

К РАВНОВЕСИЮ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ЖИДКИХ ДИЭЛЕКТРИКОВ,
РАСПОЛОЖЕННЫХ МЕЖДУ ДВУМЯ ВЕРТИКАЛЬНЫМИ КОАКСИАЛЬНЫМИ
ЗАРЯЖЕННЫМИ ЦИЛИНДРАМИ

И. И. ИЕВЛЕВ

(Харьков)

Уравнения, описывающие равновесие системы, и критерий устойчивости получены из принципа минимума свободной энергии системы [1-4].

Предполагаем, что граница раздела жидкостей Γ и потенциал электрического поля в равновесии обладают осевой симметрией, угол смачивания жидкостями цилиндров равен 90° . В цилиндрической системе координат (r, φ, z) (ось z совпадает с осью цилиндров) зададим Γ уравнением $z=f(r)$. Тогда уравнения, описывающие равновесие системы, будут иметь вид

$$\frac{f''}{(1+f'^2)^{3/2}} + \frac{f'}{r(1+f'^2)^2} - \text{Bo} f + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{8\pi} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 1 \right) \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} - f' \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right)^2 (1+f'^2)^{-1} \right\} + c = 0 \text{ на } \Gamma$$

$$f'(r_0) = f'(r_1) = 0, \quad \int_{r_0}^{r_1} r f \, dr = 0$$

$$\Delta \Phi_k = 0 \quad \text{в } \Omega_k \quad (k=1, 2)$$

$$\Phi_2 - \Phi_1 = 0, \quad \varepsilon_2 \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} - f' \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right) = \varepsilon_1 \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} - f' \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right) \text{ на } \Gamma$$

$$\Phi_k(r_0, z) = U, \quad \Phi_k(r_1, z) = 0$$

$$\Omega_1 = \{r_0 < r < r_1, 0 \leq \varphi < 2\pi, f(r) < z < \infty\}$$

$$\Omega_2 = \{r_0 < r < r_1, 0 \leq \varphi < 2\pi, -\infty < z < f(r)\}$$

$$\Gamma = \{r_0 < r < r_1, 0 \leq \varphi < 2\pi, z = f(r)\}$$

$$\text{Bo} = (\rho_2 - \rho_1) g (R_1 - R_0)^2 \sigma^{-1}$$

Критерий устойчивости равновесия будет совпадать с условием положительности наименьшего собственного значения следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} & - \left[\frac{1}{1+f'^2} \frac{\partial^2 N}{\partial r^2} + \frac{1+f'^2 - r f' f''}{r(1+f'^2)^2} \frac{\partial N}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 N}{\partial \varphi^2} \right] + \\ & + aN + \frac{1}{4\pi(1+f'^2)} \left\{ \varepsilon_2 \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} - f' \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right) \left[\frac{\partial \psi_2}{\partial z} - \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \right. \right. \\ & \left. \left. - f' \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial r} - \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right) \right] - \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \left(\varepsilon_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial r} - \varepsilon_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right) \right\} + \mu = \\ & = \lambda N \text{ на } \Gamma, \quad \frac{\partial N}{\partial r} \Big|_{r=r_0, r_1} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^{r_1} r N \sqrt{1+f'^2} dr d\varphi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^{r_1} r N^2 \sqrt{1+f'^2} dr d\varphi = 1 \\
 & \Delta \psi_k = 0 \quad \text{в } \Omega_k \\
 & \psi_2 - \psi_1 = \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 1 \right) \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} - f' \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right) \frac{N}{\sqrt{1+f'^2}} \quad \text{на } \Gamma \\
 & \left[\varepsilon_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial z} - \varepsilon_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - f' \left(\varepsilon_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial r} - \varepsilon_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right) \right] \sqrt{1+f'^2} = \\
 & = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \frac{\partial N}{\partial r} + \left(\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial r^2} + \frac{1+f'^2 - r f'' f'}{r(1+f'^2)} \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right) N \right] \quad \text{на } \Gamma \\
 & \psi_k(r_0, \varphi, z) = \psi_k(r_1, \varphi, z) = 0 \quad (k=1, 2) \\
 & a = a(r) = \text{Bo}(1+f'^2)^{-1/2} - f''^2(1+f'^2)^{-3} - f'^2[r(1+f'^2)]^{-1} - \\
 & - (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \left\{ \varepsilon_2 [\varepsilon_1(1+f'^2)]^{-1} [f' r^{-1} + f''(1+f'^2)^{-1}] \left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} - f' \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right]^2 + \right. \\
 & \left. + f'' \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right)^2 (1+f'^2)^{-2} \right\} (4\pi \sqrt{1+f'^2})^{-1}
 \end{aligned}$$

Здесь Ω_k — область, занимаемая k -й жидкостью; Γ — граница раздела жидкостей; Bo — число Бонда; ρ_k — плотность k -й жидкости; g — интенсивность силы тяжести; R_0, R_1 — радиусы внутреннего и внешнего цилиндров; $r_0 = R_0(R_1 - R_0)^{-1}$; $r_1 = R_1(R_1 - R_0)^{-1}$; σ — коэффициент поверхностного натяжения на Γ ; ε_k — диэлектрическая постоянная для k -й жидкости; $\Phi_k = \Phi_k(r, z)$ — потенциал электрического поля в Ω_k ; $N = N(r, \varphi)$ — отклонение поверхности Γ от равновесного положения вдоль нормали к ней; $\psi_k = \psi_k(r, \varphi, z)$ — локальное возмущение потенциала Φ_k , вызванное возмущением N поверхности Γ ; ε, μ — постоянные; λ — параметр краевой задачи (2).

Будем рассматривать случай, когда $h = (R_1 - R_0)R_0^{-1} < 1$ (h — малый параметр). Очевидно, при малых h решение задачи (1), (2) будет мало отличаться от решения аналогичной задачи для случая двух вертикальных бесконечных параллельных пластин и может быть представлено асимптотическими рядами

$$\begin{aligned}
 f &= h f_1 + h^2 f_2 + \dots, \quad \Phi_k = U(1-x) + h \Phi_{k1} + h^2 \Phi_{k2} + \dots \\
 c &= -(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) U^2 (4\pi)^{-1} + h c_1 + h^2 c_2 + \dots \\
 (3) \quad N &= (1 + h n_1 + h^2 n_2 + \dots) \cos \varphi, \quad \psi_k = (h \psi_{k1} + h^2 \psi_{k2} + \dots) \cos \varphi \\
 \lambda_k &= \text{Bo} + h \lambda_1 + h^2 \lambda_2 + \dots \quad (x = r - r_0)
 \end{aligned}$$

Используя разложения (3) и решая (1), (2) методом возмущений [5], найдем с точностью до членов более высокого порядка малости по h поверхность Γ и наименьшее собственное число краевой задачи

$$\begin{aligned}
 f &= h \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cos[\pi(2m-1)x] + \dots \\
 \lambda_k &= \text{Bo} + h^2(1+F) + \dots \\
 B_m &= U^2 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\pi^3(2m-1)^2} \left\{ \text{Bo} + [\pi(2m-1)]^2 + U^2 \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2}{4(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)} (2m-1) \right\}^{-1}
 \end{aligned}$$

На фигуре приведены графики зависимости F от величины разности потенциалов U между цилиндрами при $\epsilon_1=1$ и $\epsilon_2=10, 70, 100$. Граница устойчивости в плоскости переменных (Bo, U) определяется равенством $\lambda_*=0$: $\text{Bo}_* = -h^2(1+F)$. Из фигуры видно, что $F < 0$. Таким образом электрическое поле в данном случае оказывает дестабилизирующее воздействие на границу раздела жидких диэлектриков.

В заключение автор благодарит И. Е. Тарапова за постоянное внимание к работе.

Поступила 1 XI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Тамм И. Е. Основы теории электричества. М., «Наука», 1976.
2. Борисов И. Д. Равновесные формы поверхности намагничивающейся капиллярной жидкости. Малые колебания. Уральская конференция по применению магнитной гидродинамики в металлургии (Тез. докл.), вып. 1. Пермь, 1974.
3. Шагин В. М., Шуванов Н. И. Равновесные формы свободной поверхности жидкости в гравитационном и магнитном полях с учетом сил поверхностного натяжения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 3.
4. Беллева М. А., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д. Гидростатика в слабых силовых полях. В кн. «Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости». М., ВЦ АН СССР, 1968.
5. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М., «Мир», 1972.