $c_{\alpha\beta}$. Это непростая (хотя и решенная) задача (для решения надо “нормировать” x_α). Вычисление $c_{\alpha\beta}$ с точностью до знака см. Серр, часть III, гл. 6, §6; вычисление правильных знаков — наиболее трудное дело.

Позже мы обсудим другой, более простой (но менее прямой) способ построения полупростой алгебры Ли по системе корней.

Пример. Опишем систему корней R алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n)$; ее называют системой корней типа A_{n-1}.

Итак, пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$, где $n \geq 2$. Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра диагональных матриц в $\mathfrak{g}$ (это действительно картановская подалгебра в $\mathfrak{g}$). Так как $\dim\mathfrak{h} = n-1$, то $\operatorname{rank}\mathfrak{g} = \operatorname{rank} R = n-1$. Мы проверяли, что

$$R = \{\alpha_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, i \neq j\},$$

$\alpha_{ij}(h) = h_i - h_j$, где

$$h = \begin{pmatrix} h_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & h_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}.$$

Отметим, что $\alpha_{ji} = -\alpha_{ij}$, и $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} = \alpha_{ik}$. Далее, $\mathfrak{g}_{\alpha_{ij}} = \mathbb{C}E_{ij}$ (где, как и прежде, E_{ij} — “матричные единицы”). Так как $[E_{ij}, E_{ji}] = E_{ii} - E_{jj}$, то $\mathfrak{sl}(2)_{\alpha_{ij}} = \mathfrak{g}_{\alpha_{ij}} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_{ji}} \oplus [\mathfrak{g}_{\alpha_{ij}}, \mathfrak{g}_{\alpha_{ji}}] = \mathbb{C}E_{ij} \oplus \mathbb{C}E_{ji} \oplus \mathbb{C}(E_{ii} - E_{jj})$. Положим для краткости $E_i := E_{ii}$.

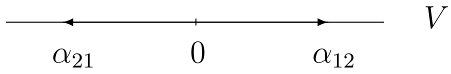
Пусть теперь $\langle x, y\rangle = \operatorname{Tr} xy$; мы проверяли, что форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$ пропорциональна форме Киллинга $\mathrm{K}_\mathfrak{g}$ с положительным коэффициентом пропорциональности. Очевидно, что $\alpha_{ij}(h) = \langle h, E_i - E_j\rangle$ для всех $h \in \mathfrak{h}$, т.е. $t_{\alpha_{ij}} = E_i - E_j$. Отождествим $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}^*$, т.е. будем попросту считать, что $\alpha_{ij} = E_i - E_j$. Таким образом, система корней R “живет” в евклидовом (относительно $\langle\cdot,\cdot\rangle$) пространстве

$$V = \{c_1E_1 + \ldots + c_nE_n \mid c_i \in \mathbb{R},\ c_1 + \ldots + c_n = 0\}.$$

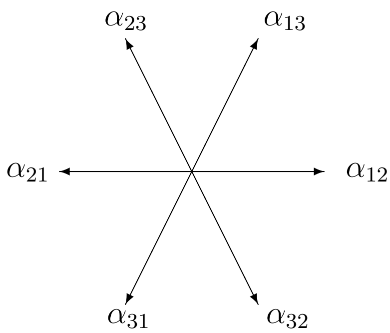
Теперь легко вычислить $\langle\alpha_{ij}, \alpha_{kl}\rangle$ (Упр. сделайте это!), пользуясь тем, что $\langle E_i, E_j\rangle = \delta_{ij}$ (конечно, E_i не лежит в V, но лежит в объемлющем евклидовом пространстве всех вещественных диагональных матриц). Таким образом, будет установлена “геометрия” (длины и углы) данной системы корней.

Рассмотрим подробнее случаи A_1 и A_2 (в этих случаях систему корней легко нарисовать).

Итак, $A_1 = \{\alpha_{12}, \alpha_{21} = -\alpha_{12}\}$; при этом $\langle \alpha_{12}, \alpha_{12} \rangle = \langle E_1 - E_2, E_1 - E_2 \rangle = 2$. Таким образом, наша система корней выглядит так:



Далее, $A_2 = \{\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{23}, \alpha_{21} = -\alpha_{12}, \alpha_{31} = -\alpha_{13}, \alpha_{32} = -\alpha_{23}\}$. Очевидно, что $\langle \alpha_{ij}, \alpha_{ij} \rangle = 2$. Кроме того, $\alpha_{13} = \alpha_{12} + \alpha_{23}$. Таким образом, чтобы нарисовать нашу систему корней, достаточно посчитать угол θ между α_{12} и α_{23}. Так как $\langle \alpha_{12}, \alpha_{23} \rangle = \langle E_1 - E_2, E_2 - E_3 \rangle = -1$, то $\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$, т.е. $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Итак, мы получили



Свойства систем корней

Мы обсудим только самое основное; кое-какие доказательства будут пропущены. Подробности см. Humphreys, гл. 3, или Серр, часть III, гл. 5.

1. Взаимное расположение пары корней.

Пусть R — система корней в евклидовом пространстве V (со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$). Пусть корни $\alpha, \beta \in R$ не пропорциональны. Пусть θ — это угол между α и β; можно считать, что $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (если угол тупой, то достаточно заменить α на $-\alpha$). Оказывается, на угол θ имеются жесткие ограничения.

Пусть α и β не ортогональны, т.е. (с учетом сделанных ранее предположений) $\langle \alpha, \beta \rangle > 0$. Так как $\cos\theta = \frac{\langle \alpha,\beta \rangle}{\sqrt{\langle \alpha,\alpha \rangle \langle \beta,\beta \rangle}}$, то $4\cos^2\theta = \frac{4\langle \alpha,\beta \rangle^2}{\langle \alpha,\alpha \rangle \langle \beta,\beta \rangle} = \frac{2\langle \alpha,\beta \rangle}{\langle \alpha,\alpha \rangle} \cdot \frac{2\langle \beta,\alpha \rangle}{\langle \beta,\beta \rangle} \in \mathbb{N}$, согласно условию (3) из определения системы корней. С другой стороны, $0 < 4\cos^2\theta < 4$. Итак, $\cos^2\theta \in \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$, т.е. $\theta \in \{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\}$. Оказывается, значение θ полностью определяет и отношение длин корней.

Случай 1: $\theta = \frac{\pi}{3}$. Тогда $\frac{4\langle \alpha,\beta \rangle^2}{\langle \alpha,\alpha \rangle \langle \beta,\beta \rangle} = 1$, поэтому $\frac{2\langle \alpha,\beta \rangle}{\langle \alpha,\alpha \rangle} = \frac{2\langle \beta,\alpha \rangle}{\langle \beta,\beta \rangle} = 1$, т.е. $\langle \alpha, \alpha \rangle = \langle \beta, \beta \rangle$. Значит, $\|\alpha\| = \|\beta\|$.

Случай 2: $\theta = \frac{\pi}{4}$. Тогда $\frac{4\langle \alpha,\beta \rangle^2}{\langle \alpha,\alpha \rangle \langle \beta,\beta \rangle} = 2$, поэтому (с точностью до перестановки α и β) $\frac{2\langle \alpha,\beta \rangle}{\langle \alpha,\alpha \rangle} = 2$, $\frac{2\langle \beta,\alpha \rangle}{\langle \beta,\beta \rangle} = 1$, т.е. $\langle \beta, \beta \rangle = 2\langle \alpha, \alpha \rangle$. Значит, $\|\beta\| = \sqrt{2} \cdot \|\alpha\|$.

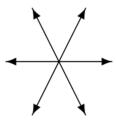
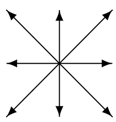
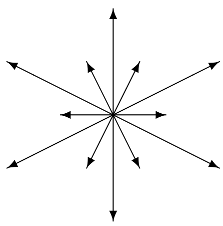
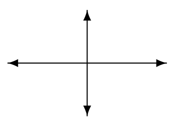
Случай 3: $\theta = \frac{\pi}{6}$. Тогда $\frac{4\langle\alpha,\beta\rangle^2}{\langle\alpha,\alpha\rangle\langle\beta,\beta\rangle} = 3$, поэтому (с точностью до перестановки α и β) $\frac{2\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} = 3$, $\frac{2\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\beta,\beta\rangle} = 1$, т.е. $\langle\beta,\beta\rangle = 3\langle\alpha,\alpha\rangle$. Значит, $\|\beta\| = \sqrt{3}\cdot\|\alpha\|$.

Если же $\theta = \frac{\pi}{2}$, то на отношение длин корней не возникает никаких ограничений.

Подведем итоги:

угол между парой корней	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$
отношение длин корней	?	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$

Исходя из этого, легко описать все (с точностью до изоморфизма) приведенные системы корней рангов 1 и 2. В таблице, приведенной ниже, содержится информация о всех таких системах корней, включая соответствующую полупростую алгебру Ли (Упр. проверьте полноту этого списка).

$\operatorname{rank} R$	система корней	название	алгебра Ли
1		A_1	$\mathfrak{sl}(2)$
2		A_2	$\mathfrak{sl}(3)$
		B_2	$\mathfrak{o}(5) \simeq \mathfrak{sp}(4)$
		G_2	G_2 (исключительная)
		$A_1 \oplus A_1$	$\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$

Упр. Опишите неприведенные системы корней рангов 1 и 2.

2. Неприводимость.

Определение 29. Система корней $R \subset V$ *приводима*, если $V = V_1 \oplus V_2$ (ортогональная прямая сумма), где $V_1 \neq 0$, $V_2 \neq 0$, причем $R = (R \cap V_1) \cup (R \cap V_2)$ (тогда $R \cap V_i$ — система корней в V_i, $i = 1, 2$). В противном случае R *неприводима.*

В случае систем корней ранга 1 и 2 все системы из нашего списка, кроме последней, неприводимы.

Упр. Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, R — ее система корней. Докажите, что $\mathfrak{g}$ проста тогда и только тогда, когда R неприводима.

3. Простые корни.

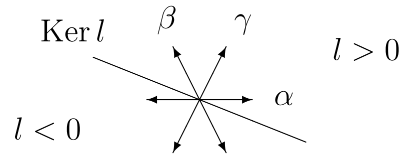
Пусть R — система корней в евклидовом пространстве V. Выберем и зафиксируем линейный функционал $l \in V^*$ так, чтобы $l(\alpha) \neq 0$ для всех $\alpha \in R$ (такой функционал всегда существует, ибо $|R| < \infty$ и $0 \notin R$).

Определение 30. Корень $\alpha \in R$ *положителен* (соотв. *отрицателен*), если $l(\alpha) > 0$ (соотв. $l(\alpha) < 0$).

Если корень α положителен (соотв. отрицателен), то принято писать, что $\alpha > 0$ (соотв. $\alpha < 0$). Ясно, что $\alpha > 0$ тогда и только тогда, когда $-\alpha < 0$. Иными словами, если положить $R_\pm = \{\alpha \in R \mid \pm\,\alpha > 0\}$, то $-R_\pm = R_\mp$; кроме того, $R = R_+ \sqcup R_-$.

Определение 31. Корень $\alpha \in R_+$ *прост*, если α нельзя представить в виде $\beta + \gamma$, где $\beta, \gamma \in R_+$.

Пример. Рассмотрим систему корней типа A_2.



Здесь α, β, γ — все положительные корни, α и β — простые корни, γ — не простой, ибо $\gamma = \alpha + \beta$.

По определению любой положительный корень является суммой простых корней. Однозначно ли такое представление? Оказывается, что да.

Предложение 95. *Простые корни линейно независимы.*

Доказательство. Разобьем доказательство на два этапа (каждый из них имеет и самостоятельное значение).

Лемма 96. *Пусть α, β — простые корни, $\alpha \neq \beta$. Тогда угол между α и β неострый.*

Доказательство. Предположим противное. Рассмотрим плоскость L, натянутую на α и β (случай, когда α и β пропорциональны, исключен — почему?). Тогда L содержит множество векторов, образующих систему корней типа A_2, B_2 или G_2, в зависимости от значения угла между α и β. Кроме того, $\dim(\operatorname{Ker} l) \cap L = 1$ (почему?). Таким образом, можно считать, что наша система корней имеет ранг 2 (точнее, одна из трех: A_2, B_2 или G_2), а для них проверка не составляет труда (Упр. выполните ее; годится простой перебор). $\square$

Лемма 97. *Пусть векторы $v_1, \ldots, v_r$ лежат в одном (открытом) полупространстве евклидова пространства V, причем угол между v_i и v_j неострый (для всех $i \neq j$). Тогда векторы $v_1, \ldots, v_r$ линейно независимы.*

Доказательство. Нам дано, что $\langle v_i, v_j \rangle \leq 0$ при $i \neq j$; кроме того, $l(v_i) > 0$ для некоторого линейного функционала $l \in V^*$. Рассмотрим соотношение линейной зависимости для $v_1, \ldots, v_r$. Его можно (при необходимости изменив нумерацию векторов) записать в виде $a_1 v_1 + \ldots + a_k v_k = b_{k+1} v_{k+1} + \ldots + b_r v_r$, где все числа a_i и b_j неотрицательны. Пусть $u := a_1 v_1 + \ldots + a_k v_k = b_{k+1} v_{k+1} + \ldots + b_r v_r$. Тогда

$$\langle u, u \rangle = \langle a_1 v_1 + \ldots + a_k v_k, b_{k+1} v_{k+1} + \ldots + b_r v_r \rangle = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{r} a_i b_j \langle v_i, v_j \rangle \leq 0,$$

поэтому $\langle u, u \rangle = 0$, т.е. $u = 0$. Далее, $0 = l(u) = a_1 l(v_1) + \ldots + a_k l(v_k)$. Так как $a_i \geq 0$ и $l(v_i) > 0$, то $a_i = 0$. Аналогично, $b_j = 0$. □

Предложение доказано. □

Следствие 98. *Простые корни образуют базис в пространстве V.*

Доказательство. Надо лишь проверить, что множество простых корней порождает пространство V. Это следует из определения простоты корня и того, что множество всех корней порождает V. □

По этой причине множество простых корней называют также *базисом* системы корней.

Итак, каждый положительный (соотв. отрицательный) корень однозначно представим в виде линейной комбинации простых корней с целыми неотрицательными (соотв. неположительными) коэффициентами.

Конечно, понятия положительности и простоты корня зависят от выбора $l \in V^*$, но “не очень сильно”: при “малом шевелении” l ничего не меняется (т.е. по существу имеется лишь конечное число возможностей). Можно сформулировать и более сильное утверждение, ио сначала рассмотрим пример.

Пример. Пусть R — система корней типа A_{n-1} (где $n \geq 2$), т.е.

$$R = \{\alpha_{ij} = e_i - e_j \,|\, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, i \neq j\},$$

$$R \subset V = \{c_1 e_1 + \ldots + c_n e_n \,|\, c_i \in \mathbb{R},\ c_1 + \ldots + c_n = 0\}.$$

Если $l \in V^*$, то $l\left(\sum_i c_i e_i\right) = \sum_i c_i y_i$, где $y_i \in \mathbb{R}$. Так как $l(\alpha_{ij}) = l(e_i - e_j) = y_i - y_j$, то условие $l(\alpha_{ij}) \neq 0$ означает, что $y_i \neq y_j$ при $i \neq j$. Далее, $\alpha_{ij} > 0$ тогда и только тогда, когда $y_i > y_j$.

Если, например, $y_1 > y_2 > y_3 > \ldots > y_n$, то $\alpha_{ij} > 0$ тогда и только тогда, когда $i < j$. При этом простые корни — это $\alpha_i := \alpha_{i,i+1}$, где $1 \leq i \leq n-1$. Это — “стандартный” выбор базиса системы корней типа A_{n-1}. Отметим, что если $i < j$ (т.е. $\alpha_{ij} > 0$), то $\alpha_{ij} = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \ldots + \alpha_{j-1}$.

В общем случае $y_{\sigma(1)} > y_{\sigma(2)} > \ldots > y_{\sigma(n)}$ для некоторой перестановки $\sigma \in S_n$. Тогда (Упр. проверьте это) $\alpha_{ij} > 0$ тогда и только тогда, когда $\sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j)$; простые корни — это $\alpha_{\sigma(i),\sigma(i+1)}$, где $1 \leq i \leq n-1$.

Итак, в этом примере на множестве R естественно действует группа S_n, причем любые два базиса системы корней R переводятся друг в друга ровно одним элементом из S_n (в частности, число всех базисов равно $|S_n| = n!$).

Что является аналогом группы S_n в общем случае?

4. Группа Вейля (H. Weyl).

Определение 32. *Группа Вейля* $W = W(R)$ системы корней $R \subset V$ — это подгруппа группы $\operatorname{Aut} V$, порожденная отражениями s_α, где $\alpha \in R$.

По определению, элементы группы W имеют вид $s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}\ldots s_{\alpha_k}$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in R$ (здесь используется то, что $s_\alpha^2 = \mathrm{id}$, т.е. $s_\alpha^{-1} = s_\alpha$).

Так как $s_\alpha(R) = R$ для всех $\alpha \in R$, то $w(R) = R$ для любого $w \in W$ (т.е. группа Вейля действует на множестве R). Так как множество R конечно и порождает пространство V, то $|W| < \infty$.

Пример. Рассмотрим систему корней R типа A_{n-1}. Напомним, что

$$R = \{\alpha_{ij} = e_i - e_j \,|\, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, i \neq j\},$$

$$R \subset V = \{c_1e_1 + \ldots + c_ne_n \,|\, c_i \in \mathbb{R},\ c_1 + \ldots + c_n = 0\} \subset \widetilde{V},$$

где $\widetilde{V}$ — евклидово пространство размерности n с ортонормированным базисом $e_1, \ldots, e_n$. Продолжим отражения s_α (где $\alpha \in R$) на $\widetilde{V}$, т.е.

$$s_{\alpha_{ij}}(x) = x - \frac{2\langle\alpha_{ij}, x\rangle}{\langle\alpha_{ij}, \alpha_{ij}\rangle}\alpha_{ij} = x - \langle e_i - e_j, x\rangle(e_i - e_j).$$

Легко видеть, что $s_{\alpha_{ij}}(e_i) = e_j$, $s_{\alpha_{ij}}(e_j) = e_i$, и $s_{\alpha_{ij}}(e_k) = e_k$ при $k \neq i$, $k \neq j$.

Упр. Сопоставим отражению $s_{\alpha_{ij}} \in W$ транспозицию $(i, j) \in S_n$. Проверьте, что это отображение однозначно продолжается до изоморфизма $W \simeq S_n$.

Итак, $W(A_{n-1}) \simeq S_n$.

Упр. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — базис системы корней R, и $w \in W$. Тогда $w(\alpha_1), \ldots, w(\alpha_r)$ тоже является базисом R (конечно, относительно другого функционала $l \in V^*$).

Таким образом, группа Вейля действует на множестве базисов в R.

Факт. Всякие два базиса системы корней R переводятся друг в друга ровно одним элементом из W (в такой ситуации говорят, что группа W действует на множестве всех базисов в R *просто транзитивно*). В частности, число всех возможных базисов в R равно $|W|$.

5. Матрица Картана и диаграмма Дынкина.

Пусть R — приведенная система корней, $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ — (какой-нибудь) базис в R. Напомним, что $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \leq 0$ при $i \neq j$ (см. лемму 96).

Положим $A_{ij} = \frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}$. Квадратную матрицу $(A_{ij})_{i,j=1}^r$ принято называть *матрицей Картана* системы корней R. По существу, она не зависит от выбора базиса системы корней (ибо любые два базиса переволятся друг в друга элементом группы Вейля, а она сохраняет скалярное произведение). Но так как нет никакой выделенной нумерации простых корней, то матрица Картана определена однозначно с точностью до перестановки строк и (такой же) перестановки столбцов.

Кроме того, матрица Картана не зависит от замены системы корней на изоморфную ей (почему?).

Имеют место следующие свойства A_{ij}:

(1) $A_{ij} \in \mathbb{Z}$;

(2) $A_{ii} = 2$;

(3) $A_{ij} \leq 0$ при $i \neq j$;

(4) Существуют числа d_i такие, что матрица $B_{ij} = d_i A_{ij}$ симметрична и положительно определена.

Комментарий: (1) — это часть определения системы корней; (2) очевидно; (3) — это лемма 96 (отметим, что на самом деле $A_{ij} \in \{0, -1, -2, -3\}$ при $i \neq j$); наконец, для проверки (4) достаточно положить $d_i = \frac{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}{2}$ (тогда B_{ij} — это матрица положительно определенной симметрической билинейной формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в базисе $\alpha_1, \dots, \alpha_r$).

Итак, мы построили отображение

$$\frac{\{\text{приведенные системы корней}\}}{\text{изоморфизм}} \longrightarrow \frac{\{\text{матрицы со свойствами (1)–(4)}\}}{\sim},$$

где $\sim$ означает перестановки строк и (такие же) перестановки столбцов.

Факт. Это биекция.

Как по матрице Картана восстановить приведенную систему корней? По числам A_{ij} и A_{ji} восстанавливается угол между простыми корнями α_i и α_j, а также (в случае $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$) отношение их длин. Если система корней неприводима, то таким образом множество простых корней будет восстановлено (с точностью до гомотетии, что несущественно). Как по простым корням восстановить все остальные корни?

Факт. (1) Каждый корень действием группы Вейля W переводится в один из α_i.

(2) Группа W порождается “простыми отражениями”, т.е. s_{α_i}, где $i = 1, \dots, r$.

Упр. Проверьте эти утверждения для системы корней типа A_{n-1}.

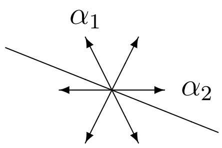
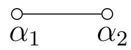
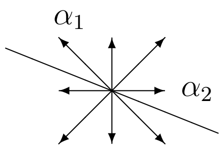
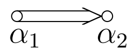
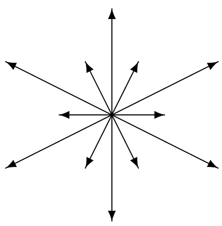
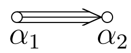
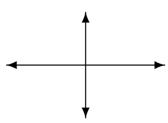
Таким образом, по простым корням можно восстановить сначала группу Вейля, а потом и все корни.

Матрицы Картана систем корней удобно изображать с помощью т.наз. *диаграмм Дынкина.* Именно, сначала рисуют граф (т.наз. *граф Кокстера*), вершины которого взаимно однозначно соответствуют простым корням. Вершины i и j соединяются ребром кратности $A_{ij}A_{ji} = 4\cos^2\varphi_{ij}$, где φ_{ij} — угол между α_i и α_j.

$A_{ij}A_{ji}$	φ_{ij}	$\frac{\Vert\alpha_i\Vert^2}{\Vert\alpha_j\Vert^2}$	фрагмент графа Кокстера
0	$\frac{\pi}{2}$	?	
1	$\frac{2\pi}{3}$	1	
2	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{1}{2}$ или 2	
3	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{3}$ или 3	

Графа Кокстера, вообще говоря, недостаточно для восстановления матрицы Картана. Если $A_{ij}A_{ji} > 1$ (т.е. угол между α_i и α_j не прямой, и корни α_i и α_j разной длины), то для восстановления A_{ij} и A_{ji} по $A_{ij}A_{ji}$ достаточно знать, какой из корней α_i и α_j длиннее. Поэтому, если $\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle \neq 0$ и $\Vert\alpha_i\Vert > \Vert\alpha_j\Vert$, то ставят стрелку от i-й вершины к j-й (эту стрелку удобно интерпретировать как знак неравенства).

Пример. Рассмотрим случай приведенных систем корней ранга 2.

название	система корней	матрица Картана	диаграмма Дынкина
A_2		$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	
B_2		$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$	
G_2		$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$	
$A_1 \oplus A_1$		$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	

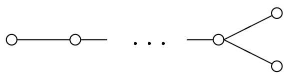
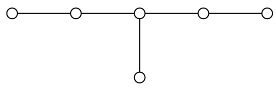
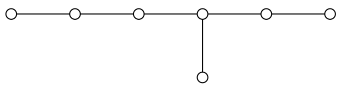
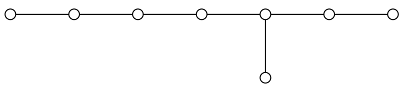
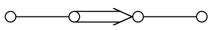
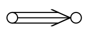
Комментарий: в случае, скажем, системы корней типа B_2 простые корни — это α_1 и α_2 (прямая на рисунке — это ядро линейного функционала l, задающего простые корни). Выбирая масштаб, можно считать, что $\langle\alpha_1, \alpha_1\rangle = 2$. Тогда $\langle\alpha_2, \alpha_2\rangle = 1$,

$\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle = -1$, поэтому $A_{12} = \frac{2\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle}{\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle} = -1$ и $A_{21} = \frac{2\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle}{\langle\alpha_2,\alpha_2\rangle} = -2$. Упр. Разберите остальные случаи.

Задача Докажите, что приведенная система корней неприводима тогда и только тогда, когда ее диаграмма Дынкина связна.

6. Классификация.

Факт. Диаграмма Дынкина неприводимой приведенной системы корней — это в точности одна из диаграмм из следующего списка:

название	диаграмма Дынкина	комментарии
A_n		$n \geq 1$; соответствует $\mathfrak{sl}(n+1)$
B_n		$n \geq 2$; соответствует $\mathfrak{o}(2n+1)$
C_n		$n \geq 2$; соответствует $\mathfrak{sp}(2n)$
D_n		$n \geq 3$; соответствует $\mathfrak{o}(2n)$
E_6		
E_7		
E_8		
F_4		
G_2		

Упр. Проверьте, что диаграмма Дынкина системы корней типа A_n в самом деле такова, как указано в таблице.

Задача Найдите диаграммы Дынкина систем корней алгебр Ли $\mathfrak{o}(2n+1)$, $\mathfrak{sp}(2n)$ и $\mathfrak{o}(2n)$; убедитесь, что они таковы, как указано в таблице.

Нижний индекс в обозначении диаграммы Дынкина — это число ее вершин (т.е. ранг соответствующей системы корней или простой алгебры Ли). Пять последних ("внесерийных") диаграмм Дынкина соответствуют т.наз. исключительным простым алгебрам Ли (некоторую информацию о них см. выше).

При небольших n в нашем списке имеются повторения: $B_2 = C_2$, $A_3 = D_3$ (других повторений нет). Кроме того, естественно считать, что $B_1 = C_1 = A_1$, и $D_2 = A_1 \oplus A_1$ (это подтверждается вычислением систем корней соответствующих "классических" алгебр Ли). Все это позволяет "увидеть" следующие изоморфизмы алгебр Ли:

$$\begin{array}{ll}
\mathfrak{sl}(2) \simeq \mathfrak{o}(3) \simeq \mathfrak{sp}(2), & \text{так как } A_1 = B_1 = C_1; \\
\mathfrak{o}(5) \simeq \mathfrak{sp}(4), & \text{так как } B_2 = C_2; \\
\mathfrak{sl}(4) \simeq \mathfrak{o}(6), & \text{так как } A_3 = D_3; \\
\mathfrak{o}(4) \simeq \mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2), & \text{так как } D_2 = A_1 \oplus A_1.
\end{array}$$

Восстановление полупростой алгебры Ли по ее матрице Картана

Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ — картановская подалгебра. Обозначим через $R \subset \mathfrak{h}^*$ систему корней $\mathfrak{g}$ (относительно $\mathfrak{h}$), выберем простые корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$. Пусть A_{ij} — матрица Картана. Каждому корню α_i соответствует подалгебра $\mathfrak{sl}(2)_{\alpha_i}$ с базисом X_i, Y_i, H_i, где $X_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$, $Y_i \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i}$, $H_i \in [\mathfrak{g}_{\alpha_i}, \mathfrak{g}_{-\alpha_i}]$, причем $[X_i, Y_i] = H_i$, $[H_i, X_i] = 2X_i$, $[H_i, Y_i] = -2Y_i$.

Пример. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$. Выберем картановскую подалгебру и простые корни "стандартным" образом (т.е. $\mathfrak{h}$ — это подалгебра всех диагональных матриц со следом 0, и $\alpha_i = \alpha_{i,i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$). Тогда можно положить $X_i = E_{i,i+1}$, $Y_i = E_{i+1,i}$, $H_i = [X_i, Y_i] = E_{i,i} - E_{i+1,i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$.

Теорема 99. 1. *Элементы X_i, Y_i, H_i, $i = 1, \ldots, r$, порождают $\mathfrak{g}$ как алгебру Ли.*

2.
$$[H_i, H_j] = 0;\ [H_i, X_j] = A_{ij}X_j;\ [H_i, Y_j] = -A_{ij}Y_j; \tag{3}$$
$$[X_i, Y_i] = H_i;\ [X_i, Y_j] = 0 \text{ при } i \neq j; \tag{4}$$
$$(\mathrm{ad}_{X_i})^{1-A_{ij}} X_j = 0,\ (\mathrm{ad}_{Y_i})^{1-A_{ij}} Y_j = 0 \text{ при } i \neq j. \tag{5}$$

3. *Соотношения (3), (4) и (5) — это <u>полная</u> система соотношений между элементами X_i, Y_i, H_i, $i = 1, \ldots, r$.*

<u>Замечания</u>. 1) Соотношения (3) и (4) — это т.наз. *соотношения Г.Вейля*; соотношения (5) принято называть *соотношениями Серра* (а все они вместе называются *соотношениями Вейля-Серра*). Соотношения Серра имеют смысл, ибо $1 - A_{ij} \in \mathbb{N}$ при $i \neq j$.

2) Что означает 3-е утверждение теоремы? Неформально оно означает, что любое соотношение между элементами X_i, Y_i, H_i, $i = 1, \ldots, r$ следует из соотношений Вейля-Серра. Точнее, утверждается, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ — это фактор <u>свободной</u> алгебры Ли с образующими X_i, Y_i, H_i, $i = 1, \ldots, r$ по идеалу, порожденному "соотношениями", т.е. элементами $[H_i, H_j]$, $[H_i, X_j] - A_{ij}X_j$, и т. д. Свободная алгебра Ли — это алгебра Ли, в которой "нет никаких соотношений" (кроме тех, что входят в определение алгебры Ли); свободная алгебра Ли с заданным числом образующих всегда существует и, по существу, единственна; точные определения и конструкции см., например, у

Серра, часть I, гл. 4, §3. Можно дать и аксиоматическое определение алгебры Ли, заданной образующими и соотношениями (в частности, свободной алгебры Ли), как универсального объекта в некоторой категории (Упр. придумайте такое определение).

3) Конечно, элементы H_i можно выбросить из списка образующих (модифицировав соотношения). Обычно, однако, этого не делают.

4) Пусть R — произвольная приведенная система корней ранга r с матрицей Картана A_{ij}. Рассмотрим алгебру Ли, заданную образующими X_i, Y_i, H_i, $i = 1, \dots, r$ и соотношениями Вейля-Серра. Можно доказать, что эта алгебра Ли конечномерна, полупроста, линейная оболочка всех элементов H_i является ее картановской подалгеброй, и соответствующая система корней — это в точности R.

3-я часть теоремы — это трудное утверждение, мы не будем его доказывать (доказательство см. у Серра, часть III, добавление к гл. 6).

Задача Докажите 1-ю часть теоремы. Указание: воспользуйтесь тем, что $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ при $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in R$, а также таким результатом из теории систем корней:

Задача Пусть R — приведенная система корней, $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ — простые корни. Докажите, что если $\alpha \in R_+$, то α представим в виде $\alpha_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_k}$ (здесь среди слагаемых возможны повторения), причем $\alpha_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_l} \in R_+$ для всех $l = 1, 2, \dots, k$.

Проверка соотношений Вейля-Серра. Соотношение $[H_i, H_j] = 0$ очевидно. Далее, $[H_i, X_j] = \alpha_j(H_i)X_j$, и $\alpha_j(H_i) = \left\langle \alpha_j, \frac{2\alpha_i}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \right\rangle = \frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} = A_{ij}$; аналогично проверяется, что $[H_i, Y_j] = -A_{ij}Y_j$.

Соотношение $[X_i, Y_i] = H_i$ следует из определения. Далее, $[X_i, Y_j] \in \mathfrak{g}_{\alpha_i - \alpha_j}$, и так как $\alpha_i - \alpha_j \notin R$ (почему?), то $\mathfrak{g}_{\alpha_i - \alpha_j} = 0$ при $i \neq j$, т.е. $[X_i, Y_j] = 0$ при $i \neq j$.

Проверим, наконец, одно из соотношений Серра (второе проверяется аналогично). Прежде всего, заметим, что $(\mathrm{ad}_{X_i})^k X_j \in \mathfrak{g}_{\alpha_j + k\alpha_i}$; в частности, $(\mathrm{ad}_{X_i})^{1-A_{ij}} X_j \in \mathfrak{g}_{\alpha_j + (1-A_{ij})\alpha_i}$. Но $\alpha_j + (1 - A_{ij})\alpha_i = \alpha_j - \frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}\alpha_i + \alpha_i = s_{\alpha_i}(\alpha_j) + \alpha_i = s_{\alpha_i}(\alpha_j - \alpha_i) \notin R$ (почему?), т.е. $(\mathrm{ad}_{X_i})^{1-A_{ij}} X_j = 0$. $\square$

Значение корневой техники состоит не только (и не столько) в том, что она дает полную классификацию комплексных полупростых алгебр Ли, но и в том, что она позволяет давать единообразные для всех полупростых алгебр Ли ответы на естественные вопросы о них. Вот пример.

Факт. **(Теорема Э.Картана о старшем векторе.)** Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли ранга r, V — конечномерный простой $\mathfrak{g}$-модуль. Тогда существует единственный с точностью до скалярного множителя вектор $v \in V$, $v \neq 0$ такой, что $X_i v = 0$ для всех $i = 1, \dots, r$ (этот вектор называется старшим вектором $\mathfrak{g}$-модуля V); при этом $H_i v = \lambda_i v$, где $\lambda_i \in \mathbb{Z}_+$, $i = 1, \dots, r$. Полученное отображение

$$\frac{\{\text{конечномерные простые } \mathfrak{g}\text{-модули}\}}{\text{изоморфизм}} \longrightarrow \mathbb{Z}_+^r,$$

$V \mapsto (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ биективно.

Замечания. 1) Числа $\lambda_i \in \mathbb{Z}_+$ называют *числовыми отметками* $\mathfrak{g}$-модуля V; он обычно изображается диаграммой Дынкина, на вершинах которой дополнительно указаны числа λ_i (при этом нулевые отметки, как правило, не пишут).

2) Мы, по существу, доказывали теорему о старшем векторе в частном случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$. В этом случае имеется лишь одна числовая отметка $\lambda \in \mathbb{Z}_+$, ей соответствует простой $\mathfrak{sl}(2)$-модуль $L(\lambda)$.

3) В общем случае набору числовых отметок соответствует линейный функционал $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ (такой, что $\lambda(H_i) = \lambda_i$ для всех i); соответствующий простой $\mathfrak{g}$-модуль также принято обозначать $L(\lambda)$ и называть *модулем со старшим весом* λ.

Пример. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$; выберем стандартным образом картановскую подалгебру и простые корни. Пусть $V = \mathbb{C}^n$ со стандартным действием $\mathfrak{g}$ (т.е. соответствующее представление — “тавтологическое”).

Упр. Проверьте, что

1) V прост;

2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ — старший вектор;

3) числовые отметки такие:

$$\overset{1}{\underset{\alpha_1}{\circ}} - \underset{\alpha_2}{\circ} - \;\cdots\; - \circ - \underset{\alpha_{n-1}}{\circ}$$

Итак, $V = L(\varepsilon_1)$, где $\varepsilon_1(H_1) = 1$, $\varepsilon_1(H_i) = 1$ при $i \neq 1$.

В заключение отметим, что описать простой $\mathfrak{g}$-модуль V по его числовым отметкам явно (т.е. указать его размерность и задать действие операторов X_i, Y_i, H_i) гораздо сложнее, чем в частном случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$. Имеется, однако, нетривиальная формула для $\dim V$. Доказательство теоремы о старшем векторе и формулы для размерности см., например, Серр, часть III, гл. 7 (только частный случай можно посмотреть у Серра в части I, гл. 7).