

УДК 532.5

**МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВИТИЯ МОДУЛЯЦИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ
ВОЛНЫ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ****Е.В. Белкин, В.М. Куклин***Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина,
61077, г. Харьков, пл. Свободы, 4.*

Поступила в редакцию 18 января 2008 г.

Методами численного моделирования изучается процесс развития модуляционной неустойчивости в волновой среде в условиях, когда система находится вблизи порога нестабильности. Найдены зависимости энергии возбуждаемого спектра и его спектральной ширины от уровня поглощения энергии в среде в режиме развитой неустойчивости. Обсуждается характер формирования волнового пакета и процесс сужения спектра неустойчивых колебаний.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: волна конечной амплитуды, большой уровень поглощения энергии возмущений, модуляционная неустойчивость, небольшое превышение порога возбуждения.

Как известно, периодические волны конечной амплитуды в средах с кубической нелинейностью (это ветровые волны в океане, монохроматические колебания в электронных устройствах, волны в плазме и т.д.) являются неустойчивыми с возбуждением боковых спектров вынужденных возмущений [1]. Развитие такой неустойчивости приводит к амплитудной модуляции начальной волны (или структуры). Что и определило название этого типа неустойчивостей – модуляционные. В условиях поглощения энергии возмущений в среде инкременты модуляционной неустойчивости уменьшаются и, вообще говоря, существует пороговая амплитуда начальной волны или структуры, при превышении которой неустойчивость развивается. Важным также является требование достаточно узкой ширины линии волны конечной амплитуды [2, 3]. Отметим, что для наблюдения модуляционной неустойчивости в поглощающей среде, вообще говоря, должен существовать источник энергии, который поддерживает основную волну или структуру. Вблизи порога спектральная ширина неустойчивости невелика, амплитуды возникающих возмущений даже в режиме насыщения остаются много меньше амплитуды начальной волны (или структуры). Взаимодействие возникающих в результате неустойчивости возмущений между собой в этих условиях ослаблено, они в большей степени взаимодействуют с основной волной (структурой), причем их действие на основную волну (структуру) носит интегральный характер [4]. Именно поэтому можно считать, что такая система может быть определена как квазилинейная [5].

Цель данной работы - провести численное моделирование развития неустойчивости в волновой среде с кубической нелинейностью и конечным поглощением энергии, используя уравнение Лайтхилла [1] с учетом упрощений, основанных на известной симметрии задачи [4].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть амплитуды волновых возмущения подчиняются уравнению Лайтхилла

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\delta E - i \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - iE |E|^2 + g, \quad (1)$$

где δ – декремент затухания колебаний, g – внешний источник, поддерживающий монохроматическую волну конечной амплитуды $u_0 \exp\{i\varphi_0\}$, где $u_0 = E_{k_0}$, $\varphi_0 = \varphi_{k_0}$ — амплитуда и фаза волны с волновым числом, равным $k = k_0$. Переменные t, x – это соответствующим образом нормированные время и координата. Ниже ограничимся изучением одномерного случая. В общем случае поле колебаний может быть представлено в виде

$$E = u_0 \exp\{i\varphi_{k_0} - ik_0 x\} + \sum_{n \neq 0} u_n \exp\{i\varphi_{k_n} - ik_n x\}, \quad (2)$$

где второе слагаемое представляет собой спектр возмущений.

В результате неустойчивости возбуждается спектр колебаний, волновые числа которых располагаются симметрично относительно волнового числа основной моды конечной амплитуды $k_n > k_0$ и $k_{-n} < k_0$, где $n > 0$. Каждая пара симметрично расположенных относительно основной волны мод k_n, k_{-n} непосредственно взаимодействует с полем основной волны, причем, выполняется следующее соотношение

$$k_n + k_{-n} = 2k_0, \quad (3)$$

которое обусловлено видом нелинейности. Остальными взаимодействиями мод спектра можно пренебречь, в рассматриваемом случае слабого превышения порога неустойчивости ($\delta = 1$) [5].

В процессе неустойчивости амплитуда u_0 и фаза φ_0 основной волны, а также амплитуды u_n и фазы φ_n возбуждаемых моды спектра изменяются. Поведение основной волны может быть описано следующими уравнениями

$$u_0 = 1 / \left\{ 1 + \frac{2}{\delta} \sum_{m>0}^N u_m^2 \sin \Phi_m \right\}, \quad (4)$$

$$\frac{d\varphi_0}{dt} = +k_0^2 - u_0^2 - 4 \sum_{m>0}^N u_m^2 - 2 \sum_{m>0}^N u_m^2 \cos \Phi_m, \quad (5)$$

где Φ_m - фаза m -ого канала неустойчивости.

Динамика амплитуды и фазы растущих неустойчивых мод, которые связаны с основной волной условием пространственного синхронизма (3), определяется уравнениями

$$\frac{du_n}{dt} = u_n \left\{ -\delta + u_0^2 \sin \Phi_n \right\}, \quad (6)$$

$$\frac{d\varphi_n}{dt} = k_n^2 - 2(u_0^2 + 2 \sum_{m>0}^N u_m^2 - \frac{1}{2} u_n^2) - u_0^2 \cos \Phi_n. \quad (7)$$

Для описания изменения фазы каналов неустойчивости применяется уравнение

$$\frac{d\Phi_n}{dt} = \Delta_n + 2(u_0^2 - u_n^2) + 2(u_0^2 \cos \Phi_n - 2 \sum_{m>0}^N u_m^2 \cos \Phi_m). \quad (8)$$

Рационально использовать следующие обозначения $K_n = k_n - k_0$, и $K_{-n} = k_{-n} - k_0$, причем $K_{-n} = -K_n$ В этом случае в интервале неустойчивости

$$-2(1 + \sqrt{1 - \delta}) < \Delta_n < -2(1 - \sqrt{1 - \delta}). \quad (9)$$

для расстройки Δ_n справедливо выражение

$$-\frac{\Delta_n}{2} = K_n^2 = 1 + \left(\frac{2|n| - N}{N} \right) \sqrt{1 - \delta}. \quad (10)$$

Из приведенных выше уравнений следует, в частности, равенство амплитуд возбуждаемых мод $u_k = u_{-k}$.

Поле колебаний (2), представляющее собой модулированную волну в режиме развитой неустойчивости, может быть представлено в виде

$$E(x, t) = u_0 \exp \{ -ik_0 x + i\varphi_0(t) \} + \sum_{m>0}^N [u_m \exp \{ -ik_m x + i\varphi_m(t) \} + u_{-m} \exp \{ -ik_{-m} x + i\varphi_{-m}(t) \}] \quad (11)$$

Для удобства визуализации модулированной волны, перейдем в систему координат, которая движется со скоростью волны в сторону ее распространения. Для этого выполним замену $\xi = x - 2k_0 t$ и получим следующее выражение для поля:

$$E(\xi, t) = \exp \{ -ik_0(\xi + 2k_0 t) + i\varphi_0(t) \} \cdot \left\{ u_0 + \sum_{m>0}^N [u_m \exp \{ -iK_m \xi + i[(\varphi_m - \varphi_0) - 2K_m \cdot k_0 t] \} + u_{-m} \exp \{ iK_m \xi + i[(\varphi_{-m} - \varphi_0) + 2K_m \cdot k_0 t] \}] \right\}. \quad (12)$$

Начальные условия для задачи определяются исходя из следующих выражений:

$$u_0|_{t=0} = 1, u_n|_{t=0} = 0, 01 \frac{1}{N} \sqrt{1 - \delta}. \quad (13)$$

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Численное решение представленной выше системы дифференциальных уравнений демонстрирует возбуждение спектра неустойчивости по обе стороны от основной волны. По мере возбуждения спектра неустойчивости наблюдаются модуляции основной моды. При определенных условиях наблюдается значительное изменение амплитуды основной волны.

Ниже приведены результаты численного моделирования, проведенного при разных уровнях надпороговости. Количество мод N взято равным 100.

При уровне надпороговости $\delta = 0,80$ имеем следующую картину эксперимента.

При начальных значениях наблюдается одна основная мода и в результате нелинейного взаимодействия начинается медленный, но ускоряющийся рост спектра неустойчивости. Значения амплитуд мод неустойчивости на данном этапе мало, поэтому не оказывает существенного влияния на основную волну. Основная волна имеет вид синусоиды, огибающая основной волны имеет вид прямой линии, т.к. основная волна не модулирована. При этом малы уровень дефектности структуры $D = \frac{2}{u_0^2} \sum_{m>0} u_m^2$ и уровень интенсивности спектра $I_S = 2 \sum_{m>0} u_m^2$, а интенсивность основной волны $I_0 = u_0^2$ близка к единице.

При дальнейшем моделировании производная амплитуд мод спектра неустойчивости по времени достигает своего максимума, быстро формируется спектр амплитуды возбужденных мод, которые достигают значений, достаточных для эффективного воздействия на основную волну (рис. 1). Моды возбуждаются по обе стороны от основной моды. На данном этапе спектр широкий, амплитуда возбужденных мод составляет 1–5 % от амплитуды основной, однако их взаимодействие приводит к отклонениям вида основной волны на 15–20% от правильной синусоидальной формы, то есть к модуляции волны (см. рис.2). При данном процессе наблюдается рост уровня дефектности D.

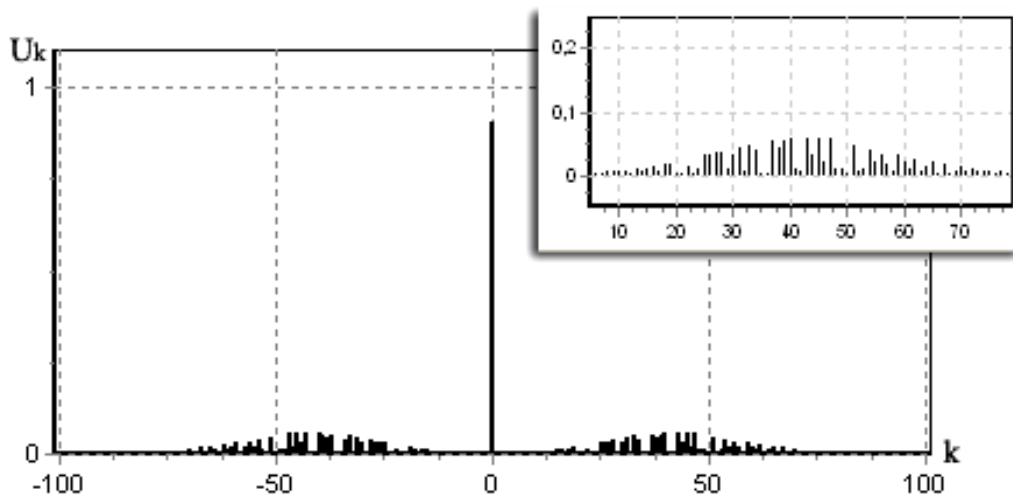


Рис. 1. Возбуждение широкого спектра неустойчивости ($t \approx 50$, $\delta = 0,80$)

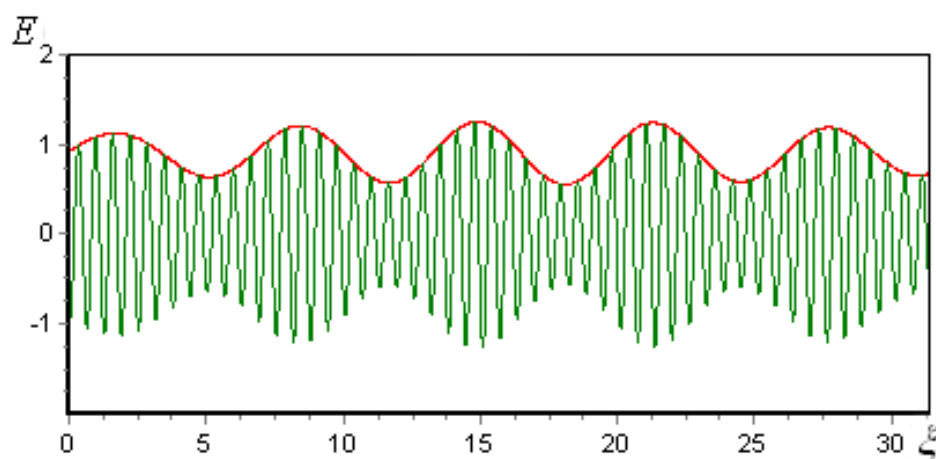


Рис. 2. Основная волна, промодулированная модами возбужденного спектра ($t \approx 50$, $\delta = 0,80$)

На следующем этапе развития процесса ($t > 100$) наблюдается сужение спектра модуляционной неустойчивости с одновременным увеличением амплитуды возбужденных мод (рис. 3). Производная крайних мод спектра принимает отрицательное значение, максимум спектра смещается в сторону основной моды. Далее скорость изменения амплитуды возбужденных мод уменьшается и система выходит на квазиустойчивое состояние.

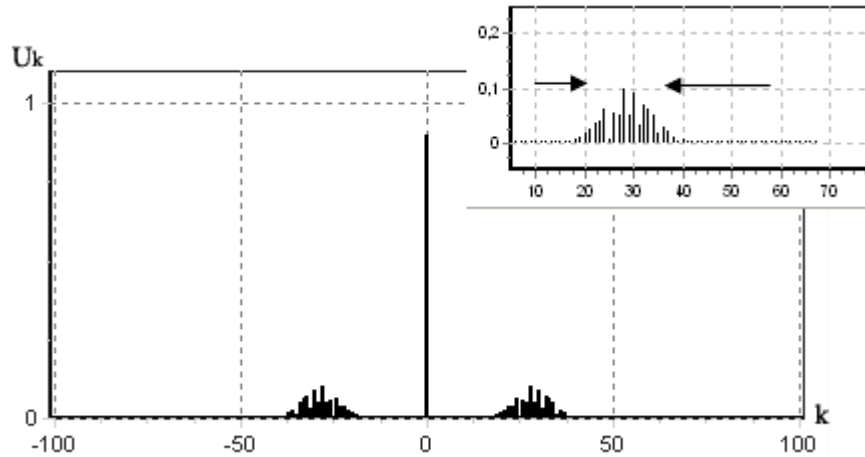


Рис. 3. Спектр неустойчивости на заключительной стадии развития ($t \approx 300$, $\delta = 0,80$).

Увеличение амплитуды возбужденных мод приводит к более выраженному воздействию на основную волну (рис. 4). В результате такого воздействия амплитуда последней может превышать начальную амплитуду в 1,5-1,7 раза.

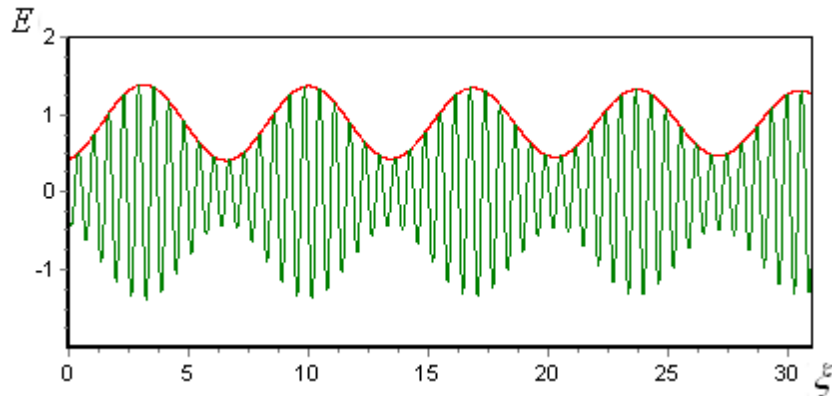


Рис. 4. Вид основной волны на заключительной стадии развития спектра неустойчивости ($t \approx 300$, $\delta = 0,80$).

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ЛОКАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОЦЕССА НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Рассмотрим детально процесс формирования спектра и выход системы на квазилинейную стадию в терминах интенсивности мод. Как видно из рисунков 5,6 интенсивность основной моды на начальных стадиях процесса заметно уменьшается и при значении $t \approx 100$ приближается к значению δ . Значения уровня надпороговости $(1-\delta)$ ограничивают снизу интенсивность основной моды. Во время уменьшения интенсивности основной моды начинает расти интенсивность спектра возбуждаемых мод, так же приближаясь к верхней границе, значение которой зависит от параметра δ .

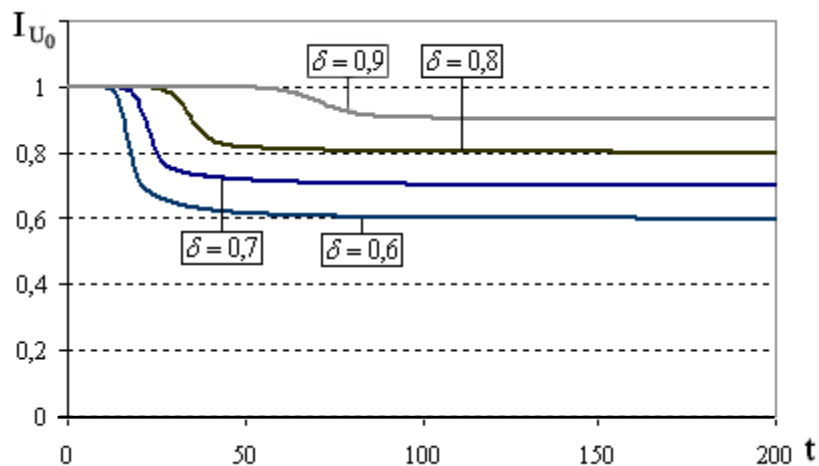


Рис. 5. Интенсивность основной моды $I_0 = u_0^2$ на линейной стадии процесса

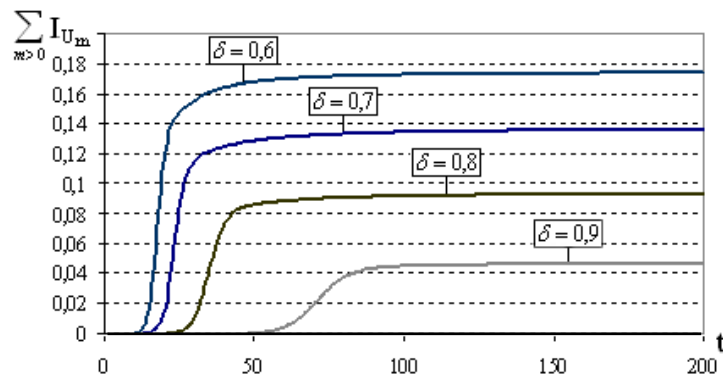


Рис. 6. Суммарная интенсивность спектра возбуждаемых мод $I_S = 2 \sum_{m>0} u_m^2$ на линейной стадии процесса

При этом суммарная интенсивность не превышает единицы (рис 7), и с развитием неустойчивости уменьшается, ограничиваясь снизу значениями, зависящими от параметра δ .

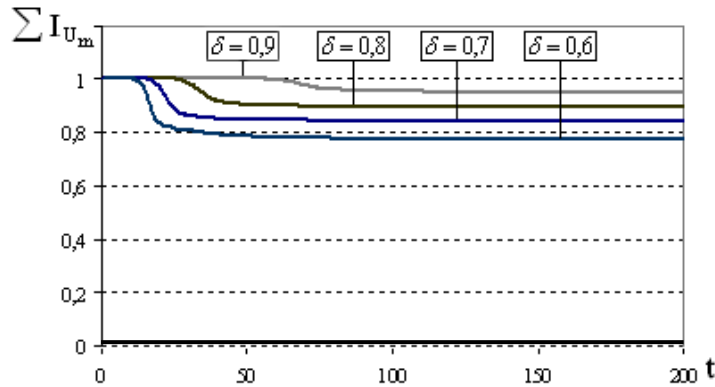


Рис. 7. Суммарная интенсивность структуры.

При рассмотрении системы на временах перехода в квазилинейную стадию, можно получить зависимость интенсивности мод от значения параметра δ . Как видно из рис. 8, значение интенсивности основной моды в момент перехода в квазилинейную стадию равно значению уровня надпороговости. Момент перехода определялся из условия $\frac{dU_m}{dt} < 10^{-5} U_m$. Интенсивность же возбуждаемого спектра в тот же момент времени обратно пропорциональна значению параметра δ .

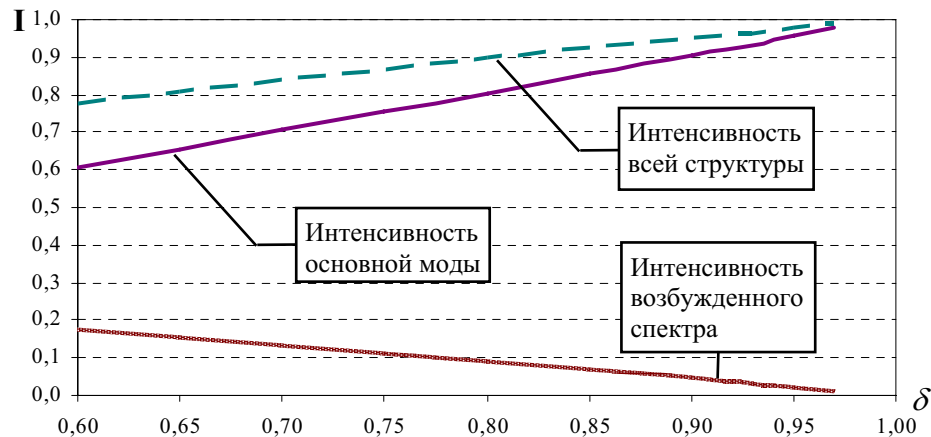


Рис. 8. Зависимость интенсивностей от величины превышения порога, на времени перехода системы в квазистационарное состояние

ФОРМИРОВАНИЕ ДОЛГОЖИВУЩЕГО КВАЗИУСТОЙЧИВОГО СОСТОЯНИЯ

В режиме развитой неустойчивости дальнейшее изменение интенсивности не происходит. Можно считать, что нелинейная, а точнее квазилинейная стадия неустойчивости проявляется в условиях, когда интегральные характеристики процесса практически не меняются. При этом скорости изменения амплитуд мод резко уменьшаются. Неизменное значение общей интенсивности системы мод, при крайне медленном изменении внутренней её структуры на квазилинейной стадии процесса позволяет говорить о формировании квазиустойчивого долгоживущего физического состояния. Важно отметить, что монотонное уменьшение количества мод спектра, которое наблюдается на квазилинейной стадии процесса эволюции такого состояния фактически соответствует уменьшению возбужденных степеней свободы. На рис. 8 можно увидеть динамику изменения возбужденных степеней свободы – количества мод на линейной стадии процесса и в окрестности выхода на его квазилинейную стадию.

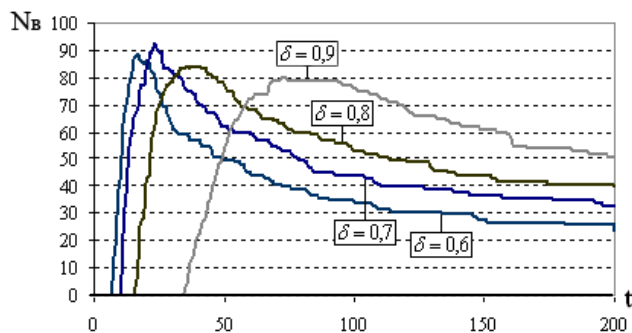


Рис. 9. Количество возбужденных мод спектра неустойчивости.

Из рис.9 видно, что на начальной стадии возбуждается набор мод, состоящий более чем из 70% мод начального спектра, причем максимальное количество мод возбуждается в области перехода в квазилинейную стадию. Мода считалась возбужденной, если ее амплитуда превышала 0.1% от начального уровня основной моды. Скорость изменения амплитуды моды со временем уменьшается, но продолжает быть значимой. В результате конкуренции, амплитуда мод на периферии спектра уменьшается практически до нуля, а амплитуда части мод в центре спектра увеличивается. Таким образом, на квазилинейной стадии спектр в целом сужается, количество степеней свободы - возбужденных мод уменьшается, то есть можно говорить об уменьшении значений характерных величин, связанных с энтропией системы в целом.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, развитие модуляционной неустойчивости при слабом превышении порога неустойчивости характеризуется выходом в так называемый квазилинейный режим, в котором формируется квазиустойчивое долгоживущее состояние (основной волны и спектра мод, который обеспечивает её модуляцию). Это состояние характеризуется постоянной энергией и монотонным уменьшением амплитуды возбужденных мод на периферии спектра (степеней свободы) из-за их конкуренции, что приводит со временем к появлению линейчатых спектров пространственной структуры, обеспечивающих её пространственную четкость.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lighthill M.J. Contribution to the theory of waves in nonlinear dispersive system //J. Inst. Math. Appl.- 1965.-Vol.1, №2.- P. 269-306.
2. Valeo E.J. and Olerman C.R. Model of Parametric Excitation by an Imperfect Pump //Phys. Rev. Lett. – 1973. - Vol.30, №21. - P. 1035-1038.
3. Thomson J.J. and Karush J.I. Effect of finite-bandwidth Driver on the Parametrical Instability //The Physics of Fluids. – 1974. – Vol.17, №8. – P. 1608–1613.
4. Воробьев В.М., Куклин В.М. О механизме возникновения пространственных структур в диссипативных неравновесных средах //Письма в ЖТФ. – 1987. – Т.13, №22. – С. 1354– 1360.
5. Куклин В.М. Роль поглощения и диссипации энергии в формировании пространственных нелинейных структур в неравновесных средах //Украинский физический журнал. Обзоры. – 2004. – Т.1, №1. – С. 49–81.

THE SIMULATION OF THE DEVELOPMENT OF THE FINITE-AMPLITUDE WAVE MODULATION INSTABILITY IN THE NONLINEAR MEDIUM

E.V. Belkin, V.M. Kuklin

Kharkov State University, Svobody Square, 4, Kharkov, 61077, Ukraine

The process of the development of the modulation instability in wave medium near the instability threshold is studied using the numerical methods. The dependence of the excited spectrum energy and its spectral width on the level of energy absorption in a medium is found out. The pattern of the wave packet forming and the process of the instability spectrum narrowing are discussed.

KEY WORDS: finite-amplitude wave, high level of the energy absorption, modulation instability, small exceeding of excitation threshold.

